

*Accelerated Edge-Preserving Image Restoration Without Boundary Artifacts*

---

# Restauration d'images

Victor CILLEROS

Jérémy JEAN

Maxime GEY



# Présentation du problème

- ❖ Image convoluée avec un flou gaussien
- ❖ Résolution avec des conditions circulaires au bord de l'image : peu réaliste
- ❖ L'approche proposée résout le problème dans un cas plus général





# Formulation et Résolution



# Formulation

❖ On cherche à minimiser :

$$x = \operatorname{argmin}_x \{ \psi(x) = J(x) + \lambda \phi(Rx) \}$$

↑ Terme de régularisation

$$J(x) = \left\| y - TAx \right\|_2^2$$

Image floutée      Opérateur de masque      Image reconstruite      matrice de flou circulante


C'est un problème d'optimisation non-trivial -> plusieurs stratégies de résolution



# Résolution

## ❖ Approches existante : SALSA/SPLIT-BELLMAN

- Séparation du terme de régularisation avec une variable auxiliaire

**SALSA**       $u = x$              $\min_{x,u} \{ \psi(x, u) = \frac{1}{2} \| y - TAx \|_2^2 + \lambda \phi(Ru) \}$

**SPLIT-BELLMAN**       $v = Rx$              $\min_{x,v} \{ \psi(x, v) = \frac{1}{2} \| y - TAx \|_2^2 + \lambda \phi(v) \}$

- Expression du Lagrangien associé (AL : Augmented Lagrangian)

$$L(x, u, \mu, \eta) = \psi(x, u) + \frac{\mu}{2} \| u - x - \eta \|_2^2 \qquad L(x, v, \mu, \eta) = \psi(x, v) + \frac{\mu}{2} \| v - Rx - \eta \|_2^2$$



---

# Résolution

---

❖ Approche proposée : ADMM-P2

- Séparation du terme de régularisation avec deux variable auxiliaire

$$\min_{x, u_0, u_1} \{ \psi(u_0, u_1) = \frac{1}{2} \| y - Tu_0 \|_2^2 + \lambda \phi(u_1) \} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} u_0 = Ax \\ u_1 = Rx \end{array}$$

- Forme compacte

$$\min_{x, w} \psi(w) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} w = Dx \\ D = [A, R]^T \\ x = [u_0, u_1]^T \end{array}$$



---

# Résolution

---

❖ **Approche proposée : ADMM-P2**

- Expression du Lagrangien

$$L(x, w, \gamma) = \psi(w) + \frac{\mu}{2} \left\| w - Dx - \eta \right\|^2$$



# Implémentation



# Algorithme

## ❖ ADMM-P2

*Select*  $x^0, \nu > 0, \mu > 0$

*Precompute*  $T'y$

*Set*  $\eta_0^{(0)} = 0, \eta_1^{(0)} = 0, k = 0$

*Repeat*

$$u_0^{k+1} = (T'T + \mu I_N)^{-1} [T'y + \mu(Ax^{(k)} + \eta_0^{(k)})]$$

$$u_1^{(k+1)} = \text{shrink}\{Rx^{(k)} + \eta_1^{(k)}, \frac{\lambda}{\mu}\}$$

$$x^{(k+1)} = H_\nu^{-1} [A'(u_0^{(k+1)} - \eta_0^{(k)} + \nu R'(u_1^{(k+1)} - \eta_1^{(k)}))]$$

$$\eta_0^{(k+1)} = \eta_0^{(k)} - (u_0^{(k+1)} - Ax^{(k+1)})$$

$$\eta_1^{(k+1)} = \eta_1^{(k)} - (u_1^{(k+1)} - Rx^{(k+1)})$$

$$k = k + 1$$

Avec

$$H_\nu = A'A + \nu R'R$$



# Implémentation

## ❖ Propriétés de matrice circulaire

Pour A une matrice circulante :  $A = F^{-1}DF$

Avec D matrice diagonale

Opérateur h de convolution  $h = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$

