Iniciado em	quarta-feira, 28 jun. 2023, 19:43
Estado	Finalizada
Concluída em	quarta-feira, 28 jun. 2023, 19:49
Tempo empregado	6 minutos 48 segundos
Notas	1,00/6,00
Avaliar	**1,67** de um máximo de 10,00(**16,67**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy - \left(\frac{y}{z^2}\right) dz.$$

Resposta: 0

Resolução:

$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) dy - \left(\frac{y}{z^2}\right) dz$

A partir da integral dada teremos que:

$M = \frac{1}{y}$

$N = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$

$P = \left(-\frac{y}{z^2}\right)$

Como :

$\frac{\partial}{\partial y}(M) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}(N) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}(P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial}{\partial z}(N) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial}{\partial z}(M) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(P) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = 0$

A função na forma diferencial é exata.

Como $\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(M)$, teremos:

$\int \frac{\partial}{\partial x}(f) = \int (M)\, dx = \int \frac{1}{y}\, dx = \frac{x}{y} + g(y,z)$

Derivando $f(x,y,z)$ em relação à y:

$\frac{\partial}{\partial y}(f) = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(g)$

Como $\frac{\partial}{\partial y}(f) = N$ teremos:

$-\frac{x}{y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(g) = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}(g) = \frac{1}{z}$

$\int \frac{\partial}{\partial y}(g) = \int \frac{1}{z}\, dy$

$g(x,y) = \frac{y}{z} + h(z)$

Logo:

$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + h(z)$

Derivando $f(x,y,z)$ em relação à z:

$\frac{\partial}{\partial z}(f) = -\frac{y}{z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(h)$

Como $\frac{\partial}{\partial z}(f) = P$ teremos:

$-\frac{y}{z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(h) = -\frac{y}{z^2}$
$\frac{\partial}{\partial z}(h) = 0$

Integrando $\frac{\partial}{\partial z}(h)$, teremos $h(z) = C$, em que C é uma constante.

Assim $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C$

Resolvendo a Integral:
$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{z}\right) - \left(\frac{x}{y^2}\right) dy - \left(\frac{y}{z^2}\right) dz$
$= f(2, 2, 2) - f(1, 1, 1)$
$= \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + C\right) = 0$

A resposta correta é: 0

Questão **2**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Use o terema de Green para resolver a integral $\oint_C 6y + xdx + (y + 2x)dy$ sobre a circunferência $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

Escolha uma opção:
- a. -12π
- b. -6π
- c. -11π
- d. -8π
- e. -16π

Sua resposta está incorreta.

Resposta:

Logo $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

Passo 1: Transforma a integral de linha em integral dupla

$$\int_C (6y + x)dx + (y + 2x)dy = \iint_C \left(\frac{\rho N}{\rho x}\right) - \left(\frac{\rho M}{\rho y}\right) dx\, dy$$

$$\frac{\rho N}{\rho x} = \frac{\rho y + 2x}{\rho x} = 2$$

$$\frac{\rho M}{\rho y} = \frac{\rho 6y + x}{\rho y} = 6$$

$$\oint_C M(8y + x)dx + N(y + 2x)dy \iint_R (2 - 6)\, dx\, dy \Rightarrow \iint_R -4dxdy$$

Usando a área do círculo para concluir a integral temos:

$$\iint_R -4dxdy = -4\pi r^2 = -4\pi(2)^2 = -16\pi$$

A resposta correta é: -16π

Questão **3**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Qual a parametrização do plano $x + y + z = 1$ inclinado dentro de um cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} + (u\cos\, v)\mathbf{j} - (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.
- b. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} - (u\cos\, v)\mathbf{j} + (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.
- c. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} + (u\cos\, v)\mathbf{j} + (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.
- d. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 + u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} + (u\cos\, v)\mathbf{j} + (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.
- e. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} - (u\cos\, v)\mathbf{j} - (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

Sua resposta está incorreta.

Solução:

De maneira semelhante às coordenadas cilíndricas, mas trabalhando no plano yz em vez do plano xy.

$y = u\cos\, v$ e $z = u\sin\, v$, onde $u = \sqrt{y^2 + z^2}$ e v é o angulo formado por (x, y, z),$(y, 0, 0)$ e $(x, y, 0)$, com $(x, 0, 0)$ como vértice.

Sendo $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow x = 1 - u\cos\, v - u\sin\, v$.

