centralelille
ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

Accelerated Edge-Preserving Image Restoration Without Boundary Artifacts

Restauration d'images

Victor CILLEROS
Jérémy JEAN
Maxime GEY

Présentation du problème

- Image convoluée avec un flou gaussien
- Résolution avec des conditions circulaires au bord de l'image : peu réaliste

- L'approche proposée résous le problème dans un cas plus général

Formulation et Résolution

Formulation

- On cherche à minimiser :

$$x = argmin_x\{\psi(x) = J(x) + \lambda\phi(Rx))\}$$

Terme de régularisation

Image reconstruite

$$J(x) = \| y - TAx \|_2^2$$

Image floutée

Opérateur de masque

matrice de flou circulante

C'est un problème d'optimisation non-trivial -> plusieurs stratégies de résolution

Résolution

- **Approches existante : SALSA/SPLIT-BELLMAN**
  - Séparation du terme de régularisation avec une variable auxiliaire

SALSA $u = x \longrightarrow min_{x,u}\{\psi(x,u) = \frac{1}{2} \| y - TAx \|_2^2 + \lambda\phi(Ru)\}$

SPLIT-BELLMAN $v = Rx \longrightarrow min_{x,v}\{\psi(x,v) = \frac{1}{2} \| y - TAx \|_2^2 + \lambda\phi(v)\}$

  - Expression du Lagrangien associé (AL : Augmented Lagrangian)

$$L(x,u,\mu,\eta) = \psi(x,u) + \frac{\mu}{2} \| u - x - \eta \|_2^2 \qquad L(x,v,\mu,\eta) = \psi(x,v) + \frac{\mu}{2} \| v - Rx - \eta \|_2^2$$

Résolution

- **Approche proposée : ADMM-P2**

  - Séparation du terme de régularisation avec deux variable auxiliaire

$$min_{x,u_0,u_1}\{\psi(u_0,u_1)=\frac{1}{2}\parallel y-Tu_0\parallel_2^2+\lambda\phi(u_1)\}\ \text{avec}\ \begin{array}{l}u_0=Ax\\ u_1=Rx\end{array}$$

  - Forme compacte

$$min_{x,w}\,\psi(w)\qquad \text{avec}\qquad \begin{array}{l}w=Dx\\ D=[A,R]^T\\ x=[u_0,u_1]^T\end{array}$$

Résolution

- **Approche proposée : ADMM-P2**
  - Expression du Lagrangien

$$L(x, w, \gamma) = \psi(w) + \frac{\mu}{2} \| w - Dx - \eta \|^{2}$$

Implémentation

Algorithme

- ADMM-P2

$$
\begin{aligned}
& Select\, x^0, \nu > 0, \mu > 0 \\
& Precompute\, T^{'}y \\
& Set\, \eta_0^{(0)} = 0, \eta_1^{(0)} = 0, k = 0 \\
& Repeat \\
& \qquad u_0^{k+1} = (T^{'}T + \mu I_N)^{-1}[T^{'}y + \mu(Ax^{(k)} + \eta_0^{(k)}] \\
& \qquad u_1^{(k+1)} = shrink\{Rx^{(k)} + \eta^{(k)}, \frac{\lambda}{\mu}\} \\
& \qquad x^{(k+1)} = H_v^{-1}[A^{'}(u_0^{(k+1)} - \eta_0^{(k)} + \nu R^{'}(u_1^{(k+1)} - \eta_1^{(k)}] \\
& \qquad \eta_0^{(k+1)} = \eta_0^{(k)} - (u_0^{(k+1)} - Ax^{(k+1)}) \\
& \qquad \eta_1^{(k+1)} = \eta_1^{(k)} - (u_1^{(k+1)} - Rx^{(k+1)}) \\
& \qquad k = k + 1
\end{aligned}
$$

Avec

$$H_v = A^{'}A + \nu R^{'}R$$

Implémentation

- Propriétés de matrice circulaire

Pour A une matrice circulante : $A = F^{-1}DF$

Avec D matrice diagonale

Opérateur h de convolution $h = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$

