① Introdução e conceitos básicos - Lista 1

1.5) A definição de continência estabelece que $A \subseteq B$ se e somente se todo elemento de A também é elemento de B.

$\emptyset \subseteq B$ satisfaz à definição de continência para qualquer conjunto B, pois é verdade que todo elemento de $\emptyset$ (que ñ existe) é elemento de qualquer conjunto B. → prova por vacuidade

ou Seja $x \in \phi$ então $\underset{(F)}{\forall x \in \emptyset} \Rightarrow \underset{(V)\text{ ou }(F)}{x \in A}$ (V)

1.6) Não. $\emptyset \subseteq A$ $\forall$ A, inclusive quando $A = \emptyset$, isto é $\emptyset \subseteq \emptyset$. Entretanto, vazio não tem subconjunto próprio pois $\emptyset \not\subset \emptyset$.

1.10) a.1) $\Sigma^* = \{ \varepsilon, a, b, c, aa, ab, \ldots, bz, aaa, \ldots \}$

a.2) Dígitos$^* = \{ \varepsilon, 0, 1, 2, \ldots, 9, 00, 01, \ldots, 90, 91, \ldots, 000, \ldots \}$

b.1) Falso. De fato, um texto em português contém, em geral, uma série de símbolos especiais como pontuação, aspas, parênteses, espaço, etc.

b.3) N = Dígitos*? Falso, pois $\varepsilon \notin \mathbb{N}$

1.11) Para um alfabeto unitário, qualquer palavra (de qualquer comprimento) é um palíndromo, pois é constituída por uma sequência finita de um mesmo símbolo justaposto. Neste caso, o conjunto de palíndromos é infinito. Se o alfabeto for vazio, a única cadeia de caracteres possível é a palavra vazia ε, a qual é um palíndromo. Ou seja, $\Sigma = \emptyset$

---

② Noções de lógica e técnicas de demonstração

2.1) a) V b) V c) F d) F e) V f) F

2.2) a) F b) F c) V d) V ou F e) F f) F

2.3) a) $V(p) = F \wedge V(q) = F$ ou $V(p) = F \wedge V(q) = V$
b) $V(p) = F \wedge V(q) = F$
c) $V(p) = V \wedge V(q) = V$
d) $V(p) = V \wedge V(q) = V$
e) $V(p) = F \wedge V(q) = V$

2.4) Tautologias: c, g, i
contradição: h

2.5) a)

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{x=0}_{V} \wedge \underbrace{x=y}_{V}}_{V} \to \underbrace{y \neq z}_{V}}_{V}$$

2.6) a) e b)

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$	$p \wedge q$	$p \wedge q \to p$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V

tautologia: $p \Rightarrow (p \vee q)$ → importante

tautologia: $(p \wedge q) \Rightarrow p$

importante

2.7) a) idempotência

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$	$p \vee p$	$p \vee p \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
F	F	V	F	V

tautologia: $p \wedge p \Leftrightarrow p$

tautologia: $p \vee p \Leftrightarrow p$

2.8) a) $p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \to q$

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow p \wedge q$	$p \to q$	$(p \leftrightarrow p \wedge q) \leftrightarrow p \to q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

mesma tabela verdade

tautologia
$(p \leftrightarrow p \wedge q) \Leftrightarrow p \to q$

2.9) Conectivos estudados: disjunção, condição, bicondição podem ser expressos por $\wedge$ e $\neg$

a) disjunção: $p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

b) condição: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ → é falsa somente quando p é V e q é F

p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

→ tautologia

$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

iguais

→ é V quando p é V e q é V ou quando p é F e q = F

c) bicondição: $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	F

$\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$	$\neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$
F	V	V
V	F	V
V	F	V
F	V	V

iguais

→ tautologia

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$

2.10)

x	y	x EXOR y	x NAND y
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

a) EXOR

x EXOR y é verdadeira somente quando os operandos x e y possuem valor-verdade diferentes, exatamente o contrário da bicondição, o que sugere que:

