Universidad de Talca
Facultad de Ingeniería
Camino Los Niches Km. 1, Curicó, CHILE

Modelos Discretos

Tarea 1

Victor Reyes Medina, Pedro González Meléndez

16 de junio de 2016

1. Lógica proposicional

1.1.

p :△ ABC Isósceles
q :△ ABC Equilátero
r :△ ABC Equiangular

1. $p \rightarrow q$ Si el triángulo ABC es equilátero, entonces es isósceles.
2. $\neg p \rightarrow \neg q$ Si el triángulo ABC no es isósceles, entonces no es equiangular.
3. $q \iff r$ El triángulo ABC es equilatero si y sólo si el triángulo es equiangular.
4. $p \wedge \neg q$ Un triángulo ABC es isósceles y no equilátero.
5. $r \rightarrow p$ Si el triángulo ABC es equilátero, entonces es isósceles.

1.2.

1.

$$\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg p$$

Por ley de Morgan:

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg p$$

p	q	$(\neg p \wedge q)$	$\neg p$	$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg p$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	0	0	1

La expresión es una tautología.

2.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r$$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	r
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

La expresión es satisfacible.

3.

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

La expresión es satisfacible.

4.

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r))$	$(p \rightarrow r)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

La expresión es una tautología.

1.3.

1.

a)

$$p \to (q \land r) \equiv (p \to q) \land (p \to r)$$

p	q	r	p	$(q \land r)$	$p \to (q \land r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$(p \to q)$	$(p \to r)$	$(p \to q) \land (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

b)

$$(p \lor q) \to r \equiv (p \to r) \land (q \to r)$$

p	q	r	$(p \lor q)$	r	$(p \lor q) \to r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$(p \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to r) \land (q \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

c)

$$p \to (q \lor r) \equiv \neg r \to (p \to q)$$

p	q	r	p	$(q \lor r)$	$p \to (q \lor r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

p	q	r	$\neg r$	$(p \to q)$	$\neg r \to (p \to q)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

Las fórmulas son lógicamente equivalentes.

2.

$$p \to (q \lor r) \equiv (p \land \neg q) \to r$$

Aplicamos sustitución de implicación en ambos lados $(x \to y) = (\neg x \lor y)$

$$\neg p \lor (q \lor r) \equiv \neg(p \land \neg q) \lor r$$

Aplicamos asocitividad en el lado izquierdo $(x \lor (y \lor z)) = ((x \lor y) \lor z)$
Y Ley de Morgan en el lado derecho $\neg(x \land y) = (\neg x \lor \neg y)$

$$(\neg p \lor q) \lor r \equiv (\neg p \lor q) \lor r$$

Se tiene en ambos lados la misma fórmula lógica, por lo que su equivalencia lógica queda demostrada.

2. Lógica de primer orden

2.1.

1. Se definen las funciones predicativas:

$$Hora(t) : \text{Horario de atención (entre 09:00 y 18:00)}$$
$$AbiertaB(b) : \text{Bodega b abierta}$$
$$Guardar(p, b) : \text{Persona p guarda materiales en Bodega b}$$
$$Sacar(p, b) : \text{Persona p saca materiales de Bodega b}$$
$$Llave(p, b) : \text{Persona p tiene llaves de Bodega b}$$
$$Capataz(p) : \text{Persona p es capataz}$$

Se tienen las siguientes inferencias:

$\forall b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Hora(t_a) \rightarrow AbiertaB(b))$

$\forall p \in Personas, b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Guardar(p, b, t) \iff Hora(t_a) \vee Llave(p, b))$

$\forall p \in Personas, b \in Bodegas$ y $t_a =$ hora actual $\quad (Sacar(p, b, t) \iff Hora(t_a) \vee Llave(p, b))$

$\exists p \in Personas, \forall b \in Bodegas \quad (Llave(p, b) \iff Capataz(p))$

2. Se tiene:

$$\frac{Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)}{Capataz(Pedro)}$$

a) Demostración directa.

