

ERRATA

Exercício	onde se lê	leia-se																														
2.34	... sem o fato de que $J_n(1) \rightarrow 0...$	... com o fato que $J_n(1) \rightarrow 0...$																														
3.38	1º grau	2º grau																														
3.47	$x^2 - 0.0001x - 3.999$	$t^2 - 0.0001t - 3.999$																														
4.20	a)...dois dígitos... b)Refine a solução obtida em a).	a)...três dígitos... b) Refine uma vez a solução obtida em a).																														
4.36	...matriz simétrica $A$ é...	...matriz simétrica $A$ , positiva definida, é...																														
8.25	<table><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>-1</td><td><math>\alpha</math></td><td>5</td><td><math>\beta</math></td><td>7</td><td><math>\gamma</math></td><td>13</td></tr></table>	0	1	2	3	4	5	6	-1	$\alpha$	5	$\beta$	7	$\gamma$	13	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>-1</td><td><math>\alpha</math></td><td>5</td><td><math>\beta</math></td><td>7</td><td><math>\gamma</math></td><td>13</td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	6	f(x)	-1	$\alpha$	5	$\beta$	7	$\gamma$	13
0	1	2	3	4	5	6																										
-1	$\alpha$	5	$\beta$	7	$\gamma$	13																										
x	0	1	2	3	4	5	6																									
f(x)	-1	$\alpha$	5	$\beta$	7	$\gamma$	13																									
9.18	$\int_1^2 \frac{dx}{2(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$	$\int_1^2 \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{-x^2+3x-2}}$																														
9.29	0.45970	0.9460830704																														
9.45	$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+3}$	$\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+3}$																														
10.16	$x \in [0, 0.4]$ , $h = 0.1$	$x \in [0, 0.1]$ , $h = 0.05$																														
10.28	$y(1) = 0$	$y(1) = 1$																														
10.29	$xy''' - x^2y'' + (y')^2y = 0$	$y''' - x^2y'' + (y')^2y = 0$																														

## Capítulo 1

1.1) a) É espaço vetorial.

b) Não é espaço vetorial, pois não vale  $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ .

1.2) É combinação linear.

1.3) É combinação linear.

1.4) a) Os vetores são LI.

b) Os vetores são LI.

1.5)  $v = (4, -1, -1)^t$ .

1.6)  $v = 2f_1 - 10f_2 + 7f_3$ .

1.7)  $P_3(x) = \frac{19}{5} \begin{Bmatrix} 5 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} + 20 \begin{Bmatrix} 1 \\ -x \\ -x^2 \\ -x^3 \end{Bmatrix} + 4 \begin{Bmatrix} x^2 \\ 5x+3 \\ 2x^3-4 \end{Bmatrix}$ .

1.8) a)  $(x, y) = 1$ .

b)  $(x, y) = 8$ .

1.9) a)  $(f, g) = \frac{1}{4}$ .

b)  $(x, y) = -\frac{1}{12}$ .

1.11) a) Os vetores são ortogonais.

b) Os vetores são ortogonais.

c) Os vetores não são ortogonais.

1.12)  $m = 7$ .

1.13)  $m = \frac{-3 \pm \sqrt{14}}{5}$ .

1.14)  $f(x) = P_2(x) = k(-\frac{2}{3} + x^2)$ .

1.15)  $m = 2$ .

1.16)  $\|x\|_1 = 16$ ,  $\|x\|_\infty = 10$  e  $\|x\|_E = \sqrt{110}$ .

$\|y\|_1 = 24$ ,  $\|y\|_\infty = 12$  e  $\|y\|_E = 6\sqrt{5}$ .

1.17)  $(x, y) = 7$ ,  $\|x\| = \sqrt{6}$ ,  $\|y\| = \sqrt{30}$ ,  $d(x, y) = \sqrt{22}$  e

$\frac{x+y}{\|x+y\|} = \frac{\sqrt{2}}{10}(4, 3, 4, 3)^t$ .

1.19)  $(u, v) = -1$ .

$$\mathbf{1.20)} \quad \|A\|_1 = 5, \quad \|A\|_\infty = 5 \quad \text{e} \quad \|x\|_E = 3\sqrt{2}.$$

$$\|B\|_1 = 8, \quad \|B\|_\infty = 8 \quad \text{e} \quad \|B\|_E = \sqrt{43}.$$

$$\|C\|_1 = 21, \quad \|C\|_\infty = 24 \quad \text{e} \quad \|C\|_E = \sqrt{305}.$$

$$\mathbf{1.21)} \quad e_1^* = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} (1, 1, 1)^t, \quad e_2^* = \frac{\sqrt[3]{6}}{4} \left( \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right)^t, \quad e_3^* = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} (-1, 0, 1)^t.$$

$$\mathbf{1.22)} \quad e_1^* = \frac{\sqrt{5}}{5} (0, 2, 1, 0)^t, \quad e_2^* = \frac{\sqrt{30}}{6} \left( 1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right)^t, \quad e_3^* = \frac{\sqrt{10}}{5} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1 \right)^t,$$

$$e_4^* = \frac{\sqrt{15}}{4} \left( \frac{4}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{8}{15}, \frac{4}{5} \right)^t.$$

$$\mathbf{1.23)} \quad P_0^*(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad P_1^*(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x, \quad P_2^*(x) = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left( x^2 - \frac{1}{3} \right), \quad \dots$$

$$\mathbf{1.24)} \quad Q_0^*(x) = 1, \quad Q_1^*(x) = 2\sqrt{3} \left( x - \frac{3}{2} \right), \quad Q_2^*(x) = \sqrt{180} \left( x^2 - 3x + \frac{13}{6} \right), \quad \dots$$

$$\mathbf{1.25)} \quad x_0 = \left( -\frac{1}{3}, \frac{25}{3}, \frac{29}{3} \right)^t.$$

$$\mathbf{1.26)} \quad P_2(x) = \frac{29}{35}\{3\} + \frac{4}{5}\{x-3\} + \frac{12}{7}\{x^2-x\}.$$

$$\mathbf{1.29)} \quad \text{Para a matriz } A: P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2; \lambda_1 \simeq -0.3723 \text{ e } \lambda_2 \simeq 5.3723.$$

$$\text{Para } \lambda_1 \Rightarrow v \simeq (1, -0.6862)^t \text{ e para } \lambda_2 \Rightarrow v \simeq (1, 2.1862)^t.$$

$$\text{Para a matriz } B: P(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda + 2; \lambda_1 \simeq 0.7709, \quad \lambda_2 \simeq -0.3855 + 1.5639i$$

$$\text{e } \lambda_3 \simeq -0.3855 - 1.5639i.$$

$$\text{Para } \lambda_1 \Rightarrow v \simeq (0.6740, 0.4228, 1)^t,$$

$$\text{para } \lambda_2 \Rightarrow v \simeq (-3.6827 + 0.3581i, 1.3855 - 1.5639i, -1.7710 + 3.1278i)^t \text{ e}$$

$$\text{para } \lambda_3 \Rightarrow v \simeq (1.2089 - 1.5639i, 1.3855 + 1.5639i, -1.7710 - 3.1278i)^t.$$

$$\mathbf{1.30)} \quad \text{Os autovalores de } A \text{ são: } 4 \text{ e } 1, \text{ de } A^2 \text{ são: } 16 \text{ e } 1 \text{ e de } A^3 \text{ são: } 64 \text{ e } 1.$$

$$\mathbf{1.31)} \quad P(A) = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q(A) = \Theta.$$

$$\mathbf{1.32)} \quad P_3(x) = 4Q_0(x) - 2Q_1(x) + 5Q_2(x) - 3Q_3(x).$$

$$\mathbf{1.33)} \quad P_2(x) = \frac{143}{30}\{8\} - \frac{16}{15}\{3x+2\} + \frac{3}{5}\{5x^2-3x\}.$$

$$\mathbf{1.34)} \quad \mathbf{a)} \quad (x, y) = 4.$$

$$\mathbf{b)} \quad \|x\| = \sqrt{30}, \quad \|y\| = \sqrt{14}.$$

$$\mathbf{1.36)} \quad \mathbf{b)} \quad \|x\| = \sqrt{13}.$$

**1.38)**  $e_1^* = \frac{\sqrt{2}}{2} (1, 1, 0)^t$ ,  $e_2^* = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)^t$ ,  $e_3^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^t$ .

**1.39)**  $L_0(x) = 1$ ,  $L_1(x) = \sqrt{12}(x - \frac{1}{2})$ ,  $L_2(x) = \sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})$ ,  $\dots$ .

**1.40)**  $P_0(x) = 3$ ,  $P_1(x) = x - \frac{1}{2}$ ,  $P_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ .

**1.41)**  $v_0 = (1, 1, 0)^t$ .

**1.42)**  $P_1(x) = -2.2214 + 4.5948x$ .

**1.43)**  $P_2(x) = \frac{1}{15}\{3\} + \frac{4}{15}\{x - \frac{1}{2}\} + \frac{12}{7}\{x^2 - x + \frac{1}{6}\}$ .

**1.44)** Para a matriz  $A$ :  $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$ , e  
para a matriz  $B$ :  $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 5$ .

**1.45)**  $\lambda_1 - q$ ,  $\lambda_2 - q$ ,  $\dots$ ,  $\lambda_n - q$ .

**1.48)** Para as matrizes  $A$  e  $C$  os autovalores são reais e estão nos intervalos  $[0, 4]$  e  $[-1, 5]$ , respectivamente.

Para a matriz  $B$  os autovalores estão na reunião dos círculos  $C_1$  e  $C_2$  de centro em 1 e raio 2 e, centro em 4 e raio 1, respectivamente.

Para a matriz  $D$  os autovalores estão na reunião dos círculos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  de centro em 3 e raio 1, centro em 2 e raio 2 e centro em 0 e raio 1, respectivamente.

## Capítulo 2

**2.1)**  $x_1 = 0.4321 \times 10^4$ ,  $x_2 = -0.1352 \times 10^{-2}$ ,  $x_3 = 0.1256 \times 10^3$ ,  $x_4$  (overflow) e  $x_5 = 0.3400 \times 10^{-3}$ .

**2.2)**  $x_1$  (overflow),  $x_2$  (underflow),  $x_3 = 0.125 \times 10^3$ ,  $x_4$  (overflow),  $x_5$  (underflow).

**2.3)**  $x_1 = (100010)_2$ ,  $x_2 = (0.0010)_2$ ,  $x_3 = (100001.00111\dots)_2$ .

**2.4)**  $x_1 = (55)_{10}$ ,  $x_2 = (0.34375)_{10}$ ,  $x_3 = (3.3125)_{10}$ .

**2.5)**  $x_1 = (30)_5$ ,  $x_2 = (0.2132\dots)_5$ ,  $x_3 = (24.02331\dots)_5$ .

**2.6)** a) 145 números. As formas da mantissa são:

0.100, 0.101, 0.102, 0.110, 0.111, 0.112, 0.120, 0.121, 0.122, 0.200, 0.201, 0.202, 0.210, 0.211, 0.212, 0.220, 0.221, 0.222.

As formas de  $\beta^e$  são:  $3^{-2}$ ,  $3^{-1}$ ,  $3^0$ ,  $3^1$ .

b)  $x_1 = 0.101 \times 3^0$ ,  $x_2 = 0.221 \times 3^1$ .

**2.7)** a) 161 números.

b)  $(1.9375)_{10}$ .

**2.8)** a)  $0.099995 \leq s < 0.99995$ .

b)  $x_1 = 0.1239 \times 10^4$ ,  $x_2 = -0.5501 \times 10^{-3}$ ,  $x_3 = 0.1004 \times 10^1$ ,  $x_4$  (overflow),  $x_5$  (underflow).

**2.9)** a) 8.05 e 8.05.

b)  $-0.153$  e  $-0.152$ .

**2.10)** a) 18.546449.

b) 18.5.

**2.11)** a) 8.7412863.

b) 8.7.

