Gabarito

Para essa resolução, assumimos que todos os alunos possuem matrícula tal que $m_1 \neq 0$ e $m_{15} \neq 0$.

AP2 - Álgebra Linear - 2021.2

Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral
Curso de Engenharia da Computação
Professor: Josefran Bastos

Observação: Sua matrícula será utilizada como base para a prova. Para isso, para $i = 1, ...6$, denotarei por m_i o i-ésimo dígito da sua matrícula da esquerda para a direita. Por fim, para $i, j = 1, ..., 6$, denotarei por $m_{ij} = m_i * 10 + m_j$. Por exemplo, se sua matrícula é 321456 então $m_1 = 3$, $m_5 = 5$ e $m_{13} = 31$.

Mais observações que AFETAM SUA NOTA.

1. A prova deverá ser entregue em pdf.
2. Cada página deverá ter orientação vertical de cima para baixo.
3. O texto deverá ser LEGÍVEL para outras pessoas além de você.

1. Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (m_1, m_2)$. Encontre um vetor w orgonal a v e mostre que todos os vetores ortogonais a w são múltiplos de v.

2. Calcule a distância entre os planos $m_1x + 5y + m_5z + 10 = 0$ e $4m_1x + 20y + 4m_5z + 2 = 0$.

3. Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor qualquer em um espaço vetorial V e k um escalar. Mostre, utilizando apenas os axiomas, que
$$(-k)\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w},$$
onde $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{v}$.

4. Sejam $\overrightarrow{v}_1 = (m_1, m_2, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (m_2, 2, m_15)$ e c uma constante qualquer. Encontre um vetor $\overrightarrow{x}$ tal que o volume do paralelogramo formado por $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{x}$ seja igual a $100 - c$.

1- Existem infinitos vetores ortogonais a $\vec{v}$. Temos que encontrar um $\vec{w}$ tal que $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{0}$.

$$0=(m_1,m_2)(w_1,w_2)=w_1m_1+w_2m_2.$$

$$\Leftrightarrow \quad w_1m_1=-w_2m_2.$$

Como todas as matrículas tem $m_1\neq 0$ então $w_1=-\frac{m_2}{m_1}w_2$.
Logo, tomando $w_2=m_1$, temos que o vetor $\vec{w}=(-m_2,m_1)$ é ortogonal à $\vec{v}$.

Seja $\vec{t}$ um vetor ortogonal a $\vec{w}$. Similar ao raciocínio anterior, temos

$$0=t_1w_1+t_2w_2=-t_1m_2+t_2m_1$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1m_2=t_2m_1 \Leftrightarrow t_2=\frac{t_1m_2}{m_1}.$$

Logo, todo vetor ortogonal a $\vec{w}$ é da forma $(t_1,\frac{m_2}{m_1}t_1)$.
Fazendo a mudança de variável $x=\frac{t_1}{m_1}$ concluímos o desejado.

2- Inicialmente, note que os vetores $(m_1,5,m_5)$ e $(4m_1,20,4m_5)$ são os respectivos vetores normais. Como eles são paralelos logo os planos também o são.

Para calcular a distância entre os planos precisamos de definir um ponto qualquer no primeiro plano. Para isso, tome $x=z=0$, assim

$$m_1\cdot 0+5\cdot y+m_5\cdot 0+10=0 \Rightarrow y=-2.$$

Logo $(0,-2,0)$ é um ponto do primeiro plano.
Assim, a distância entre os planos será

$$d=\frac{|4m_1\cdot 0+20(-2)+4m_5\cdot 0+2|}{(16m_1^2+400+16m_5^2)^{1/2}}=\frac{40}{(16m_1^2+400+16m_5^2)^{1/2}}$$

3) Primeiro, vamos mostrar que $0\vec{v}=\vec{0}$. Temos

$$
\begin{aligned}
0\vec{v} &= (0+0)\vec{v} && \text{(propriedade números reais)}\\
&= 0\vec{v}+0\vec{v} && \text{Axioma distribuição}\\
\Leftrightarrow\quad 0\vec{v}-0\vec{v} &= 0\vec{v}+0\vec{v}-0\vec{v} && \text{Existência do oposto negativo}\\
\Leftrightarrow\quad \vec{0} &= 0\vec{v}+\vec{0}\\
\vec{0} &= 0\vec{v} && \text{Axioma } \vec{0}
\end{aligned}
$$

Com isso, temos

$$
\begin{aligned}
\vec{0} &= 0\vec{v} = (k-k)\vec{v}\\
\Leftrightarrow\quad \vec{0} &= k\vec{v}+(-k)v && \text{Axioma distribuição}\\
\Leftrightarrow\quad -k\vec{v}+\vec{0} &= -k\vec{v}+k\vec{v}+(-k\vec{v}) && \text{Existência do oposto neg.}\\
\Leftrightarrow\quad -k\vec{v} &= \vec{0}+(-k)\vec{v} = (-k)\vec{v}
\end{aligned}
$$

4) Seja $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ o vetor que buscamos. Desta forma, o volume é dado por

$$
\left\| \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & 0 \\ m_2 & 2 & m_{15} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \right\| = \left| (-1)^{1+1} m_1 \begin{vmatrix} 2 & m_{15} \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} m_2 \begin{vmatrix} m_2 & m_{15} \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \right|
$$

$= |m_1(2x_3 - m_{15}x_2) - m_2(m_2x_3 - m_{15}x_1)|$.

Se $(2m_1-m_2^2)\neq 0$, fixe $x_1=\frac{1}{m_{15}}$ e $x_2=\frac{-1}{m_{15}\cdot m_1}$. Assim

$$|(2m_1-m_2^2)x_3+1+m_2|.$$

Logo, tomando $x_3=\dfrac{100-c-m_2-1}{2m_1-m_2^2}$ temos o resultado desejado. Como estou fazendo caso geral, para minha resposta ficar completa, resta fazer o caso $2m_1-m_2^2=0$, mas nossa turma não tem esse caso. Deixo como desafio completarem!