On utilise par la suite :  $Ax = h \otimes x$

$= F^{-1}(F(h) \cdot F(x))$  Produit terme à terme

$= F^{-1}(\text{diag}(F(h)) \cdot F(x))$  Pré-compute



---

# Implémentation

---

- ❖ Pour chaque produit de matrice :

```
def fft_dot(self, x:np.ndarray, F:np.ndarray)->np.ndarray:  
    ...return np.fft.ifft2(np.multiply(F, np.fft.fft2(x))).real
```

```
def rfft_dot_adj(self, x:np.ndarray, F:np.ndarray)->np.ndarray:  
    ...return np.fft.irfft2(np.multiply(np.conj(F), np.fft.rfft2(x)))
```

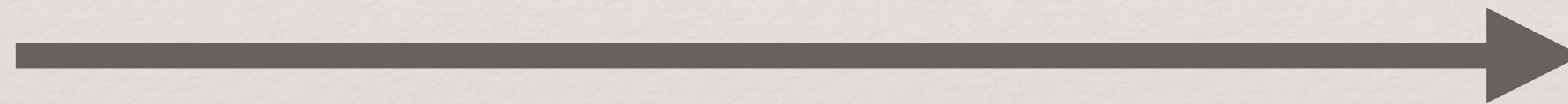


# Implémentation

- ❖ Régularisation : utilisation de « wavelet »  
Package pylops pour la fonction :



`pylops.signalprocessing.DWT2D(x.shape, wavelet="haar", level=1)`





# Résultats



# Paramètres de départ

- ❖ Choix des paramètres : en théorie convergence garantie indépendamment du choix

$$\nu_{min} = \operatorname{argmin}_{\mu} k(A'A + \nu R'R)$$

$$\nu\mu = 2^8 \frac{\lambda \nu_{min}}{x_{max}}$$



$$\mu_0 = 2^{-4}$$

$$\nu = 2^8 \frac{\lambda \nu_{min}}{\mu_0 x_{max}}$$

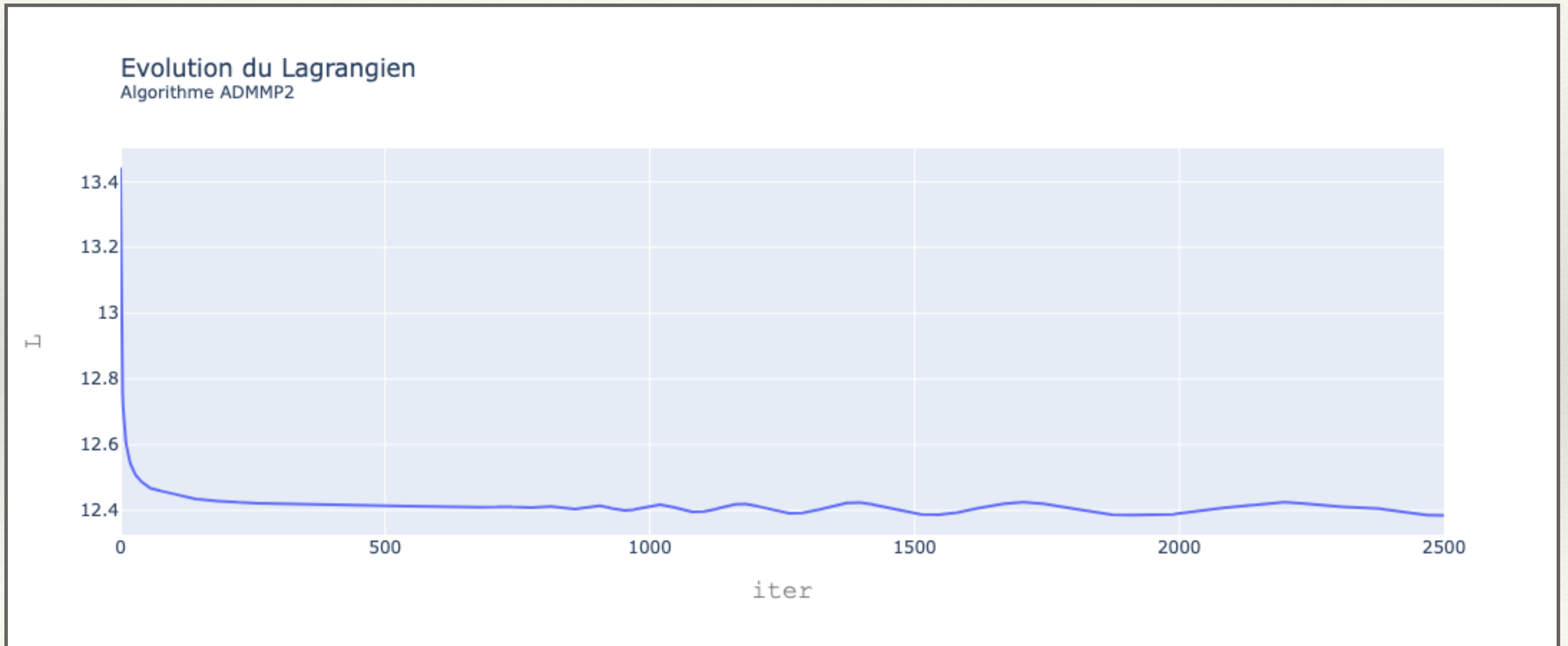
- ❖ Choix des paramètres : après quelques essais