Substituindo x, y e z na função de superfície, temos:

$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} + (u\cos\, v)\mathbf{j} + (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\, v - u\sin\, v)\mathbf{i} + (u\cos\, v)\mathbf{j} + (u\sin\, v)\mathbf{k},$ com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

Questão **4**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ através do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Obs: o campo está para fora (normal no sentido oposto ao eixo z) atravessando o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{4\pi}{3}$
- b. $\frac{3\pi}{2}$
- c. $\frac{2\pi}{5}$
- d. $\frac{5\pi}{3}$
- e. $\frac{2\pi}{3}$

Sua resposta está incorreta.

Resposta:

Utilizamos a parametrização $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\ \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Temos que:

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$

Agora calculamos o determinante dessas derivadas:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

$= r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin^2(\theta)\mathbf{k} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\cos^2(\theta)\mathbf{k}$

$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$

Sabendo que o fluxo atravéz da superficie é:

$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} \|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|\, d\theta dr$

Que:

$\frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} = \vec{\mathbf{n}}$

E que o campo vetorial é:

$\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k} = \left(r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\right)\mathbf{i} - r\mathbf{k}$

Calculamos:

$\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\| = \sqrt{\left(r\cos(\theta)\right)^2 + \left(r\sin(\theta)\right)^2 + (-r)^2}$

$= \sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) + r^2}$

$= r\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} \|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\| =$

$= \left(\frac{r\cos(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{r\sin(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{r}{r\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\left(r\sqrt{2}\right)$

$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$

Sendo assim, calculamos o produto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|$

$= (r^2\cos(\theta)\sin(\theta),\ 0,\ -r)\cdot(r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ -r)$

$= r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2$

Agora calculamos a integral:

$\int_0^{2\pi}\int_0^1\ r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\ drd\theta$

$= \cos^2(\theta)\sin(\theta)\int_0^1\ r^3dr + \int_0^1 r^2dr$

$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 + \cos^2(\theta)\sin(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}$

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

Para $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$ precisaremos utilizar uma substituição:

Chamaremos $u = \cos(\theta)\ \Rightarrow\ du = -\sin(\theta)\ d\theta$

$= -\frac{1}{4}\int u^2\ du$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{u^3}{3}\right] = -\frac{\cos^3(\theta)}{12} + C$

Retomando:

$= \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3(\theta)}{12}\right]_0^{2\pi}$

$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{12}\right) - \left(0 - \frac{1}{12}\right)$

$= \frac{2\pi}{3}$

A resposta correta é: $\frac{2\pi}{3}$

Questão **5**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Seja $\vec{\mathbf{n}}$ a normal unitária exterior da casca elíptica S: $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$, $z \geq 0$, e seja $\vec{\mathbf{F}} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}} \sin e^{\sqrt{xyz}}\mathbf{k}$. Encontre o valor de $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$.

- a. -4π
- b. -8π
- c. 8π
- d. -6π
- e. 6π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Temos $x = 3\ \cos\ t$ e $y = 2\ \sin\ t$

$\vec{\mathbf{F}} = (2\ \sin\ t)\mathbf{i} + (9\ \cos^2\ t)\mathbf{j} + (9\ \cos^2\ t + 16\ \sin^4\ t)\ \sin\ e^{\sqrt{(6\ \sin\ t\ \cos\ t)(0)}}\mathbf{k}$

$r = (3\ \cos\ t)\mathbf{i} + (2\ \sin\ t)\mathbf{j}$, então $d\vec{\mathbf{r}} = (-3\ \sin\ t)\mathbf{i} + (2\ \cos\ t)\mathbf{j}$

$\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = -6\ \sin^2\ t + 18\ \cos^3\ t$

$\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} (-6\ \sin^2\ t + 18\ \cos^3\ t)\, dt = \left[-3t + \frac{3}{2}\sin\ 2t + 6(\sin\ t)(\cos^2\ t + 2)\right]_0^{2\pi} = -6\pi.$

A resposta correta é:
-6π

Questão **6**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Cilindro e paraboloide $\vec{\mathbf{F}} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, D: A região dentro do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ entre o plano $z = 0$ e o paraboloide $z = x^2 + y^2$.

- a. 16
- b. 14 ✖
- c. -14
- d. -16
- e. -8π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Inicialmente calculamos a derivada parcial

$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x,\backslash, \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = x - 1$, como $z = x^2 + y^2$, em que $z = r^2$ em coordenadas cilíndricas. Seguimos calculando a integral tripla da divergência para encontrarmos o fluxo:

$Flux = \int\int_D \int (x-1)\, dz\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} (r\ \cos\ \theta - 1)\, dz\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3\ \cos\ \theta - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\cos\ \theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{32}{5}$

A resposta correta é:
-8π