



Fonte: luisdev.com.br

Estruturas de Dados

CONJUNTOS DISJUNTOS – Unidade 13

Prof. Kenia Kodel

Pontos Trabalhados na Disciplina

- (Plano da Disciplina) Ementa, Metodologia, Avaliação
- Introdução a Estruturas de Dados
- Linguagem C
- Variáveis Dinâmicas
- Arquivos Binários
- Eficiência de Algoritmos (Complexidade, Notação O)
- Listas Lineares: Sequenciais, Encadeadas, Dinâmicas
- Listas Lineares Restritas: Pilhas e Filas
- Hashing
- Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Pesquisa
- Árvores Balanceadas AVL
- Filas de Prioridade e Heaps

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

A implantação das ferrovias em *Valápagus*, imensa ilha recém descoberta no oceano *Marcífico*, está sendo estimulada por capitais privados que almejam um sistema de transporte capaz de levar aos centros urbanos e portos da ilha toda a produção agrícola do interior.

Entretanto, o sistema não está totalmente integrado. Na ilha há um total de 18 cidades, numeradas de 1 a 18, e nestas cidades, há 3 malhas ferroviárias (grupos de ferrovias); sendo as cidades 3, 5 e 9 interligadas numa malha; as cidades 4, 7, 11 e 13 em outra; e as cidades 1, 2, 6 e 8 em uma terceira malha.

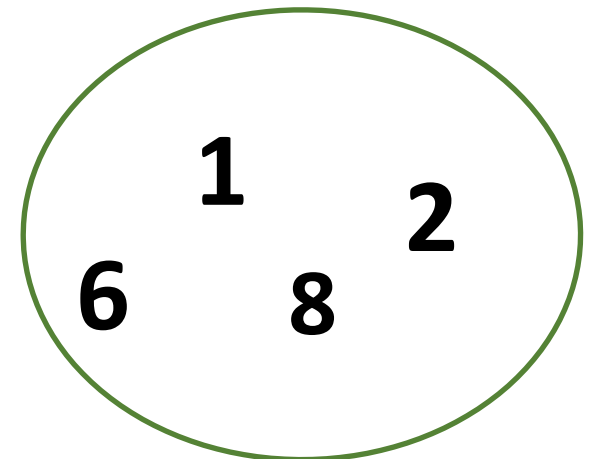
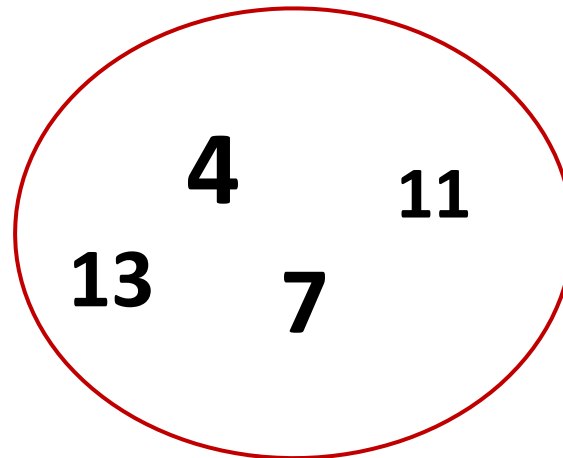
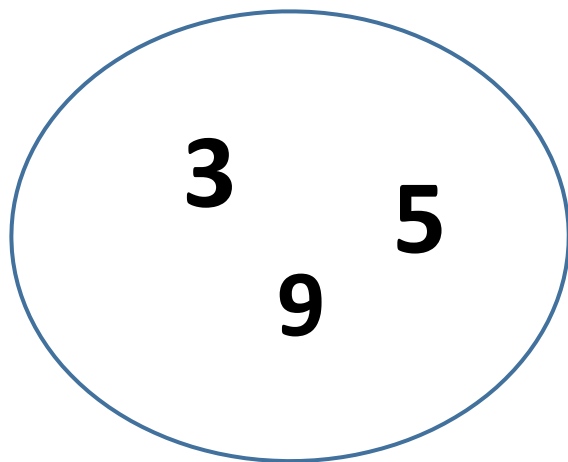


SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

O sistema não está totalmente integrado. Há um total de 18 cidades, numeradas de 1 a 18, e destas cidades, há 3 malhas ferroviárias; sendo as cidades **3, 5 e 9** interligadas numa malha; as cidades **4, 7, 11 e 13** em uma outra; e as cidades **1, 2, 6 e 8** em uma terceira malha.

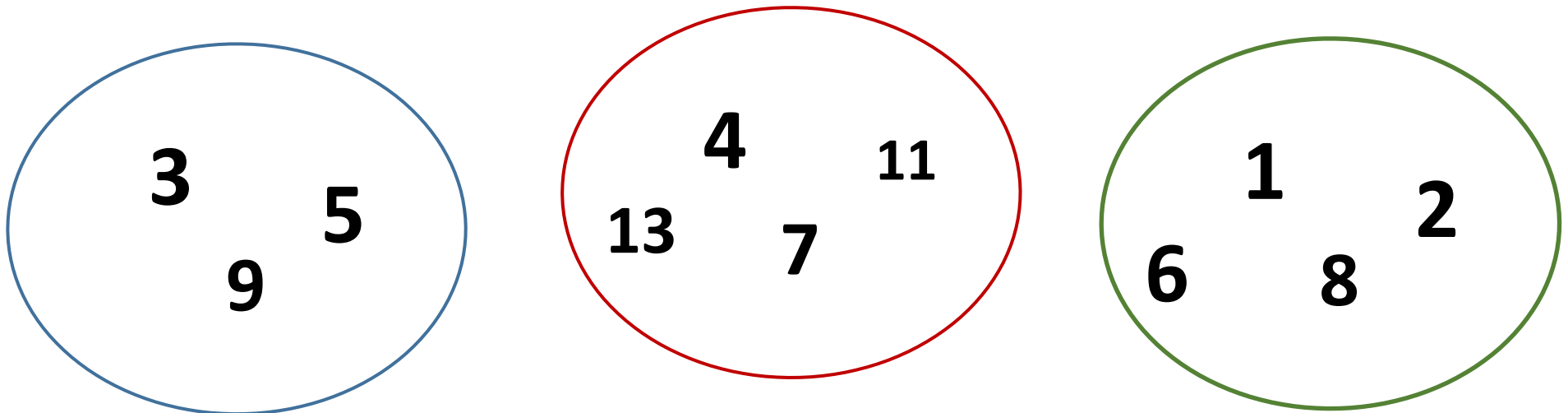
As malhas ferroviárias podem ser, então, modelados nos 3 conjuntos de cidades que seguem:



SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Como cada malha ferroviária tem acesso a diferentes portos e centros urbanos, uma operação recorrente é identificar a que malha pertence uma dada cidade. Por exemplo, dada 5, é preciso identificar que esta pertence à malha “azul”. Dada a cidade 11, é preciso identificar que esta pertence à malha “vermelha”. Dada 10, é preciso identificar que esta não tem ferrovia.

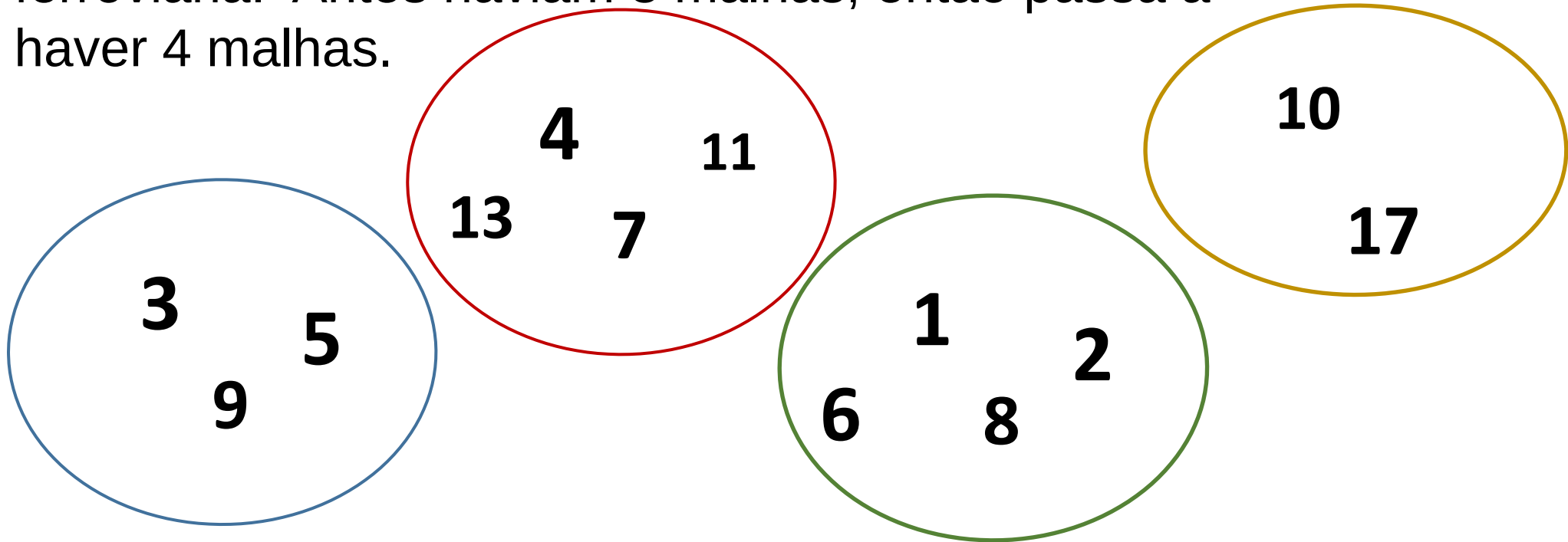


SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso/possível compor novas malhas.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composta uma nova malha ferroviária. Antes haviam 3 malhas, então passa a haver 4 malhas.

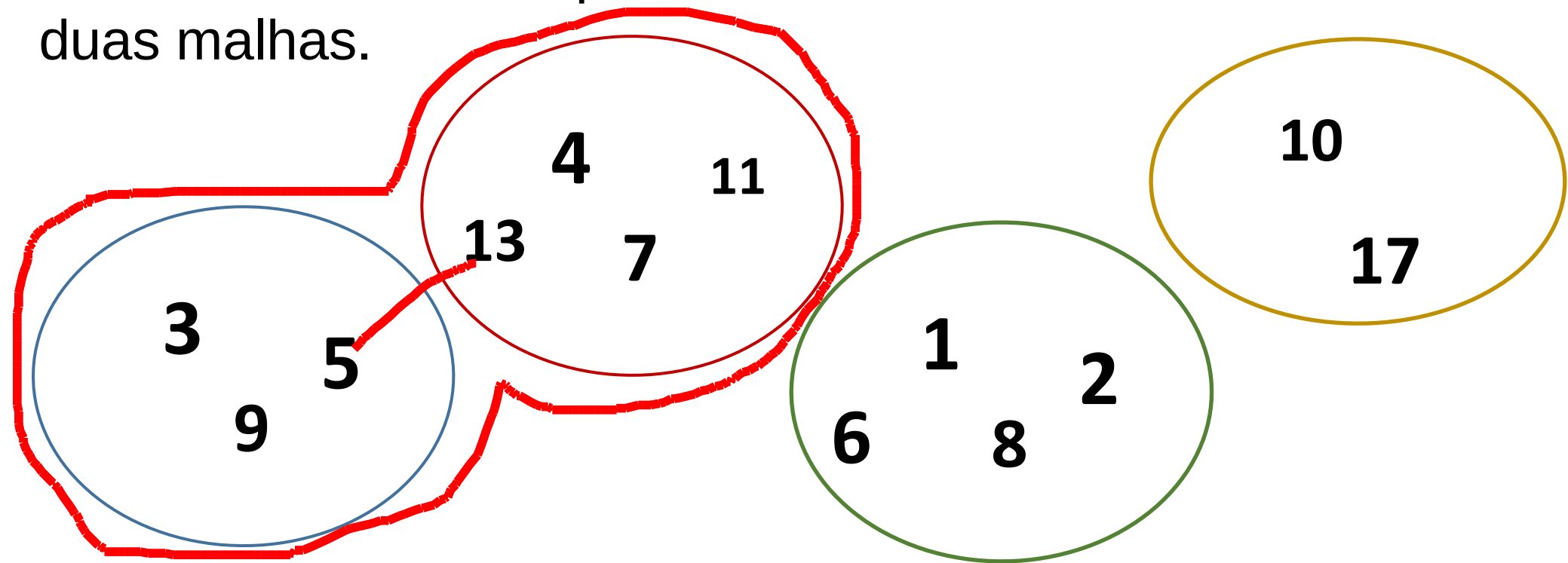


SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar novas malhas.

