Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Substitua a integral cartesiana por uma integral equivalente em coordenadas polares. Em seguida, calcule a integral polar.

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\left(\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\,dydx$$

Qual o valor da integral?

Escolha uma:

- a. $\pi\ln(2)$
- b. $\pi\left(1-\ln(2)\right)$ ✓
- c. $-\pi\left(1+\ln(2)\right)$
- d. $\pi\left(1+\ln(2)\right)$
- e. $-\pi\left(1-\ln(2)\right)$

Sua resposta está correta.

***Resposta:***

Mudamos o sistema de coordenadas cartesianas para coordenadas polar:

Como $-1\leq x\leq 0$ e $-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq 0$

Logo os limites de integração será:

$\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$ e $0\leq r\leq 1$

Como: $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\sin(\theta)$

$x^2+y^2=r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)=r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)=r^2$

Substituímos $dydx$ por $rdrd\theta$:

Logo:

$=\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^1\left(\frac{2}{1+\sqrt{r^2}}\right)\,rdrd\theta$

A integral em relação a $r$ fica:

$=\int_0^1\left(\frac{2}{1+\sqrt{r^2}}\right)\,rdr$

$=2\int_0^1\left(\frac{r}{1+r}\right)\,dr$

Substituindo $u=1+r$:

$=2\int_1^2\left(\frac{u-1}{u}\right)\,du$

$=2\int_1^2\left(1-\frac{1}{u}\right)\,du$

$=2\left(1-\ln(2)\right)$

Logo, a integral em relação a $\theta$:

$$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2\left(1 - \ln(2)\right)\, d\theta$$

$$= \left[2\left(1 - \ln(2)\right)\theta\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \pi\left(1 - \ln(2)\right)$$

A resposta correta é: $\pi\left(1 - \ln(2)\right)$

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz\, dy\, dx$.

Resposta: 1

**Solução:**

Primeiramente integrando em relação a $z$ temos:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[x^2 + y^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 + y^2 + \frac{1}{3}\, dy\, dx$$

Em seguida integrando em relação a $y$ temos:

$$\int_0^1 \left[x^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{1}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 x^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2 + \frac{2}{3}\, dx$$

E por último integrando em relação a $x$ temos:

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

A resposta correta é: 1.

Questão **3**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral em coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(r^2\sin^2(\theta)+z^2\right)dzrdrd\theta.$$

Escolha uma:

- a. $\frac{2\pi}{3}$
- b. $\frac{3\pi}{2}$
- c. $\frac{\pi}{3}$ ✓
- d. $\frac{\pi}{6}$
- e. $\frac{\pi}{2}$

Sua resposta está correta.

**Resposta:**

$z=r$

$\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(r^2\sin^2(\theta)+r^2\right)dr=$

$=\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}r^2\,dr+\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}r^2\sin^2(\theta)\,dr=\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\left[r^2\sin^2(\theta)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{12}+r^2\sin^2(\theta)$

$\int_0^1\left(\frac{1}{12}+r^2\sin^2(\theta)\right)r\,dr=$

$=\int_0^1\frac{r}{12}+r^3\sin^2(\theta)dr=\int_0^1\frac{r}{12}dr+\int_0^1r^3\sin^2(\theta)dr=\frac{1}{12}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1+\sin^2(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$

$=\frac{1}{24}+\sin^2(\theta)\frac{1}{4}$

$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{24}+\sin^2(\theta)\frac{1}{4}\right)d\theta=$

$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{24}d\theta+\int_0^{2\pi}\sin^2(\theta)\frac{1}{4}d\theta=\left[\frac{1}{24}\theta\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{8}(2\pi-0)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{3}$

A resposta correta é: $\frac{\pi}{3}$

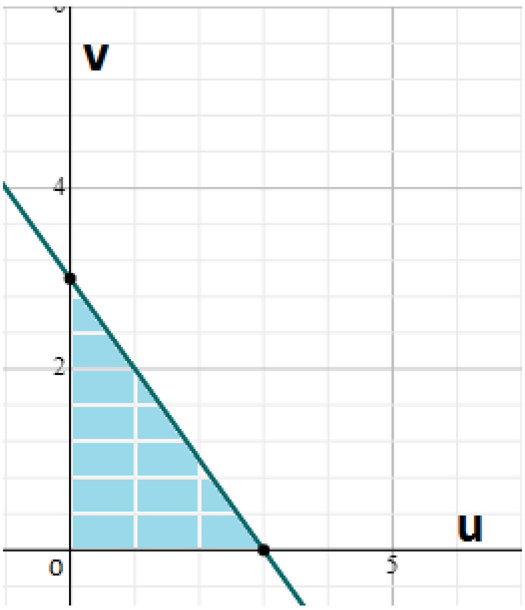
.

