UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
Campus de Sobral
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Álgebra Linear SBL0056
Prof. Ailton Campos
Data: 13/12/2021 Período: 2021.1

Nome:____

2ª Lista de Exercícios

1. Em $\mathbb{R}^2$ mantenhamos a definição do produto αv de um número por um vetor mas modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u+v$ dos vetores $u=(x,y)$ e $v=(x',y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados.

   a) $u+v=(x+y',x'+y)$.
   b) $u+v=(xx',yy')$.
   c) $u+v=(3x+3x',5x+5x')$.

2. Quais dos seguintes conjuntos abaixo são subespaços do $\mathbb{R}^3$?

   a) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in\mathbb{Z}\}$.
   b) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y \text{ é irracional}\}$.
   c) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=x+z\}$.
   d) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz=0\}$.
   e) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0,\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$.

3. No curso de Cálculo I, estudamos a definição de funções contínuas e suas propriedades. Denote por $C([a,b])$ o conjunto das funções contínuas $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, e tome o subconjunto $X\subset C([a,b])$ formado pelas funções contínuas no intervalo $[a,b]$ que satisfazem

$$\int_a^b f(x)\,dx=0.$$

   Verifique que X é um subespaço vetorial de $C([a,b])$.

4. Se uma massa m é colocada no final de uma mola, e se a massa é puxada para baixo e solta, o sistema massa-mola começará a oscilar. O deslocamento y da massa da sua posição de repouso é dada por uma função da forma

$$y(t)=c_1\cos\,\omega t+c_2\text{sen}\,\omega t \tag{1}$$

   onde ω é uma constante que depende da mola e da massa. (Ver a figura abaixo.) Mostre que o conjunto de todas as funções descritas em (1) (com ω fixado e c_1, c_2 arbitrários) é um espaço vetorial.

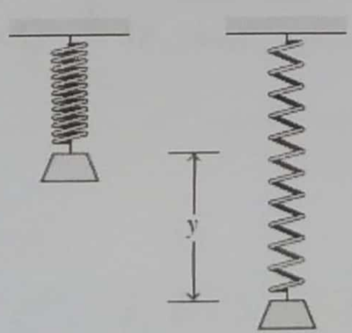

Figura 1: O sistema mola-massa.

5. Sejam H e K subespaços de um espaço vetorial V. A interseção de H e K, denotada por $H \cap K$, é o conjunto dos v em V que pertencem simultaneamente a H e K. Mostre que $H \cap K$ é um subespaço de V. (Ver a figura.) Dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ para mostrar que a união de dois subespaços não é, em geral, um subespaço. Pergunta-se: a interseção finita de subespaços é um subespaço? Justifique!

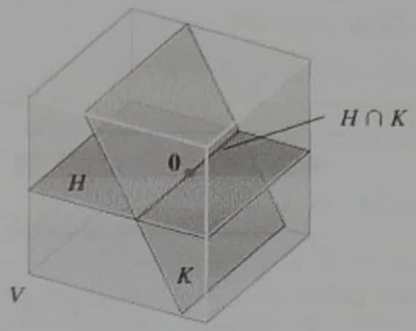

Figura 2: A interseção $H \cap K$ de subespaços.

6. Dados os vetores $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3)$ e $w = (c_1, c_2, c_3)$, escreva $u' = (a_1, a_2), v' = (b_1, b_2)$ e $w' = (c_1, c_2)$. Supondo u' e v' LI, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $w' = u' + v'$. Prove que $\{u, v, w\}$ é LD se, e somente se, $w = \alpha u + \beta v$ (com os mesmos α e β). Use esse critério para determinar se os vetores u, v e w abaixo são LI ou LD:

   a) $u = (1, 2, 3),\ v = (1, 3, 2),\ w = (-1, 2, 3)$
   b) $u = (1, 2, 3),\ v = (1, 3, 2),\ w = (1, 4, 1)$

7. Em cada um dos espaços especificados, determine se os elementos pertencentes são LI ou LD:

   a) $u, v, w \in \mathbb{R}^3;\ u = (1, 1, 1),\ v = (1, 2, 1),\ v = (2, 1, 2)$
   b) $A, B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R});\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   c) $p, q, r \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ p(x) = x^3 - 5x^2 + 1,\ q(x) = 2x^4 + 5x - 6,\ r(x) = x^2 - 5x + 2$
   d) $p, q, r \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1,\ q(x) = x^3 - x^2 + 6x + 2,\ r(x) = x^3 - 7x^2 + 4x$

8. Mostre que os polinômios $1, x - 1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

Bom Trabalho!!!

- Sabemos que estes polinômios são L.I. Como $(1, x, x^2)$ é uma base de P_2, então eles têm que ser uma base de P_2. Se quisermos:

$2x^2 - 5x + 6 = a(x^2 - 3x + 1) + b(x - 1) + c.1$

Devemos ter:

$$\begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -5 \\ a - b + c = 6 \end{cases}$$

Sendo a única solução é $a = 2$, $b = 1$, $c = 5$. Isto é:

$2x^2 - 5x + 6 = 5 + (x - 1) + 2(x^2 - 3x + 1)$