**2.12)** a)  $y_0 = 0.0953102$ .

b) Faça integração por partes.

c) Usando a fórmula (2.8) com  $y_0 = 0.0953102$ , obtemos:

$y_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$
$y_0 = 0.0953102$	$y_3 = 0.0231535$	$y_6 = 0.0131667$	$y_9 = -0.0198449$
$y_1 = 0.0468982$	$y_4 = 0.018465$	$y_7 = 0.0111901$	$y_{10} = 0.2987489$
$y_2 = 0.031018$	$y_5 = 0.01535$	$y_8 = 0.0130986$	

Não, pois o algoritmo é extremamente instável.

**2.13)** Considerando  $y_{20} = 0$  e usando a fórmula (2.9), obtemos:

$y_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$
$y_{19} = 0.005$	$y_{14} = 0.0060954$	$y_9 = 0.0091672$	$y_4 = 0.0184646$
$y_{18} = 0.0047632$ $y_{17} = 0.0050792$	$y_{13} = 0.0065333$ $y_{12} = 0.007039$	$y_8 = 0.0101944$ $y_7 = 0.0114806$	$y_3 = 0.0231535$ $y_2 = 0.031018$
$y_{16} = 0.0053744$	$y_{11} = 0.0076294$	$y_6 = 0.0131371$	$y_1 = 0.0468982$
$y_{15} = 0.0057126$	$y_{10} = 0.008328$	$y_5 = 0.015353$	$y_0 = 0.0953102$

com todos os dígitos corretos. Considere  $y_n$  a solução exata e  $y_n^{(m)}$  a solução aproximada. Mostre que:  $|y_n^{(m)} - y_n| \leq a^{-11}$ . Como  $a = 10$  então o erro é menor que uma unidade no décimo primeiro dígito.

**2.14)**  $x_1 = (11011)_2$ ,  $x_2 = (0.0010001\dots)_2$ ,  $x_3 = (101101.001000\dots)_2$ .

**2.15)**  $x_1 = (59)_{10}$ ,  $x_2 = (0.28125)_{10}$ ,  $x_3 = (2.4375)_{10}$ .

**2.16)**  $x_1 = (1000)_2$ ,  $x_2 = (0.01100\dots)_2$ ,  $x_3 = (1001.1010\dots)_2$ .

**2.17)** Sim, o número  $(31.202)_4$ .

**2.18)** O número  $x_1$ .

**2.19)** a) Os números representáveis no sistema dado são:

$$\pm 0.10 \times \begin{cases} 2^{-2} &= (0.125)_{10} \\ 2^{-1} &= (0.25)_{10} \\ 2^0 &= (0.5)_{10} \\ 2^1 &= (1.0)_{10} \\ 2^2 &= (2.0)_{10} \\ 2^3 &= (4.0)_{10}, \end{cases} \qquad \pm 0.11 \times \begin{cases} 2^{-2} &= (0.1875)_{10} \\ 2^{-1} &= (0.375)_{10} \\ 2^0 &= (0.75)_{10} \\ 2^1 &= (1.5)_{10} \\ 2^2 &= (3.0)_{10} \\ 2^3 &= (6.0)_{10}, \end{cases}$$

Para colocá-los no eixo ordenado, basta considerar os números na base 10.

**b)**  $(6.0)_{10}$ .

**c)**  $(0.125)_{10}$ .

**2.20)**  $x_1 = 0.10110101 \times 2^2$ ,  $x_2 = 0.11101100 \times 2^3$  e  $x_3 = 0.11100100 \times 2^2$ . Nenhum possui representação exata.

**2.23)** **a)** 7.9 e 7.9,

**b)** 34.6,

**c)**  $-0.177$ ,

**d)** 369 e 368 ,

**e)** 10.9.

**2.24)** **a)** 3.10,

**b)** 3.10.

Sim.

**2.25) a)**  $0.5975 \times 10^3$ ,

**b)**  $0.5375 \times 10^{-1}$ ,

**c)**  $0.1399 \times 10^5$ ,

**d)**  $0.2548 \times 10^3$ .

**2.26)** Trabalhando com arredondamento para cinco dígitos em todas as operações, obtemos:

**a)**  $6 \times 10^1$ .

**b)**  $10 \times 10^1$ .

Não.

**2.27)** Os itens **a)**, **e)** e **f)** estão corretos.

**b)**  $0.100 \times 3^0$ .

**c)** (*overflow*).

**d)**  $0.222 \times 3^2$ .

**2.28) a)**  $e^{-0.15} = 0.8607079764$ .

**b)**  $e^{-0.15} = 0.8607080154$  e  $\frac{1}{e^{0.15}} = 0.8607079962$ .

O resultado usando  $\frac{1}{e^{0.15}}$  é mais preciso.

**2.29) a)**  $50076 \times 10^1$ ,

**b)**  $49900 \times 10^1$ .

**2.30) a)**  $(I) \begin{cases} x_1 = 10^5, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 = 10^5, \\ x_2 = 10^{-5}. \end{cases} \quad (III) \begin{cases} x_1 = 10^5, \\ x_2 = 10^{-5}. \end{cases}$

**b)**  $(I) \begin{cases} x^1 \simeq 2.0003, \\ x_2 \simeq 1.9997. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x^1 \simeq 2.0003, \\ x_2 \simeq 1.9997. \end{cases} \quad (III) \begin{cases} x^1 \simeq 2.0003, \\ x_2 \simeq 1.9997. \end{cases}$

**c)**  $(I) \begin{cases} x_1 = 0.5, \\ x_2 \simeq -1.3333. \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 \simeq -1.3333, \\ x_2 = 0.5. \end{cases} \quad (III) \begin{cases} x_1 = 0.5, \\ x_2 \simeq 1.3333. \end{cases}$

**2.31)** 0.0189. Não. Observe que:  $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 1 \Rightarrow 0.0188915$ , com todos os algarismos corretos.

**2.32)**  $x_1 = 59.99$  e  $x_2 = 0.005$ . Não. Observe que:  $x_1 \times x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 0.0166694$ , com todos os algarismos corretos.

**2.33)** Com a expressão dada, obtemos:  $-0.06$ . Observe que:  $\frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x - 4} = -\frac{1}{4\sqrt{x} + 2x} \Rightarrow$

$-0.0637755$ , com todos os algarismos corretos.

2.34) Considerando:

$J_0(1) = 0.7652$ ,  $J_1(1) = 0.4401$  e  $J_0(1) = 0.76519769$ ,  $J_1(1) = 0.44005059$ ,  
e usando a relação de recorrência:

$J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0$ , obtemos:

$J_n(1)$	$J_n(1)$
$J_0(1) = 0.7652$	$J_0(1) = 0.76519769$
$J_1(1) = 0.4401$	$J_1(1) = 0.44005059$
$J_2(1) = 0.115$	$J_2(1) = 0.11490349$
$J_3(1) = 0.0199$	$J_3(1) = 0.01956337$
$J_4(1) = 0.0044$	$J_4(1) = 0.00247673$
$J_5(1) = 0.0153$	$J_5(1) = 0.00025047$
$J_6(1) = 0.1486$	$J_6(1) = 0.00002797$
$J_7(1) = 1.7679$	$J_7(1) = 0.00008517$
$J_8(1) = 24.602$	$J_n(8) = 0.00116441$
$J_9(1) = 391.8641$	$J_n(9) = 0.01854539$
$J_{10}(1) = 7028.9518$	$J_n(10) = 0.33265261$

Os resultados obtidos mostram que a fórmula de recorrência é extremamente instável.

2.35) Considerando  $J_{10}(1) = 0$ ,  $J_9(1) = \mu$  e usando a relação de recorrência:

$J_{n-1}(1) = 2nJ_n(1) - J_{n+1}(1)$ ,  $n = 9, \dots, 1$ , obtemos:

$$\begin{array}{l|l|l} J_8(1) = 18\mu & J_5(1) = 47713\mu & J_2(1) = 21950832\mu \\ J_7(1) = 287\mu & J_4(1) = 473130\mu & J_1(1) = 84066001\mu \\ J_6(1) = 4000\mu & J_3(1) = 3737327\mu & J_0(1) = 146181170\mu \end{array}$$

De  $J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + 2J_6(x) + \dots = 1 \Rightarrow \mu = 5.234584502 \times 10^{-9}$ .  
Assim:

$$\begin{array}{l} J_9(1) = 5.234584502 \times 10^{-9} \\ J_8(1) = 9.422252104 \times 10^{-8} \\ J_7(1) = 1.502325752 \times 10^{-6} \\ J_6(1) = 2.093833801 \times 10^{-5} \\ J_5(1) = 2.4975773031 \times 10^{-4} \\ J_4(1) = 2.476638966 \times 10^{-3} \\ J_3(1) = 0.01956335399 \\ J_2(1) = 0.114903485 \\ J_1(1) = 0.4400505856 \\ J_0(1) = 0.7651976862 \end{array}$$

Os resultados possuem agora todos os dígitos corretos.



## Capítulo 3

**3.1) a)** Existe apenas uma raiz real e está localizada no intervalo  $(0, 0.5)$ .

**b)** Existem duas raízes reais. Uma raiz é  $\bar{x} = 0$  e a outra raiz  $\bar{x} \in (0.5, 1)$ .

**3.2)** Temos:  $f(-1) \simeq -0.0546$ ,  $f(0) \simeq 0.0177$ ,  $f(1) \simeq -0.0005$ . Pelo Teorema 3.1, existe uma raiz em  $(-1, 0)$  e outra em  $(0, 1)$ .

**3.3)** Temos:  $f(0) = -1$ ,  $f(1) \simeq 1.2817$ ,  $f(2) \simeq 0.6109$ ,  $f(3) \simeq -8.0855$ . Pelo Teorema 3.1, existe uma raiz em  $(0, 1)$  e outra em  $(2, 3)$ .

**3.4) a)**  $|\psi'(x)| < 1$  para  $-1.25 < x < 1.25$ ,

**b)**  $|\psi'(x)| < 1$  para  $x > 1.025$ .

Assim, utilizaria o processo definido em **a)**, pois  $|\psi'(x)| < 1$  num intervalo que contém a raiz.

**3.5) a)**  $\psi'(x) = 2$  que nunca será menor do que 1,

**b)**  $|\psi'(x)| < 1$  para  $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ,

**c)**  $|\psi'(x)| < 1$  para  $1 < x < 2$ .

Assim, utilizaria o processo definido em **b)**. Tomando  $x_0 = 1.2$  e o processo definido em **b)**, segue que:  $\bar{x}_1 \simeq 1.04$ ,  $\bar{x}_2 \simeq 1.0016$ ,  $\bar{x}_3 \simeq 1.0000026, \dots$

**3.6)** Para que haja convergência devemos impor que:  $a < \frac{1}{2b}$  ou  $b < \frac{1}{2a}$ , pois  $|\psi'(x)| < 1$  se e somente se  $|2bx| < 1$  e o máximo ocorre para  $x = a$ .

**3.7)** Impondo  $|\psi'(x)| < 1$ , vemos que para qualquer vizinhança de  $\sqrt{a}$  existirá um ponto onde  $|\psi'(x)| = 1$ .

**3.8) a)** Com  $x_0 = 0$ , obtemos:

**i)**  $\bar{x}_7 \simeq -0.4590$ ,

**ii)**  $\bar{x}_7 \simeq 0.9074$ .

**b)** Basta mostrar que:  $|\psi'(x)| < 1$  para  $x < 2.4849$ .

**3.9)** Trabalhando com arredondamento para seis casas decimais, usando o método de Newton com  $x_0 = 1.0$ ; a fórmula (3.7) e considerando que a solução exata seja:  $x = 0.90478822$ , obtemos a tabela:

$k$	$x_k$	$e_k$	$p$
0	1.0	0.09521178	
1	0.908439	0.00365078	
2	0.904794	0.00000578	1.97729852
3	0.904788	0.00000022	0.50688325

Assim,  $\bar{x} \simeq 0.904788$  com a precisão exigida. Entretanto, observando a tabela

anterior vemos que não conseguimos mostrar que a ordem de convergência do Método de Newton é 2. Para mostrar a ordem de convergência precisamos trabalhar com mais casas decimais, pois de  $x_2$  para  $x_3$  deveria ter dobrado o número de casas decimais corretas, e isto não ocorreu, pois estamos trabalhando com apenas seis casas decimais. ~~Trabalhando agora com 15 casas decimais; usando o método de Newton, a fórmula (3.7) e considerando que a solução exata seja:  $x = 0.904788217830188$ , obtemos a tabela:~~

$k$	$x_k$	$e_k =  x - x_k $	$p$
0	1.0	0.095211782126981	
1	0.908438950177070	0.003650732304051	
2	0.904794061672366	0.000005843800347	1.97729852
3	0.904788217888044	0.000000000015025	1.999467599

Da tabela anterior podemos observar que:

- 1)  $\bar{x}_3$  possui 10 casas decimais corretas,
- 2) o valor de  $p$  está convergindo para 2,
- 3) trabalhando com 15 casas decimais devemos interromper o processo, pois o resultado de  $x_4$  terá 20 casas decimais corretas.

