Álgebra Linear
Aula 18

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Espaço vetorial - Axiomas

Sejam $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço vetorial V e α e β escalares. A soma e produto escalar deve satisfazer os seguintes axiomas

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t} \in V$;
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t} = \overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}$;
3. $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{t} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}) + \overrightarrow{w}$;
4. Existe um elemento $\overrightarrow{0} \in V$, chamado de vetor nulo ou vetor zero, tal que $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$;
5. Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ existe $-\overrightarrow{u} \in V$, chamado negativo de $\overrightarrow{u}$, tal que $(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
6. $\alpha\overrightarrow{u} \in V$;
7. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{t}$;
8. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$;
9. $\alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}$;
10. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\overrightarrow{u} \in V$ e α um escalar. Então

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\overrightarrow{u} \in V$ e α um escalar. Então

1. $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\overrightarrow{u} \in V$ e α um escalar. Então

1. $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
2. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\overrightarrow{u} \in V$ e α um escalar. Então

1. $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
2. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;
3. $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$;

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\overrightarrow{u} \in V$ e α um escalar. Então

1. $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
2. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$;
3. $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$;
4. Se $\alpha\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Subespaço (Vetorial)

Um subconjunto $W \subseteq V$ de um espaço vetorial é *subespaço (vetorial)* de V se W é um espaço vetorial.

Espaço vetorial - Axiomas

Sejam $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço vetorial V e α e β escalares. A soma e produto escalar deve satisfazer os seguintes axiomas

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t} \in V$;
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t} = \overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}$;
3. $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{t} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}) + \overrightarrow{w}$;
4. Existe um elemento $\overrightarrow{0} \in V$, chamado de vetor nulo ou vetor zero, tal que $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$;
5. Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ existe $-\overrightarrow{u} \in V$, chamado negativo de $\overrightarrow{u}$, tal que $(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
6. $\alpha\overrightarrow{u} \in V$;
7. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{t}$;
8. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$;
9. $\alpha(\beta\overrightarrow{u}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{u}$;
10. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Espaço vetorial - Axiomas

Sejam $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores do espaço vetorial V e α e β escalares. A soma e produto escalar deve satisfazer os seguintes axiomas

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{t} \in V$;

4. Existe um elemento $\overrightarrow{0} \in V$, chamado de vetor nulo ou vetor zero, tal que $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$;
5. Para todo $\overrightarrow{u} \in V$ existe $-\overrightarrow{u} \in V$, chamado negativo de $\overrightarrow{u}$, tal que $(-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
6. $\alpha\overrightarrow{u} \in V$;

Exemplo

Seja $\overrightarrow{t}$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $S = \{\alpha \overrightarrow{t} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.2.1

Se W for um conjunto de uma mais vetores no espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e só se, as condições seguintes são válidas.

1. Se $\overrightarrow{t}$ e $\overrightarrow{u}$ forem vetores em W, então $\overrightarrow{t} + \overrightarrow{u}$ está em W;
2. Se α for um escalar qualquer e $\overrightarrow{t}$ algum vetor de W, então $\alpha \overrightarrow{t}$ está em W.

Exemplo

O conjunto $\{\overrightarrow{0}\}$ é um subespaço de qualquer espaço vetorial.

Exemplo

Uma reta que passa pela origem é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Para $n \geq 3$, um plano que passa pela origem é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

O conjunto das matrizes simétricas é um subespaço do espaço vetorial das matrizes $M_{m\times n}$.

Exemplo

O conjunto das matrizes invertíveis não é um subespaço do espaço vetorial $M_{m\times n}$.

Exemplo

O conjunto das funções $C(-\infty, +\infty)$ contínuas é um subespaço de $C(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

O conjunto das funções continuamente derivável $C^1(-\infty, +\infty)$ contínuas é um subespaço de $C(-\infty, +\infty)$ e de $F(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

Para $m > 1$, o conjunto das funções no qual a m-ésima derivada é continua $C^m(-\infty, +\infty)$ é um subespaço de $C^{m-1}(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

Para todo $m \geq 0$, o conjunto das funções no qual todas as derivadas são contínuas $C^{\infty}(-\infty, +\infty)$ é um subespaço de $C^{m}(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

O conjunto de todos os polinômios P_∞ é um subespaço de $F(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

O conjunto de todos os polinômios de grau no máximo $n \geq 0$ P_n é um subespaço de $F(-\infty, +\infty)$.

Exemplo

O conjunto de todos os polinômios de grau exatamente n não é um subespaço de $F(-\infty, +\infty)$. .

Teorema 4.2.2

Se $W_1, \ldots, W_r$ forem subespaços vetorial de V, então a interseção desses subespaços também será um subespaço de V.

Exemplo

Mostre que dado um vetor não nulo $\overrightarrow{t}$ do $\mathbb{R}^2$ o conjunto $W = \{\alpha\overrightarrow{t} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o "menor" subespaço de $\mathbb{R}^2$ que contém $\overrightarrow{t}$.

Exemplo

Mostre que dado vetores não nulos $\overrightarrow{t}$ e $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ o conjunto

$$W = \{\alpha\overrightarrow{t} + \beta\overrightarrow{u} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

é o "menor" subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém $\overrightarrow{t}$ e $\overrightarrow{u}$.

Teorema 4.2.3

Seja $S = \{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_r\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

1. O conjunto W de todas as combinações lineares possíveis dos vetores em S é um subespaço de V.
2. O conjunto W acima é o "menor" subespaço de V que contém todos os vetores de S.