



## **MODELAGEM NUMÉRICA DE ONDAS SÍSMICAS**

**RELATÓRIO 01: DIFERENÇAS FINITAS EM UM REGIME TRANSIENTE 1D EM  
UMA BARRA POR MEIO DA FORMULAÇÃO EXPLÍCITA.**

**PROFESSOR: LEANDRO DI BARTOLO**

**ALUNO: VICTOR RIBEIRO CARREIRA**

# Introdução

O estudo da energia em trânsito na forma de calor compreende uma das áreas mais fundamentais da ciência e é apresentado como foco principal deste relatório. Os problemas que envolvem transferência térmica causada por diferenças de temperatura entre duas ou mais regiões podem ser descritos por equações diferenciais parciais. Estas determinam a temperatura em qualquer lugar ou momento de um objeto de estudo e são denominadas equações de calor.

As equações diferenciais são em grande parte primordiais para modelar a maioria dos fenômenos naturais. Com elas podemos determinar o comportamento futuro de diversos problemas com base na variação dos valores presentes. Contudo, a resolução de equações diferenciais parciais pode ser complexa dificultando a obtenção de soluções exatas por meio dos métodos analíticos existentes.

Os métodos numéricos resolvem essa lacuna de soluções analíticas complexas. Este conjunto de métodos reduzem um problema contínuo, com um número infinito de soluções, em um problema discreto, com um número finito de variáveis, que possui uma solução computacional. Este processo de *discretização* é utilizado em diversos métodos numéricos, tais como: o método das diferenças finitas, método dos volumes finitos, método dos elementos de contorno, e, o método dos elementos finitos (Melo, 2011).

Este relatório aborda somente o método das diferenças finitas explícito para um caso unidimensional.

## Objetivo

O objetivo deste trabalho é analisar a transferência de calor no decorrer do tempo em dois problemas que envolvem condução de calor unidimensional em uma barra.

O primeiro deles é reproduzir o exemplo mostrado, em aula, onde uma barra é discretizada com 6 pontos. Rodando tempo suficiente para encontrar a solução de equilíbrio. E comparar esses resultados qualitativamente com os resultados mostrados, no exemplo de aula.

O segundo é aumentar o número de pontos na direção espacial  $x$  (diminuindo o espaçamento  $\Delta x$ ), mantendo o mesmo problema físico. Ou seja, tanto as dimensões quanto as propriedades físicas devem permanecer as mesmas. O critério de estabilidade numérica  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , escolhendo um intervalo de tempo  $\Delta t$  apropriado. O  $\lambda$  adotado dever ser igual ao do item anterior.

E, por final, comparar a diferença entre os erros obtidos entre as duas soluções numéricas,

obtidas pelo método das diferenças finitas na forma explícita, com a solução analítica.

## Fundamento teórico

### A equação do calor

A equação difusão de calor é uma equação diferencial parcial parabólica <sup>1</sup> de segunda ordem. Esta equação determina o campo de temperaturas em um dado meio. A relação física fundamental descrita por esta equação é dada pelo equilíbrio da taxa de calor que entra, em qualquer parte de um corpo, é igual a taxa de absorção de calor naquela parte do corpo, seja este 1D, 2D ou 3D.

A equação fundamental pode ser expressa da forma (Eq. 1)

$$\frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k \frac{\partial u}{\partial z}) + \dot{q} = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

Onde:

$k$ , condutividade térmica ( $W/mK$ )

$\rho$ , densidade ( $Kg/m$ )

$s$ , calor específico do material ( $J/kgK$ )

$u$ , temperatura ( $K$ )

$\dot{q}$ , é a taxa na qual a energia é gerada por undidade de volume no meio ( $W/m$ )

A solução da Eq. 1 gera um campo de temperaturas  $u = u(x, y, z, t)$ . No caso 1D, este campo pode ser descrito como  $u = u(x, t)$ . Portanto a Eq. 1 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x}) + \dot{q} = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2)$$

No caso em que não há uma taxa de geração de energia associada à taxa de geração de energia o termo  $\dot{q} = 0$ , logo a Eq. 2 poder ser descrita de acordo com a Eq 3.

$$\frac{\partial}{\partial x}(k \frac{\partial u}{\partial x}) = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3)$$

Ao se considerar a condutividade térmica  $k$  constante a Eq. 3 pode ser reescrita conforme a Eq. 4

---

<sup>1</sup>Dada EDP linear na forma genérica:  $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G(x, y)$  denomina-se parabólica quando o termo  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ .

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4)$$

Onde  $\alpha^2$  é a difusividade térmica que é um parâmetro que depende apenas do material da barra e seus valores são tabelados em unidades de comprimento por tempo<sup>2</sup>.

## Diferenças finitas progressivas

A ideia primordial do método das diferenças finitas é transformar a resolução de equações diferenciais em um sistema de equações algébricas substituindo as derivadas por diferenças (Melo, 2011). Ou seja, a equação diferencial que se deseja aproximar pode ser numericamente equilibrada em cada ponto discreto do modelo. Assim, o domínio é discretizado através de uma malha regularmente espaçada em cada uma das dimensões do problema, sendo as funções e propriedades de interesse consideradas apenas nestes pontos discretos (Bartolo, 2010).

No caso de uma barra 1D, a discretização segue de acordo com o esquemático apresentado na Fig. 1.

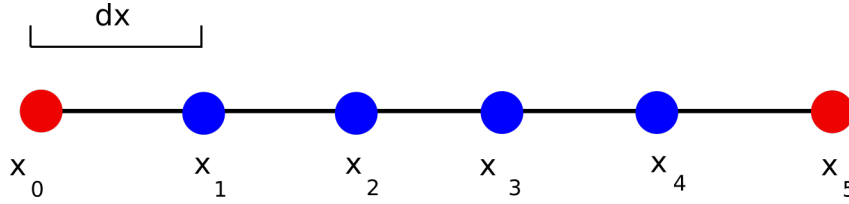


Figura 1: Discretização de uma malha unidimensional com espaçamento constante  $dx$ . Os pontos vermelhos representam pontos com temperatura constante e conhecidas e os pontos azuis representam os pontos com as temperaturas a serem determinadas.

A Fig. 2 apresenta a definição geométrica de uma derivada por diferença finita progressiva em comparação com a derivada analítica.

---

<sup>2</sup>Observação:  $\alpha^2 \left[ \frac{L^2}{T} \right]$

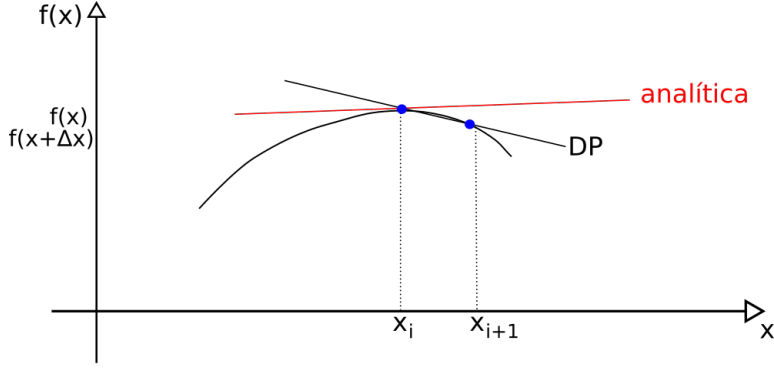


Figura 2: DP - Diferença Finita Progressiva

Considerando  $f(x)$  e suas derivadas como funções contínuas pode-se expandir a função através da série de Taylor em torno do ponto  $x_i$ , através da seguinte da Eq. 5.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n} \bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n \quad (5)$$

Onde a variável  $x$  pode ser considerada tanto uma variação temporal quanto espacial.