x EXOR $y \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$

x	y	x EXOR y	$x \leftrightarrow y$	$\neg(x \leftrightarrow y)$	x EXOR $y \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V

iguais

tautologia:

x EXOR $y \Leftrightarrow \neg(x \leftrightarrow y)$

b) Vimos que x NAND y é F somente quando x e y são V ao contrário do conectivo conjunção então podemos supor que x NAND $y \Leftrightarrow \neg(x \wedge y)$

x	y	x NAND y	$x \wedge y$	$\neg(x \wedge y)$	x NAND $y \Leftrightarrow \neg(x \wedge y)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V

tautologia

iguais

x NAND $y \Leftrightarrow \neg(x \wedge y)$

2.12) A proposição quantificada universalmente $\forall x \in X, p(x)$ é V sempre que, $\forall x \in X$, $p(x)$ é V. Observe que, eventualmente, X pode ser o conjunto vazio.

A proposição quantificada $\exists x \in X \mid p(x)$ é V sempre que $\exists x$ tal que $p(x)$ é V.

Observar que X ñ pode ser o vazio, pois neste caso, tal elemento não existe.

Ou seja, a afirmação não vale para qualquer proposição. Não é verdadeira quando a proposição é sobre o conjunto vazio

---

2.15) $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.

p: $n! > (n+1)$ $\quad$ $\neg p$: $n! \leq n+1$

q: $n > 2$ $\quad$ $\neg q = n \leq 2$

logo $n! > (n+1) \to n > 0 \Leftrightarrow n \leq 2 \to n! \leq n+1$

Assim, como n é natural, é suficiente testar a proposição para os casos $n=0$, $n=1$ e $n=2$.

para $n=0$, vale $0! = 1 \leq 1$

$n=1$, vale $1! = 1 \leq 2$

$n=2$, vale $2! = 2 \leq 3$

③ Álgebra dos conjuntos – Lista 3

3.1) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Seja $a \in A$, então

$$\text{Se } \underbrace{a \in A}_{F} \wedge \underbrace{a \in B}_{F \text{ ou } V} \Rightarrow \underbrace{a \in C}_{F \text{ ou } V} \Big\} \text{ proposição verdadeira}$$

para $A = \emptyset$ F

F

3.2) i) $A + B = \{p_A, q_A, r_A, s_A, r_B, t_B, v_B\}$ ou
$\{\langle p, A\rangle, \langle q, A\rangle, \langle r, A\rangle, \langle s, A\rangle, \langle r, B\rangle, \langle t, B\rangle, \langle v, B\rangle\}$

j) $B + B = \{\langle r,0\rangle, \langle t,0\rangle, \langle v,0\rangle, \langle r,1\rangle, \langle t,1\rangle, \langle v,1\rangle\}$

3.3) p) $(A+B)+C = \{\langle 2, A\rangle, \langle 4, A\rangle, \langle 5, A\rangle, \langle 6, A\rangle, \langle 8, A\rangle, \langle 1, B\rangle, \langle 4, B\rangle, \langle 5, B\rangle, \langle 9, B\rangle\} + \{2,3,4\} =$

$= \{\langle\langle 2, A\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 4, A\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 5, A\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 6, A\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 8, A\rangle, A+B\rangle,$
$\langle\langle 1, B\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 4, B\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 5, B\rangle, A+B\rangle, \langle\langle 9, B\rangle, A+B\rangle,$
$\langle 2, C\rangle, \langle 3, C\rangle, \langle 4, C\rangle\}$

3.4) (a) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

— Seja $x \in A \cup \emptyset$, então
$x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow$
$x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow$
$x \in \emptyset \cup A$
Portanto $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$

— Seja $x \in \emptyset \cup A$, então
$x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow$
$x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow$
$x \in A \cup \emptyset$
Portanto $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$

Logo, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$

— Seja $x \in A \cup \emptyset$, então
$x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ e assim, $A \cup \emptyset \subseteq A$
— Seja $x \in A$, então ($p \Rightarrow p \vee q$)
$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cup \emptyset$ e assim $A \subseteq A \cup \emptyset$