1. Instanciación global de: $p =$ Pedro, $b =$ Bodega1 y $t_a =$ 20:00.
2. $Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)$.
3. $\underbrace{Hora(20:00)}_{(1)} \vee \underbrace{Llave(Pedro, Bodega1)}_{(2)}$.
4. (1) es falso ya que $20:00$ no es parte de los horarios de atención.
5. De (2) se sabe que debe ser verdadero, se tiene que $Llave(Pedro, Bodega1)$ implica que $Capataz(Pedro)$.
6. Finalmente, Pedro es Capataz.

b) Demostración por contradicción.

1. Para $p =$ Pedro, $b =$ Bodega1 y $t_a =$ 20:00.
2. Asumiendo $\neg(Capataz(Pedro))$ y $Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00)$. Pedro no es Capataz, pero guardó materiales fuera del horario de atención.
3. Se tiene que (por equivalencia) $\neg(Llave(Pedro, Bodega1))$, Pedro no tiene las llaves de la Bodega1.
4. Reemplazando en el axioma instanciado
$Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00) \iff Hora(20:00) \vee \neg(Llave(Pedro, Bodega1))$.
5. Se sabe que $Hora(20:00)$ es falso, por lo que el lado derecho de la equivalencia es falso.
6. Por implicancia, se tiene que $\neg(Guardar(Pedro, Bodega1, 20:00))$, lo que entra en contradicción con lo expuesto en el paso 2.
7. Finalmente, por contradicción se demuestra que Pedro es Capataz.

2.2.

En términos de lógica de primer orden:

1. $\exists x \quad [C(x) \wedge PA(x) \wedge M(x)]$
2. $\exists x \quad [C(x) \wedge SA(x) \wedge \neg M(x)]$
3. $\forall x \quad [C(x) \rightarrow (M(x) \vee F(x))]$
4. $\neg\exists x \quad [C(x) \wedge PG(x) \wedge F(x)]$
5. $\forall x \quad [SA(x) \rightarrow (F(x) \vee E(x))]$

Valores de verdad:

1. Verdadero, ya que sí existen estudiantes que estén en el curso, sean de primer año y pertenezcan a la carrera de Matemáticas (4 estudiantes).
2. Verdadero, puesto que sí existen estudiantes que estén en el curso, que sean de segundo año y no pertenezcan a la carrera de Matemáticas (16 estudiantes).
3. Falso, debido a que en el curso existen dos estudiantes de primer año de Ingeniería Eléctrica y cuatro más de segundo año de la misma carrera.
4. Verdadero, ya que no existe ningún estudiante de postgrado de Física en el curso.
5. Verdadero, por que existen estudiantes que sean de segundo año y pertenezcan a las carreras Física y Matemáticas.

2.3.

$$\begin{array}{c} \text{Todos los lógicos son reflexivos y estudiosos.} \\ \text{Algunos lógicos son filósofos.} \\ \hline \text{Algunas personas reflexivas son filósofos.} \end{array}$$

Funciones de predicado:

$$\begin{aligned} L(x) &: \text{ Es lógico} \\ R(x) &: \text{ Es reflexivo} \\ E(x) &: \text{ Es estudioso} \\ F(x) &: \text{ Es filósofo} \end{aligned}$$

Se tienen las siguientes inferencias:

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall x & [L(x) \rightarrow (R(x) \wedge E(x))] \\ 2. & \exists x & [L(x) \wedge F(x)] \\ \hline & \exists x & [R(x) \wedge F(x)] \end{array}$$

Demostración directa
Aplicando derivaciones:

3. $L(w) \rightarrow (R(w) \wedge E(w))$ Ejemplificación universal en w de (1).
4. $L(w) \wedge F(w)$ Ejemplificación universal en w de (2).
5. $C_1 = L(w)$ y $C_2 = F(w)$ Eliminación del *and* en (4).
6. $\begin{array}{c} L(w) \rightarrow (R(w) \wedge E(w)) \\ L(w) \\ \hline R(w) \wedge E(w) \end{array}$ Aplicando *Modus Ponens* de (3) y C_1.
7. $C_3 = R(w)$ y $C_4 = E(w)$ Eliminación del *and* en (6).
8. $\begin{array}{c} R(w) \\ F(w) \\ \hline R(w) \wedge F(w) \end{array}$ Introducción del *and* entre C_2 y C_3.
9. $\exists x[R(w) \wedge F(w)]$ Generalización de la existencia en (8).
10. En (9) se obtiene que la inferencia es válida para las proposiciones iniciales.

