

PHASE PORTRAIT AND TRAJECTORY

相图 相轨迹

教程视频: [https://www.bilibili.com/video/BV1ex411g7t3/?](https://www.bilibili.com/video/BV1ex411g7t3/?spm_id_from=333.788&vd_source=79f2249f524924ae622cbd2664a5848e)

[spm_id_from=333.788&vd_source=79f2249f524924ae622cbd2664a5848e](https://www.bilibili.com/video/BV1ex411g7t3/?spm_id_from=333.788&vd_source=79f2249f524924ae622cbd2664a5848e)

假设状态方程为:

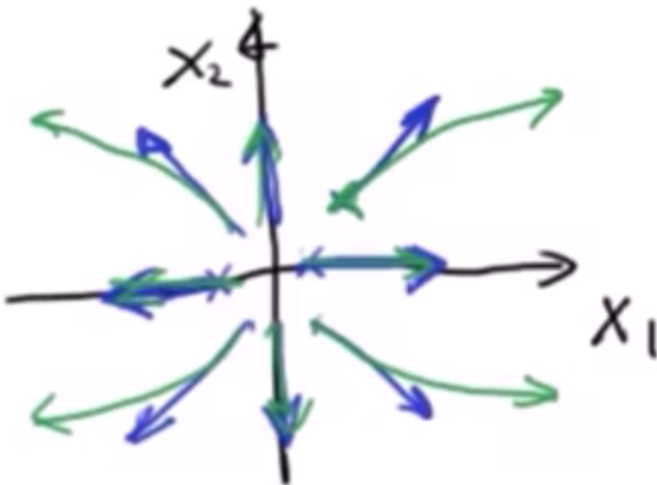
$$\frac{dx}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

令 $b = c = 0$, 则有:

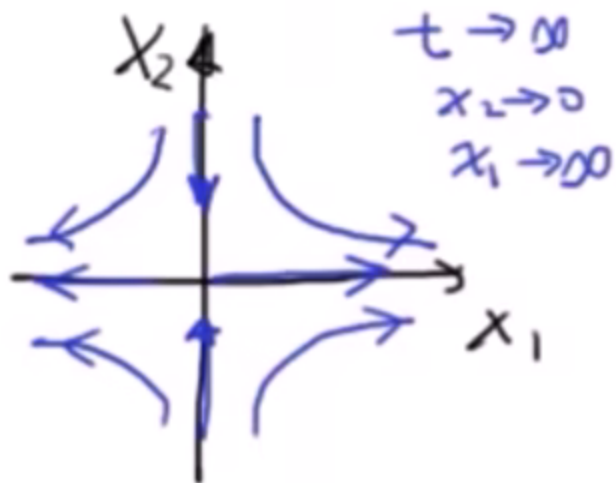
$$\dot{x}_1 = ax_1$$

$$\dot{x}_2 = dx_2$$

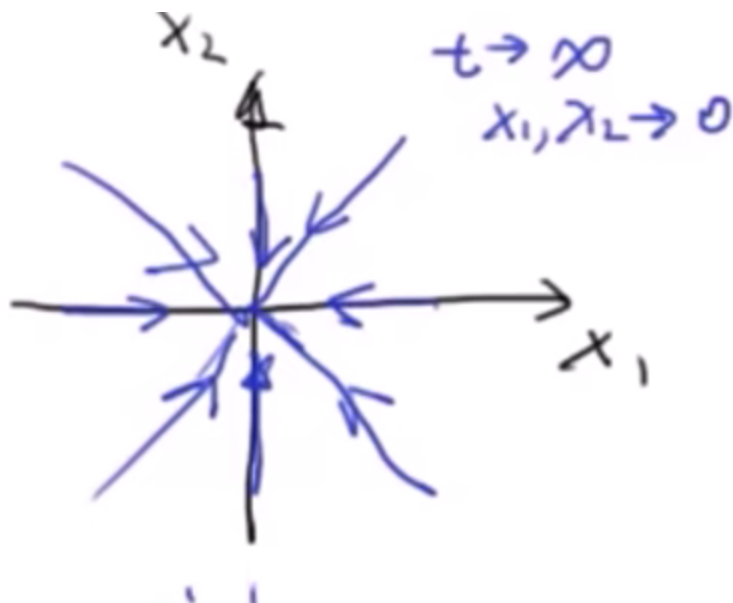
case1: Source 类型的相图 $a > 0, d > 0$



case2: Saddle 类型的相图 $a > 0, d < 0$



case3: Sink 类型的相图 $a < 0, d < 0$



General Form :

$$\dot{x} = Ax$$

where A is a 2×2 matrix.

Let

$$\begin{aligned}
 x &= Py \\
 \dot{y} &= \Lambda y \\
 P &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\
 \Lambda &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

example:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

① 求 λ :

$$|\lambda I - A| = 0, \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 9 + 8 = 0, \lambda = \pm 1$$

② 求 v :

$$[\lambda I - A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可得

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y \\
 x &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y
 \end{aligned}$$

这里可以看出，相图的形状是Saddle类型的。

Summary:

λ_1, λ_2	Phase Portrait	Stability
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Source	Unstable

λ_1, λ_2	Phase Portrait	Stability
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Saddle	Unstable
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Sink	Stable
$a = 0$	Center	Neutral
$a > 0$	Spiral Source	Unstable
$a < 0$	Spiral Sink	Stable

- **Source:** 当 λ_1 和 λ_2 都大于零时，系统的相图表现为源点，表示系统状态随着时间的推移远离平衡点，因此是不稳定的。
- **Saddle:** 当 λ_1 大于零且 λ_2 小于零时，系统的相图表现为鞍点，表示系统状态在某些方向上远离平衡点，而在其他方向上接近平衡点，因此是不稳定的。
- **Sink:** 当 λ_1 和 λ_2 都小于零时，系统的相图表现为汇点，表示系统状态随着时间的推移接近平衡点，因此是稳定的。
- **Center:** 当 $a = 0$ 时，系统的相图表现为中心，表示系统状态在平衡点附近循环，不稳定也不稳定。
- **Spiral Source:** 当 $a > 0$ 时，系统的相图表现为螺旋源，表示系统状态随着时间的推移以螺旋方式远离平衡点，因此是不稳定的。
- **Spiral Sink:** 当 $a < 0$ 时，系统的相图表现为螺旋汇，表示系统状态随着时间的推移以螺旋方式接近平衡点，因此是稳定的。