$\Big\}$ $A \cup \emptyset = A$ e assim $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

Seja $x \in A \cap A$. Então

$x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$ (pois $p \wedge p \Leftrightarrow p$)

ou seja

$A \cap A = A$

c) $A \cup B = B \cup A$

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow$

$x \in B \vee x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

3.5) Seja $x \in A \cup (B \cup C)$, então

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow$

$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

3.6) a) $A \cap U = U \cap A = A$

– Seja $x \in A \cap U$. Então

$x \in A \cap U \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \in U \Leftrightarrow$

$x \in U \wedge x \in A \Leftrightarrow$

$x \in U \cap A$

Logo, $A \cap U = U \cap A$

– Seja $x \in A \cap U$, então

$x \in A \cap U \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \in U \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge V \Leftrightarrow x \in A$

Logo, $A \cap U = A$

Assim, $A \cap U = U \cap A = A$

3.7) b.1) $A \cap (A \cup B) = A$

Seja $x \in A \cap (A \cup B)$, então

$x \in A \cap (A \cup B) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge x \in (A \cup B) \Leftrightarrow$

$x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$x \in A$

b.2) $A \cup (A \cap B) = A$

Seja $x \in A \cup (A \cap B)$, então

$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow$

$x \in A \cup x \in (A \cap B) \Leftrightarrow$

$x \in A \cup (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

$x \in A$

3.8) $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ e $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

a) $A \cap B = \sim\sim(A \cap B) = \sim(\sim A \cup \sim B)$

b) $A \cup B = \sim\sim(A \cup B) = \sim(\sim A \cap \sim B)$

3.9) a) $X \cup U = U \cup X = U$

b) $X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$

c) $X \times \emptyset = \emptyset \times X = \emptyset$

d) Suponha que A é um elemento absorvente para a diferença. Seja X um conjunto. Então: $X - A = A - X = A$

Assim, se $x \in X - A \Rightarrow x \in X$ e $x \in A$. Mas pela suposição $(X-A = A-X = A)$, vale $x \in A$. Logo, a única alternativa é $x - A = \emptyset$ e consequentemente $A - X = \emptyset$.

Entretanto: $\left.\begin{array}{l} x - A = \emptyset \Rightarrow X \subseteq A \\ A - X = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow$ $X = A$. Então o conjunto A depende do X, o que não é possível, pois a propriedade absorvente é $(\exists A)(\forall X)(X - A = A - X = A)$

Isto significa que o elemento absorvente A deve ser fixado antes do conjunto X e assim ser o mesmo para todo conjunto X

Logo, a diferença não tem elemento absorvente.

e) Suponha que A é um elemento absorvente para a união disjunta.

Seja X um conjunto. Então: $X + A = A + X = A$

Como $X + A = \{\langle x, X\rangle / x \in X\} \cup \{\langle a, A\rangle / a \in A\}$, vale:

$$X + A = A \Leftrightarrow X = \emptyset \text{ e } A \neq \emptyset.$$

De fato, $\emptyset + \emptyset = \emptyset$. Portanto $\nexists$ tal A, pois implicaria em $X = \emptyset\ \forall X$

3.10) a) $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$

$(A \cup B) \cap \sim A = (A \cap \sim A) \cup (B \cap \sim A) = \emptyset \cup (B \cap \sim A) = B \cap \sim A$

