Álgebra Linear
Aula 4

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

1. $A \pm 0 = 0 \pm A = A$;

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

1. $A \pm 0 = 0 \pm A = A$;
2. Para cada matriz A existe uma matriz X_A tal que $A + X_A = 0$.

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

1. $A \pm 0 = 0 \pm A = A$;
2. Para cada matriz A existe uma matriz X_A tal que $A + X_A = 0$. Em particular, denotamos $X_A = -A$;

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

1. $A \pm 0 = 0 \pm A = A$;
2. Para cada matriz A existe uma matriz X_A tal que $A + X_A = 0$. Em particular, denotamos $X_A = -A$;
3. $0A = 0$;

Propriedades de Matriz 0

Seja c um escalar e suponha que os tamanhos das matrizes abaixo sejam de tal forma que as operações possam ser efetuadas.

1. $A \pm 0 = 0 \pm A = A$;
2. Para cada matriz A existe uma matriz X_A tal que $A + X_A = 0$. Em particular, denotamos $X_A = -A$;
3. $0A = 0$;
4. Se $cA = 0$ então ou $c = 0$ ou $A = 0$.

Pergunta 1

Sejam A e B matrizes tais que o produto AB possa ser efetuado. Se $AB = 0$, é correto afirmar que ou $A = 0$ ou $B = 0$?

Pergunta 1

Sejam A e B matrizes tais que o produto AB possa ser efetuado. Se $AB = 0$, é correto afirmar que ou $A = 0$ ou $B = 0$?

Resposta: Não.

Pergunta 2

Sejam A,B e C matrizes tais que os produtos AB e AC possam ser efetuados. Se $AB = AC$ é correto afirmar que $B = C$?

Pergunta 2

Sejam A,B e C matrizes tais que os produtos AB e AC possam ser efetuados. Se $AB = AC$ é correto afirmar que $B = C$?

Resposta: Não.

Matriz Inversa

Uma matriz inversa de uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ é uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Matriz Inversa

Uma matriz inversa de uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ é uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

- **Existência:** Nem toda matriz é invertível.

Matriz Inversa

Uma matriz inversa de uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ é uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

- **Existência:** Nem toda matriz é invertível.
- **Notação:** Se existir, denotamos por A^{-1} a matriz inversa de A;

Matriz Inversa

Uma matriz inversa de uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ é uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

- **Existência:** Nem toda matriz é invertível.
- **Notação:** Se existir, denotamos por A^{-1} a matriz inversa de A;
- **Mais notação:** Se a matriz A é não invertível dizemos que A é *singular*;

Teorema 1.4.4 - Unicidade da Matriz Invertível

Se A é uma matriz invertível então A^{-1} é única.

Inversa Matriz 2×2

Inversa Matriz 2×2

Exemplo

Seja A uma matriz invertível tal que

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$$

Temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \left[\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right]$$

Exemplo

Resolva o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right]$$

e $b^T = [1 \ 2]$.

Teorema (1.4.6)

Sejam A e B duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Teorema (1.4.6)

Sejam A e B duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Corolário

Se $A_1, \ldots, A_k$ são matrizes invertíveis de mesmo tamanho então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^n A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. Se A é invertível então $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. Se A é invertível então $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
5. Se $c \neq 0$ e A é invertível então kA é invertível e $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Exemplo - Produto Notável

Resolva $(A + B)^2$.

Polinômio Matricial

Seja $p(x)$ um polinômio qualquer da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Um polinômio matricial em A, onde A é quadrada, é definido na forma

$$p(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n.$$