Para obter-se o operador diferença finita progressiva expande-se em diferentes pontos ao entorno de  $x_i$ , que é o ponto discreto na malha unidimensional, e  $\Delta x_i$  representa o espaçamento da malha (Bartolo, 2010). Desta forma temos a Eq. 6.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f(x_i)}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 f(x_i)}{dx^4} + \dots \quad (6)$$

Subtraíndo-se o  $f(x_i)$  de  $f(x_i + 1)$ , truncando-se o primeiro termo da série e isolando a derivada primeira, obtemos a derivada primeira, Eq 7.

$$\frac{df(x_i)}{dx} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (7)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio ao truncarmos diferentes termos da expansão em série de Taylor obtemos as derivadas de ordens superiores. Para o caso específico da problemática da difusão de calor precisamos da derivada segunda que é fornecida pela Eq. 8.

$$\frac{d^2 f(x_i)}{dx^2} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i) + f(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (8)$$

Aplicando as Eq. 7 e a Eq. 8 na Eq. 4, obtemos a solução explícita da equação de calor por diferenças finitas, Eq.9.

$$T_i^{l+1} = T_i^l + \lambda(T_{i+1}^l - 2T_i^l + T_{i-1}^l) \quad (9)$$

## Resultados

### Caso I

Reproduziu-se o exemplo mostrado onde uma barra é discretizada com 6 pontos, Fig 1. Rodando tempo suficiente para encontrar a solução de equilíbrio. O parâmetros utilizados foram os mesmos do exemplo 2.1 das notas de aula, que podem ser vistos na Tab. 1.

Tabela 1: Dados de entrada do programa Trab01.f95

Parâmetros do modelo	Caso I
Dimensão da barra ( $x$ )	10.0
Condutividade térmica ( $k$ )	0.835
Discretizacao temporal ( $\Delta t$ )	0.1
Número de pontos na barra ( $np$ )	6
Número de iterações ( $Lt$ )	5000

Os gráficos, na Fig. 3, mostram o resultado do experimento I para um total de 5000 iterações.

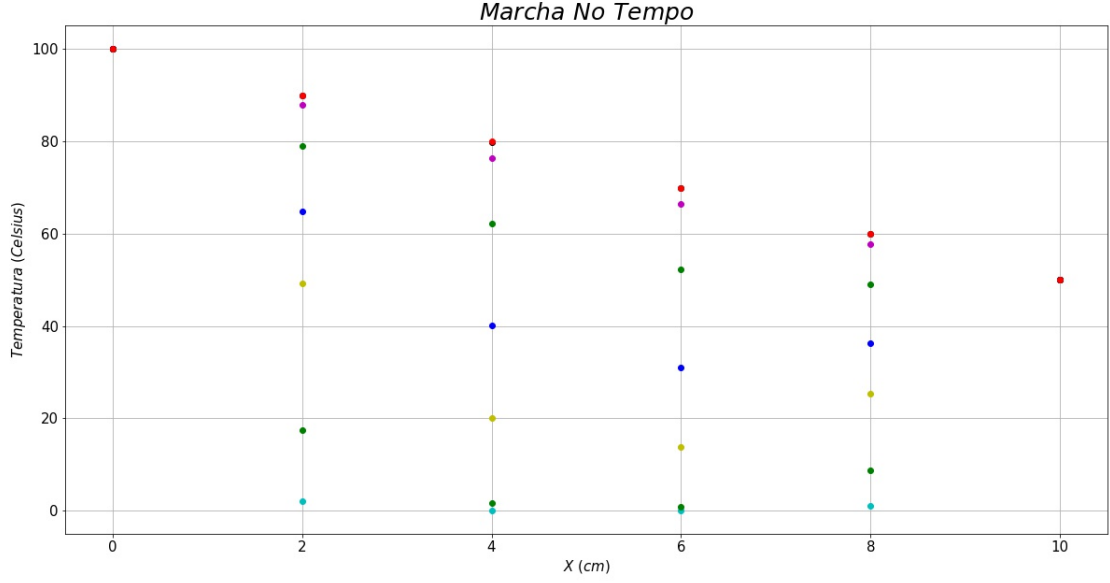


Figura 3: Os pontos em azul claro, próximos do eixo  $y = 0$ , representam os valores de temperatura na primeira iteração do tempo. Os pontos em verde escuro representam a iteração de número 10. Pontos em amarelo a iteração 50. Pontos em azul escuro a iteração 100. Pontos em verde a iteração 200. Em roxo a iteração 400. Em preto, próximo ao vermelho a iteração 800. E em vermelho a iteração 1000.

Os pontos em vermelho, na Fig. 3, apontam a solução de equilíbrio.