b) Seja $x \in (A \cap B) \cup A$

Então $x \in (A \cap B) \cup A \Rightarrow$

$x \in (A \cup A) \cap (B \cup A) \Rightarrow$

$x \in A \cap (B \cup A) \Rightarrow$

$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in A) \Rightarrow$

$x \in A \quad (p \wedge q \Rightarrow p)$

$(A \cap B) \cup A \subseteq A$

Seja $x \in A$. Então $\quad (p \Rightarrow p \vee q)$

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in (A \cap B) \Rightarrow$

$x \in (A \cap B) \vee x \in A$

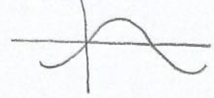
$x \in (A \cap B) \cup A$

assim, $(A \cap B) \cup A = A$

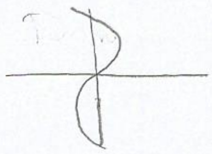
---

p q q v

④ Relações - lista 4

4.1) a 1) $R = \{ \langle x,y \rangle / y = \operatorname{sen} x \}$ 

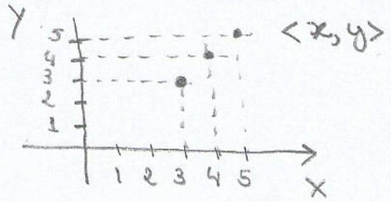
$D_{ef} = \mathbb{R}$ Imagem $= \{ y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1 \}$

b 1)  $D_{ef} = \{ y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1 \}$, Imagem $\mathbb{R}$

$R^{op} = \{ \langle y,x \rangle / y = \operatorname{sen} x \}$

4.2)

a) * $R_1 = \{ \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle, \langle 5,5 \rangle \}$ * $D_{ef} = \{3,4,5\}$

*  * Imagem $= \{3,4,5\}$

4.3) a) Dados duas relações, a união delas é também uma relação?

— Sejam $R_1 \subseteq (A \times B)$ e $R_2 \subseteq (C \times D)$. Então

$R_1 \cup R_2 \subseteq (A \times B) \cup (C \times D) = \{ \langle x,y \rangle / x \in A \wedge y \in B \} \cup \{ \langle x,y \rangle / x \in C \wedge y \in D \} =$

$\{ \langle x,y \rangle / (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D) \} =$

$\{ \langle x,y \rangle / [x \in A \vee (x \in C \wedge y \in D)] \wedge [y \in B \vee (x \in C \wedge y \in D)] \} =$

$\{ \langle x,y \rangle / \underbrace{[\underbrace{(x \in A \vee x \in C)}_{p} \wedge \underbrace{(x \in A \vee y \in D)}_{q}]}_{p \wedge q \Rightarrow p} \wedge \underbrace{[\underbrace{(y \in B \vee x \in C)}_{q} \wedge \underbrace{(y \in B \vee y \in D)}_{p}]}_{q \wedge p \Rightarrow p} =$

$\{ \langle x,y \rangle / \underbrace{(x \in A \vee x \in C)}_{x \in A \cup C} \wedge \underbrace{(y \in B \vee y \in D)}_{y \in B \cup D} \} = \{ \langle x,y \rangle / (x \in A \cup C) \wedge (y \in B \cup D) \} =$

$(A \cup C) \times (B \cup D)$

Assim, $R_1 \cup R_2 \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D) \rightarrow$ é uma relação

---

4.4) Para uma dada endorrelação (Domínio e imagem são o mesmo conjunto), a existência de arcos paralelos corresponderia a dois pares $\langle x,y \rangle$ em R. Mas como R é, além de uma relação, um conjunto, não possui elementos repetidos. Portanto, esse caso é impossível. Logo, não corresponde a uma relação

$x \rightrightarrows y$ → é impossível definir uma endorrelação para o qual o correspondente grafo possua dois ou mais arcos paralelos

4.5) Para cada conjunto, considere a correspondente relação identidade. Claramente, diferentes conjuntos estão associados a diferentes relações identidade e vice-versa. Assim, a coleção de todas as relações identidade é isomorfa à coleção de todos os conjuntos. Portanto, a coleção das relações identidades não é conjuntos (pois a coleção de todos os conjuntos não é conjunto - Paradoxo de Russel) e, consequentemente, a coleção de todas as relações também não é conjunto. Logo, a álgebra de relações é grande.

