Álgebra Linear
Aula 15

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 12

Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (m_1, m_5, m_6)$. Faça o que se pede:

1. Calcule a norma de $\overrightarrow{v}$.
2. Normalize $\overrightarrow{v}$.
3. Escreva $\overrightarrow{v}$ como combinação linear dos vetores canônicos.

Gabarito

1. $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{m_1^2 + m_5^2 + m_6^2}$.
2. $\overrightarrow{v}' = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.
3. $\overrightarrow{v} = m_1 e_1 + m_5 e_2 + m_6 e_3$.

Distância entre pontos Vs Norma de vetores

Sejam A e B pontos do $\mathbb{R}^n$. A distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B é definida como a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Distância entre pontos Vs Norma de vetores

Sejam A e B pontos do $\mathbb{R}^n$. A distância $d(A,B)$ entre os pontos A e B é definida como a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Distância entre pontos

Temos que

$$d(A,B) = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + \cdots + (B_n - A_n)^2}.$$

Exemplo 5

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 0)$.

Exemplo 5

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 0)$.

Exemplo 6

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$.

Produto Interno entre Vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. O produto interno entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é definido como

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|\|v\| \cos\theta = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemplo 7

Calcule

1. $\overrightarrow{(1,1)} \cdot \overrightarrow{(1,-1)}$;
2. $\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(-1,-2)}$;
3. $\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{\alpha(1,2)}$ para um escalar $\alpha \neq 0$.

Teorema (3.2.2)

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e α um escalar.

1. $\|v\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$;
2. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$;
3. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
4. $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$;
5. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0$, sendo $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ se e somente se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Ângulo entre vetores

Dados vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$, se

$$-\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \leq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

então ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser calculado como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Ângulo entre vetores

Dados vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$, se

$$-\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \leq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

então ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser calculado como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos que

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|.$$

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$;

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$;
2. $\operatorname{dist}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq \operatorname{dist}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})+\operatorname{dist}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$.

Exemplo

Seja P um paralelogramo qualquer de quatro lados. Mostre que a soma dos quadrados das diagonais é igual a soma dos quadrados dos lados.

Exemplo

Seja P um paralelogramo qualquer de quatro lados. Mostre que a soma dos quadrados das diagonais é igual a soma dos quadrados dos lados.

Teorema (3.2.6)

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$ então

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2).$$

Teorema (3.2.7)

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar, então

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2.$$

Produto Escalar vs Produto de Matrizes

Forma $\overrightarrow{u}$	Forma $\overrightarrow{v}$	Produto Escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
Coluna	Coluna	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}$
Coluna	Linha	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}$
Linha	Coluna	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}^T$
Linha	Linha	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}^T$

Produto Escalar vs Produto de Matrizes

Forma $\overrightarrow{u}$	Forma $\overrightarrow{v}$	Produto Escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
Coluna	Coluna	$\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T\overrightarrow{u}$
Coluna	Linha	$\overrightarrow{u}^T\overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}$
Linha	Coluna	$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T\overrightarrow{u}^T$
Linha	Linha	$\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{u}^T$

Proposição

Assumindo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como vetores coluna em $\mathbb{R}^b$ temos para toda matriz quadrada A de tamanho n

$$A\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot A^T\overrightarrow{v};$$

Produto de Matrizes

Sejam A uma matriz quadrada de tamanho n com vetores linhas $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ e B uma matriz quadrada de tamanho n com vetores colunas $\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n$ temos

$$AB = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_n \\ \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overrightarrow{a}_n \cdot \overrightarrow{b}_n & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_n \cdot \overrightarrow{b}_n \end{bmatrix}$$