Définition nabla, gradient, divergence, rotationnel, laplacien scalaire, laplacien vectoriel

Tous les vecteurs sont en coordonnées cartésiennes (x, y, z), soit A un scalaire et soit $\vec{u} = \left| \begin{array}{l} u_x \\ u_y \\ u_z \end{array} \right.$ un vecteur.

On définit l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ par :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right.}$$

On définit l'opérateur scalaire gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} A = \vec{\nabla} A = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial A}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} \\ \dfrac{\partial A}{\partial z} \end{array} \right.}$$

On définit l'opérateur vectoriel divergence div par :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}}$$

On définit l'opérateur vectoriel rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{array} \right.}$$

On définit l'opérateur scalaire laplacien Δ par :

$$\boxed{\Delta A = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} A) = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}$$

On définit l'opérateur vectoriel laplacien vectoriel $\vec{\Delta}$ par :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{u} = \left| \begin{array}{l} \Delta u_x \\ \\ \Delta u_y \\ \\ \Delta u_z \end{array} \right.}$$