4.6) Sejam $R: A \to B$, $S: B \to C$ e $T: C \to D$. Logo, $S \circ R : A \to C$ e $T \circ (S \circ R): A \to D$. Seja $\langle a, d \rangle \in T \circ (S \circ R)$:

$\langle a, d \rangle \in T \circ (S \circ R) \Rightarrow (\exists c \in C)(a(S \circ R)c \wedge cTd) \Rightarrow$

$(\exists b \in B)(\exists c \in C)((aRb \wedge bSc) \wedge cTd)) \Rightarrow$

$(\exists b \in B)(\exists c \in C)(aRb \wedge (bSc \wedge cTd)) \Rightarrow$

$(\exists b \in B)(aRb \wedge b(T \circ S)d) \Rightarrow \langle a, d \rangle \in (T \circ S) \circ R$

Assim, $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ cqd

---

4.7) a.1) $\emptyset \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset = id_\emptyset$. Logo, $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ é isorrelação

a.2) Seja $R = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,0 \rangle\} : C \to C$. Definimos $S = \{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle\} : C \to C$. Então:

$S \circ R = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\} = id_C$

$R \circ S = \{\langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\} = id_C$

a.3) $ad\_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$ onde $ad\_1 = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{0\} \mid y = x + 1\}$

A relação ad_1 associa a cada natural o seu sucessor. Assim, a relação candidata a inversa é a relação que associa cada natural maior do que zero a seu antecessor

Seja $sub\_1 : N - \{0\} \to N$ onde $sub\_1 = \{\langle y, x \rangle \in N - \{0\} \times \mathbb{N} \mid x = y - 1\}$

Então: $sub\_1 \circ ad\_1(x) = sub\_1(ad\_1(x)) = sub\_1(x+1) = x + 1 - 1 = x$

Ou seja, $sub\_1 \circ ad\_1 = id_N$. Também, $ad\_1 \circ sub\_1 : N - \{0\} \to N - \{0\}$ é tal que, para cada $y \in N - \{0\}$, vale:

$ad\_1 \circ sub\_1(y) = ad\_1(sub\_1(y)) = ad\_1(x-1) = x - 1 + 1 = x$ e assim, $ad\_1 \circ sub\_1 = id_{N - \{0\}}$. Logo, $ad\_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$ é isorrelação

b) Mostrar que uma relação $R: A \to B$ não é uma isorrelação, deve-se mostrar que não possui inversa, ou seja, que qualquer $S: B \to A$ é tal que
$S \circ R \neq id_A$ ou $R \circ S \neq id_B$

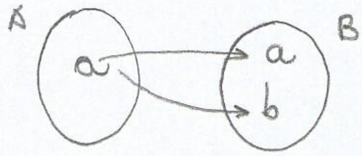
b.1) Seja $S: B \to A$ uma relação qualquer. Então $S \circ \emptyset = \emptyset$
Como $A \neq \emptyset$, $S \circ \emptyset \neq id_A$. Logo $\emptyset : A \to B$ não é isorrelação

b.4) $x^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^2 = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}^2 / y = x^2\}$.
(por absurdo). Suponha que exista uma relação $R: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $x^2 \circ R = id_{\mathbb{Z}}$ e $R \circ x^2 = id_{\mathbb{Z}}$. Então:
$\langle 2,4\rangle \in x^2$ e $\langle -2,4\rangle \in x^2 \Rightarrow \langle 4,2\rangle \in R$ e $\langle 4,-2\rangle \in R \Rightarrow \langle 2,-2\rangle \in R \circ x^2$ e
$\langle -2,2\rangle \in R \circ x^2 \Rightarrow R \circ x^2 \neq id_{\mathbb{Z}}$.

ou

Seja $\langle 2,4\rangle$ e $\langle -2,4\rangle \in$ à relação x^2. Esta relação não é injetora pois $\langle a_1,4\rangle \wedge \langle a_2,4\rangle \not\Rightarrow a_1 = a_2$. Logo, não é uma isorrelação

b.2) $\{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle\} : A \to B$, onde $A = \{a\}$ e $B = \{a,b\}$



ñ é uma relação funcional, pois
$\langle a,b_1\rangle \wedge \langle a,b_2\rangle \not\Rightarrow b_1 = b_2$

Logo não é uma isorrelação.