- 3.10) a)  $\bar{x} \simeq 1.1656$ ,
- b)  $\bar{x} \simeq 1.7319$ ,
- c)  $\bar{x} \simeq -3.1829$ ,
- d)  $\bar{x} \simeq 1.6818$ .
- 3.11) a) Considere a função  $f(x) = x^3 - Q = 0$  e aplique o método de Newton a esta função. Observe que não podemos considerar  $f(x) = x - \sqrt[3]{Q}$ , pois estaríamos usando o que se pede para calcular.
- b) Fazendo o gráfico, podemos tomar  $x_0 = 1.6$ . Com este valor, obtemos:  $\sqrt[3]{4} \simeq 1.5874$ .
- 3.12) Trabalhando com arredondamento para seis casas decimais, usando o método das secantes com  $x_0 = 1.4$  e  $x_1 = 1.5$ ; a fórmula (3.7) e considerando que a solução exata seja:  $x = 1.43044509$ , obtemos a tabela:

$k$	$x_k$	$e_k$	$p$
0	1.4	0.03044509	
1	1.5	0.06955491	
2	1.431328	0.00088291	-5.28527229
3	1.430419	0.00002609	0.806492959
4	1.430445	0.00000009	1.6098844

Assim,  $\bar{x} \simeq 1.430445$  com a precisão exigida. Observando a tabela anterior vemos que  $p$  está convergindo para 1.618, que é aproximadamente a ordem de convergência do método das secantes. Entretanto, para mostrar a ordem de convergência, precisamos trabalhar com mais casas decimais. Ver explicação na resolução do exercício 3.9).

- 3.13)** a)  $\bar{x} \simeq 0.7558$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .  
b)  $\bar{x} \simeq 1.4180$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .  
c)  $\bar{x} \simeq 1.5949$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

**3.14)** Trabalhando com arredondamento para seis casas decimais, usando o método regula falsi com  $x_0 = 0.7$  e  $x_1 = 0.8$ ; a fórmula (3.7) e considerando que a solução exata seja:  $x = 0.73908513$ , obtemos a tabela:

$k$	$x_k$	$e_k$	$p$
0	0.7	0.03908513	
1	0.8	0.06091487	
2	0.738563	0.000552213	- 10.7255762
3	0.739078	0.00000713	0.902147571
4	0.739085	0.00000013	0.932673528

Assim,  $\bar{x} \simeq 0.739085$  com a precisão exigida. Entretanto, observando a tabela anterior vemos que não conseguimos mostrar que a ordem de convergência do método regula falsi é aproximadamente 1.618. Para mostrar a ordem de convergência, precisamos trabalhar com mais casas decimais. Ver explicação na resolução do exercício **3.9**).

- 3.15)** a)  $\bar{x} \simeq -2.9907$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .  
b)  $\bar{x} \simeq -1.2927$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

**3.16)**  $\bar{x} \simeq 1.8951$ .

**3.17)**  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.5198, 0.5109)$ , com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

**3.18)**  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.8220, 1.2694)$ .

**3.19)** i)  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (-0.9013, -2.0866)$ .

ii)  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.5, 0.8660)$ .

iii)  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (1.8228, 1.8229)$ .

**3.20)**  $P(5) = 1290, P'(5) = 1642$ .

**3.21)** Fazendo o gráfico vemos que podemos tomar:  $x_0 = 1.6 \Rightarrow \bar{x} \simeq 1.6146$ .  
As outras duas raízes de  $P(x)$  são:  $\bar{x} \simeq 0.8727$  e  $\bar{x} = 4.2581$ .

**3.22)** Fazendo o gráfico vemos que podemos tomar:  $x_0 = -0.9$  e  $x_1 = -0.8 \Rightarrow \bar{x} \simeq -0.8202$ .

**3.23)**  $\bar{x} \simeq 0.7928$ .

**3.24)**  $x^6 - 3x^5 + 4x^2 - 5 = (x^2 - 3x + 1)(x^4 - x^2 - 3x - 4) - 9(x - 3) - 28$ .

**3.25)**  $P(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 4) \Rightarrow \bar{x} = 1$  de multiplicidade 2 e  $\bar{x} = 4$ .

**3.26)** Aplicando o algoritmo Q-D obtemos que um dos  $q^{(1)} = 0$ . Assim o algoritmo não pode ser aplicado.

**3.27)** As raízes de  $P(x)$  são:

a)  $-0.333333 \pm 0.333333i$  e  $1 \pm 0.333333i$ .

b) 0.03801, 0.3087, 0.6913 e 0.9619.

**3.28)** Para mostrar que existe exatamente uma raiz faça o gráfico.

a)  $\bar{x} \simeq 0.6531$ .

b)  $\bar{x} \simeq 0.5688$ .

**3.29)** Usando o método da bissecção e regula falsi, obtemos:  $\bar{x} \simeq 2.6484$  e  $\bar{x} \simeq 2.6456$ , respectivamente.

**3.30)** Fazendo o gráfico vemos que podemos tomar:

a)  $x_0 = 0.6$  e  $x_1 = 0.7 \Rightarrow \bar{x} \simeq 0.6188$ , com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

b)  $x_0 = -0.9$  e  $x_1 = -0.8 \Rightarrow \bar{x} \simeq -0.8687$ , com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

**3.31)** a)  $|\psi'(x)| < 1$  para  $|x| > 1$ .

b)  $|\psi'(x)| < 1$  para  $x > 0$ .

Portanto, apenas o processo definido em b) é convergente.

**3.32)** a)  $|\psi'(x)| < 1$  para  $-2.5 < x < 2.5$ ,

b)  $|\psi'(x)| < 1$  para  $|x| > 1$ ,

c)  $|\psi'(x)| < 1$  para  $x < -1.05$ .

Portanto, apenas o processo definido em a) é convergente.

**3.33)** Os limites para a fórmula convergir são dados por:  $\frac{1}{2a} < x < \frac{3}{2a}$  se  $a > 0$  e  $\frac{3}{2a} < x < \frac{1}{2a}$  se  $a < 0$ .

a) O processo converge, e  $\bar{x}_2 \simeq 0.1111$ .

b)  $x_0$  não pertence ao intervalo para convergência. Logo, o processo não converge.

**3.34)** Fazendo o gráfico vemos que as curvas se interceptam em apenas um ponto o que indica que existe uma única raiz real. Assim,  $\bar{x} \simeq 2.8297$ .

**3.35)** Basta considerar  $f(x) = 3x - 1 = 0$ . Assim,  $\bar{x} \simeq 0.33333$ . Observe que não podemos tomar  $f(x) = x - \frac{1}{3} = 0$ , pois estaríamos usando o que se pede para calcular.

**3.36)** a) A raiz está no intervalo  $(1, 2)$ , pois:  $f(0) < 0$ ,  $f(1) < 0$ ,  $f(2) > 0$  e  $f(3) > 0$ .

b) Uma raiz é  $\bar{x} = -1$  e a outra raiz encontra-se no intervalo  $(-1, -0.5)$ , desde que:  $f(0) < 0$ ,  $f(-0.5) < 0$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(-1.5) < 0$  e  $f(-2.0) < 0$ .

c)  $\bar{x} \simeq 0.613$ , com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

$\simeq -$

**3.37)** Temos:  $\det(A) = -t^3 + 0.4t - 0.141 = 0$ . Fazendo o gráfico vemos que as curvas se interceptam apenas uma vez. Assim,  $\bar{t} \simeq -0.7646$ .

**3.38)**  $\bar{x} \simeq -0.6691$ . As demais raízes de  $P_2(x)$  são:  $\bar{x} \simeq 2.5240$  e  $\bar{x} \simeq 4.1451$ , ambas com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

**3.39)** Basta considerar  $f(x) = \text{sen } x = 0$ . Assim,  $\bar{x} \simeq 3.1425$ . Observe que a função  $f(x) = \cos x + 1 = 0$  também poderia fornecer o valor de  $\pi$ . Entretanto, neste caso o processo de Newton não converge pois  $f'(x) = -\text{sen } x$  que tende a zero quando  $x \rightarrow \pi$ .

**3.40)** b) Tomando  $x_0 = 1 \Rightarrow \bar{x} \simeq 1.2093$ .

**3.41)**  $\bar{x} \simeq 4.4934$ .

**3.42)** a) Reescrevendo o sistema dado na forma:

$$\begin{cases} x = \frac{x^3 + 1}{y^3} \\ y = \frac{y^3}{3x^2} \end{cases}$$

observamos que o processo não converge. A não convergência se deve ao fato das desigualdades:

$$|F_x| + |F_y| \simeq 1.5895 \not\leq 1,$$

$$|G_x| + |G_y| \simeq 6.1185 \not\leq 1,$$

não serem satisfeitas para o ponto  $(0.51, 0.85)$  que pertence à uma vizinhança  $V$  de  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

b)  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.49996, 0.86603)$ .

**3.43)** Para mostrar que existem exatamente quatro soluções, observe que ambas as equações do sistema dado são equações de elipses. Assim, faça o gráfico. As quatro soluções são:  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (1.0009, 0.9896)$ ;  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (0.8651, -0.9960)$ ;  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (4.0127, 0.7435)$  e  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (3.9094, 0.7859)$ .

**3.44)**  $(\bar{x}, \bar{y}) \simeq (1.9365, 0.5)$ .

**3.45)** Aplicando o processo descrito, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 3 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é:  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1.0141, 1.4134)$  com  $\epsilon < 10^{-2}$ . Logo, as raízes de  $P(z)$  são:  $1.0141 \pm 1.4134i$ .

**3.46)**  $P(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 1)$  cujas raízes são:  $1, -1, 2 + i, 2 - i$ .

**3.47)**  $P(t) = (t^2 - 4)(2t^2 + 8)$  cujas raízes são:  $2, -2, 2i, -2i$ .

**3.48)** As raízes de  $P(x)$  são:  $1, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ .

## Capítulo 4

$$4.1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 10 & 8 \\ 6 & -3 & 12 & 11 \\ 0 & -2 & -5 & 10 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$4.2) \quad \text{a)} \quad x = (-4, 3, 2)^t.$$

$$\text{b)} \quad \det(A) = 5\left(\frac{22}{5}\right)\left(\frac{253}{22}\right) = 253.$$

$$4.4)$$

$$\begin{cases} \ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj}, & i \leq j, \\ u_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right) / \ell_{ii}, & i > j. \end{cases}$$

$$4.5) \quad x = (1, 1, 1)^t.$$

$$4.9) \quad \text{a)} \quad x = (1, 2, -1)^t.$$

$$\text{b)} \quad \det(A) = (2)\left(\frac{7}{2}\right)(-3) = -21. \text{ Observe que se calcularmos na matriz dada, obtemos: } \det(A) = 21. \text{ A troca de sinal ocorreu pois para resolver por Eliminação de Gauss trocamos duas linhas de posição e neste caso: } \det(A) = -\det(B) \text{ (propriedade de determinante).}$$

$$4.10) \quad \text{Aplicando o método de Eliminação de Gauss, obtemos: } 0 \ x_3 = -7 \text{ e assim o sistema linear não tem solução.}$$

$$4.11) \quad \text{Aplicando o método de Eliminação de Gauss ao sistema dado, obtemos: } (1 - \alpha^2) \ x_3 = 2 - 2\alpha. \text{ Assim:}$$

$$\text{a)} \quad \text{quando } \alpha = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \text{ e portanto a solução é única,}$$

$$\text{b)} \quad \text{quando } \alpha = 1 \Rightarrow 0 \ x_3 = 0 \text{ e portanto existem infinitas soluções,}$$

$$\text{c)} \quad \text{quando } \alpha = -1 \Rightarrow 0 \ x_3 = 4 \text{ e portanto o sistema não admite solução.}$$

$$4.12) \quad \text{a)} \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 10 \\ 3 & -3 & -5 & 7 & 2 \\ 9 & 0 & -2 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 5/3 & -8/3 & -1/3 & -3 \\ 3 & 2 & 3/8 & -63/8 & -63/8 \end{array} \right).$$

$$\text{b)} \quad x_3 = x_4 = 1.$$

$$4.13) \quad \text{Para o sistema (I): } x = (1, 1, 1)^t \text{ e para o sistema (II): } x = (1, 2, -1)^t.$$

$$4.14) \quad x = (-1, -1, -1)^t, \quad y = \frac{1}{55}(70, 42, 4)^t \text{ e } z = (0, 2, 2)^t.$$

$$4.15) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \\ 3 & 10 & 14 & -5 \\ 0 & -8 & -5 & 29 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & & & \circ \\ 2 & 2 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.16) \quad \det(B) < 0. \text{ Para } Ax = b, \quad x \neq (1, 1, 2)^t \left( \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$