Paramètre	Valeur
$\lambda$	2E-17
$\mu$	2E-04
$\nu$	0.5

$$h = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

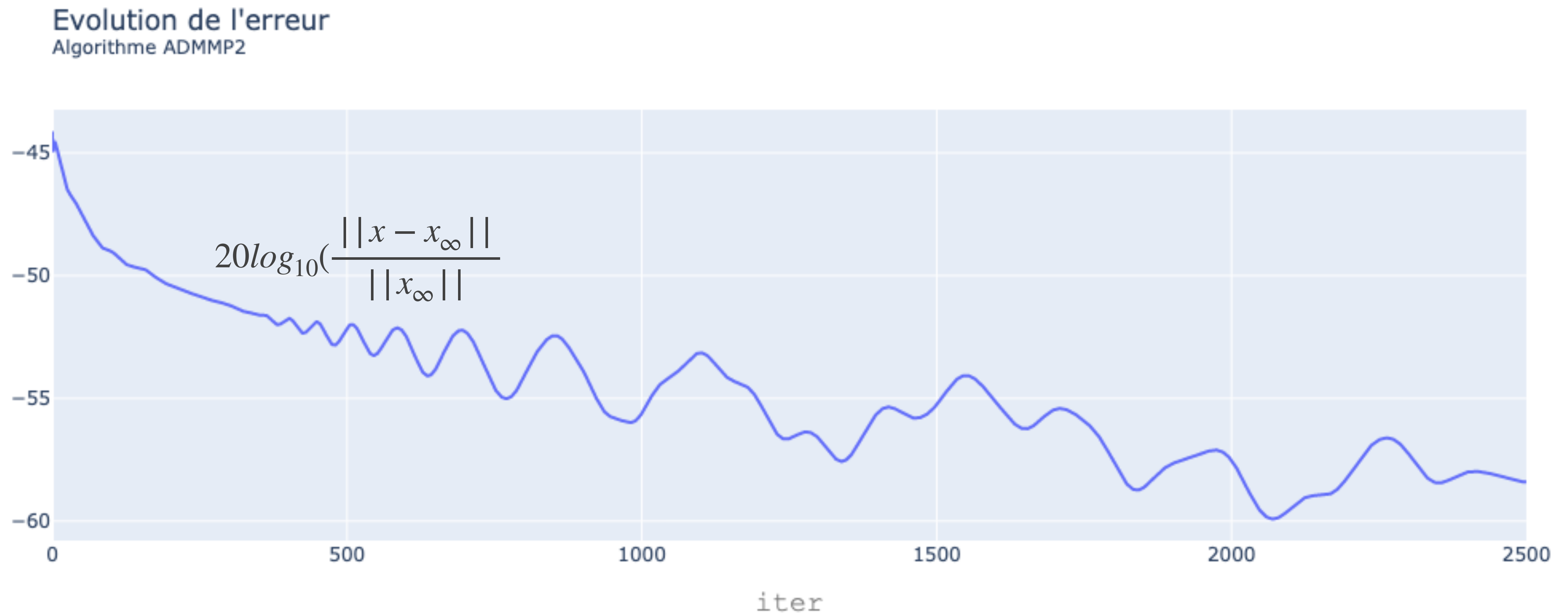


# Evolution du Lagrangien





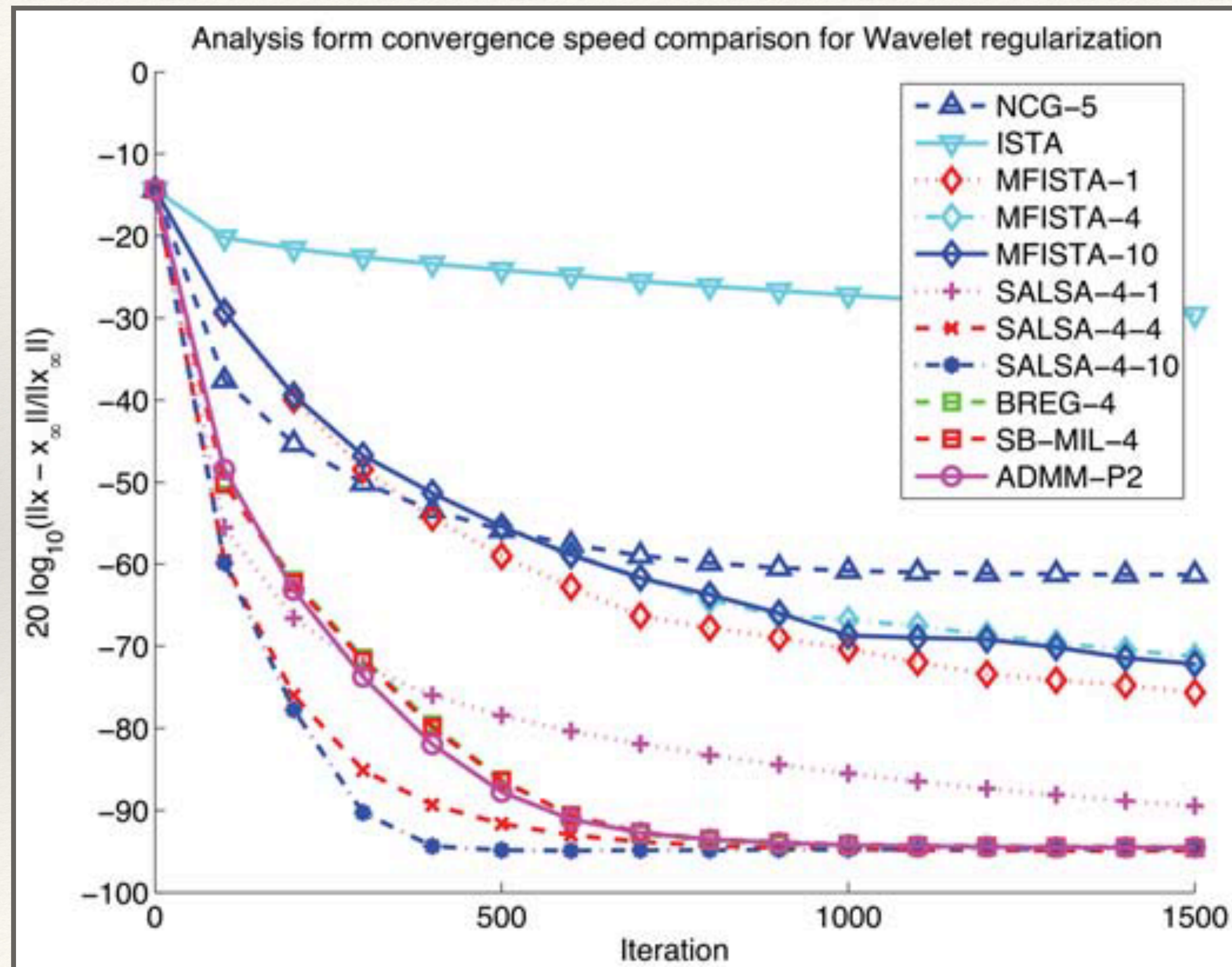
# Evolution de l'erreur



—> Précision sur  $x_{\infty}$  !



# Evolution de l'erreur





# Reconstruction



Image floutée (entrée)



Vraie image



Image reconstruite



---

# Commentaires

---

- ❖ Possibilité d'utiliser la TV pour la régularisation (plus adaptée à notre image)
- ❖ Reconstruction sans hypothèse circulante avec d'aussi bons résultats