4.8) $A = \{a,b\}$ e $B = \{0,1\}$
$A \times B = \{\langle a,0\rangle, \langle a,1\rangle, \langle b,0\rangle, \langle b,1\rangle\}$;
$B \times A = \{\langle 0,a\rangle, \langle 0,b\rangle, \langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle\}$

troca $: A \times B \to B \times A$ tal que $\langle a,b\rangle$ troca $\langle b',a'\rangle$ se, e somente se $a = a' \wedge b = b'$
troca^{-1}: $B \times A \to A \times B$ tal que $\langle b,a\rangle$ troca^{-1} $\langle a',b'\rangle$ se, e somente se, $a = a' \wedge b = b'$

troca $= \{\langle\langle a,0\rangle,\langle 0,a\rangle\rangle, \langle\langle a,1\rangle,\langle 1,a\rangle\rangle, \langle\langle b,0\rangle,\langle 0,b\rangle\rangle, \langle\langle b,1\rangle,\langle 1,b\rangle\rangle\}$
troca$^{-1} = \{\langle\langle 0,a\rangle,\langle a,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,a\rangle,\langle a,1\rangle\rangle, \langle\langle 0,b\rangle,\langle b,0\rangle\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,\langle b,1\rangle\rangle\}$
troca$^{-1} \circ$ troca $= \{\langle\langle a,0\rangle,\langle a,0\rangle\rangle, \langle\langle a,1\rangle,\langle a,1\rangle\rangle, \langle\langle b,0\rangle,\langle b,0\rangle\rangle, \langle\langle b,1\rangle,\langle b,1\rangle\rangle\} = Id_{A \times B}$
troca $\circ$ troca$^{-1} = \{\langle\langle 0,a\rangle,\langle 0,a\rangle\rangle, \langle\langle 0,b\rangle,\langle 0,b\rangle\rangle, \langle\langle 1,a\rangle,\langle 1,a\rangle\rangle, \langle\langle 1,b\rangle,\langle 1,b\rangle\rangle\} = Id_{B \times A}$

Ou seja $A \times B$ e $B \times A$ são isomorfos. Ou de forma mais geral:

Caso 1: $troca^{-1} \circ troca = id_{A \times B}$. Suponha $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$:

$\langle\langle a,b\rangle, \langle a', b'\rangle\rangle \in id_{A \times B} \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle \; troca \; \langle b', a'\rangle \wedge \langle b, a\rangle \; troca^{-1} \langle a', b'\rangle \wedge a = a' \wedge b = b' \Leftrightarrow$

$\langle a,b\rangle \; troca^{-1} \circ troca \; \langle a', b'\rangle \Leftrightarrow \langle\langle a,b\rangle, \langle a', b'\rangle\rangle \in troca^{-1} \circ troca$

Assim, $troca^{-1} \circ troca = id_{A \times B}$

Caso 2: $troca \circ troca^{-1} = id_{B \times A}$. Suponha $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$:

$\langle\langle b,a\rangle, \langle b', a'\rangle\rangle \in id_{B \times A} \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b' \Leftrightarrow$

$\langle b,a\rangle \; troca^{-1} \langle a', b'\rangle \wedge \langle a, b\rangle \; troca \; \langle b', a'\rangle \wedge a = a' \wedge b = b' \Leftrightarrow$

$\langle b,a\rangle \; troca \circ troca^{-1} \langle b', a'\rangle \Leftrightarrow \langle\langle a,b\rangle, \langle a', b'\rangle\rangle \in troca \circ troca^{-1}$

Assim $troca \circ troca^{-1} = id_{B \times A}$

Em particular, se pelo menos um dos conjuntos for vazio (suponha $A = \emptyset$):

$A = \emptyset \Rightarrow A \times B = \emptyset$ e $B \times A = \emptyset \Rightarrow A \times B = B \times A$