Outro exemplo é a construção de ferrovia entre as cidades 5 e 13, o que levaria à união de duas malhas.

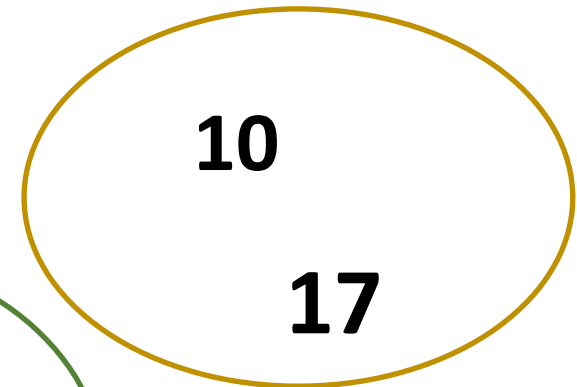
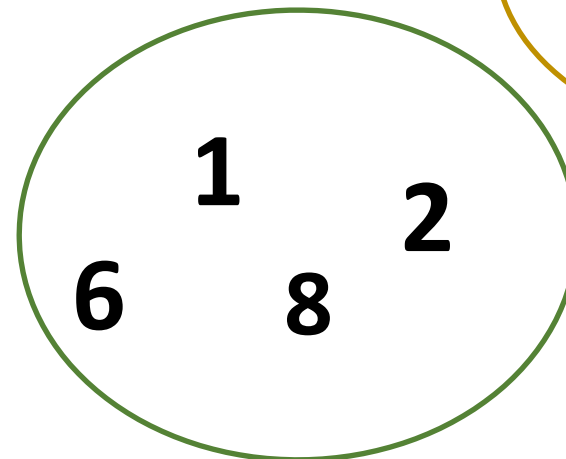
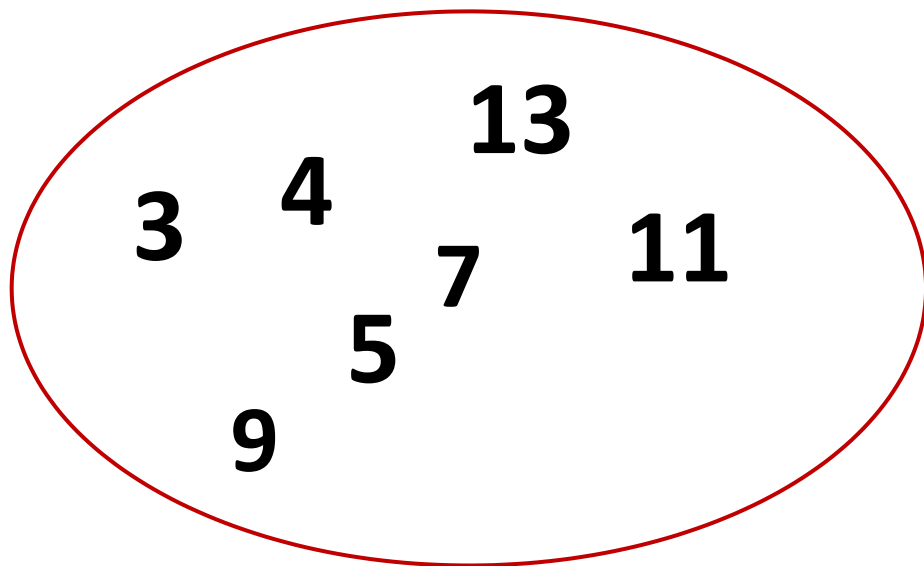


SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

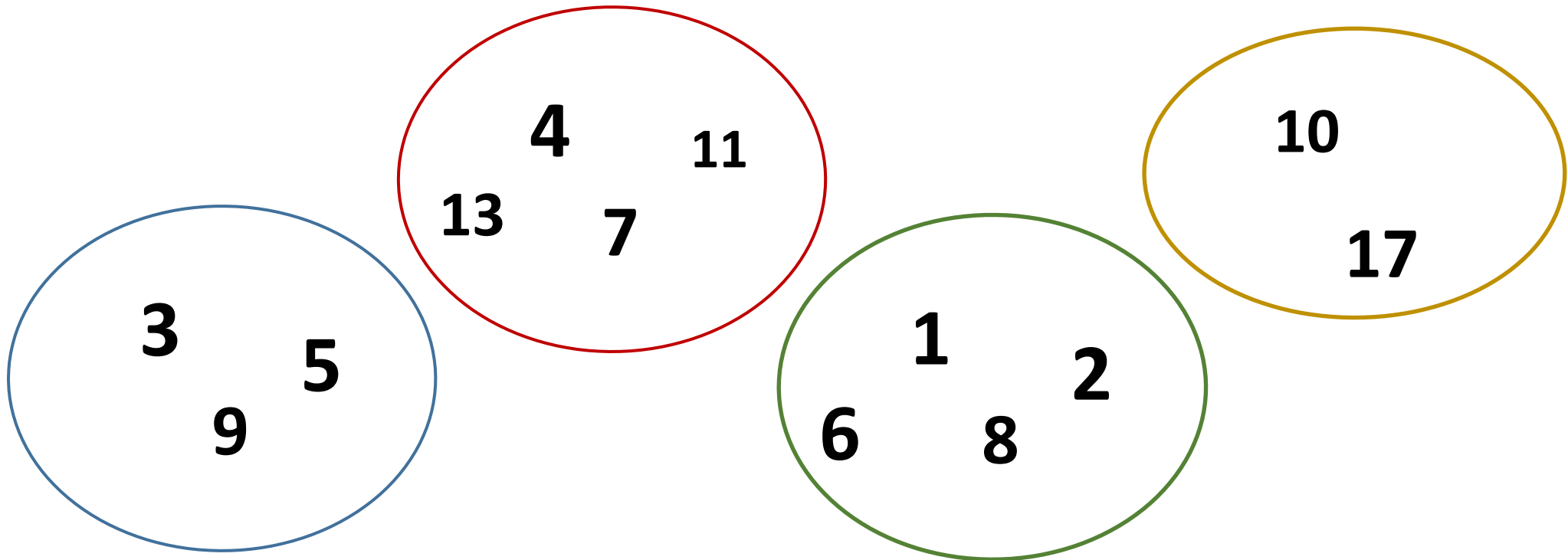
Outro exemplo é a construção de ferrovia entre as cidades 5 e 13, o que levaria à união de duas malhas.



CONJUNTOS DISJUNTOS

Contextualização

Para a modelagem desta é aplicada a estrutura de dados **conjuntos disjuntos** ou conjuntos union-find; ou estruturas union-find, também denominadas conjuntos dinâmicos disjuntos.



CONJUNTO UNION-FIND

Definição

Um **conjunto "Union Find"**, ou ainda "Merge Find", é uma estrutura de dados que manipula conjuntos disjuntos.

Matematicamente dois conjuntos são ditos disjuntos se não tiverem nenhum elemento em comum, ou seja, sua interseção for um conjunto vazio.

É chamada de conjunto por suportar a execução de operações normalmente realizadas em conjuntos; a exemplo de unir (union ou merge), e validar a relação de pertinência (find).

CONJUNTOS DISJUNTOS

Definição e Aplicação

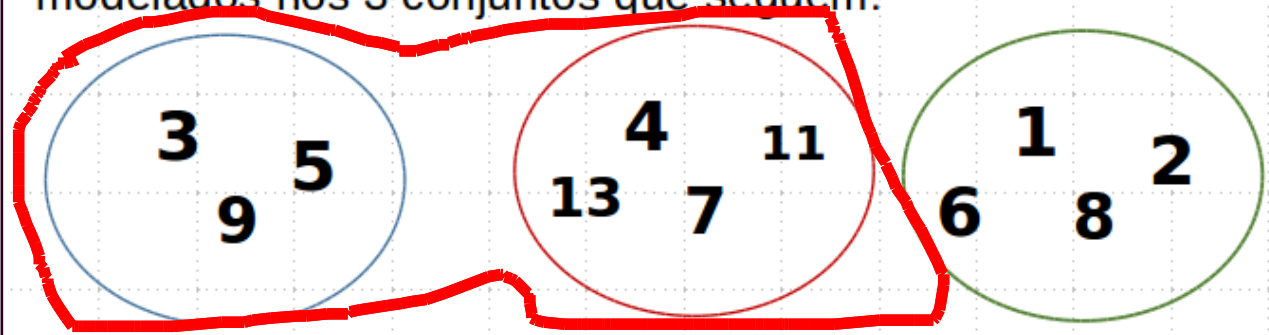
“Conjuntos Disjuntos” é uma estrutura que manipula conjuntos disjuntos; que são aqueles que não têm nenhum elemento em comum.

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

O sistema não está totalmente integralizado. Há um total de 18 cidades, numeradas de 1 a 18, e destas cidades, há 3 malhas ferroviárias; sendo as cidades **3, 5 e 9** interligadas numa malha; as cidades **4, 7, 11 e 13** em uma outra; e as cidades **1, 2, 6 e 8** em uma terceira malha.

As malhas ferroviárias podem ser, então, modelados nos 3 conjuntos que sequeem:



? A situação problema implica no uso de conjuntos disjuntos?

CONJUNTOS DISJUNTOS

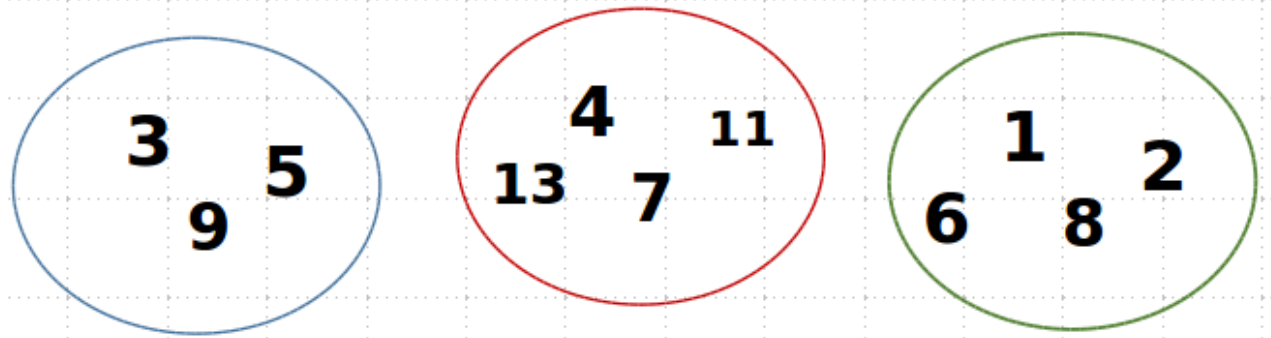
Definição e Aplicação

É chamada de conjunto por suportar a execução de operações de conjuntos; a exemplo de unir (union ou merge), e validar a relação de pertinência (find).

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Como cada malha ferroviária tem acesso a diferentes ports e centros urbanos, uma operação recorrente é identificar a que malha pertence uma dada cidade. Por exemplo, dada 5, é preciso identificar que esta pertence à malha “azul”. Dada a cidade 11, é preciso identificar que esta pertence à malha “vermelha”. Dada 10, é preciso identificar que esta não tem ferrovia.