4.17) Aplicando-se a técnica descrita no exercício, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (1, 1, 1)^t.$$

4.18) Para resolver o problema utilize um programa de computador, em qualquer linguagem, com **precisão dupla**, para obter:

$$\text{a)} \quad x_1 = 0.99995780, \quad x_2 = 0.98997176, \quad x_3 = 1.25858438, \quad x_4 = -0.85509437, \\ x_5 = 6.27343702, \quad x_6 = -4.55956507, \quad x_7 = 0.69713902, \quad x_8 = 3.62047052, \\ x_9 = -0.69895703, \quad x_{10} = 10.33367443, \quad x_{11} = -12.57125568 \quad \text{e} \\ x_{12} = 6.51285839.$$

$$\text{b)} \quad x_1 = 1.00000001, \quad x_2 = 0.99999831, \quad x_3 = 1.00005376, \quad x_4 = 0.99926099, \\ x_5 = 1.00544809, \quad x_6 = 0.97597823, \quad x_7 = 1.06707059, \quad x_8 = 0.87845898, \\ x_9 = 1.14255225, \quad x_{10} = 0.89560306, \quad x_{11} = 1.04338830 \quad \text{e} \\ x_{12} = 0.99218741.$$

Observe que se o sistema anterior for de ordem 17, usando os mesmos métodos do exercício 4.18, obtemos:

$$\text{a)} \quad x_1 = 1.00254011, \quad x_2 = 0.88968432, \quad x_3 = 2.11744547, \quad x_4 = -3.13239670, \\ x_5 = 6.15067577, \quad x_6 = 3.23791933, \quad x_7 = -5.87475491, \quad x_8 = -1.93051946, \\ x_9 = 9.19924164, \quad x_{10} = -0.34137794, \quad x_{11} = -2.15992117, \\ x_{12} = 5.38079834, \quad x_{13} = -2.22254539, \quad x_{14} = 4.54888916, \\ x_{15} = -1.96166575, \quad x_{16} = -1.72872913 \quad \text{e} \quad x_{17} = 3.82594728.$$

$$\text{b)} \quad x_1 = 0.99999989, \quad x_2 = 1.00001530, \quad x_3 = 0.99945210, \quad x_4 = 1.00839289, \\ x_5 = 0.93287758, \quad x_6 = 1.30018679, \quad x_7 = 0.29468658, \quad x_8 = 1.37441894,$$

$$x_9 = 3.58161473, \quad x_{10} = -6.81390162, \quad x_{11} = -10.54950901, \\ x_{12} = -1.52609124, \quad x_{13} = -7.19003006, \quad x_{14} = 13.15834910, \\ x_{15} = -6.93618076, \quad x_{16} = 3.62033728 \quad \text{e} \quad x_{17} = 0.64636351.$$

4.19) Trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos, obtemos:

$$\text{a)} \quad \bar{x} = (2.1, 2.7, -3.8)^t.$$

$$\text{b)} \quad x = (2, 3, -4)^t.$$

4.20) Trabalhando com arredondamento para três dígitos significativos, obtemos:

$$\text{a)} \quad \bar{x} \simeq (1.53, -0.665, -0.763)^t.$$

$$\text{b)} \quad \bar{x} = (1.52, -0.667, -0.761)^t.$$

4.22) Usando norma linha, obtemos:  $\text{cond}(A) = 3.9601 \times 10^4$  e assim o sistema linear é muito mal condicionado.

**4.23)** Usando norma linha, obtemos:  $\text{cond}(A) = 1.9413229879045816 \times 10^{18}$  e assim o sistema linear é extremamente mal condicionado.

$$\mathbf{4.24)} \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.25)} \quad A^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 36 & -6 & 12 \\ -6 & 7 & -5 \\ 12 & -5 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.26)} \quad A^{-1} = \frac{1}{130} \begin{pmatrix} 208 & 94 & -70 \\ 26 & -2 & -40 \\ -65 & -30 & 50 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.27)} \quad A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 5 & 10 & -5 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{4.28)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & & \circ \\ 2/3 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = LU.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & & \circ \\ 2 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & & 1/2 \\ 2 & 1 & 3 \\ \circ & 1 & 2 \end{pmatrix} = LU.$$

**4.30)** a) Sim, para  $\alpha \neq \pm 1$ , desde que  $\det(A_1) = 1 \neq 0$  e  $\det(A_2) = 1 - \alpha^2 \neq 0$ .

b) Não, pois a matriz dos coeficientes não é simétrica.

c)  $x = (1, 0, -1)^t$ .

$$\mathbf{4.31)} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow x = (0, 1, -2)^t.$$

**4.32)**  $-2 < \alpha = \beta < 4$ .

**4.33)** I) Cholesky, pois a matriz é simétrica positiva definida. A solução de (I) é:  $x = (-2, 3, 0)^t$ .

II) Gauss-Compacto, pois a matriz não é simétrica. A solução de (II) é:  $x = (0, -8, 22)^t$ .

**4.34)**  $(x, y)^t = (1 + i, 2 - i)^t$ .

**4.35)**  $(x_r, x_i, y_r, y_i)^t = (1, 1, 2, -1)^t$ .

**4.36)** Observe que  $LU = A = GG^t$ .

**4.37)**  $x = (-3, 5, 7)^t$  e  $y = (-7, 5, 9)^t$

**4.38)**  $u \simeq (0, 0.2006, 0.1975, 0.2190, 0.1738, 1)^t$ .



4.39) a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = GG^t$  onde  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

b)  $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 17 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

4.40) a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -11 & 1 \\ -11 & 18 & -2 \\ 1 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

b) Fazendo  $x = A^{-1}b$ , obtemos:  $x = (-3, 1, 5/2)^t$ .

c)  $x = (-3, 1, 5/2)^t$ .

4.41) **A)** com (I), **B)** com (III), **C)** com (II).

4.42) Aplicando o método de Eliminação de Gauss, vemos que matriz dos coeficientes continua esparsa. De fato:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 2 & -1/2 & -1 & & \bigcirc & & 2 \\ & & 4/3 & -1 & & & 0 \\ & & & 5/4 & -1 & & 7 \\ & \bigcirc & & & 6/5 & -1 & 41/4 \\ & & & & & 7/6 & 61/5 \\ & & & & & & 161/14 \end{array} \right)$$

A solução do sistema linear é:

$$x \simeq (8.7143, 15.4286, 23.1429, 23.8571, 19.5714, 11.2857)^t.$$

4.43) a)  $\bar{x} \simeq (0.98, 0.024, 2.1)^t$ .

b)  $x = (1.0, 0.0, 2.0)^t$ , é a solução exata do sistema linear dado.

4.45) a) Se  $\epsilon \ll 1$  então  $\text{cond}A \simeq 3.075$ .

b) É necessário usar Eliminação de Gauss com pivotamento parcial.

c)  $x \simeq (0.5, -0.7503, 1.2503)^t$ .

4.46) a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.500 & -0.251 \\ -0.502 & 0.752 \end{pmatrix}$

b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.500 & -0.250 \\ -0.502 & 0.751 \end{pmatrix}$ .

c)  $x = (-4.00, 1.98)^t$ .

4.47) b)  $v^t A^{-1} u \neq 1$ .

c)  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 29 & 18 \\ 1 & 18 & 11 \end{pmatrix}$ .

## Capítulo 5

5.1)  $\bar{x} = (1.0002, 0.9999, 0.9995)^t$ .

5.2) a) Vale o critério das colunas, com  $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^*| = 0.9 < 1$ .

b)  $\bar{x} = (1.2108, 0.0391, 2.1484)^t$ .

5.3) Troque a primeira com a terceira linha e depois a primeira com a segunda coluna, para obter: 
$$\begin{cases} 5y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & = & 3 \\ -y_1 & + & 4y_2 & + & 3y_3 & = & 2 \\ 2y_1 & + & 4y_2 & + & 6y_3 & = & 1 \end{cases},$$

onde  $y_1 = x_2$ ,  $y_2 = x_1$  e  $y_3 = x_3$ . Para este sistema  $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}^*| = 1$  e  $\max \beta_i = 0.95 < 1$ .

5.4) a)  $\max \beta_i = 0.75 < 1$ , portanto o processo converge.

b)  $\bar{x} = (0.9996, 0.9997, 0.00001)^t$ .

5.5) a)  $0 < a < 1$ .

b) Tomando  $v^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , obtemos  $v^{(7)} = (-3.3342, -1.6638, 12.4984)^t$ .

5.6) Tomando  $v^{(0)} = (0, 0)^t$ , obtemos  $v^{(3)} = (1.0008, 0.9992)^t$ .

5.8) Para o sistema linear do exercício 5.5, tomando  $v^{(0)} = (0, 0, 0)^t$ , obtemos:  $v^{(3)} = (-3.3329, -1.6657, 12.4991)^t$ , e para o sistema linear do exercício 5.6, tomando  $v^{(0)} = (0, 0)^t$ , obtemos  $v^{(2)} = (0.9999, 0.9999)^t$ .

5.9) Para  $-0.5 < \alpha < 0.5$ . Basta utilizar o critério das linhas.

5.10) O método de Gauss-Seidel, pois vale apenas o critério de Sassenfeld, com  $\max \beta_i = 0.95 < 1$ . Após cinco iterações:  $\bar{x} = (1.0003, 1.0003, 1.00004)^t$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

5.11) Aplicando o critério de Sassenfeld, obtemos:  $\max \beta_i = 0.182 \ll 1$ . Após três iterações, obtemos:  $\bar{x} = (0.99999, 1.00001, -1.000002)^t$  com  $\epsilon < 10^{-4}$ .

Este converge mais rapidamente, pois quanto menor o valor da norma da matriz de iteração mais rápida é a convergência.

5.12) Para o sistema (I) vale o critério de Sassenfeld com  $\max \beta_i = 0.6 < 1$ . Portanto, podemos aplicar o método de Gauss-Seidel.  
Para o sistema (II) não vale nenhum critério.

5.13) Troque a primeira com a segunda linha, para obter:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & & & & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & = & 1 \\ & & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

Portanto,  $\max \beta_i = 0.875 < 1$  e  $\bar{x} = (3.9912, 6.9975, 8.99946, 9.9916)^t$ , com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

5.14)  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^t = (0.6598, 004414, 1.093)^t$ .

5.15) Aplicando a técnica descrita no exercício, obtemos:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{-7y_k + 64}{26} \\ y_{k+1} = \frac{-7x_k - 5}{13} \end{cases}$$

Tomando  $(x_0, y_0)^t = (0, 0)^t \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})^t = (2.9990, -1.9994)^t$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

5.16) a)  $\| I + A \| < 1$ , para alguma norma.

b) Tomando  $x^{(0)} = (0, 0)^t \Rightarrow x^{(10)} = (-0.9927, -0.9393)^t$ , com  $\epsilon < 10^{-1}$ .

5.17) a) Para o sistema I).