On utilise par la suite : $$Ax = h \otimes x$$

Produit terme à terme

$$= F^{-1}(F(h) \cdot F(x))$$

Pré-compute

$$= F^{-1}(\boxed{diag(F(h))} \cdot F(x))$$

Implémentation

- Pour chaque produit de matrice :

```
def fft_dot(self, x:np.ndarray, F:np.ndarray)->np.ndarray:
    return np.fft.ifft2(np.multiply(F, np.fft.fft2(x))).real
```

```
def rfft_dot_adj(self, x:np.ndarray, F:np.ndarray)->np.ndarray:
    return np.fft.irfft2(np.multiply(np.conj(F), np.fft.rfft2(x)))
```

Implémentation

- Régularisation : utilisation de « wavelet »
  Package pylops pour la fonction :

pylops.signalprocessing.DWT2D(x.shape, wavelet="haar", level=1)

Résulats

Paramètres de départ

- Choix des paramètres : en théorie convergence garantie indépendamment du choix

$$\nu_{min} = argmin_{\mu} k(A^{'}A + \nu R^{'}R)$$

$$\nu\mu = 2^{8}\frac{\lambda\nu_{min}}{x_{max}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\mu_0 = 2^{-4}$$

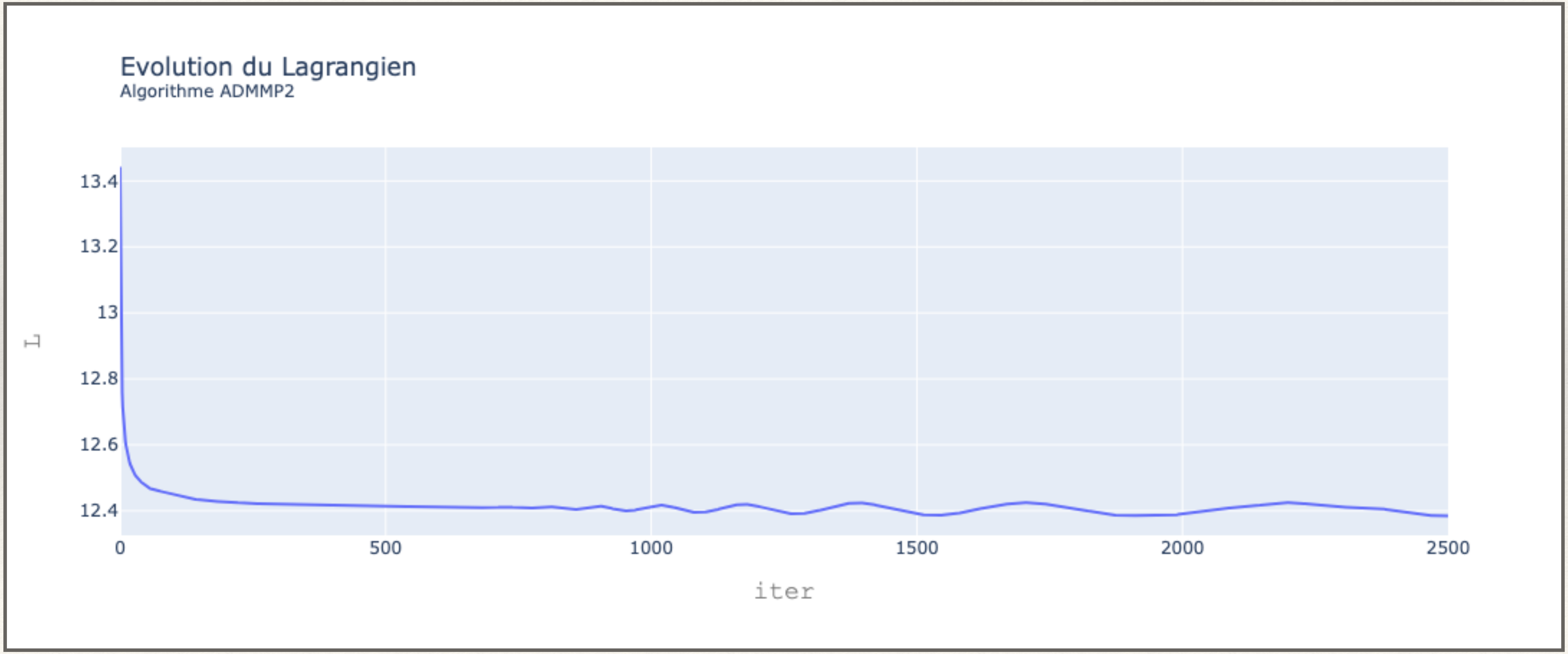
$$\nu = 2^{8}\frac{\lambda\nu_{min}}{\mu_0 x_{max}}$$