A situação problema requer aplicação de busca (find)?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Definição e Aplicação

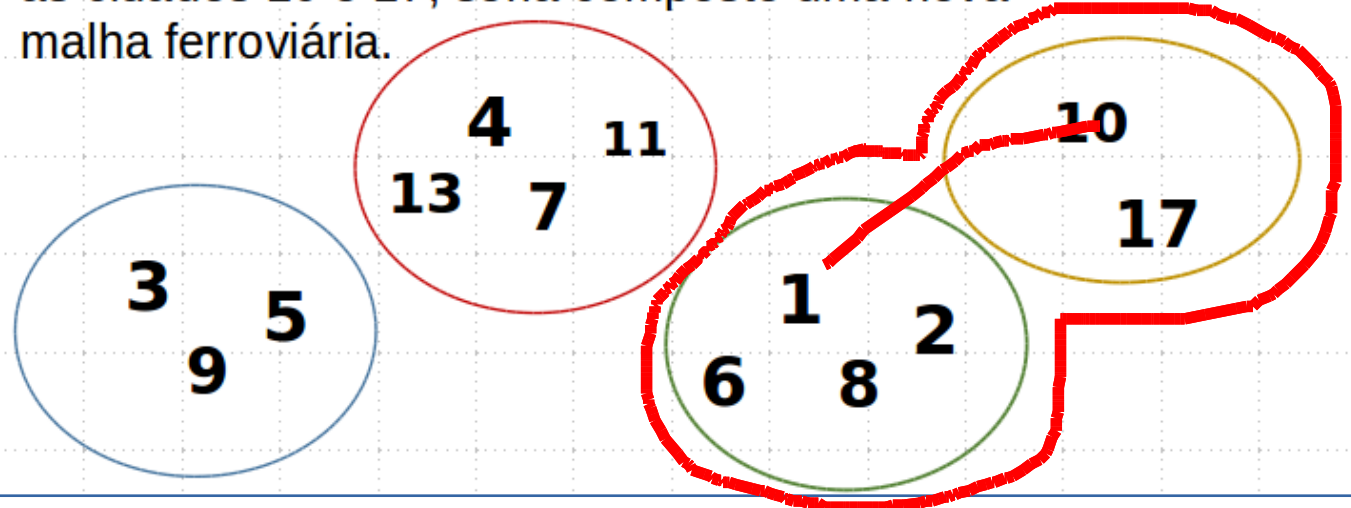
É chamada de conjunto por suportar a execução de operações de operações de conjuntos; a exemplo de unir (union ou merge), e validar a relação de pertinência (find).

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



A situação problema requer aplicação de união (union)?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Operações

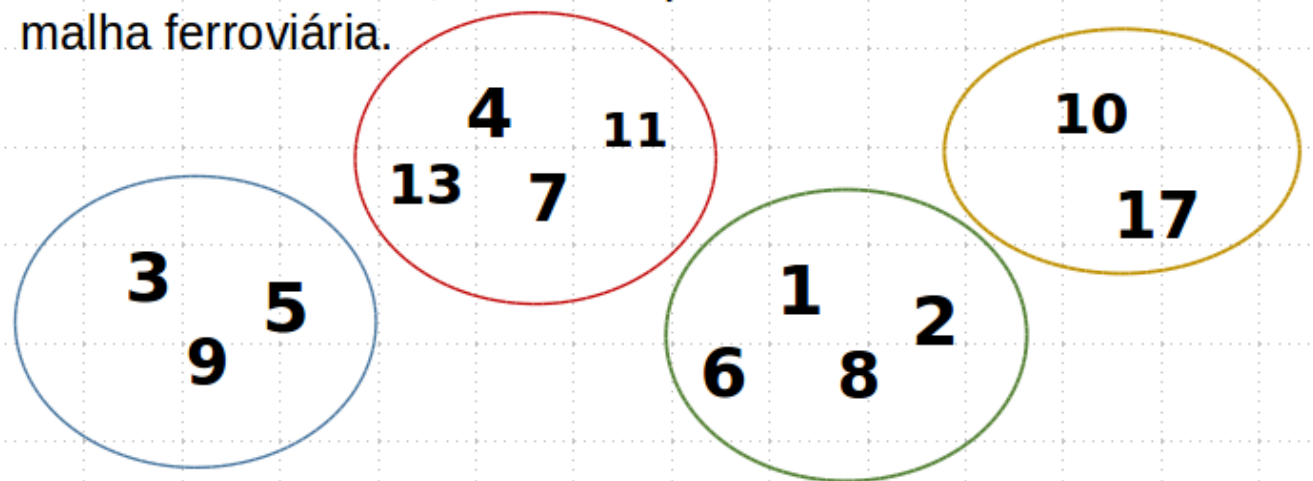
É chamada de conjunto por suportar a execução de operações de conjuntos; a exemplo de unir (union ou merge), e validar a relação de pertinência (find).

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



Que operações disponibilizar para manipular conjuntos disjuntos?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Operações

Gerar(x) ou *MakeSet(x)*, para criar um conjunto unitário $\{x\}$ para cada elemento x do universo modelado, sendo x ou S_x também o nome do conjunto.

Buscar(x) ou *Find(x)*, para determinar o nome do conjunto que contém o item x . Também útil para identificar se dois elementos fazem parte do mesmo conjunto.

$$\underline{F(3) = 2 \quad F(8) = 6}$$

Unir(k,j) ou *Union(k,j)*, para determinar o conjunto resultado da união dos conjuntos disjuntos, k e j ; atribuindo o resultado a k .

CONJUNTOS DISJUNTOS

Operações

Gerar(x) ou *MakeSet(x)*, para criar um conjunto unitário [x] para cada elemento x do universo modelado, sendo x também o nome do conjunto.

Buscar(x) ou *Find(x)*, para determinar o nome do conjunto que contém x. Também útil para identificar se dois elementos fazem parte do mesmo conjunto.

Unir(k,j) ou *Union(k,j)*, para determinar o conjunto resultado da união dos conjuntos disjuntos, k e j; atribuindo o resultado a k.



Aplicando na situação problema das malhas ferroviárias de Valápagus? (a) na inicialização (b) para identificar malha (c) a medida que ferrovias são construídas

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação

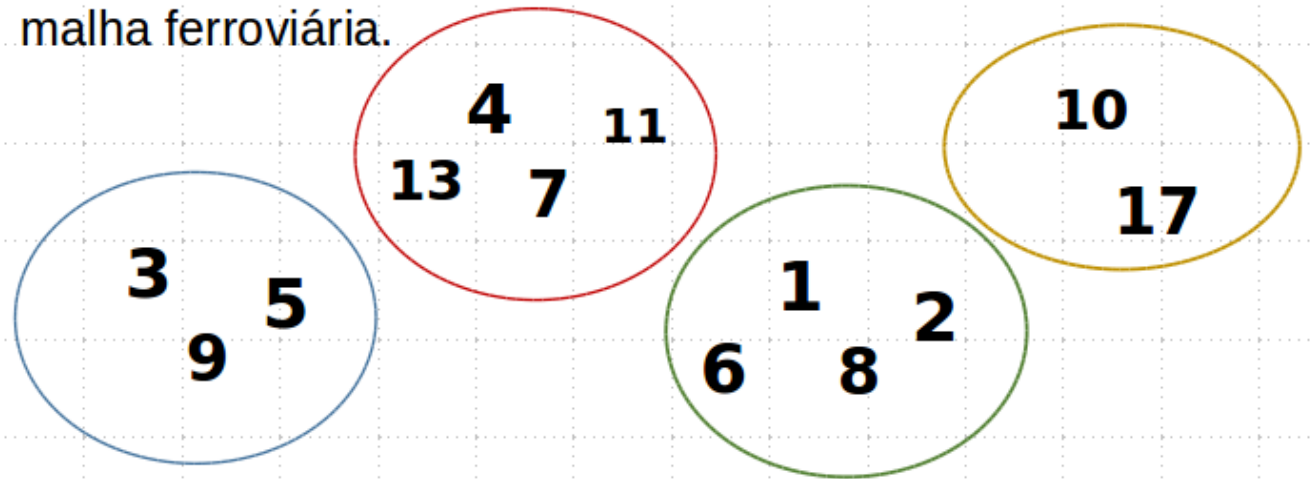
É chamada de conjunto por suportar a execução de operações de operações de conjuntos; a exemplo de unir (union ou merge), e validar a relação de pertinência (find).

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



Como implementar conjuntos disjuntos (union-find)?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível implementação de conjunto union-find é por meio de array.

Observar a representação dos conjuntos S_1 (*set 1*), S_5 (*set 5*) e S_3 (*set 3*) dados.

Notar que os nós raiz têm pai -1 e que 1, 5 e 3 são os elementos que deram início, respectivamente, aos conjuntos.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\} \quad S_5 = \{2, 5, 10\} \quad S_3 = \{3, 4, 6\}$$


i	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
p	-1	5	-1	3	-1	3	1	1	1	5

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível implementação de conjunto union-find é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\} \quad S_5 = \{2, 5, 10\} \quad \underline{S_3 = \{3, 4, 6\}}$$



/	1	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
p	-1	5	1	1	-1	3	1	1	1	5



Como implementar as operações que seguem?

(a) MakeSet ✓

(b) Find ✓

(c) Union ✓

u(1,3)

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível implementação de conjunto union-find é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\} \quad S_5 = \{2, 5, 10\} \quad S_3 = \{3, 4, 6\}$$

/	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
p	-1	5	-1	3	-1	3	1	1	1	5



Quais os custos das operações?

(a) MakeSet

(b) Find

(c) Union

$O(1)$
 $F(1)$
 $O(1)$

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível implementação de conjunto union-find é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$$

$$S_5 = \{2, 5, 10\}$$

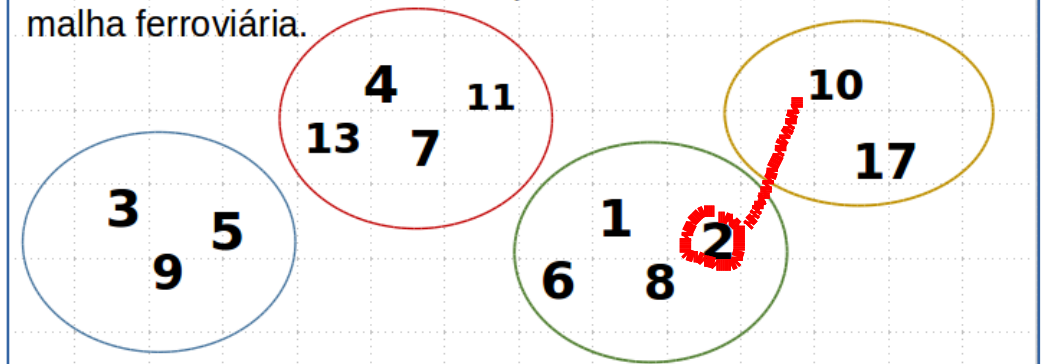
$$S_3 = \{3, 4, 6\}$$

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



$$F(9) = 3$$



Como aplicar array na situação problema das malhas ferroviárias de Valápagus?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	14	15	16	17	18
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	3	2	4	5					2	-1

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível
implementação de
conjunto union-find
é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$$

$$S_5 = \{2, 5, 10\}$$

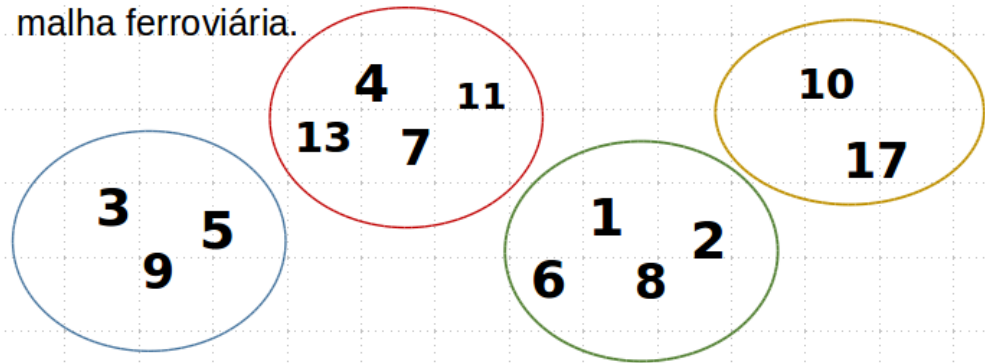
$$S_3 = \{3, 4, 6\}$$

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



Como aplicar as operações MakeSet, Union e Find na situação problema das malhas ferroviárias de Valápagus implementada por array?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Array

Um possível
implementação de
conjunto union-find
é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$$

$$S_5 = \{2, 5, 10\}$$

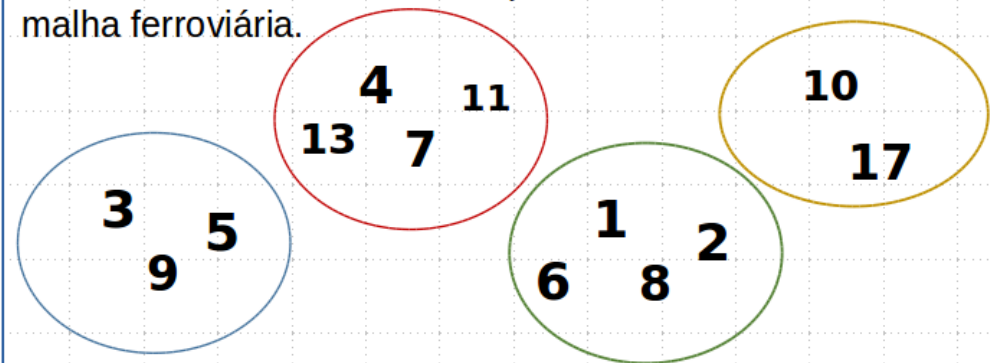
$$S_3 = \{3, 4, 6\}$$

SITUAÇÃO PROBLEMA

Malha Ferroviária

Também, considerando que ainda há ferrovias em construção, é preciso identificar malhas em formação.