Aplicando o método de Jacobi, obtemos:

k	0	1	2	3	4
$x_1$	1.01	1.0768	1.0270	1.2863	1.0476
$x_2$	2.01	2.0001	2.030	1.9773	1.9474
$x_3$	3.01	2.9885	2.8902	2.9699	2.5844

Aplicando o método de Gauss-Seidel, obtemos:

k	0	1	2	3	4
$x_1$	1.01	0.9868	0.9577	0.8629	0.5546
$x_2$	2.01	2.0040	2.0105	2.0339	2.1086
$x_3$	3.01	3.0199	3.0633	3.2054	3.6672

Para o sistema II).

Aplicando o método de Jacobi, obtemos:

k	0	1	2	3	4
$x_1$	1.01	0.93	1.8048	2.6739	5.039
$x_2$	2.01	1.6601	2.0318	1.7720	1.6810
$x_3$	3.01	2.975	2.6525	2.2834	-0.2338

Aplicando o método de Gauss-Seidel, obtemos:

k	0	1	2	3	4
$x_1$	1.01	0.93	0.2951	-5.9557	-67.6172
$x_2$	2.01	1.9901	2.1867	3.8796	20.5468
$x_3$	3.01	3.1450	4.3165	15.9716	130.9610

b) Os sistemas lineares I) e II) podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$(I) \begin{cases} 10x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & = & 27 \\ & x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 18 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 12 \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 20 \end{cases}$$

onde agora, para ambos, vale o critério das linhas. Assim, tanto o método de Jacobi como o método de Gauss-Seidel, convergem.

Para o sistema I).

Aplicando o método de Jacobi, obtemos:

k	0	1	2	3
$x_1$	1.01	0.995	1.00002	0.9999
$x^2$	2.01	2.0001	2.0009	2.0002
$x_3$	3.01	3.0000	3.0004	3.0004

e assim a solução do sistema dado é:  $x = (0.9999, 2.0002, 3.0004)^t$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

Aplicando o método de Gauss-Seidel, obtemos:

k	0	1	2	3
$x_1$	1.01	0.995	0.9996	0.9999
$x_2$	2.01	2.0026	2.0004	2.0002
$x_3$	3.01	3.0013	3.0003	3.0001

e assim a solução do sistema dado é:  $x = (0.9999, 2.0002, 3.0001)^t$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

Para o sistema II).

Aplicando o método de Jacobi, obtemos:

k	0	1	2	3
$x_1$	1.01	0.9925	1.0047	0.9978
$x_2$	2.01	1.9954	2.0006	1.9972
$x_3$	3.01	2.9940	3.0041	2.9988

e assim a solução do sistema dado é:  $x = (0.9978, 1.9972, 2.9988)^t$  com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

Aplicando o método de Gauss-Seidel, obtemos:

k	0	1	2	3
$x_1$	1.01	0.9925	0.9993	0.9999
$x_2$	2.01	1.9993	1.9997	2.0001
$x_3$	3.01	3.0018	3.0003	3.00002

e assim a solução do sistema dado é:  $x = (0.9999, 2.0001, 3.00002)^t$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

c) A solução exata dos sistemas lineares I) e II) é:  $x = (1, 2, 3)^t$ .

5.18) a) Não, pois não é válido nenhum dos critérios de convergência.

b) Podemos reescrever o sistema dado como:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Para este sistema linear,  $\max \beta_i = 0.875 < 1$ . Logo, o método de Gauss-Seidel converge e  $x \simeq (7.7954, 13.9932, 18.9975, 14.9931)^t$  com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

5.19) Pelo critério das linhas:  $\alpha < -4$  ou  $\alpha > 4$ .

5.20) Não. Os critérios de convergência são condição suficiente.

5.23) Para  $-5 < \alpha < -4$  ou  $4 < \alpha < 5$ .

5.24) Para a matriz dada no exercício 5.23, não existe valor de  $a$  que satisfaça:

$$\|x^{(k)} - \bar{x}\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \|x^{(k-1)} - \bar{x}\|_{\infty}.$$

5.25) b)  $x = (0.9967, 0.9984)^t$  com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

5.26) a) Para o sistema I):  $F(v) = \frac{1}{2}[9v_1^2 - 2v_1v_2 + 9v_2^2 - 14v_1 - 34v_2]$ .

Para o sistema II):  $F(v) = \frac{1}{2}[31v_1^2 + 58v_1v_2 + 31v_2^2 - 66v_1 - 54v_2]$ .

b) Para o sistema I):  $\text{cond}(A) = 1.25$  e para o sistema II):  $\text{cond}(A) = 30$ .

c) Assim, o sistema linear I) é bem condicionado e o sistema linear II) é mal condicionado.

d) Para o sistema linear II), tomando  $v^{(0)} = (0, 0)^t$ , obtemos ao fim de dois estágios que:  $v^{(2)} = (2.0125, -0.9653)^t$ .

5.27) Tomando  $v^{(0)} = (1, 0, -2, 1)^t$ , obtemos:  $v^{(4)} = (2.0, 1.0001, -3.0003, 1.9998)^t$ .

## Capítulo 6

**6.1)**  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$ .

**6.2)**  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 12\lambda - 16)$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = 4$ .

**6.3) a)**  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 27\lambda)$ .

**b)**  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 9$ . Para  $\lambda_1 = 0 \Rightarrow u = (-57, 0, 57)^t$ , para  $\lambda_2 = 3 \Rightarrow u = (-39, 3, -75)^t$  e para  $\lambda_3 = 9 \Rightarrow u = (-3, -9, -3)^t$ .

**c)** Uma matriz possui inversa se e somente  $\lambda \neq 0$ . Portanto,  $A$  não possui inversa.

**6.4)**  $\lambda = 3$  de multiplicidade 2 e  $u = (5, 0)^t$ .

**6.5)**  $\lambda_1 = 9$  e  $u = (1/3, 1/3, 1)^t$ . Que o maior autovalor em módulo e seu correspondente autovetor foram obtidos.

**6.6)**  $\lambda^1 \simeq 3.414$  e  $u^1 \simeq (0.9994, -1.414, 1)^t$ .

**6.7)**  $\lambda_3 \simeq -2.9997$ .

**6.8) a)**  $\lambda_3 \simeq 1.2992$  e  $u_3 \simeq (0.4121, 1, -0.1129)^t$ .

**b)**  $\lambda_2 \simeq 3.4691$  e  $u_2 \simeq (1, 0.3196, -0.2121)^t$ .

**6.9)** Para a matriz  $A$ :

**a)** Após 8 iterações,

**b)** Após 7 iterações,

**c)** Após 8 iterações, encontramos que os autovalores são:  $\lambda_1 = 18$ ,  $\lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = 6$ .

Para  $\lambda_1 = 18 \Rightarrow u_1 = (1, -1, -1/2)^t$ , para  $\lambda_2 = 3 \Rightarrow u_2 = (1, 1/2, 1)^t$  e para  $\lambda_3 = 6 \Rightarrow u_3 = (1/2, 1, -1)^t$ .

Para a matriz  $B$ :

**a)** Após 3 iterações.

**b)** Após 2 iterações.

**c)** Após 2 iterações, encontramos que os autovalores de  $B$  são:  $\lambda_1 = -3$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ .

Para  $\lambda_1 = -3 \Rightarrow u_1 = (36, -36, 18)^t$  e para  $\lambda = 6 \Rightarrow u = (1, 3/2, 1)^t$ .

**6.10)**  $U^t A U = \begin{pmatrix} 5c^2 + 2s^2 - 2sc & -0.1s & c^2 - s^2 + 3sc \\ & -3 & 0.1c \\ & & 5s^2 + 2c^2 + 2sc \end{pmatrix}.$

Os autovalores de  $A$  são:  $\lambda_1 \simeq 5.3029$ ,  $\lambda_2 \simeq 1.6973$  e  $\lambda_3 = -3$ .

Seus correspondentes autovetores são:  $u_1 \simeq (0.9572, 0, 0.2899)^t$ ,  
 $u_2 \simeq (-0.2899, 0, 0.9573)^t$  e  $u_3 = (0, 1, 0)^t$ .

O máximo erro para os autovalores são, respectivamente, 0.0289, 0.0956 e 0.1247.

**6.11)** Os autovalores da matriz  $A$  são:  $\lambda_1 \simeq 6.2491$ ,  $\lambda_2 \simeq 2.8536$  e  $\lambda_3 \simeq 0.8972$ .

Os autovalores da matriz  $B$  são:  $\lambda_1 \simeq 10.0833$ ,  $\lambda_2 \simeq 4.6618$  e  $\lambda_3 \simeq 3.2549$ .

**6.12)** Sim. Os autovalores são:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 0$ .

**6.13)** Os autovalores da matriz  $A$  são:  $\lambda_1 = -1.2138$ ,  $\lambda_2 = 3.9997$  e  $\lambda_3 \simeq 8.2154$ .

Não é possível encontrar os autovalores da matriz  $B$  pelo método  $QR$ , pois existem autovalores complexos e a técnica descrita neste livro só pode ser aplicada se os autovalores são reais.

**6.14)** Não, desde que:  $Q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  e  $R_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**6.15)** Para a matriz  $A$ ,  $P(\lambda) = (-1)^2(\lambda^2 + 5\lambda + 1)$ .  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Para a matriz  $B$ ,  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda + 5)$ .

**6.16)** a)  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6)$ .

b)  $tr(A) = 14$ .

c)  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  e  $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ .

d) Não, pois não existe autovalor igual a zero.

**6.17)**  $\lambda_1 - q$ ,  $\lambda_2 - q$ ,  $\dots \lambda_n - q$ .

**6.21)** b) Usando o método de Newton, obtemos:  $\bar{\lambda} \simeq -0.6691$ .

c)  $u \simeq (8.7964, 2, -7.3392)^t$ .

d)  $A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**6.22)** Para a matriz  $A$ ,  $\lambda_1 = 6$  e  $u_1 = (1, 1, 1)^t$ .

Para a matriz  $B$ ,  $\lambda_1 \simeq 3.4146$  e  $u_1 \simeq (0.7073, 1, 0.7073)^t$ .

**6.23)** a)  $\lambda_1 = 8$  e  $u_1 = (1/4, 1/4, 1)^t$ .

b)  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 10\lambda^2 + 16\lambda)$ .

c)  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 0$ .

d) Tomando  $e = (1, 0, 0)^t \Rightarrow u = (-2, 10, 4)^t$ .

**6.24)**  $\lambda_1 \simeq 8.3$ .

**6.25)** Para a matriz  $A$ :

a)  $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8$  e as raízes são:  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ ,

b)  $P(\lambda) = (-1)^2(\lambda^2 - 6\lambda + 8)$ ,

c)  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ ; para  $\lambda_1 = 4 \Rightarrow u_1 = (-1, -1)^t$  e para  $\lambda_2 = 2 \Rightarrow u_2 = (-3, -1)^t$ ,

d)  $\lambda_1 = 4$ .

e)  $\lambda_1 = 4.0238$  e  $\lambda_2 = 1.9792$  com  $\epsilon < 10^{-1}$ .

f)  $\lambda_1 = 3.9999$  e  $\lambda_2 = 2$  com  $\epsilon < 10^{-3}$ .

Para a matriz  $B$ :

a)  $P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$  e as raízes são:  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ ,

b)  $P(\lambda) = (-1)^3(\lambda^3 - 12\lambda - 16)$ ,

c)  $\lambda^1 = 4$  e  $\lambda^2 = \lambda^3 = -2$ ; para  $\lambda^1 = 4 \Rightarrow u^1 = (18, 18, 36)^t$  e para  $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$  não é possível determinar os autovetores pelo método de Leverrier-Faddeev.

d)  $\lambda_1 = 3.9954$ , com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

e)  $\lambda_1 = 3.9842$  e  $\lambda_2 = -1.9736$  e  $\lambda_3 = -1.9948$  com  $\epsilon < 10^{-1}$ .

f)  $\lambda_1 = 3.9973$  e  $\lambda_2 = -1.9945$  e  $\lambda_3 = -1.9983$  com  $\epsilon < 10^{-2}$ .