Questão **4**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a imagem pela transformação $u = x - y$, $v = 2x + y$ da região triangular com vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-2)$ no plano $xy$. Esboce a região transformada no plano $uv$. Depois compare com a figura abaixo.




Agora, resolva o sistema

$u = x - y$, $\quad v = 2x + y$

para $x$ e $y$ em termos de $u$ e $v$. Em seguida, encontre o valor do jacobiano $\partial(x,y)/\partial(u,v)$.

Resposta: 0,33333333333

**Primeira Solução:**

Temos que para $x = 0$ e $y = 0 \Rightarrow u = 0$ e $v = 0$.

Temos que para $x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow u = 0$ e $v = 3$.

E Temos que para $x = 1$ e $y = -2 \Rightarrow u = 3$ e $v = 0$.

**Segunda Solução:**

Temos que $u + v = 3x \Rightarrow x = \frac{u+v}{3}$ e temos que $v - 2u = 3y \Rightarrow y = \frac{v-2u}{3}$.
Então, temos que o jacobiano $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial(u)} & \frac{\partial(x)}{\partial(v)} \\ \frac{\partial(y)}{\partial(u)} & \frac{\partial(y)}{\partial(v)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

A resposta correta é: 0,3333.

Questão **5**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule $\int_C x\, ds$, onde $C$ é o segmento de reta $x = t$ , $y = \frac{t}{2}$, entre $(0, 0)$ e $(4, 2)$.

Escolha uma:

- a. $4\sqrt{5}$ ✓
- b. $2\sqrt{5}$
- c. $6\sqrt{5}$
- d. $5\sqrt{5}$
- e. $3\sqrt{5}$

Sua resposta está correta.

Sabendo que o segmento de reta é continuo sobre a curva $C$ a integral pode ser calculada por :

$$\int_C x\ ds = \int_a^b x(t)\ \|\vec{\mathbf{v}}(t)\|\ dt$$

Usando a parametrização $\vec{\mathbf{r}}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ temos que:

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{i} + \frac{t}{2}\mathbf{j}$$

Assim derivamos o $\vec{\mathbf{r}}(t)$ afim de obter o vetor $\vec{\mathbf{v}}(t)$ :

$$\vec{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

Cujo o módulo é dado por:

$$\|\vec{\mathbf{v}}(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

Simplificando,

$$\|\vec{\mathbf{v}}(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$\|\vec{\mathbf{v}}(t)\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Usando $x$ em função de $t$ como dado no enunciado:

$$x(t) = t$$

Substituimos então os dados encontrados na expressão inicial:

$$\int_a^b x(t)\ \|\vec{\mathbf{v}}(t)\|\ dt = \int_0^4 (t)\frac{\sqrt{5}}{2}\,dt$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{0^2}{2}\right)$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{4}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

A resposta correta é: $4\sqrt{5}$

.

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ao redor da circunferência $\vec{\mathbf{r}}(t) = (\cos(t))\mathbf{i} + (\sin(t))\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi.$

Resposta: 0

Solução

Incialmente, devemos calcular a velocidade:

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}.$

Agora, podemos calcular a circulação:

$\int_0^{2\pi}\left(\vec{\mathbf{F}}_1 \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)\,dt$

$= \int_0^{2\pi}(\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j}) \cdot (-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j})\,dt$

$= \int_0^{2\pi}(-\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t))\,dt$

$= \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$

A resposta correta é: 0.

Questão **7**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} \sin(y)\cos(x)\,dx + \cos(y)\sin(x)\,dy + \,dz$

Resposta: 1

**Resposta:**

A forma diferencial de $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ é exata em um domínio convexo, se e somente se :

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \,df$$

Onde:

$$M\,dx = sen(y)\,cos(x)\,dx$$

$$N\,dy = cos(y)\,sen(x)\,dy$$

$$P\,dz = 1\,dz$$

Calculando os diferenciais da integral acima temos:

$$\frac{\partial\,M}{\partial y} = \frac{\partial\,sen(y)\,cos(x)}{\partial y} = cos(x)\,cos(y)$$

$$\frac{\partial\,M}{\partial z} = \frac{\partial\,sen(y)\,cos(x)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\,N}{\partial x} = \frac{\partial\,sen(x)\,cos(y)}{\partial x} = cos(x)\,cos(y)$$

$$\frac{\partial\,N}{\partial z} = \frac{\partial\,sen(x)\,cos(y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\,P}{\partial x} = \frac{\partial\,(1)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\,P}{\partial y} = \frac{\partial\,(1)}{\partial y} = 0$$