Demostración por refutación

$$
\begin{array}{ll}
1. & \forall x \quad [L(x) \rightarrow (R(x) \wedge E(x))] \\
2. & \exists x \quad [L(x) \wedge F(x)] \\
\hline
 & \exists x \quad [R(x) \wedge F(x)]
\end{array}
$$

Para (1), normalizar a forma clausal:

1. Eliminación de $\rightarrow$.
   $\forall x \quad [\neg L(x) \vee (R(x) \wedge E(x))]$
2. Reducción de $\neg$
   Idem.
3. Estandarización de variables.
   Idem.
4. Skolemización.
   Idem.
5. Mover cuantificadores al principio.
   Idem.
6. Eliminación de cuantificadores.
   $\neg L(x) \vee (R(x) \wedge E(x))$
7. Distribución de $\vee$ sobre $\wedge$
   $(\neg L(x) \vee R(x)) \wedge (\neg L(x) \vee E(x))$
8. Separación de la conjunción.
   $C_1 = \neg L(x) \vee R(x)$
   $C_2 = \neg L(x) \vee E(x)$
9. Estandarización de variable.
   $C_1 = \neg L(x) \vee R(x)$
   $C_2 = \neg L(y) \vee E(y)$

Para (2), normalizar a forma clausal:

1. Eliminación de $\rightarrow$.
   Idem.
2. Reducción de $\neg$
   Idem.
3. Estandarización de variables.
   Idem.
4. Skolemización.
   $L(c) \wedge F(c)$
5. Mover cuantificadores al principio.
   Idem.
6. Eliminación de cuantificadores.
   Idem.
7. Distribución de $\vee$ sobre $\wedge$
   Idem.
8. Separación de la conjunción.
   $C_3 = L(c)$
   $C_4 = F(c)$
9. Estandarización de variable.
   $C_3 = L(z)$
   $C_4 = F(w)$

Ahora, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \neg L(x) \vee R(x) \\
C_2 &= \neg L(y) \vee E(y) \\
C_3 &= L(z) \\
C_4 &= F(w)
\end{aligned}
$$

Por demostrar que:

$$\exists x \quad [R(x) \wedge F(x)]$$

Por refutación, negar la hipótesis:

$$C_5 = \neg\exists x \quad [R(x) \wedge F(x)]$$

$$C_5 = \forall x \quad \neg[R(x) \wedge F(x)]$$

Aplicando normalización a forma clausal para eliminar cuantificadores (pasos omitidos).

$$C_5 = \neg R(x) \vee \neg F(x)$$

Haciendo resoluciones:

1. Resolución entre C_1 y C_5.

$$\frac{\begin{array}{c}\neg L(x) \vee R(x) \\ \neg R(x) \vee \neg F(x)\end{array}}{C_6 = \neg L(x) \vee \neg F(x)}$$

2. Resolución entre C_6 y C_4.

$$\frac{\begin{array}{c}\neg L(x) \vee \neg F(x) \\ F(w)\end{array}}{C_7 = \neg L(x)}$$

3. Resolución entre C_7 y C_3.

$$\text{Contradicción}\ \frac{\begin{array}{c}\neg L(x) \\ L(x)\end{array}}{\square}$$

Se produce que para $A : \exists x \quad [R(x) \wedge F(x)]$, $\neg A$ hace insatisfacible las inferencias. Por lo tanto, A hace que las proposiciones sean satisfacibles, demostrando la inferencia.