**6.26)** Usando o método de Leverrier-Faddeev, obtemos:

$\lambda_1 = 12$ ,  $\lambda_2 \simeq 7.5 + 0.8660i$  e  $\lambda_3 \simeq 7.5 - 0.8660i$ ;  $u_1 = (7, 7, 7)^t$ ,  
 $u_2 \simeq (157 + 15.588i, 2.5 + 0.8660i, -2 + 1.372i)^t$  e  
 $u_3 \simeq (157 - 15.588i, 2.5 - 0.8660i, -2 - 1.372i)^t$ , respectivamente.

**6.27)** a) Após 7 iterações,

b) Após 6 iterações,

c) Após 6 iterações, encontramos que os autovalores são:  $\lambda_1 = 3.4121$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 0.5878$ .

d) O máximo erro para os autovalores são, respectivamente: 0.0032, 0.0017 e 0.0056.

**6.28)** a) Que as matrizes convirjam para uma matriz triangular superior.

b) Os autovalores de  $A$  são:  $\lambda_1 \simeq 0.8295$ ,  $\lambda_2 \simeq 2.3268$  e  $\lambda_3 \simeq 9.4737$ .

Não é possível encontrar os autovalores da matriz  $B$  pelo método  $LR$ , pois existem autovalores complexos e a técnica descrita neste livro só pode ser aplicada se os autovalores são reais.

**6.29)** Ver resolução dos exercícios **6.13)** e **6.28)**.



## Capítulo 7

**7.1)**  $P(x) \simeq 0.4964 - 0.2958x + 0.1586x^2$ .

**7.2)**  $P(x) = 84x^2 - 99x^4$ .

**7.3) a)**  $P_1(x) = \frac{171}{140} - \frac{81}{70}x$ .

**b)**  $P_2(x) = \frac{107}{105} + \frac{2}{35}x - \frac{17}{14}x^2$ .

**7.4) a)**  $P_1(x) = \frac{17}{4}(1) - \frac{3\sqrt{12}}{40}[\sqrt{12}(x - \frac{1}{2})]$ .

**b)**  $P_2(x) = P_1(x) + \frac{\sqrt{180}}{120}[\sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})]$   
 $= \frac{17}{4}(1) - \frac{3\sqrt{12}}{40}[\sqrt{12}(x - \frac{1}{2})] + \frac{\sqrt{180}}{120}[\sqrt{180}(x^2 - x + \frac{1}{6})]$ .

**7.5) a)**  $P_1(x) = \frac{251}{30}(1) - \frac{58}{5}(x - \frac{1}{2})$ .

**b)**  $P_2(x) = P_1(x) + \frac{766}{5}(x^2 - x + \frac{1}{6})$   
 $= \frac{251}{30}(1) - \frac{58}{5}(x - \frac{1}{2}) + \frac{766}{5}(x^2 - x + \frac{1}{6})$ .

**7.6)**  $P_1(x) = \frac{1}{5}(6 + 7x)$ .

**7.7)**  $P_2(x) \simeq 0.9030 + 0.1157x - 0.1978x^2$ .

**7.8)**  $P(x) \simeq 1.7877 + 0.1839x^3$ .

**7.9)**  $P_2(x) = \frac{13}{35} + \frac{17}{14}x - \frac{1}{2}x^2$ .

**7.12)**  $f(x) \simeq 4.525 + 28.053 \cos x - 0.1317 \sin x - 2.367 \cos 2x - 12.499 \sin 2x$ .

**7.13) a)**  $Q = \| F(x) - (\frac{1}{b}x + \frac{1}{a}x^3) \|^2$ , onde  $F(x) = e^{\{\frac{q(x)}{x^2}\}}$ .

**b)**  $\begin{pmatrix} (x, x) & (x, x^3) \\ (x^3, x) & (x^3, x^3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F, x) \\ (F, x^3) \end{pmatrix}$ , onde  $a_0 = \frac{1}{b}$  e  $a_1 = \frac{1}{a}$ .

**7.14) a)**  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 0$ .

**b)**  $Q = 0$ .

**7.15)** Não. A transformação que deve ser feita é:  $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cos x$ .

**7.16) a)**  $f(x) \simeq \sqrt{-26.67 + 19.37x}$ .

**b)**  $Q = \| f^2 - (-26.67 + 19.37x) \|^2 = \sum_{i=0}^3 (f_i^2 - (-26.67 + 19.37x_i))^2$ .

7.17) A função que melhor ajusta os dados é:  $\frac{1}{a+bx} \Rightarrow f(x) \simeq \frac{1}{0.0085 + 0.00046x}$ .

7.18)  $x = (-1, 0)^t$ .

7.19)  $x \simeq (0.4128, 0.09840, -0.6257)^t$ .

7.20) a)  $g_1(x) \simeq 1.1176x^2 + 2x$  e  $g_2(x) = 2x^2 - 3$ .

b)  $g_1(x)$  fornece o melhor ajuste, desde que o erro de truncamento é menor.

7.21)  $g(x) \simeq 2.0198 e^x + 3.0193 e^{-x}$

7.22)  $y \simeq -1.494x^2 + 4.318 \Rightarrow y(0.5) \simeq 1.7855$ .

7.23)  $P_2(x) = \frac{8}{35} - \frac{4}{7}(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})$ .

7.24) Como 1,  $\sin x$ ,  $\cos x$  e  $\sin 3x$  são ortogonais em  $[0, 2\pi]$ , então:  $P(x) \equiv \theta$ .

7.25)  $y(t) \simeq \frac{2}{\pi} + \sin t = F(t)$ .

7.26)  $f(x) \simeq 4.5 \cos x = S_1(x)$ .

7.27)  $y \simeq 4.0731 x^{2.9349}$ .

7.28)  $y \simeq x \ln (1.116 x + 2.714)$ .

7.29) a) Não. A transformação que deve ser feita é:  $e^{\frac{x^2}{f(x)}} \simeq ax^4 + bx^2 + c$ .

b)  $Q = \| F(x) - (ax^4 + bx^2 + c) \|^2$ , onde  $F(x) = e^{\frac{x^2}{f(x)}}$ .

c) Fazendo:  $a_0 = c, a_1 = b$  e  $a_2 = a$ , devemos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (x^2, 1) & (x^4, 1) \\ (1, x^2) & (x^2, x^2) & (x^4, x^2) \\ (1, x^4) & (x^2, x^4) & (x^4, x^4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F, 1) \\ (F, x^2) \\ (F, x^4) \end{pmatrix}.$$

7.30) Pela função a);  $y(t) \simeq \frac{t}{0.1665 + 0.0565t}$ .

7.31) A função  $I$ );  $y \simeq 2.033x^2 - 2.607$ .

7.32) i)  $a = 0.7850$  e  $c = -0.7342$ .

ii)  $b \simeq 1.00497$ .

7.33)  $a \simeq 1.9317$  e  $b \simeq 1.0630$ .

7.34)  $M = 3$  e  $N = 1$ .

7.35) a)  $a \simeq 0.7558$  e  $b \simeq -0.1570$ .

b)  $Q = \| E_i - (0.75581x_i - 0.15698y_i) \|^2 \simeq 9.8$ .

# Capítulo 8

- 8.1) a)  $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ .  
b)  $f(3.5) \simeq P_3(3.5) = 13.125$ .
- 8.2)  $P_2(x) = -2.994x^2 + 3.497x$ .
- 8.3)  $P_2(x) = 0.0005x^2 - 0.0003x + 1.5706 \Rightarrow K(2.5) \simeq P_2(2.5) = 1.5730$ .
- 8.4) Tomando  $x_0 = 3, x_1 = 3.2$  e  $x_2 = 3.4 \Rightarrow P_2(x) = 12.25x^2 - 53.7x + 70.93 \Rightarrow f(3.1) \simeq P_2(3.1) = 22.1825$ .
- 8.5) Tomando  $x_0 = 0, x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 1.0 \Rightarrow P_2(x) = -0.31x^2 + 1.943x - 1$ .  
Fazendo  $P_2(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} \simeq 0.5693$ .
- 8.7) a) O cálculo de  $f(x)$  nos pontos indicados fornece a tabela:

$x$	3	2	1	0	1	2	3
$f(x)$	-1729	-235	-11	-1	3	211	1673

- b)  $P_3(x) = \frac{104}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{83}{3}x - 1$ .
- c)  $|R_3(-0.5)| \leq 39.375$  e  $|R_3(0.5)| \leq 65.625$ .
- 8.8) Tomando  $x_0 = 1.0, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3$  e  $x_3 = 1.5 \Rightarrow |R_3(x)| \simeq 1.453 \times 10^{-6}$ .
- 8.9) O menor valor de  $n$  é 9.
- 8.10) a)  $P_1(x) = 0.49x + 0.5102 \Rightarrow \sqrt{1.035} \simeq P_1(1.035) = 1.01735$ .  
b)  $R_1(x) \leq 3 \times 10^{-6}$ .
- 8.12) a) Tomando  $x_0 = 0.3$  e  $x_1 = 0.4$  segue que:  $P_1(x) = 1.169x - 0.2292$   
 $f(0.35) \simeq 0.17995$ . -  $\Rightarrow$   
b)  $|R_1(x)| \simeq 7.012 \times 10^{-3}$ .
- 8.13)  $P_2(u) = P_1(u) = 3u - 4 \Rightarrow f(0.5) \simeq P_1(1.5) = 0.5$ .
- 8.14) O cálculo de  $f(x)$  nos pontos indicados fornece a tabela:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-122	0	2	4	126

$P_4(x) = P_3(x) = 20x^3 - 18x + 2,$   
ou  
 $P_4(u) = P_3(u) = 20u^3 - 120u^2 + 222u - 122.$

**8.15)**  $P_3(x) = 5500x^3 - 10700x^2 + 6825x - 1423 \Rightarrow f(0.56) \simeq P_3(0.56) = 9.368,$

ou

$$P_3(u) = 5.5u^3 - 24.5u^2 + 25u + 2 \quad f(0.56) \quad P_3(0.6) = 9.368.$$

**8.16)** a) Tomando  $x_0 = 2.25$  e  $x_1 = 2.5$ , obtemos:  $f_0 \simeq 6.93$  e  $f_1 = 8.73 \Rightarrow P_1(x) = 7.2x - 9.27.$

Tomando  $x_0 = 2.25, x_1 = 2.5$  e  $x_2 = 2.75$ , obtemos:  $f_0 = 6.93, f_1 = 8.73$  e  $f_2 = 10.89 \Rightarrow P_2(x) = 2.88x^2 - 6.48x + 6.93.$

b)  $f(2.4) \simeq P_1(2.4) = 8.01, f(2.4) \simeq P_2(2.4) = 7.9668.$

c)  $|R_1(x)| \leq 5 \times 10^{-2}, |R_2(x)| \leq 3.789 \times 10^{-3}.$

**8.17)** a)  $P_3(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 4x).$

b)  $f(0.5) \simeq P_3(0.5) = -0.625.$

**8.18)** a) Tomando os pontos:  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1 \Rightarrow P_1(x) = -0.5x + 1.$

b) Acrescentando o ponto  $x^2 = 1.5$ , obtemos:  $P^2(x) = P^1(x) + (x^2 - x)(0.2) \Rightarrow P_2(x) = 0.2x^2 - 0.7x + 1.$

c)  $f(0.5) \simeq P_1(0.5) \simeq 0.75, f(0.5) \simeq P_2(0.5) \simeq 0.7.$

**8.19)** Tomando os pontos:  $x_0 = 0.03, x_1 = 0.04$  e  $x_2 = 0.05 \Rightarrow P_2(x) = 72x^2 - 27.82x + 3.7289.$

Para  $x = 0.0378 \Rightarrow y \simeq P_2(0.0378) \simeq 2.7802,$

Acrescentando o ponto  $x_3 = 0.06$ , obtemos:

$$P_3(x) = P_2(x) + (x^3 - 0.12x^2 + 0.0047x - 0.00006)(4400) \Rightarrow$$

$$P_3(x) = 4400x^3 - 456x^2 - 7.14x + 3.4649.$$

Para  $x = 0.0378 \Rightarrow y \simeq P_3(0.0378) \simeq 2.7811, .$

**8.20)** a) Tomando os pontos:  $x_0 = 1.10, x_1 = 1.15$  e  $x_2 = 1.25 \Rightarrow P_2(x) = -0.13x^2 + 0.7725x + 0.3556 \Rightarrow \sqrt{1.12} \simeq P_2(1.12) = 1.057728.$

b)  $|R^2(x)| \leq 3.8 \times 10^{-6}.$

Observe que, apesar do erro garantir 5 casas decimais corretas no resultado, vemos que isto não é verdade, pois o resultado exato de  $\sqrt{1.12}$  é 1.0583005.