## Caso II

O caso de estudo II aumentou-se o número de pontos na direção espacial  $x$ , diminuindo o espaçamento  $\Delta x$ , mantendo os demais parâmetros físicos iguais ao caso de estudo anterior. O intervalo de tempo  $\Delta t$  foi modificado respeitando-se o critério de estabilidade numérica, utilizando um  $\lambda = 1/2$ .

A Tab. 2 apresenta os valores de entrada para o modelo experimental 2 mantendo em vista o critério de estabilidade.

Tabela 2: Dados de entrada do programa Trab01.f95

Parâmetros do modelo	Caso II
Dimensão da barra ( $x$ )	10.0
Condutividade térmica ( $k$ )	0.835
Discretizacao temporal ( $\Delta t$ )	0.01
Número de pontos na barra ( $np$ )	50
Número de iterações ( $Lt$ )	5000

Os resultados obtidos para o caso 2 estão apresentados na Fig. 4.

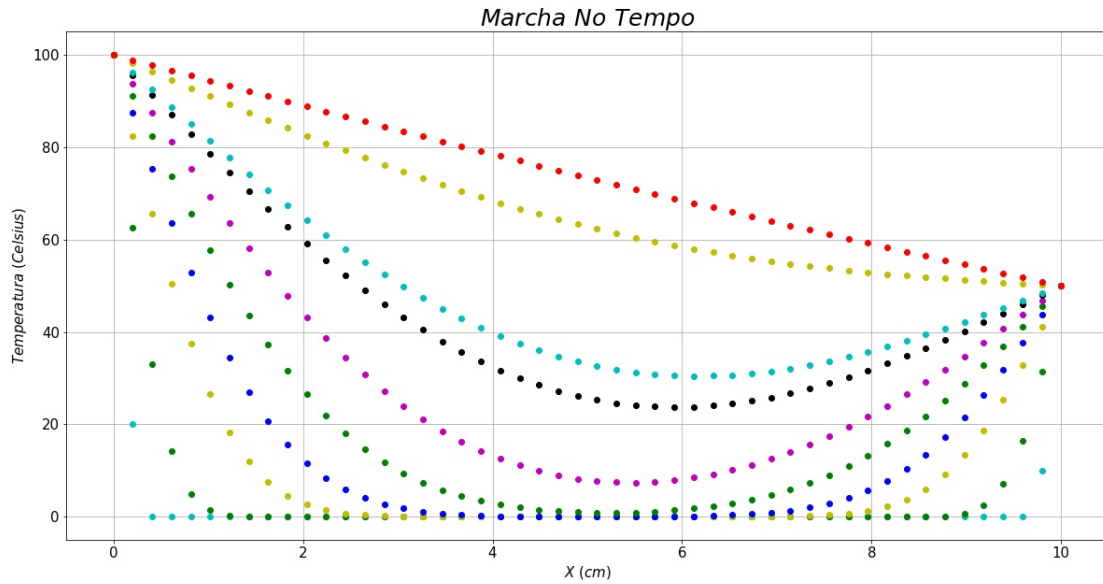


Figura 4: Os pontos em azul claro, próximos do eixo  $y = 0$ , representam os valores de temperatura na primeira iteração do tempo. Os pontos em verde escuro representam a iteração de número 10. Pontos em amarelo a iteração 50. Pontos em azul escuro a iteração 100. Pontos em verde a iteração 200. Em roxo a iteração 400. Em preto, próximo ao azul claro a iteração 800. Em azul claro a iteração 1000. Em amarelo a iteração 2500. E em vermelho a iteração 5000.

Nota-se que para o caso II a estabilidade térmica foi alcançada aumentando-se o número de iterações.



### Caso III

O caso experimental terceiro é uma comparação entre os resultados obtidos nos casos I e II, anteriores, com uma solução analítica de uma reta que passa pelos pontos de temperatura  $100^{\circ}\text{C}$  e  $50^{\circ}\text{C}$ , que represenam as condições de contorno de Dirichlet. Os resultados deste experimento são apresentados na Fig. 5.