- Choix des paramètres : après quelques essais

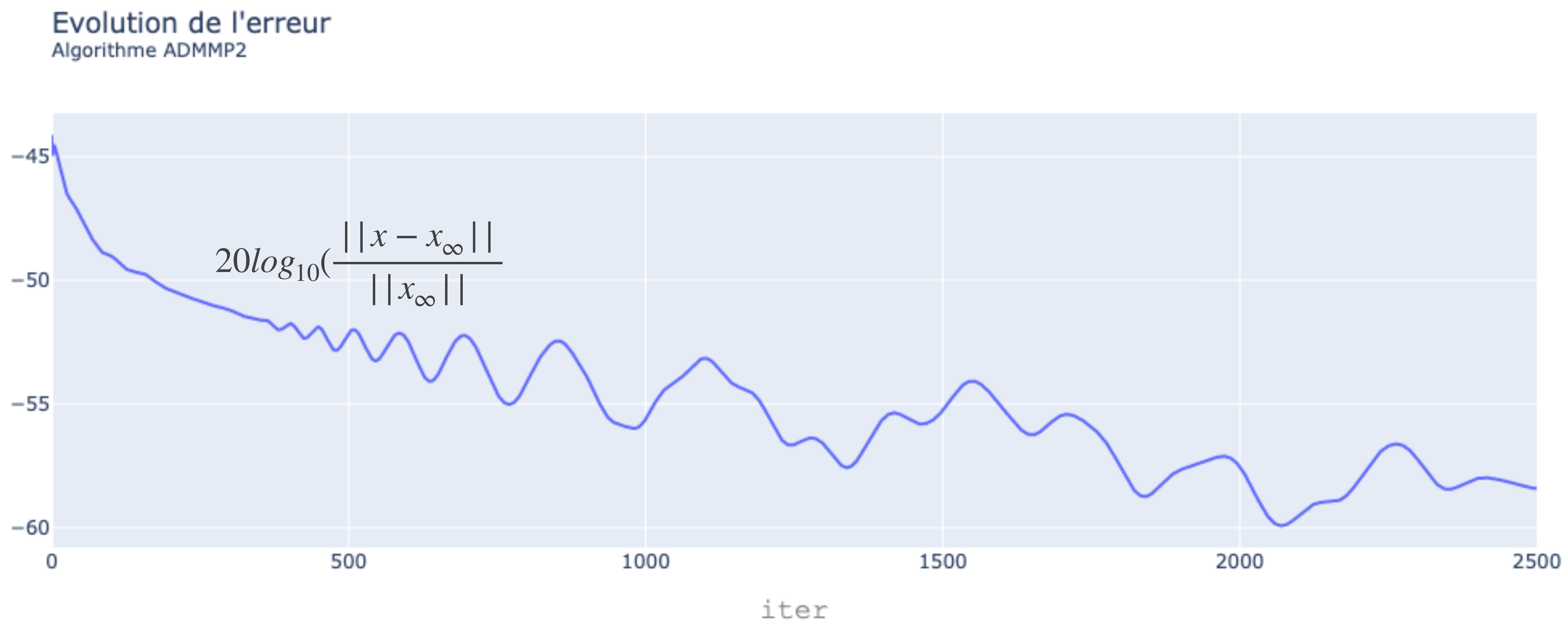
Paramètre	Valeur
λ	2E-17
μ	2E-04
ν	0.5

$$h = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Evolution du Lagrangien