Para obter o resultado com 5 casas decimais corretas devemos trabalhar com mais casas decimais nos dados. Assim, tomando os mesmos pontos e  $f_0 = 1.048809, f_1 = 1.072381$  e  $1.118034$ , obtemos:

$$P_2(x) = -0.0994x^2 + 0.69509x + 0.404484 \Rightarrow \sqrt{1.12} \simeq P_2(1.12) = 1.0582974,$$

com 5 casas decimais corretas.

**8.21)** Tomando  $x_0 = 0, x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 1.0$  e calculando  $f(x)$  nestes pontos, obtemos:  $P_2(x) = 7.74x^2 - 0.75x - 1.$  Fazendo  $P_2(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} \simeq 0.4108.$

**8.22)** a) O grau adequado é 1. Assim:  $P_1(x) = 0.49x + 0.5102 \Rightarrow \sqrt{1.035} \simeq P_1(1.035) = 1.01735.$

b)  $R_1(x) \leq 3 \times 10^{-6}.$

**8.23) a)**  $P_3(x) = P_1(x) = 2x$ .

**b)**  $P_3(x) = P_1(x) = 2x$ .

**8.24)** Usando todos os pontos obtemos:

**a)**  $P_3(x) = P_2(x) = -0.5x^2 + 1.55x - 0.21$ .

**b)**  $P_3(x) = P_2(x) = -0.5x^2 + 1.55x - 0.21$ .

**c)**  $\sin 1.35 \simeq P_2(1.35) = 0.97125$ .

**d)**  $|R_2(x)| \leq 2 \times 10^{-5}$ . (Ver observação na resolução do exercício **8.20**).

**8.25)**  $\alpha = 14, \beta = -5$  e  $\gamma = 20$ .

**8.26)**  $P_3(x) = -2x^3 + x^2 + 2x - 1 \Rightarrow f(0.5) \simeq P_3(0.5) = 0$ .

**8.27) b)** Não. Basta verificar que o polinômio que interpola a função tabelada é o polinômio nulo.

**8.28)**  $P_3(x) = -x^3 + x^2 + x$ .

**8.30)** Tomando  $x_0 = 2, x_1 = 3$  e  $x_2 = 4 \Rightarrow P_2(x) = -0.065x^2 - 0.443x + 2.055$ .  
Fazendo  $P_2(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} \simeq 3.1671$ .

**8.31)** Tomando  $x_0 = 0, x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 1.0$  e calculando  $f(x)$  nestes pontos, obtemos:  $P_2(x) = -2.5606x^2 - 0.9965x + 3$ .  
Fazendo  $P_2(x) = 0 \Rightarrow \bar{x} \simeq 0.9052$ .

**8.32)** As diferenças divididas de ordem 5 são constantes e portanto as diferenças divididas de ordem 6 são nulas.

**8.33)** Tomando  $x_0 = -1.23, x_1 = 0.63, x_2 = 0.79, f_0 = 1.2, f_1 = 1.5$  e  $f_2 = 1.6 \Rightarrow P_2(x) = 0.2296x^2 + 0.2991x + 1.2206$ .  
Calculando  $P_2(0) \simeq f(0) \Rightarrow \bar{x} \simeq 1.2206$ .

**8.34)** Tabelando  $f(x)$  nos pontos  $x_0 = 0, x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 1$ , obtemos:  $f_0 = -2, f_1 = -1.125$  e  $f_2 = 2$ . Tomando  $x_0 = -2, x_1 = -1.125$  e  $x_2 = 2 \Rightarrow P_2(x) = 0.10285x^2 + 0.75x + 0.9114$ .  
Calculando  $P_2(0) \simeq f(0) \Rightarrow \bar{x} \simeq 0.9114$ .

**8.35)** Tomando os pontos:  $x_0 = 0.45, x_1 = 0.50$  e  $x_2 = 0.55$ , obtemos:  
 $P_2(x) = -2x^2 + 1.5x + 1.22 \Rightarrow P'(x) = -4x + 1.5 \Rightarrow f'(0.52) \simeq P'_2(0.52) = -0.58$ .

ou

$$P_2(u) = -0.005u^2 - 0.015u + 1.49 \Rightarrow P'(u) = \frac{-0.01u - 0.015}{h} \Rightarrow f'(0.52) \simeq P'_2(1.4) = -0.58.$$

**8.36)** A tabela deve ter 15 valores.

**8.37)** O grau mínimo é 2.

**8.38)** Com nenhuma precisão. ( $|R_2(15)| \leq 6.679 \times 10^{14}$ .)

**8.39)** Com duas casas decimais corretas. ( $|R_1(x)| \leq 1.569 \times 10^{-3}$ .)

- 8.40) a)** Tomando  $x_0 = 0.2$ ,  $x_1 = 0.3$  e  $x_2 = 0.4$ , obtemos:  
 $P_2(x) = -5.85x^2 + 6.975x - 2.77 \Rightarrow \ln(0.32) \simeq -1.1370$ .
- b)**  $h < 0.063$ .
- 8.41) a)** Forma de Newton do polinômio de interpolação, pois basta acrescentar um termo ao polinômio obtido na tabela do item i).
- b)**  $P_4(x) = -0.0341x^4 + 1.2110x^3 - 7.1883x^2 + 16.4873x - 1$ .
- $$P_5(x) = P_4(x) + (x^5 - 11.6x^4 + 47.39x^3 - 79.204x^2 + 43.758x)$$
- $$= -0.0607x^5 + 0.67002x^4 + 1.7556x^3 - 2.3806x^2 + 13.8312x - 1.$$
- 8.42)** As diferenças divididas de ordem 3 devem ser constantes.
- 8.43)** O grau do polinômio interpolador é 2, pois as diferenças de 2ª ordem são constantes e iguais a  $2h$ .
- 8.44) b)** Tomando  $x_i = 100$ ,  $x_{i+1} = 123$ ,  $y_j = 81.5$  e  $y_{j+1} = 100.0$ , obtemos:  $\alpha = 0.4$  e  $\beta = 0.8919$ . Usando a fórmula dada em a), segue que:  $f(110, 98) \simeq 59.7891$ .

## Capítulo 9

**9.1)**  $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} \, dx \simeq 0.321463.$

**9.2)** Para  $h = 0.4, 0.2$  e  $0.1$ , obtemos:  $\int_0^{0.8} \cos x \, dx \simeq 0.7076, 0.7148$  e  $0.7165$ , respectivamente.

**9.3)**  $\int_{1.2}^{1.6} \operatorname{sen} x \, dx \simeq 0.39105.$

**9.4)**  $\int_0^{0.8} x e^x \, dx \simeq 0.564.$

**9.6)**  $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} \, dx \simeq 0.321475.$

Para  $h = 0.4, 0.2$  e  $0.1$ , obtemos:  $\int_0^{0.8} \cos x \, dx \simeq 0.71733, 0.71720$  e  $0.71717$ , respectivamente.

$$\int_{1.2}^{1.6} \operatorname{sen} x \, dx \simeq 0.391557.$$

$$\int_0^{0.8} x e^x \, dx \simeq 0.554133.$$

**9.7)**  $\int_0^{20} v(t) \, dt \simeq 4162.33$  pés.

**9.8)**  $\int_{1.0}^{1.6} \ln x \, dx \simeq 0.1518.$

**9.9)**  $\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x} \, dx \simeq 0.321476.$

$$\int_{1.0}^{1.6} \ln x \, dx \simeq 0.1518.$$

**9.10)**  $\int_0^{0.6} \cos x \, dx \simeq 0.564525.$

**9.11)** Para  $h = 0.4$  e  $h = 0.2$ , obtemos:  $\int_0^{1.2} e^{-x} \operatorname{sen} x \, dx \simeq 0.3046$  e  $0.3050$ , respectivamente.

**9.12)**  $h < 0.00245 \Rightarrow h = 0.002.$

**9.13)**  $N = 10$  subintervalos.

**9.14)**  $h < 0.68 \Rightarrow h = 0.3.$

**9.15)** Calculando diretamente e usando quadratura de Gauss-Legendre sobre dois pontos, obtemos:

a)  $\int_0^1 (z^3 + z^2 + z + 1) dz = \frac{8}{3}$  e  $\simeq 2.6666667$ , respectivamente.

b)  $\int_{-2}^1 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}$  e  $\simeq 0.6666667$ , respectivamente.

**9.16)**  $\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} x^2 dx \simeq 1.566$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento, usando quadratura de Gauss-Tchebyshev sobre dois pontos.

**9.17)**  $\int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2+2x} + \frac{1}{2-2x} \right)^{1/2} dx \simeq 3.1416$ , usando quadratura de Gauss-Tchebyshev sobre dois pontos.

**9.18)**  $\int_1^2 \frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x^2+3x-2}} \simeq 0.6411$  e  $0.6413$  usando quadratura de Gauss-Tchebyshev sobre dois e três pontos, respectivamente.

**9.19)**  $\int_0^1 \left( \frac{1}{4x} + \frac{1}{4-4x} \right)^{1/2} dx \simeq 1.5708$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento, usando quadratura de Gauss-Tchebyshev sobre dois pontos.

**9.20)**  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta \simeq 2.3559$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento, usando quadratura de Gauss-Tchebyshev sobre dois pontos.

**9.21)**  $\int_0^{\infty} \left( \frac{x^3 + 4x + 2}{e^{2x}} \right) e^x dx \simeq 11.9976$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento, usando quadratura de Gauss-Laguerre sobre dois pontos.

**9.22)**  $\Gamma(5) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^4 dx \simeq 24.0171$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento, usando quadratura de Gauss-Laguerre sobre três pontos.

**9.23)**  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \simeq 0.22069$ , usando quadratura de Gauss-Laguerre.

**9.24)**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx = 0$ , usando quadratura de Gauss-Hermite.

**9.25)** A fórmula de Newton-Cotes do tipo fechado sobre cinco pontos é dada por:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \simeq \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)].$$

Usando a fórmula obtida, segue que:  $\int_2^3 x e^{\frac{x}{2}} dx \simeq 8.9776$ .



**9.26)** Usando as regras do Trapézio,  $\frac{1}{3}$  de Simpson e  $\frac{3}{8}$  de Simpson, obtemos:

$$I) \int_1^{2.5} x \ln x \, dx \simeq 1.5696, 1.5695 \text{ e } 1.5666, \text{ respectivamente.}$$

$$II) \int_{-1.5}^0 x e^x \, dx \simeq -0.4364, -0.4421 \text{ e } -0.4421, \text{ respectivamente.}$$

**9.27)** Usando as regras do Trapézio,  $\frac{1}{3}$  de Simpson e  $\frac{3}{8}$  de Simpson, precisamos:

para a integral  $I)$  do exercício **9.26)** de 200, 10 e 12 divisões, respectivamente,

para a integral  $II)$  do exercício **9.26)** de 240, 12 e 12 divisões, respectivamente.

Observe que no caso da regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson obtemos  $N = 10$ , mas com este número de intervalos não é possível aplicar a regra.

**9.28)**  $\int_{1.0}^{3.0} y(x) \, dx \simeq 9.428333.$

**9.29)**  $I \simeq 0.9461833$ . O resultado ser surpreendente próximo se deve ao fato que

$$\max_{0 \leq t \leq 1} |f^{(IV)}(t)| \simeq 0.2 \text{ e assim com } h = 0.5 \text{ o erro é muito pequeno.}$$

**9.30)** No exercício anterior,  $\max_{0 \leq t \leq 1} |f^{(IV)}(t)|$  era bastante pequeno. Neste caso,

$$\max_{0.1 \leq t \leq 1} |f^{(IV)}(t)| = 24 \times 10^5 \text{ e assim } h \text{ deve ser muito pequeno para conseguirmos uma boa precisão no resultado.}$$

**9.31) a)**  $I = \int_{-2}^2 f(x) \, dx \simeq 25.3333.$

**b)** O erro é igual a zero. ( $\max_{-2 \leq t \leq 2} f^{(IV)}(t) = 0$ .)

**9.33)** Tomando  $h = 0.25$ , obtemos:

$$\int_0^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx = \int_0^1 \sqrt{10 - 48x + 64x^2} \, dx \simeq 2.4496.$$

**9.34)** Usando a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson e tomando  $h = 0.35$ ,  $h = 0.175$  e  $h = 0.0875$ , obtemos:  $\ln 1.7 = \int_1^{1.7} \frac{dt}{t} \simeq 0.5309731, 0.5306538 \text{ e } 0.5306299$ , respectivamente.