Logo observamos que a condição é satisfeita e o diferencial de $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ definida inicialmente é exata.

$$\vec{\mathbf{F}}(x) = sen(y)\,cos(x)\mathbf{i} + sen(x)\,cos(y)\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M = sen(y)\ cos(x)$$

Derivando em relação a $x$ , temos:

$$f(x,y,z) = sen(x)\ sen(y) + g(y,z)$$

Derivando em relação a $y$ , temos:

$$f_y(x,y,z) = sen(x)\ cos(y) + g_y(y,z)$$

$$f_y(x,y,z) = N = sen(x)\ cos(y)$$

Assim temos que $g(y,z) = 0$. Então integrando em relação a $y$, temos:

$$f(x,y,z) = sen(x)\ sen(y) + h(z)$$

Derivando em relação a $z$:

$$f_z(x,y,z) = h'(z) = 1$$

Derivando em relação a $z$, temos:

$$f_z(x,y,z) = h(z) = z + C$$

Logo,

$$f(x,y,z) = sen(x)\ sen(y) + z + C$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = f(0,1,1) - f(1,0,0)$$

$$(0+1) - (0+0) = 1$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = 1$$

A resposta correta é: 1.

Questão **8**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre o trabalho realizado por $\vec{\mathbf{F}} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x2y^2\mathbf{j}$ para mover uma partícula uma vez em sentido anti-horário ao redor da fronteira da região “triangular” no primeiro quadrante delimitada superiormente pelo eixo $x$, a reta $x = 1$ e a curva $y = x^3$.

Escolha uma:

- a. $\frac{2}{33}$ ✓
- b. $\frac{2}{39}$
- c. $\frac{2}{35}$
- d. $\frac{2}{37}$
- e. $\frac{2}{31}$

Sua resposta está correta.

**Resposta:**

Sendo $\vec{\mathbf{F}}$ um campo conservativo do tipo $\vec{\mathbf{F}} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ de derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}\, ds = \oint_C M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy$$

.

Aplicando o Teorema de Green com a fórmula Circulação Rotacional Tangencial, onde

Onde $M$ corresponde os componentes em $\mathbf{i}$ e $N$ os componentes em $\mathbf{j}$. Assim:

$$M = 2xy^3$$

$$N = 4x^2y^2$$

Para as derivadas parciais teremos:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

Da curva $C$ obtemos as variações de $x$ e $y$ onde:

$$0 < x < 1$$

$$0 < y < x^3$$

Substituindo os dados na fórmula de Circulação Rotacional e resolvendo a integral obtemos:

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}\, ds = \int_0^1 \int_0^{x^3} 8xy^2 - 6xy^2\; dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2\; dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left. \frac{2xy^3}{3} \right|_0^{x^3} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x(x^3)^3}{3}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^{10}}{3}\, dx$$

$$= \left. \frac{2x^{11}}{33} \right|_0^1$$

$$= \frac{2}{33}$$

A resposta correta é: $\frac{2}{33}$

.

Questão **9**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual parametrização do **cilindro parabólico entre planos**, cosiderando a superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$?

Escolha uma:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$. ✓
- b. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.
- c. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.
- d. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.
- e. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.

Sua resposta está correta.

Resposta:

Para iniciarmos, a questão nos dá que a superfície cortada do cilindro parabólico é definida por: $z = 4 - y^2$.

Para prosseguir com a parametrização, podemos deixar o vetor $\vec{\mathbf{r}}$ ser uma função de $x$ e $y$, logo obtemos:

$\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$.

A seguir, com o vetor $\vec{\mathbf{r}}$ obtido, e com o valor de $z = 0$ dada na questão, podemos substituir na função $z = 4 - y^2$, logo:

$0 = 4 - y^2$

$y^2 = 4$

$y = \sqrt{4}$

$y = -2$ e $y = 2$

Onde $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$.

.

Questão **10**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma:

- a. $\frac{\pi a^2}{6}$
- b. $\frac{\pi a^3}{6}$ ✓
- c. $\frac{\pi a^4}{4}$
- d. $\frac{\pi a^2}{3}$
- e. $\frac{\pi a^4}{5}$

Sua resposta está correta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta) + (a \cos\phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que $\phi$ e $\theta$ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a $\phi$ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a $\theta$ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\mathbf{k}.$

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3 \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a \cos\phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada $S$ na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi.$$

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$

.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

O universal pelo regional.

# Mais informações

UFC - Sobral

EE- Engenharia Elétrica