Iniciado em	sexta-feira, 9 jun. 2023, 18:55
Estado	Finalizada
Concluída em	sábado, 10 jun. 2023, 11:30
Tempo empregado	16 horas 34 minutos
Avaliar	**8,00** de um máximo de 10,00(**80**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização do plano $x + y + z = 1$ inclinado dentro de um cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} - (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.
- b. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} - (r\sin\,\theta)\mathbf{j} - (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.
- c. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$. ✔
- d. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} - (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.
- e. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 + r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

Sua resposta está correta.

Solução:

$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$.

Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\,\theta$ e $y = r\sin\,\theta$, substituindo em z, temos $z = 1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta$.

Substituindo x, y e z na função de superfície, temos:

$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da calota cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Escolha uma opção:

a. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ✔

b. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

c. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 + r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

d. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

e. $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Sua resposta está correta.

Solução:

A coordenada cilíndrica fornece uma parametrização.

Um ponto no cone tem $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$;

como $x^2 + y^2 = r^2$, então $z^2 = 9 - \left(x^2 + y^2\right) = 9 - r^2$

assim, $z = \sqrt{9 - r^2}$, para $z \ge 0$.

Tomando $u = r$ e $v = \theta$, temos a parametrização:

$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$

Para o domínio de r temos que:

$z = \sqrt{9 - r^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

logo,

$x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 9$

$2(x^2 + y^2) = 9$

$2r^2 = 9$

$r^2 = \dfrac{9}{2}$

$r = \sqrt{\frac{9}{2}}$

$r = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

$0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

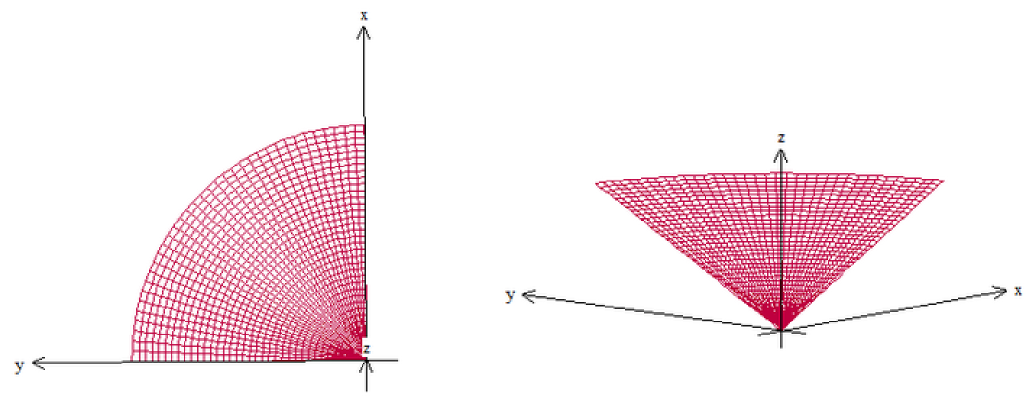
A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Questão **3**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção no primeiro octante do cone $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$? (Veja a figura abaixo)



Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.
- b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 6$. ✖
- c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.
- d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.
- e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.

Sua resposta está incorreta.

Solução:

i) Para parametrizarmos a função precisamos lembrar que podemos utilizar coordenadas cilíndricas com um ponto típico $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

Como a equação do cone dada na questão é: $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, concluímos que $z = \frac{r}{2}$.

Então $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$.

ii) Agora iremos encontrar as variações de z de r e θ.

Como é mostrado na questão o cone é cortado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$, portanto:

Para z temos: $0 \le z \le 3$;

Para r temos: Se $z = \frac{r}{2} \to 0 \le \frac{r}{2} \le 3$;

Para θ temos: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, pois a questão pede o setor do cone no primeiro octante, demonstrado nos gráficos abaixo:

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = 2$, $y = b$ e $z = c$.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{3}$
- b. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{2}$
- c. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$ ✔
- d. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{7}$
- e. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{5}$

Sua resposta está correta.