**9.35)** Usando a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson e tomando  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$ , obtemos:

$$\int_{-1}^0 x e^x \, dx \simeq -0.26349 \text{ e } -0.26419, \text{ respectivamente.}$$

**9.36) a)** 4 subintervalos.

**b)**  $\int_0^{0.8} (x^2 - \cos x) \, dx = -0.5390.$

**9.37)** Devemos aplicar a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson generalizada no intervalo  $[1, 2]$  e a regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson no intervalo  $[2, 3]$  ou a regra  $\frac{3}{8}$  de Simpson no intervalo  $[1, 1.7]$

e a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson generalizada no intervalo  $[1.7, 3]$ .

**9.38) a) i)** para  $\alpha = 0.1$ , 31 intervalos,

ii) para  $\alpha = 0.01$ , 457 intervalos,

iii) para  $\alpha = 0$  não é possível aplicar a regra de Simpson.

b)  $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \simeq 1.7509$ , usando a fórmula de quadratura de Gauss- Legendre.

**9.39) a)** O grau adequado do polinômio é 2.

Tomando  $t_0 = 1.5, t_1 = 2.5$  e  $t_2 = 3.0 \Rightarrow P_2(t) = -t^2 + 6t - 5 \Rightarrow v(2) \simeq$

$P_2(2) = 3$ .

b) A área hachurada é 1.66667.

**9.40) b)**  $N = 3750$  subintervalos.

c)  $I = \Gamma(3) = \int_0^\infty e^{-x} x^2 dx \simeq 1.9999958$ .

**9.41) a)** Usando a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson e tomando  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$ , obtemos:

$I(1) = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \simeq 0.1624$  e  $0.1607$ , respectivamente.

b) Usando a fórmula de Gauss-Laguerre sobre dois pontos, obtemos:

$\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 1.9999958$ , exatamente, a menos de erros de arredondamento.

**9.42)** As duas pessoas obtiveram o resultado exato, desde que:  $\max_{-1 \leq t \leq 1} f^{(IV)}(t) = 0$   
e  $2n + 1 = 3 \Rightarrow N = 2$ .

**9.43)** Os dois pontos devem ser da tabela de Gauss-Tchebyshev.

**9.44)**  $w = 1.5$  e  $A = 3 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = 4.5$ .

**9.45) a)**  $A_0 = A_1 = 1.5$ .

b)  $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x+3} \simeq 1.0909$ .

**9.46)**  $\int_0^1 x f(x) dx = 0.18196f(0.35505) + 0.31804f(0.84495)$ .

$\int_0^1 (x^4 + x \operatorname{sen} x) dx \simeq 0.5011301$ .

$\int_0^1 \simeq$

**9.47) a)** Usando a regra  $\frac{1}{3}$  de Simpson e tomando  $h = 0.8, 0.4$  e  $h = 0.2$ , obtemos:

$$I = \int_0^{1.6} x^{-x} dx \simeq 1.6674, 1.7129 \text{ e } 1.7204, \text{ respectivamente.}$$

**b)** Usando fórmula de quadratura de Gauss- Legendre com dois e três pontos, obtemos:

$$I = \int_0^{1.6} x^{-x} dx \simeq 1.7508 \text{ e } 1.7257, \text{ respectivamente.}$$

**9.48) b)**  $\int_0^1 \int_0^{0.5} \sqrt{x^2 + y^3} dy dx \simeq 0.2802.$

Capítulo 10

10.2) Para o (p.v.i.) I)

	a)	b)	c)	d)
$x_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
0.4	0.408	0.4163	0.416	0.412
0.6	0.6413	0.6705	0.6692	0.6589
0.8	0.9236	0.9993	0.9951	0.9721
1.0	1.2942	1.4789	1.4653	1.4122

Para o (p.v.i.) II)

	a)	b)	c)	d)
$n$	$n$	$n$	$n$	$n$
0.0	1	1	1	1
0.3	1	0.91	0.91	0.91
0.6	0.82	0.6790	0.6721	0.6643

Para o (p.v.i.) III)

	a)	b)	c)	d)
$x_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$
0.0	2	2	2	2
0.1	2	1.99	1.99	1.99
0.2	1.98	1.9602	1.9602	1.9702
0.3	1.9404	1.9116	1.8818	1.9209

10.3) A ordem  $q$  e a constante do erro  $C_i$  são, respectivamente:

a)  $q = 2$  e  $C_3 = \frac{1}{3}$ .

b)  $q = 4$  e  $C_5 = -\frac{1}{90}$ .

c)  $q = 3$  e  $C_5 = -\frac{1}{24}$ .

d)  $q = 2$  e  $C_4 = \frac{5}{12}$ .

e)  $q = 4$  e  $C_5 = -\frac{3}{80}$ .

10.4) O erro de truncamento é, respectivamente:

- a)  $\frac{h^3}{3} y'''(\xi), \quad x_n < \xi < x_{n+2}.$
- b)  $-\frac{h^5}{90} y^{(v)}(\xi), \quad x_n < \xi < x_{n+2}.$
- c)  $-\frac{h^4}{24} y^{(iv)}(\xi), \quad x_n < \xi < x_{n+2}.$
- d)  $\frac{5h^3}{12} y'''(\xi), \quad x_n < \xi < x_{n+2}.$
- e)  $-\frac{3h^5}{80} y^{(v)}(\xi), \quad x_n < \xi < x_{n+3}.$

10.5) A ordem de consistência é, respectivamente:

- a) 2,
- b) 4,
- c) 3,
- d) 4.

10.6) Não. O método não é consistente. ( $C_1 = \frac{5}{3} \neq 0.$ )

10.7)  $C_1 = \frac{1}{12} \neq 0.$

10.8)

$x_n$	$y_n$
0.0	1
0.2	1.2264
0.4	1.5207

10.9)

$x_n$	$y_n$
0.0	1
0.15	1.0101
0.3	1.0378

10.10)

$x_n$	$y_n$
0.0	1
0.1	0.99
0.2	0.9625
0.3	0.9138
0.4	0.8538
0.5	0.7785

10.12) Usando o método de Euler Modificado para obter os valores iniciais necessários, segue que:

$x_n$	$y_n$
0.0	2
0.1	2.0050
0.2	2.0193
0.3	2.0417

10.14)

$x_n$	$y_n$
0.0	2
0.1	2.0048
0.2	2.0187
0.3	2.0408

10.15) Obtemos o seguinte método de Runge-Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \text{ , onde :}$$
$$k_1 = f(x_n, y_n) \text{ ,}$$
$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + hk_1) \text{ ,}$$
$$k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \text{ .}$$

10.16)

a)			b)	
$x_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$
0.0	1	-1	1	-1
0.05	1.1560	-1.0421	1.1677	-1.0477
0.1	1.3560	-1.0963	1.3777	-1.1108

c)			d)	
$x_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$
0.0	1	-1	1	-1
0.05	1.1573	-1.0400	1.1690	-1.0484
0.1	1.3541	-1.0895	1.3874	-1.1148

10.17)

$x_n$	$y_n$	$z_n$
0.0	1	2
0.05	1.0916	1.6717
0.1	1.1679	1.3837
0.15	1.2307	1.1320
0.2	1.2818	0.9128
0.25	1.3226	0.7228
0.3	1.3546	0.5588
0.35	1.3790	0.4182
0.4	1.3970	0.2981

10.18)

a)		b)
$x_n$	$y_n$	$y_n$
0.0	1	1
0.15	1	0.9775
0.3	0.9560	0.9150

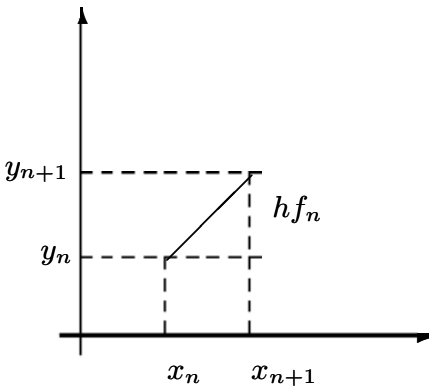
10.19) O  $q$  adequado é 2. Assim, usando o método de Taylor de ordem 2, obtemos:

$x_n$	$y_n$
0.0	1
0.1	1.105
0.2	1.2267

10.20)

$x_n$	$y_n$
1	6
3	12
5	18
7	24

A interpretação geométrica do método de Euler, figura a seguir, responde a pergunta feita.



Observe na figura anterior que o método de Euler fornece para cada ponto  $x_i$  o valor de  $y_i$  e que podemos traçar uma reta entre  $(x_n, y_n)$  e  $(x_{n+1}, y_{n+1})$ . Assim, tal concordância era de se esperar, desde que o resultado exato do (p.v.i.) é uma reta .

10.21) a) Ordem  $q = 6$  e a constante do erro  $C_7 = -\frac{6}{665}$ .

b) Temos:  $C_1 = 0$ . O polinômio característico é:

$\rho(\xi) = \xi^4 - \frac{8}{19}\xi^3 + \frac{8}{19}\xi - 1 = 0$ , cujas raízes são:  $\pm 1$  e  $\frac{3 \pm \sqrt{1380}i}{38}$ .

Todas as raízes têm módulo 1 e são simples. Portanto o método de Quade é consistente e estável. Assim, o método pode ser aplicado com garantia de convergência.

10.23) a) Se  $q = 3$  então  $b_0 = 10$  e  $b_1 = 4$ .

b) A constante do erro é  $C_4 = \frac{1}{6}$ .

c) O erro foi tão grande pois o método não é estável. Basta observar que as raízes do polinômio característico são:  $\xi_1 = -5$  e  $\xi_2 = 1$ .

10.24)

	a)	b)	c)
$x_n$	$y_n$	$y_n$	$y_n$
0.0	1	1	1
0.05	1	1.0012	1.0012
0.1	1.0025	1.0047	1.0047
0.15	1.0073	1.0102	1.0103
0.2	1.0217	1.0177	1.0178

onde no item c) foi usado o método de Heun para obter o valor de  $y_1$ .

10.27)

a)			b)		c)	
$x_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$
0.0	2	0	2	0	2	0
0.1	2.2	0.4	2.2355	0.495	2.2327	0.49
0.2	2.46	0.96	2.5600	1.2291	2.5526	1.2116
0.3	2.802	1.74	3.0135	2.3116	2.9978	2.2714

onde no item c) foi usado o método de Taylor de ordem 3 para obter o valor de  $y_1$ .

10.28) a)

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{3}{y} + 2xy - (\text{sen } x)y^3 \\ y(1) = 1 \\ z(1) = 15 \end{cases} \quad x \in [1, 1.2] \text{ , } \quad h = 0.1$$

b) Usando o método de Euler Modificado, segue que:

$x^n$	$y^n$	$z^n$
1	1	15
1.1	2.575	15.3492
1.2	4.1867	15.6698

10.29)

$x_n$	$y_n$	$z_n$	$w_n$
0.0	1	2	3
0.1	1.214	2.2667	2.2907
0.2	1.4509	2.4607	1.6802
0.3	1.7043	2.5899	0.5392

onde foi usado o método de Taylor de ordem 3 para obter o valor de  $y_1$ .

10.30)

a)			b)		c)	
$x_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$	$y_n$	$z_n$
0.0	-1	0	-1	0	-1	0
0.1	-1	0.4	-0.9885	0.2335	-0.9890	0.2323
0.2	-0.98	0.46	-0.9500	0.5434	-0.9513	0.5381
0.3	-0.934	0.794	-0.8756	0.9493	-0.8789	0.9420