Sendo, por exemplo, construída ferrovia entre as cidades 10 e 17, seria composto uma nova malha ferroviária.



Considerando o fato de array residir em memória principal, convém manter os dados das malhas ferroviárias de Valápagus nesta?

array

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Arquivo

Um possível implementação de conjunto union-find é por meio de array.

$$S_1 = \{1, 7, 8, 9\} \quad S_5 = \{2, 5, 10\} \quad S_3 = \{3, 4, 6\}$$

/	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
p	-1	5	-1	3	-1	<u>3</u>	1	1	1	5



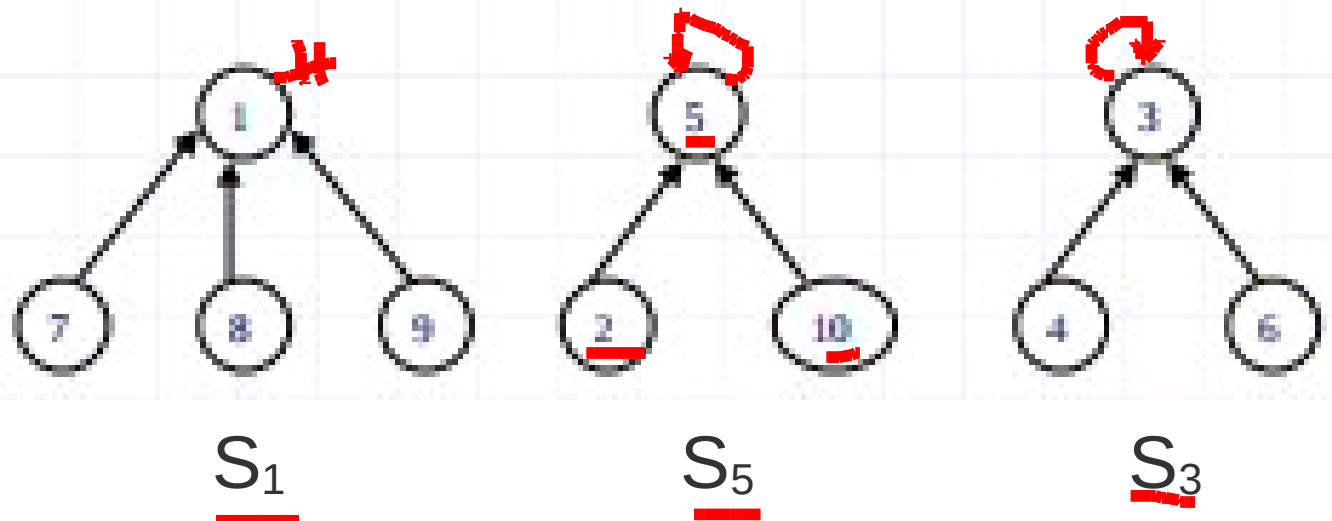
É possível implementar conjuntos union-find em memória não-volátil?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado, ou apontando para si mesmo.

Seja o exemplo: $S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$ $S_5 = \{2, 5, 10\}$ $S_3 = \{3, 4, 6\}$,
tem-se:



CONJUNTOS DISJUNTOS

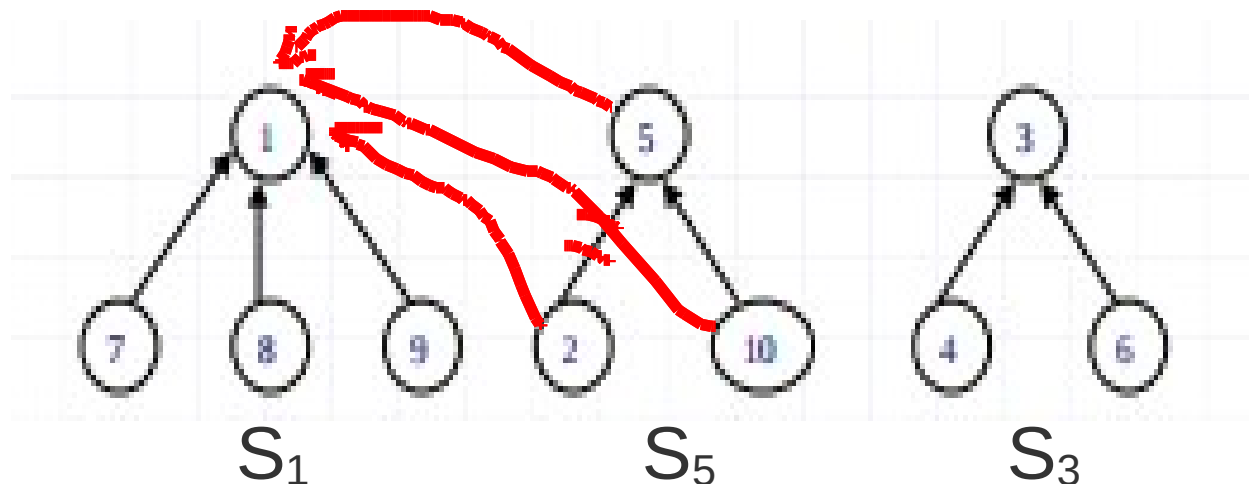
Implementação por Árvore Reversa

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

Seja o exemplo: $S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$ $S_5 = \{2, 5, 10\}$ $S_3 = \{3, 4, 6\}$,
tem-se:



**Como
implementar
as operações:**
(a) *MakeSet*
(b) *Find*
(c) *Union*



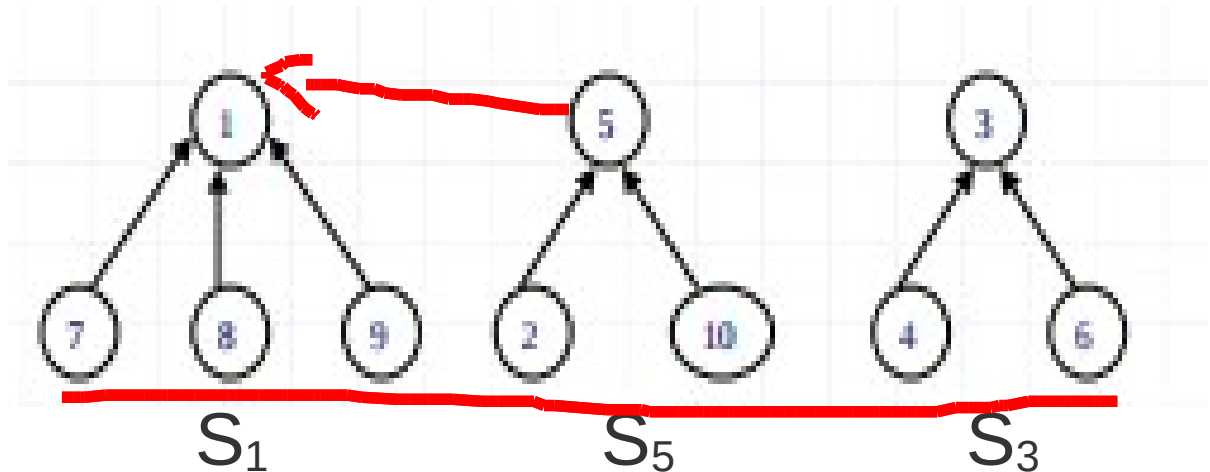
CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

Seja o exemplo: $S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$ $S_5 = \{2, 5, 10\}$ $S_3 = \{3, 4, 6\}$,
tem-se:

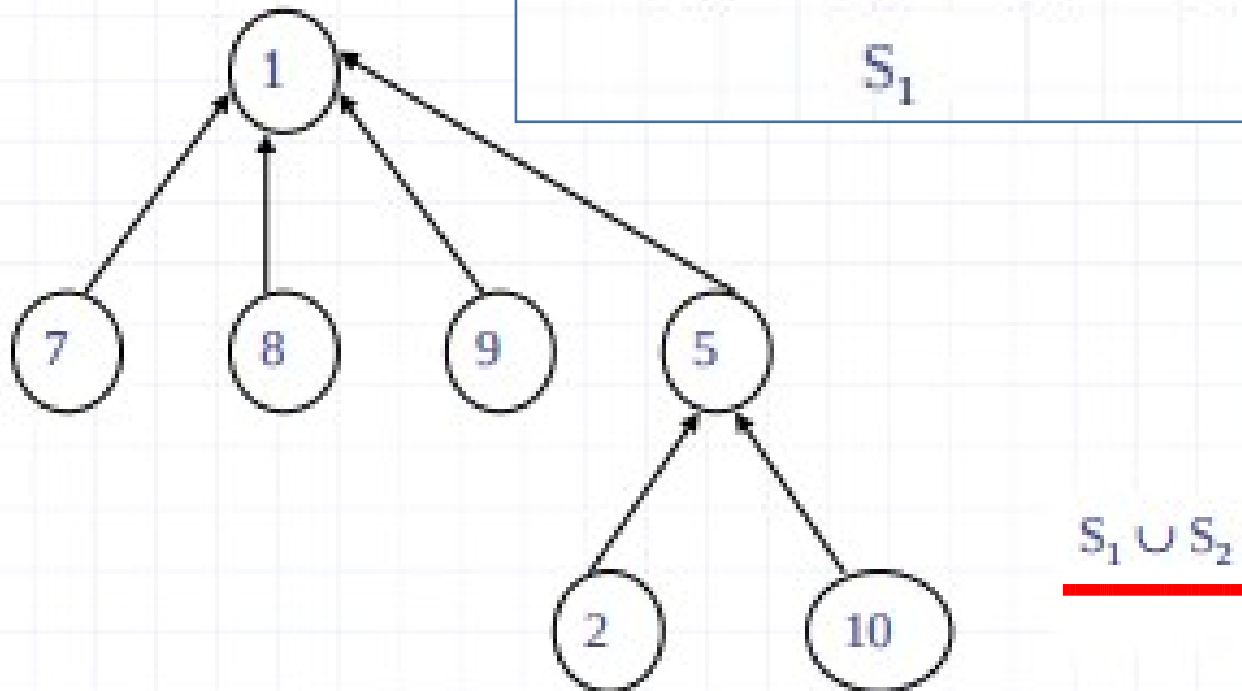
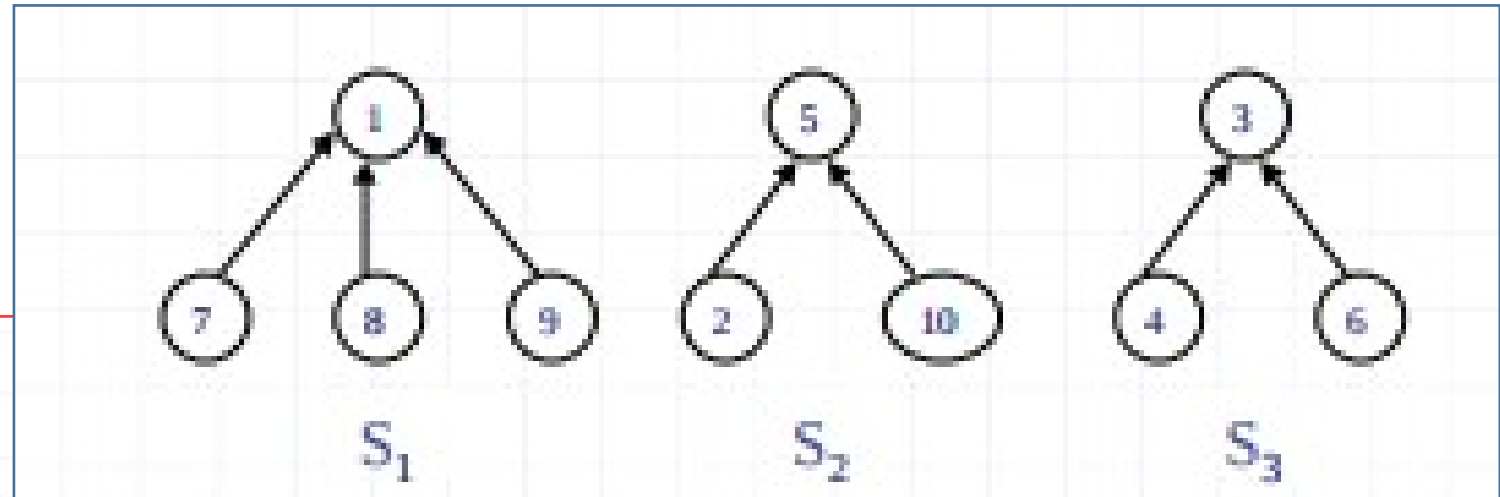
Qual o custo das operações:
(a) MakeSet
(b) Find ?
(c) Union



CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

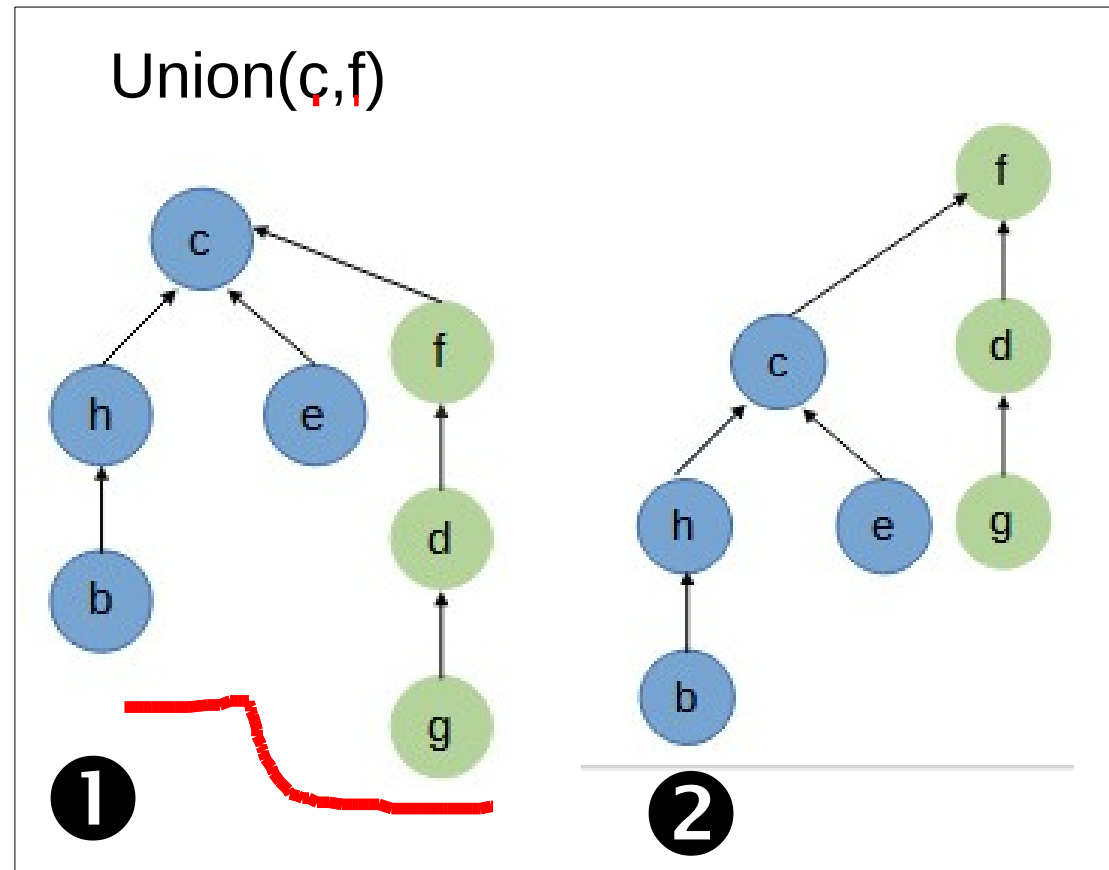
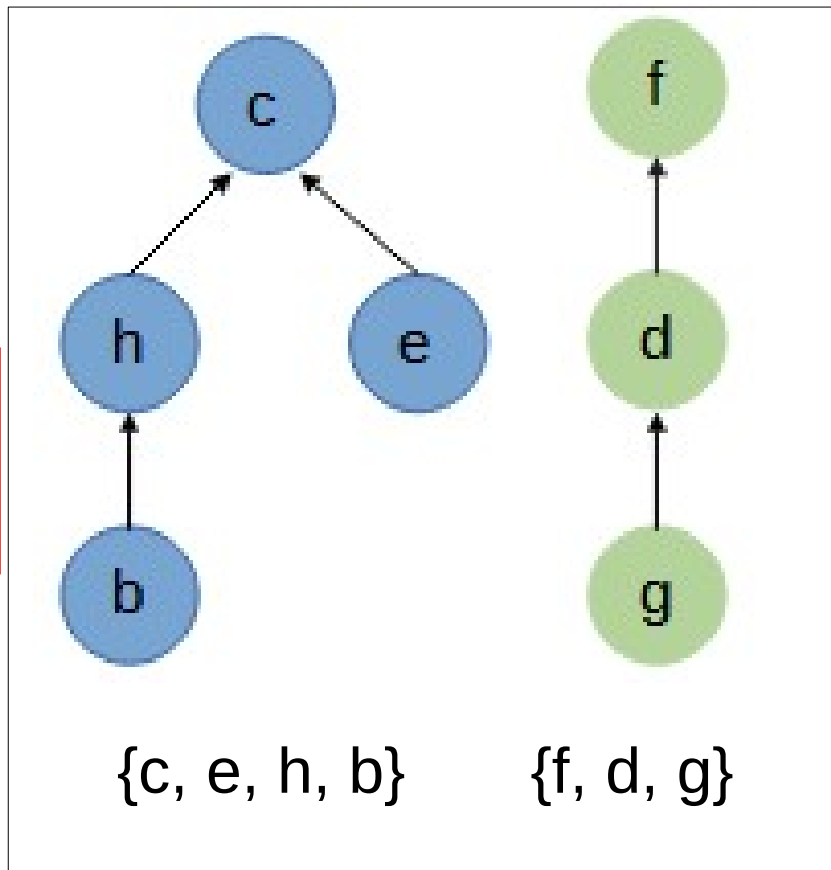
Na **união** em árvore reversa a raiz de um grupo aponta para a raiz do outro.



CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

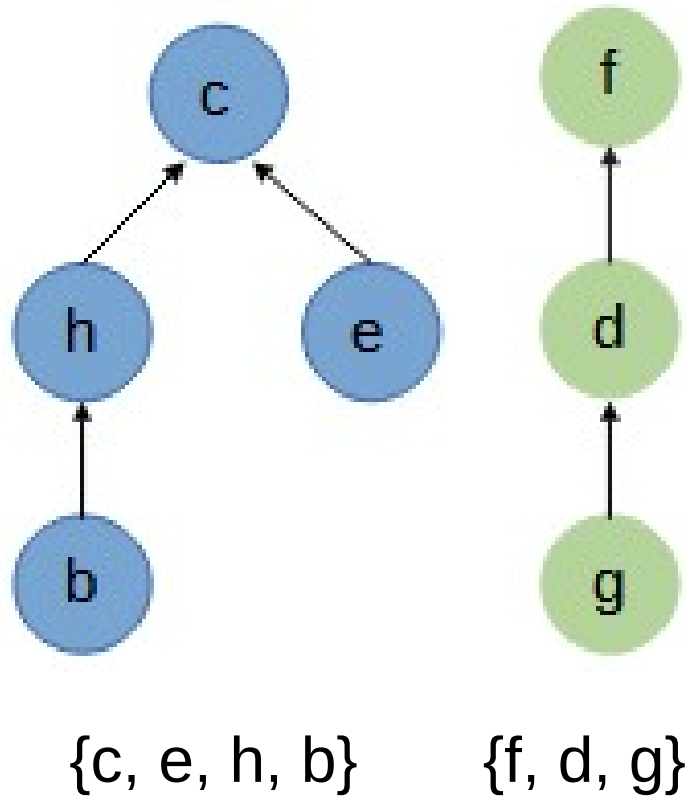
Para efetuar a operação de **união** em árvore reversa – $Union(u, x)$ – é preciso fazer com que a raiz de um grupo aponte para a raiz do outro, ou seja, uma árvore passa a compor sub-árvore da outra.



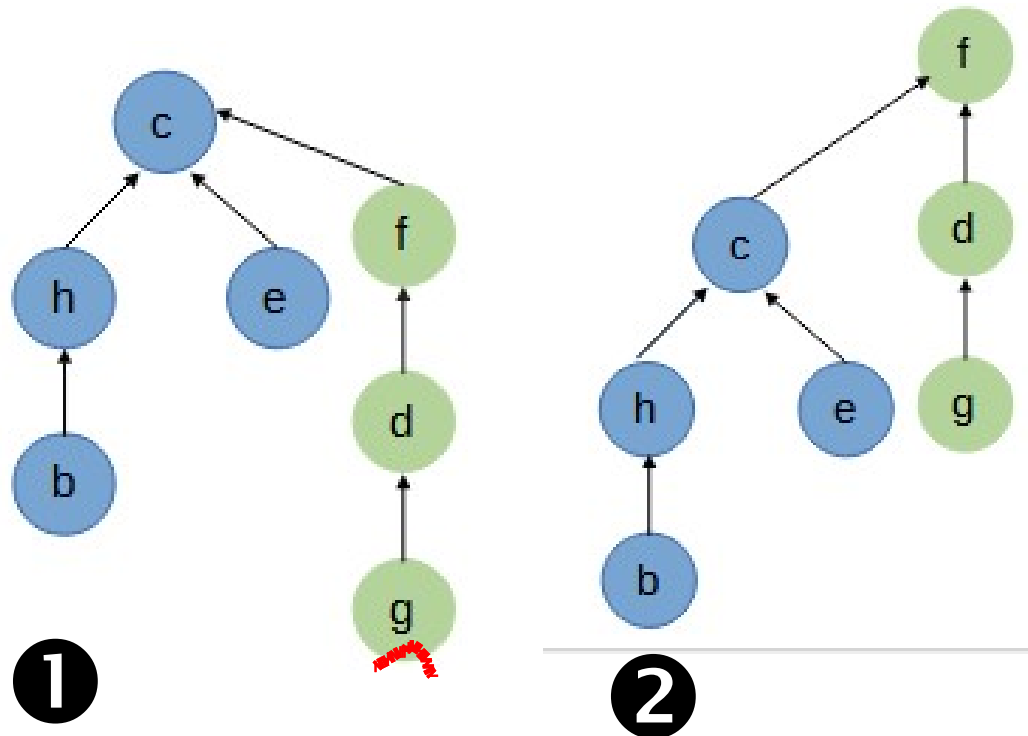
Há sinais de união prévia:
 $\{h, b\} \cup \{c, e\}$, bem como $\{f\} \cup \{d, g\}$.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa



Union(c,f)

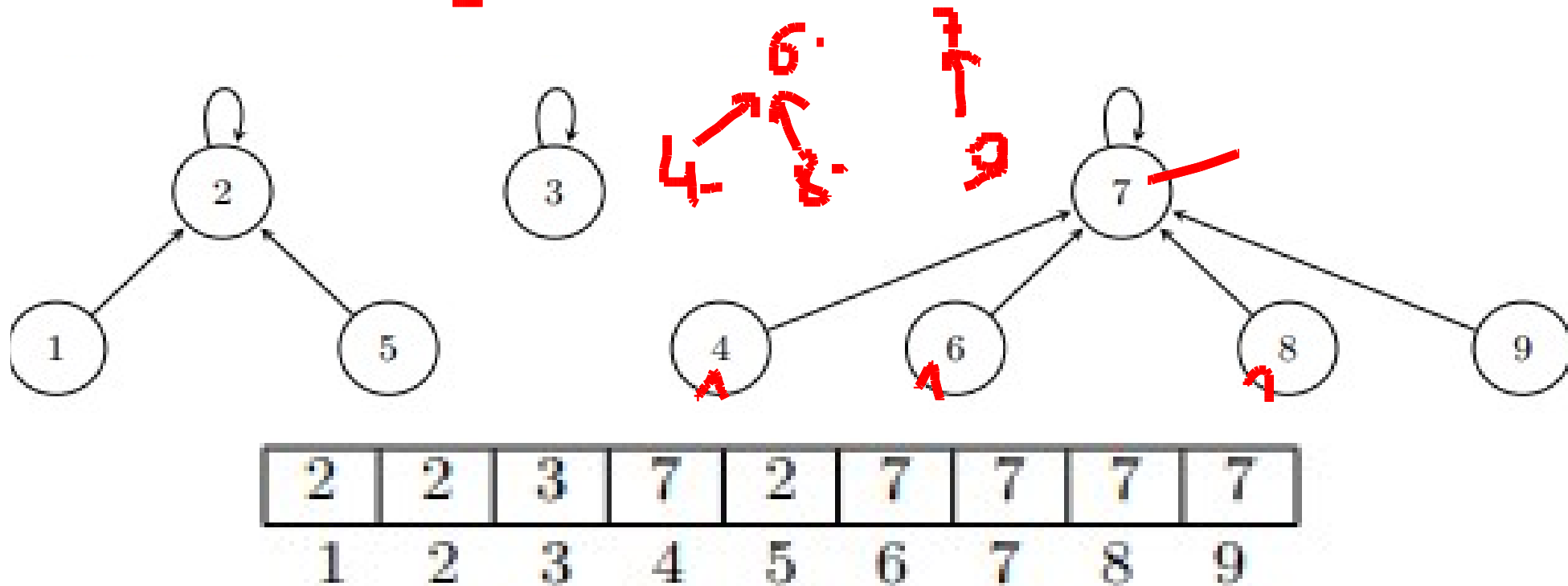


É possível que com a aplicação de uniões se obtenha uma árvore degenerada?

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

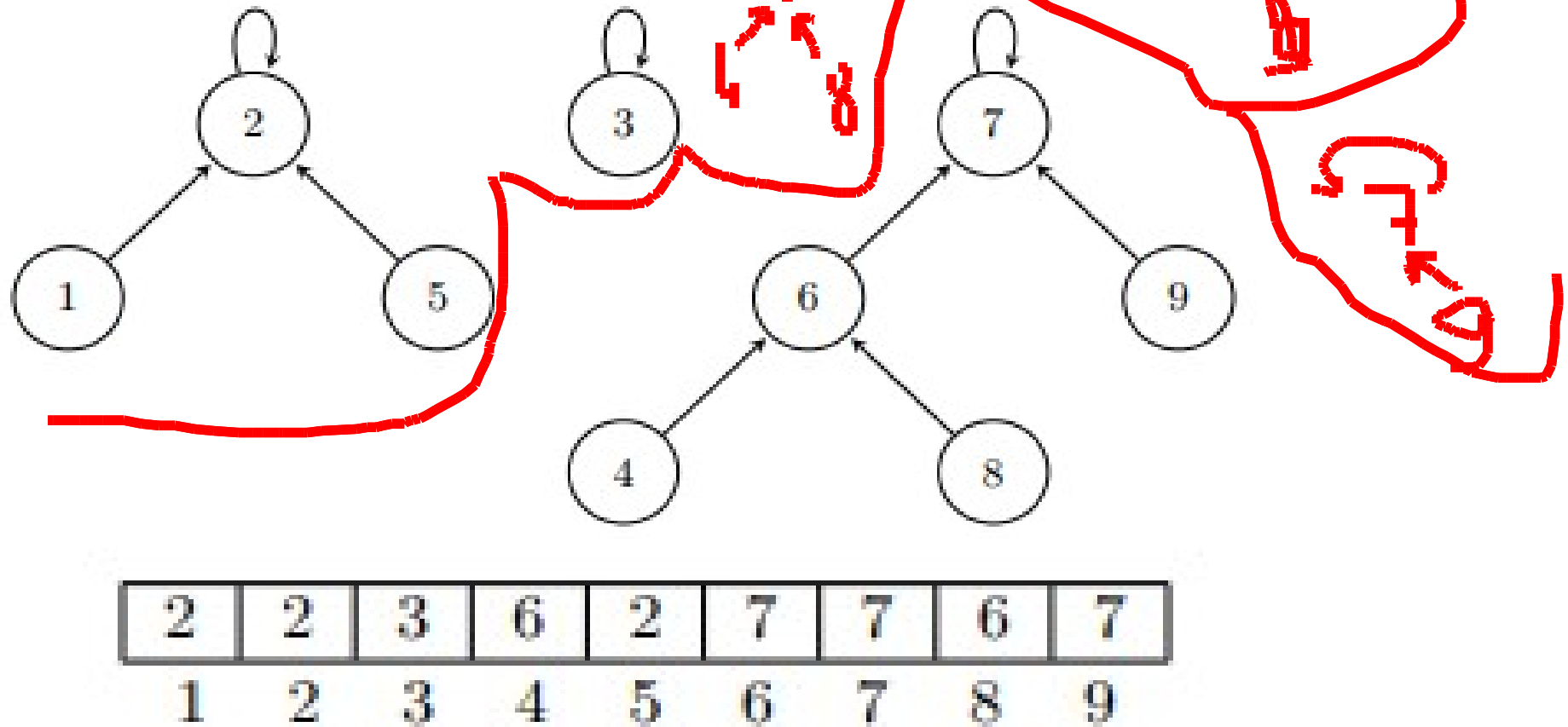
Existem duas formas de implementação de união de árvores reversas, a que favorece a busca, denominada Quick Find, que segue abaixo. E a que favorece a união – **Quick Union**. Considerando: a) conjuntos iniciais $S_2=\{2,1,9\}$ $S_3=\{3\}$ $S_6=\{6,4,8\}$ e $S_7=\{7,9\}$; b) $Union(S_6, S_7)$.



CONJUNTOS DISJUNTOS

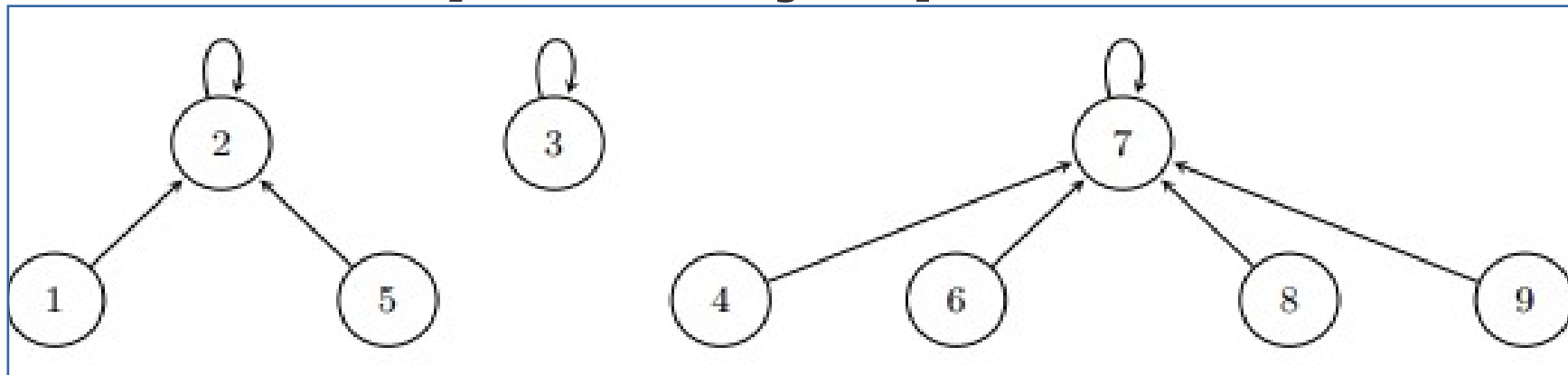
Implementação por Árvore Reversa

Forma de implementação que favorece a união: **Quick Union**. Considerando: a) conjuntos iniciais $S_2=\{2,1,9\}$ $S_3=\{3\}$ $S_6=\{6,4,8\}$ e $S_7=\{7,9\}$; b) $Union(S_7, S_6)$.



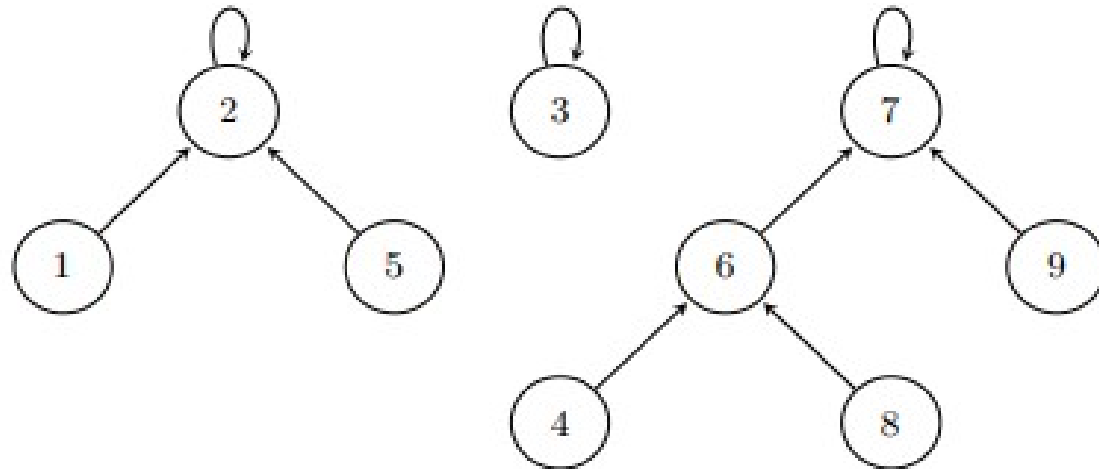
CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa



2	2	3	7	2	7	7	7	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Comparando
a **Quick Find**,
com a **Quick
Union**:



2	2	3	6	2	7	7	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9

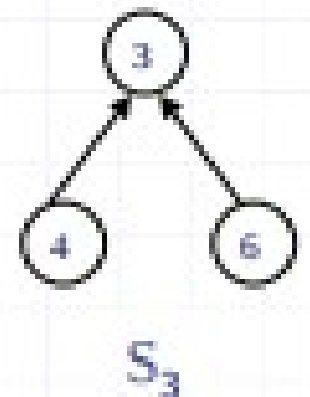
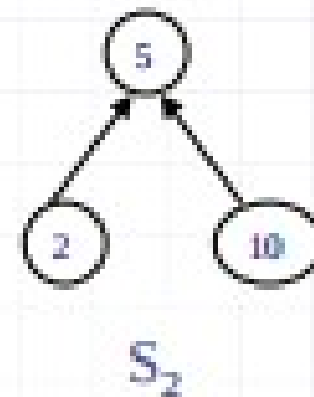
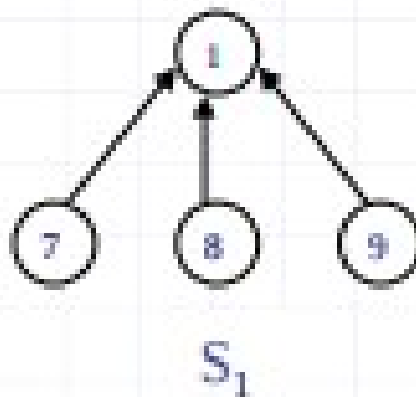
CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