Nas faces dos planos de coordenadas, $G(x, y, z) = 0 \Rightarrow$ a integral sobre essas faces é 0.

Na face $x = a$, temos $F(x, y, z) = x = a$ e $G(x, y, z) = G(a, y, z) \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{i}$ e $\nabla f = \mathbf{i} \Rightarrow ||\nabla f|| = 1$ e $||\nabla f \cdot \mathbf{p}|| = 1 \Rightarrow d\sigma = dy\, dz \Rightarrow \iint\limits_S G\, d\sigma = \iint\limits_S ayz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\, dydz = \frac{ab^2c^2}{4}$.

Na face $y = b$, temos $f(x, y, z) = y = b$ e $G(x, y, z) = G(x, b, z) = bxz \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{j}$ e $\nabla f = \mathbf{j} \Rightarrow ||\nabla f|| = 1$ e $||\nabla f \cdot \mathbf{p}|| = 1 \Rightarrow d\sigma = dx\, dz \Rightarrow \iint\limits_S G\, d\sigma = \iint\limits_S bxz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^a bxz\, dxdz = \frac{a^2bc^2}{4}$.

Na face $z = c$, temos $f(x, y, z) = z = c$ e $G(x, y, z) = G(x, y, c) = cxy \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{k}$ e $\nabla f = \mathbf{k} \Rightarrow ||\nabla f|| = 1$ e $||\nabla f \cdot \mathbf{p}|| = 1 \Rightarrow d\sigma = dy\, dx \Rightarrow \iint\limits_S G\, d\sigma = \iint\limits_S cxy\, d\sigma = \int_0^b \int_0^a cxy\, dxdy = \frac{a^2b^2c}{4}$.

Logo,

$\frac{ab^2c^2}{4} + \frac{a^2bc^2}{4} + \frac{a^2b^2c}{4} = \frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$

Assim sendo, $\iint\limits_S G(x, y, z)\, d\sigma = \frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$

A resposta correta é: $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ através da porção do plano $x + y + z = 2a$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a$, no plano xy.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{19a^4}{7}$
- b. $\frac{17a^4}{6}$
- c. $\frac{11a^4}{6}$
- d. $\frac{13a^4}{6}$ ✔
- e. $\frac{13a^4}{7}$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Para esse exercicio utilizaremos a equação do fluxo dada por:

$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$, onde $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y}{\| \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \|}$ e $d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \|\ dy\, dx.$

Como foi dado a variação de x e y descobriremos uma função de $f(x, y)$ dada pela equação $x + y + z = 2a$ onde:

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = (2a - x - y)$$

Assim $f(x, y) = (x)\mathbf{i} + (y)\mathbf{j} + (2a - x - y)\mathbf{k}$. Sabendo que:

$$\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{k} + \mathbf{j} + \mathbf{i}$$

Substituindo os dados na equação do fluxo obtemos:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y}{\| \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \|} \| \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \|\ dy\, dx$$

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot (\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y)\ dy\, dx = \int_0^a \int_0^a (2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\ dy\, dx$$

Substituindo o valor de z na integral

$$\int_0^a \int_0^a [(2xy + 2y(2a - x - y) + 2x(2a - x - y)]\ dy\, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^a (4ay - 2y^2 + 4ax - 2x^2 - 2xy)\ dy\, dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{4ay^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + 4ax - 2x^2 - \frac{2xy^2}{2} \right) \Big|_0^a\ dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{4a^3}{3} + 3a^2x - 2ax^2 \right)\ dx$$

$$= \left(\frac{4a^3x}{3} + \frac{3a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} \right) \Big|_0^a$$

$$= \left(\frac{4a^4}{3} + \frac{3a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} \right)$$

$$= \frac{13a^4}{6}$$

A resposta correta é: $\frac{13a^4}{6}$