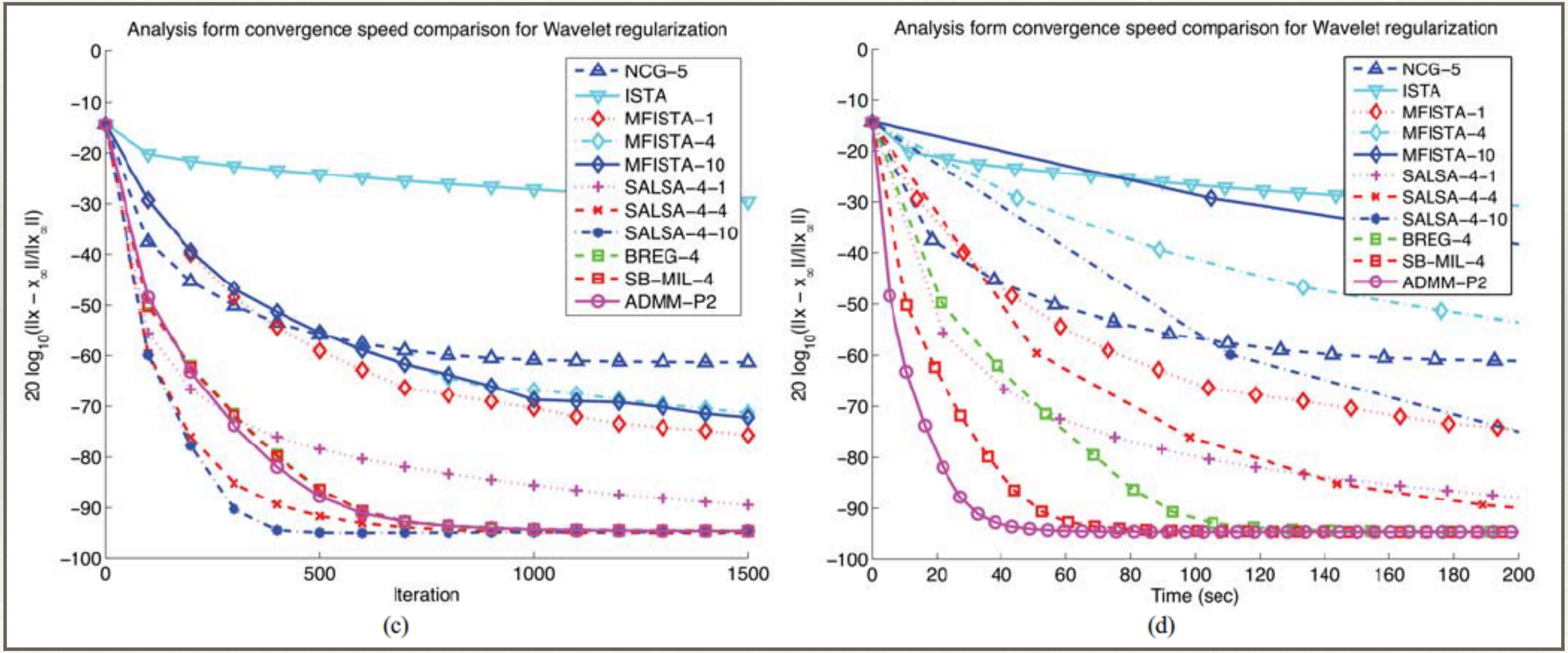
Evolution de l'erreur



$$20log_{10}(\frac{||x - x_\infty||}{||x_\infty||}$$

—> Précision sur x_∞ !

Evolution de l’erreur



(c) (d)

Reconstruction

Image floutée (entrée)

Vraie image

Image reconstruite

Commentaires

- Possibilité d'utiliser la TV pour la régularisation (plus adaptée à notre image)
- Reconstruction sans hypothèse circulante avec d'aussi bons résultats