Seja o exemplo: $S_1 = \{1, 7, 8, 9\}$ $S_2 = \{2, 5, 10\}$ $S_3 = \{3, 4, 6\}$, tem-se:

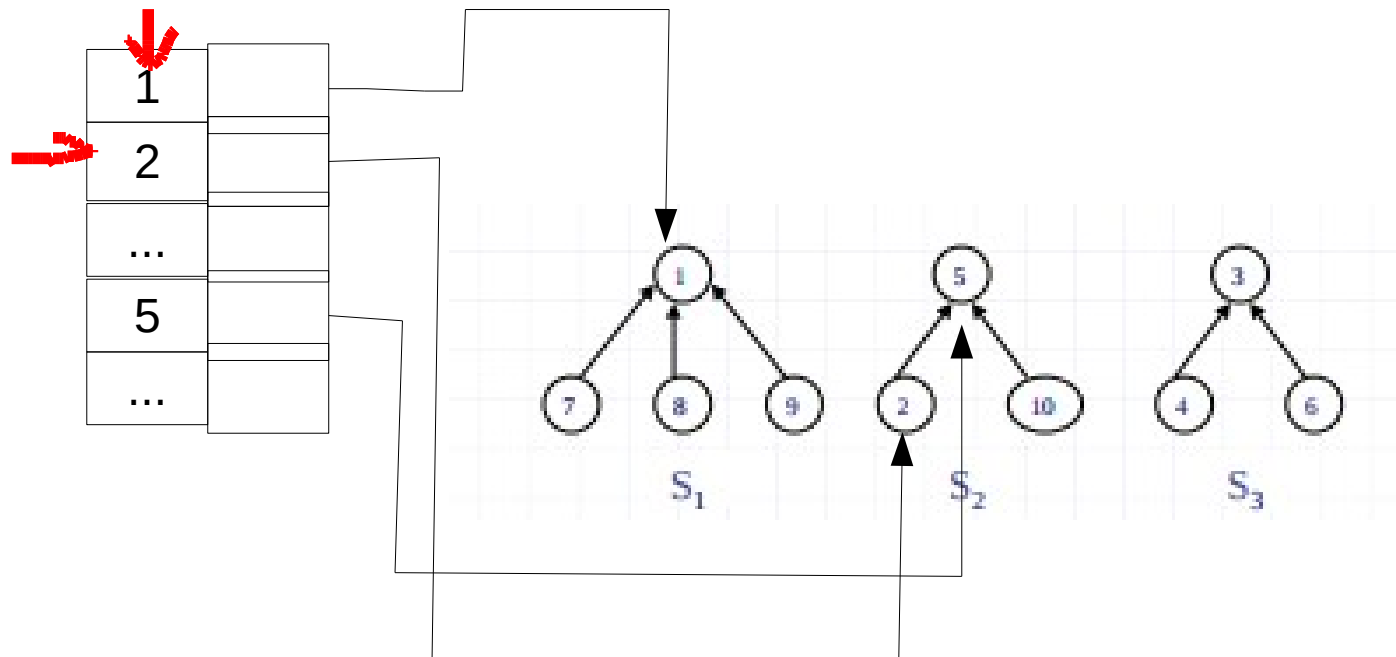
**Se
implementação
dinâmica, é
preciso ter acesso
direto aos nós
para execução do
Find? Como?**



CONJUNTOS DISJUNTOS

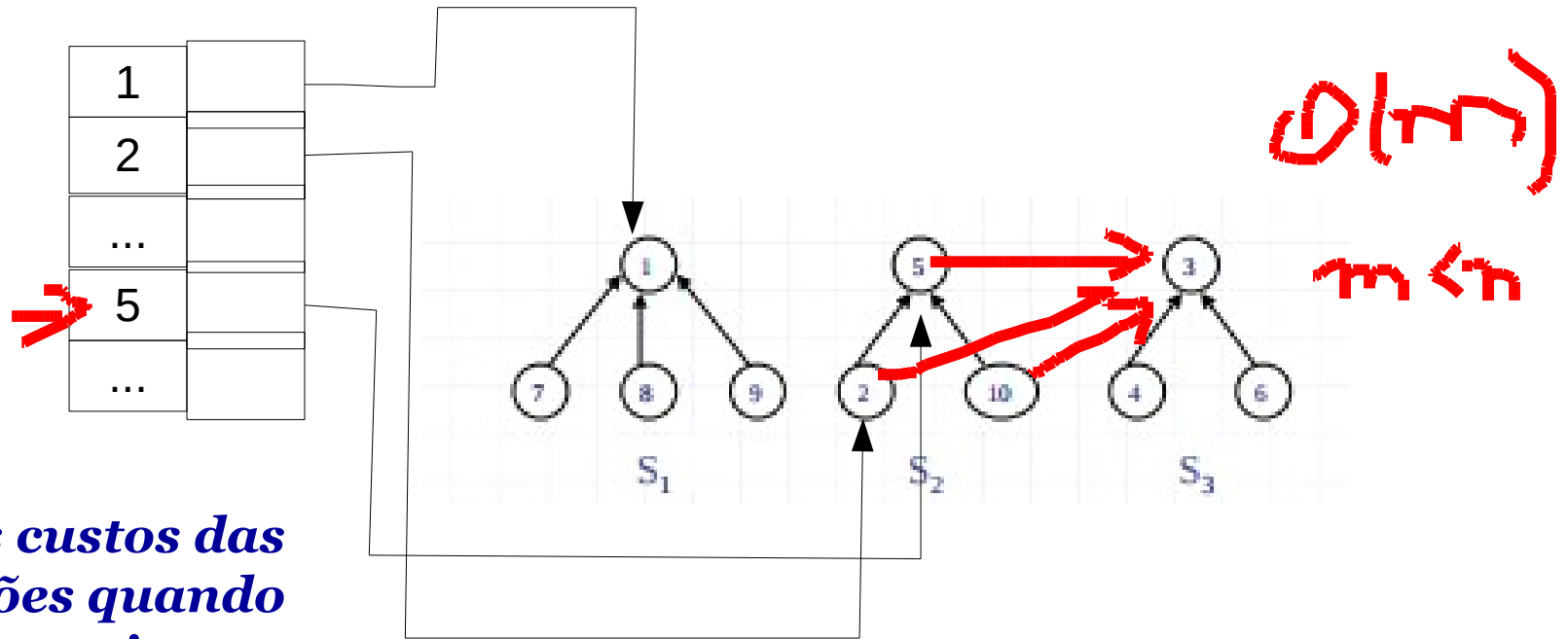
Implementação por Árvore Reversa

Para se ter acesso direto aos nós, para execução do find, se usa estrutura similar à esquematizada abaixo:



CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

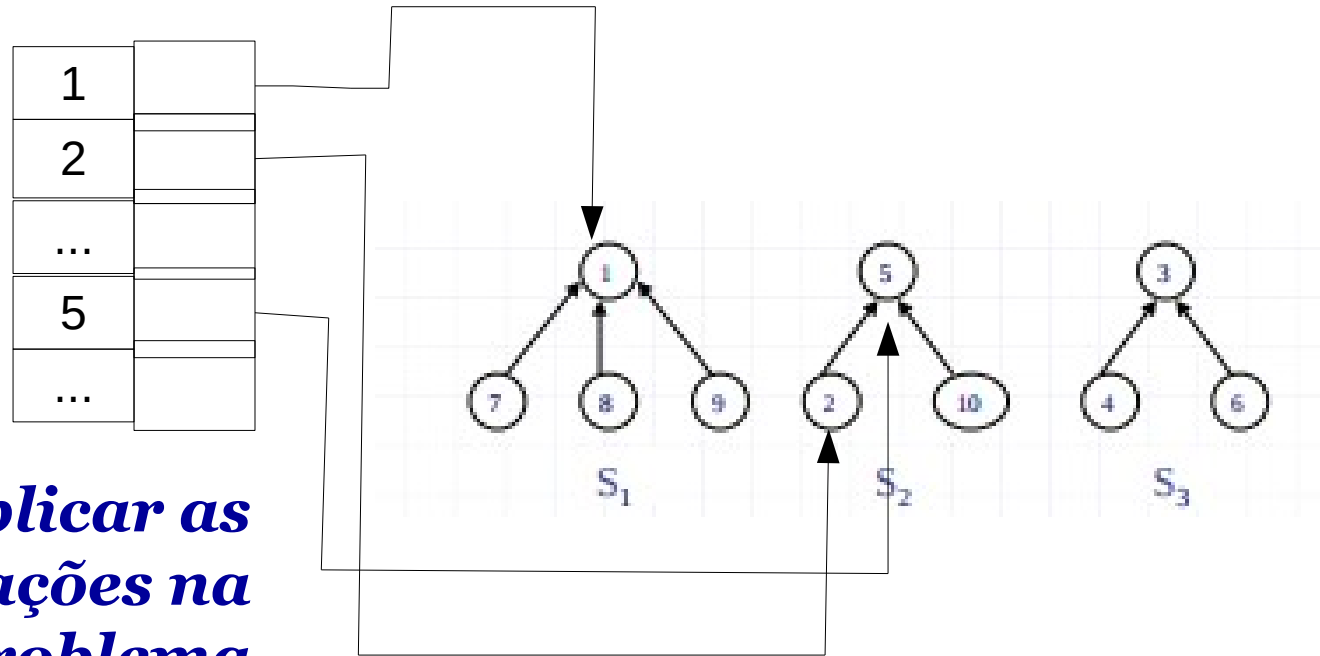


Quais os custos das operações quando conjuntos disjuntos são implementados por árvores reversas dinâmicas?

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa



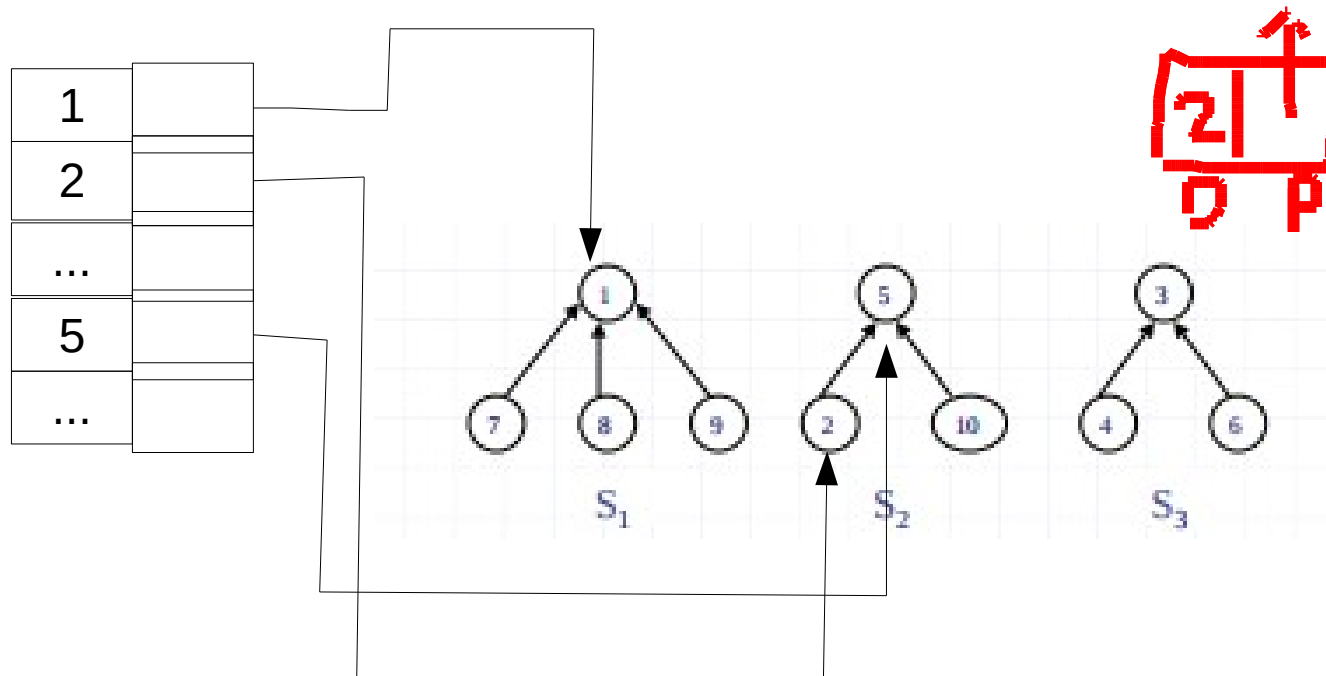
*Como aplicar as
operações na
situação problema
das malhas
ferroviárias de
Valápagus?*



Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

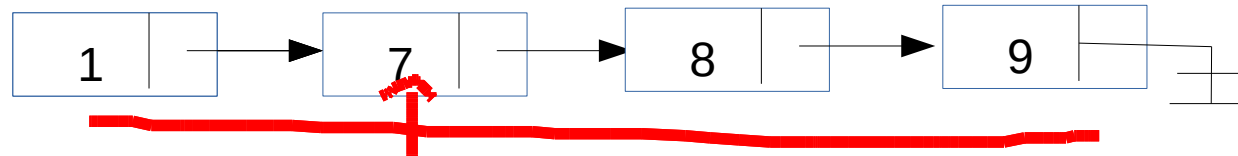
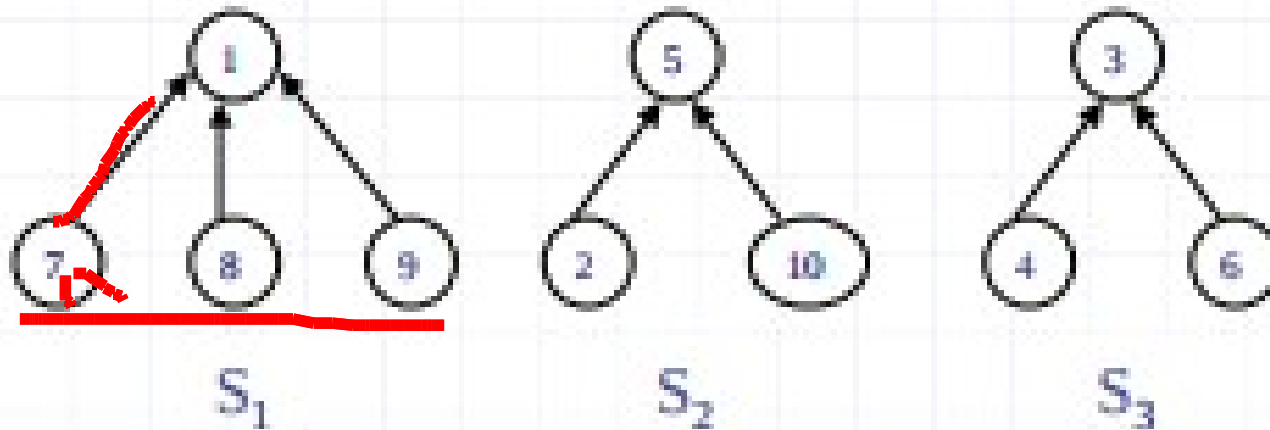


**Como
compor
(campos)
cada nó de
uma árvore
reversa?**

Outra forma de implementação dos conjuntos union-find é por meio de árvores reversas. Nas árvores reversas cada nó tem um ponteiro para seu nó pai e a raiz é o representante da estrutura, que por sua vez é identificada por apresentar apontador pai aterrado.

CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Listas Encadeadas

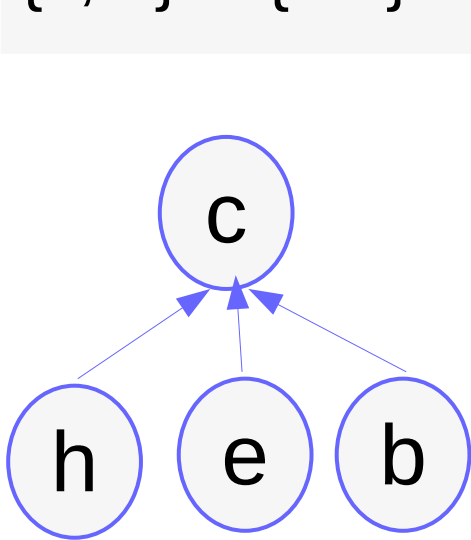


É conveniente também manter conjuntos union-find por meio de lista linear dinâmica simples (como no exemplo dado), havendo uma lista para cada conjunto?

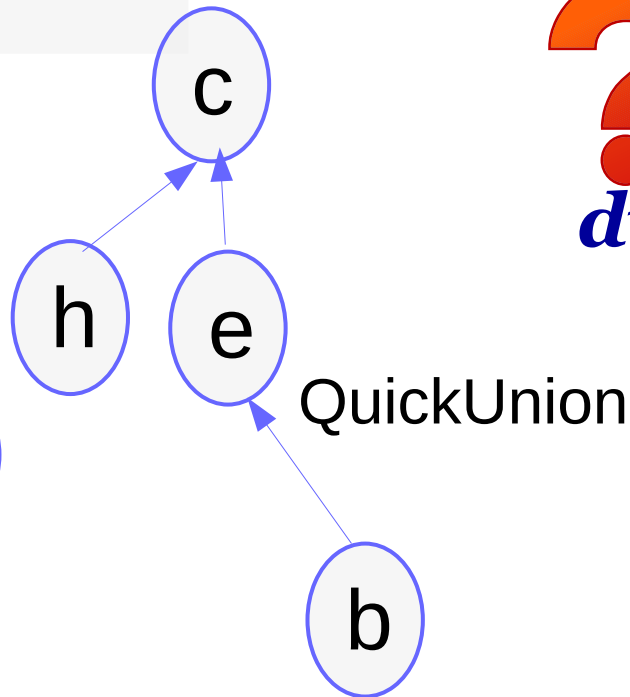
CONJUNTOS DISJUNTOS

Implementação por Árvore Reversa

$\{c, h\} \cup \{e, b\}$



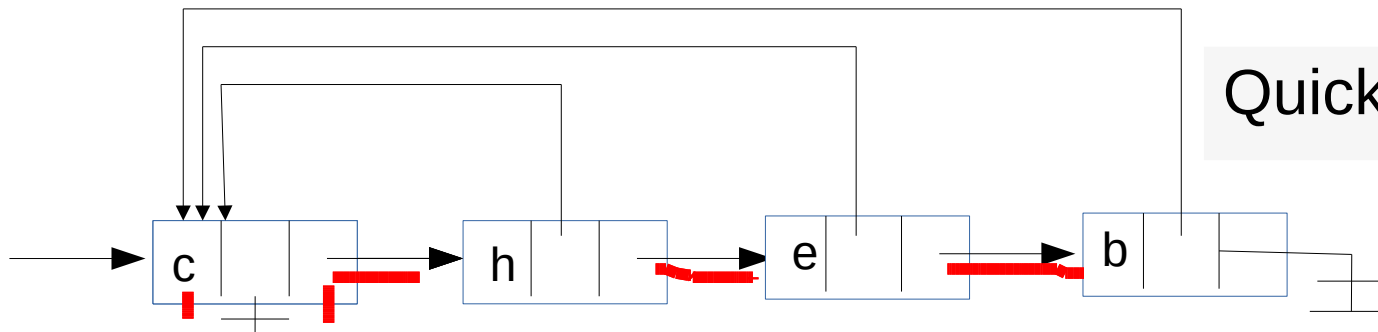
QuickFind



QuickUnion



*É conveniente
implementar
conjuntos
disjuntos por meio
de estrutura
conforme a
esquemmatizada
abaixo?*



QuickFind

Aplicação

Conjuntos Disjuntos

FUSOES1 - Fusões

A informatização dos sistemas bancários permitiu grandes economias de tempo e dinheiro, permitindo que vários tipos de transações financeiras pudessem ser realizadas pela Internet. Para possibilitar isso, cada banco recebeu um código bancário, que é um número utilizado pelos sistemas de computador para identificar cada banco.

Quando um banco decide comprar outro, ocorre o que se chama uma fusão: os dois bancos tornam-se um só banco. Para manter compatibilidade com os sistemas eletrônicos dos bancos, qualquer um dos códigos dos antigos bancos pode ser usado para se referir ao novo banco.

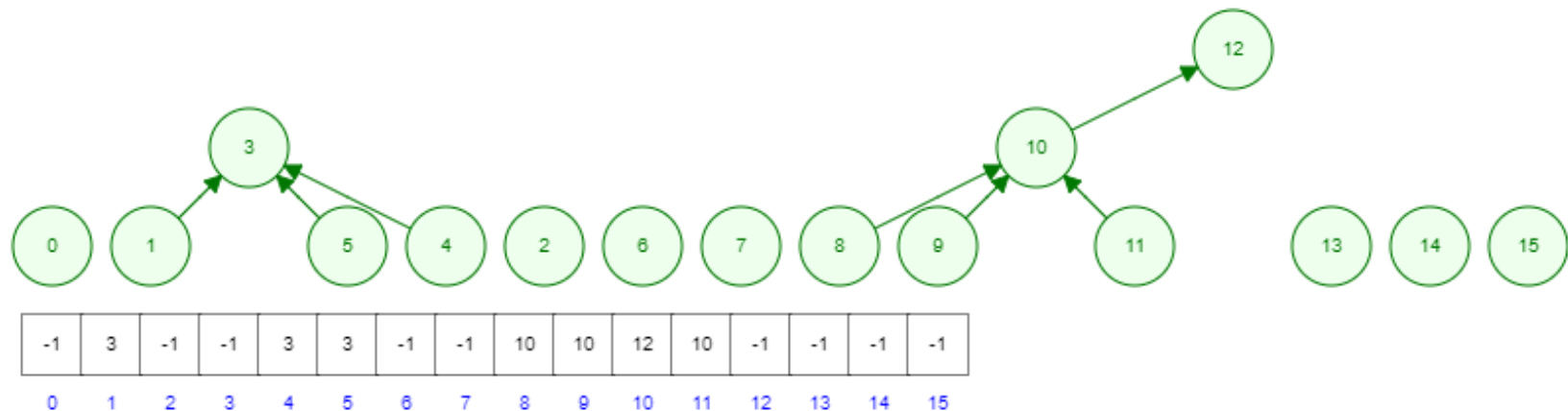
Com a crise econômica internacional, as fusões entre bancos têm sido cada vez mais comuns; por isso, muitas vezes é difícil decidir se dois códigos bancários na realidade se referem ao mesmo banco (devido aos dois bancos terem se fundido, diretamente ou não).

<https://br.spoj.com/problems/FUSOES1/>

Ferramenta de Estudo

Disjoint Sets

Find Union ☒ Path Compression ☐ Union By Rank ☐ Rank = # of nodes ☒ Rank = estimated height



Animation Completed

Complementar Estudos...

Conjuntos Disjuntos

[ic.unicamp.br/~zanoni/teaching/mo637/2007-2s/aulas/
conjuntosDisjuntos.pdf](http://ic.unicamp.br/~zanoni/teaching/mo637/2007-2s/aulas/conjuntosDisjuntos.pdf)

Complementar Estudos...

Estruturas de Dados e Seus Algoritmos

Szwarcfiter J. L. e Markenzon L.

Capítulo

8 Estruturas Autoajustáveis

Complementar Estudos...

Introdução a Estruturas de Dados

Celes, Cerqueira e Rangel

Capítulo

21 União e Busca

Questionário II5

— Questionário
SIGAA —

Próximo Passo



Árvores
B e B+