Universidad de Talca
Facultad de Ingeniería
Camino Los Niches Km. 1, Curicó, CHILE

Modelos Discretos

Tarea 1

Victor Reyes Medina, Pedro González Meléndez

14 de junio de 2016

1. Lógica proposicional

1.1.

$p : \triangle$ ABC Isósceles
$q : \triangle$ ABC Equilátero
$r : \triangle$ ABC Equiangular

1. $p \to q$ Si el triángulo ABC es equilátero, entonces es isósceles.
2. $\neg p \to \neg q$ Si el triángulo ABC no es isósceles, entonces no es equiangular.
3. $q \iff r$ El triángulo ABC es equilatero si y sólo si el triángulo es equiangular.
4. $p \wedge \neg q$ Un triángulo ABC es isósceles y no equilátero.
5. $r \to p$ SI el triángulo ABC es quilátero, entonces es isósceles.

1.2.

1. $$\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$$

   Por ley de Morgan:

   $$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg p$$

p	q	$(\neg p \wedge q)$	$\neg p$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg p$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

La expresión es una tautología.

2. $$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	r
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

La expresión es satisfacible.

3. $$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

La expresión es satisfacible.

4. $$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$	$(p \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

La expresión es una tautología.

1.3.

1.

a)

$$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$$

p	q	r	p	$(q \wedge r)$	$p \to (q \wedge r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$(p \to q)$	$(p \to r)$	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

b)

$$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$$

p	q	r	$(p \vee q)$	r	$(p \vee q) \to r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$(p \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

c)

$$p \to (q \vee r) \equiv \neg r \to (p \to q)$$

p	q	r	p	$(q \vee r)$	$p \to (q \vee r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$\neg r$	$(p \to q)$	$\neg r \to (p \to q)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

2.

$$p \to (q \lor r) \equiv (p \land \neg q) \to r$$

Aplicamos sustitución de implicación en ambos lados $(x \to y) = (\neg x \lor y)$

$$\neg p \lor (q \lor r) \equiv \neg(p \land \neg q) \lor r$$

Aplicamos asocitividad en el lado izquierdo $(x \lor (y \lor z)) = ((x \lor y) \lor z)$
Y Ley de Morgan en el lado derecho $\neg(x \land y) = (\neg x \lor \neg y)$

$$(\neg p \lor q) \lor r \equiv (\neg p \lor q) \lor r$$

Se tiene en ambos lados la misma fórmula lógica, por lo que su equivalencia lógica queda demostrada

2. Lógica de primer orden

2.1.

1.

$Hora(t)$: Horario de atención (entre 09:00 y 18:00)
$AbiertaB(b)$: Bodega b abierta
$Guardar(p, b)$: Persona p guarda materiales en Bodega b
$Sacar(p, b)$: Persona p saca materiales de Bodega b
$Llave(p, b)$: Persona p tiene llaves de Bodega b
$Capataz(p)$: Persona p es capataz
$\forall b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Hora(t_a) \to AbiertaB(b))$
$\forall p \in Personas, b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Guardar(p, b, t) \iff Hora(t_a) \vee Llave(p, b))$
$\forall p \in Personas, b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Sacar(p, b, t) \iff Hora(t_a) \vee Llave(p, b))$
$\exists p \in Personas, \forall b \in Bodegas \quad (Llave(p, b) \iff Capataz(p))$

2. Se tiene:

$Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)$

$Capataz(Pedro)$

a) Demostración directa.

1. Para $p =$ Pedro, $b =$ Bodega1 y $t_a =$ 20:00.
2. $Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)$ (Axioma).
3. $\underbrace{Hora(20:00)}_{(1)} \vee \underbrace{Llave(Pedro, Bodega1)}_{(2)}$.
4. (1) es falso ya que $20:00$ no es parte de los horarios de atención.
5. De (2) se tiene que $Capataz(Pedro)$ (Axioma).
6. Finalmente, Pedro es Capataz.

b) Demostración por contradicción.

1. Para $p =$ Pedro, $b =$ Bodega1 y $t_a =$ 20:00.
2. Asumiendo $\neg(Capataz(Pedro))$ y $Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)$. Pedro no es Capataz, pero guardó materiales fuera del horario de atención.
3. Se tiene que (por equivalencia) $\neg(Llave(Pedro, Bodega1))$, Pedro no tiene las llaves de la Bodega1.
4. Reemplazando en el axioma instanciado
$Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00) \iff Hora(20:00) \vee \neg(Llave(Pedro, Bodega1))$.
5. Se sabe que $Hora(20:00) = 0$, por lo que el lado derecho de la equivalencia es falso.
6. Por implicancia, se tiene que $\neg(Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00))$, lo que entra en contradicción con lo expuesto en el paso 2.
7. Finalmente, por contradicción se demuestra que Pedro es Capataz.

2.2.

2.3.