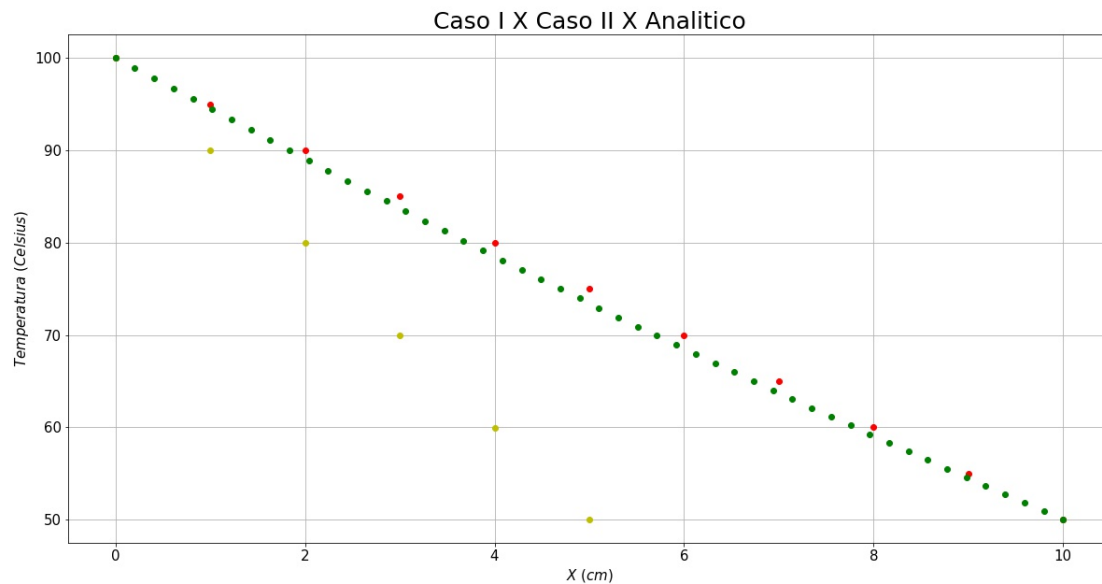


Figura 5: Os pontos em amarelo representam o resultado para estabilidade térmica, no caso I. Os pontos em verde apresentam o resultado para a estabilidade térmica no caso II. E os pontos em vermelho apresentam o resultado da estabilidade térmica calculada analiticamente.

Amostrou-se o ponto 4 da barra e calculou-se o erro relativo à solução analítica. Os resultados estão apresentados na Tab. 3.

Tabela 3: Erros relativos em uma amostragem pontual.

Erros relativos ( $^{\circ}\text{C}$ )	Ponto 4
Caso I	20.0
Caso II	1.0

## Discussão dos resultados

E notável que no caso I o tempo de máquina relativo é mais baixo comparado caso II, em outras palavras chega-se à situação de estabilidade, ou seja o ponto de equilíbrio térmico mais rapidamente (vide Tab. 1), na milésima iteração. Isso se deve em parte pela maneira como foi feita a discretização da barra, no primeiro experimento, aonde foram utilizado somente 6 pontos (vide Fig. 3).

Já no caso II, a discretização foi alterada aumentando-se o número de pontos na barra para 50 pontos, e mantendo-se o seu comprimento constante (vide 2). Nessa situação experimental, para atender a situação de estabilidade térmica, foi imperativo o aumento do número de iterações para 5000 (vide Fig. 2). Isto implica, diretamente em um aumento do custo computacional.

O caso III apresenta a comparação dos dois resultados de estabilidade térmica anteriores com o cálculo da solução analítica (vide Fig. 5). É possível perceber que o erro relativo é muito maior no caso I devido a discretização adotada. No caso II, embora o aumento da discretização tenha causado um aumento no custo computacional ela propicionou uma melhora considerável no resultado da estabilidade térmica (vide 3), diminuindo o erro relativo.

# Referências Bibliográficas

- Bartolo, L. (2010). *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistemas de Equações em Segunda Ordem*. PhD thesis.
- Melo, K. J. (2011). *Aplicação do método das diferenças finitas explícito na solução da equação do calor para o caso transiente e unidimensional*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ARIDO CAMPOS ANGICOS.