Francilândio Lima Serafim 472644

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

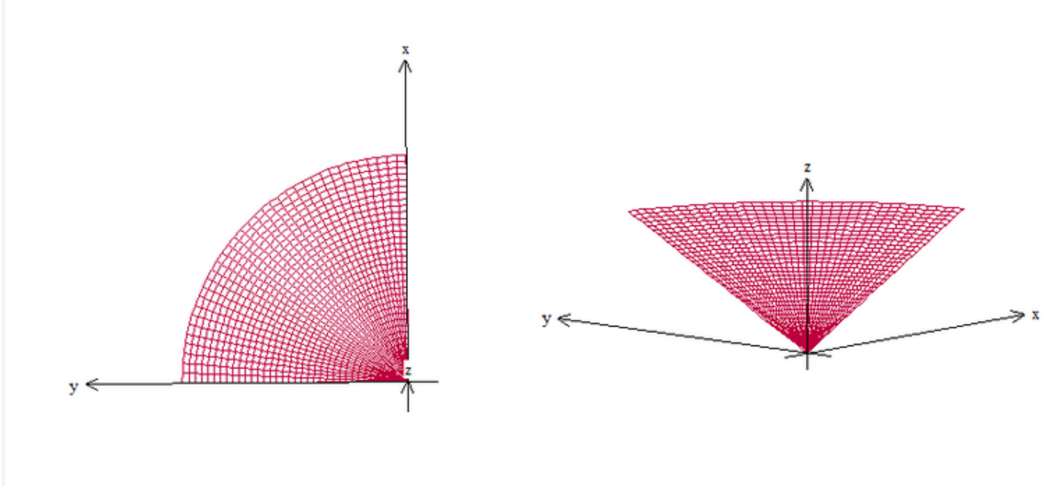
Iniciado em	quinta, 1 Out 2020, 19:37
Estado	Finalizada
Concluída em	quinta, 1 Out 2020, 20:50
Tempo empregado	1 hora 13 minutos
Avaliar	**8,00** de um máximo de 10,00(**80**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção no primeiro octante do cone $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$? (Veja a figura abaixo)



Escolha uma:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3.$ ✓
- b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3.$
- c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3.$
- d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3.$
- e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 6.$

Sua resposta está correta.

Solução:

i) Para parametrizarmos a função precisamos lembrar que podemos utilizar coordenadas cilíndricas com um ponto típico $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

Como a equação do cone dada na questão é: $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, concluímos que $z = \frac{r}{2}$.

Então $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$.

ii) Agora iremos encontrar as variações de z de r e θ.

Como é mostrado na questão o cone é cortado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$, portanto:

Para z temos: $0 \leq z \leq 3$;

Para r temos: Se $z = \frac{r}{2} \rightarrow 0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$;

Para θ temos: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, pois a questão pede o setor do cone no primeiro octante, demonstrado nos gráficos abaixo:

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$.

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização do plano $x + y + z = 1$ inclinado dentro de um cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

Escolha uma:

a. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} + (u\cos\ v)\mathbf{j} + (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

✓

b. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 + u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} + (u\cos\ v)\mathbf{j} + (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

c.

$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} - (u\cos\ v)\mathbf{j} + (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

d. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} - (u\cos\ v)\mathbf{j} - (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

e. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} + (u\cos\ v)\mathbf{j} - (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

Sua resposta está correta.

Solução:

De maneira semelhante às coordenadas cilíndricas, mas trabalhando no plano yz em vez do plano xy.

$y = u\cos\ v$ e $z = u\sin\ v$, onde $u = \sqrt{y^2 + z^2}$ e v é o angulo formado por (x, y, z),$(y, 0, 0)$ e $(x, y, 0)$, com $(x, 0, 0)$ como vértice.

Sendo $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow x = 1 - u\cos\ v - u\sin\ v$.

Substituindo x, y e z na função de superfície, temos:

$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} + (u\cos\ v)\mathbf{j} + (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

A resposta correta é:
$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\ v - u\sin\ v)\mathbf{i} + (u\cos\ v)\mathbf{j} + (u\sin\ v)\mathbf{k}$, com $0 \le u \le 3$ e $0 \le v \le 2\pi$.

.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da calota cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Escolha uma:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9+r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$
- d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ✓
- e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Sua resposta está correta.

Solução:

A coordenada cilíndrica fornece uma parametrização.

Um ponto no cone tem $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$;

como $x^2 + y^2 = r^2$, então $z^2 = 9 - \left(x^2 + y^2\right) = 9 - r^2$

assim, $z = \sqrt{9-r^2}$, para $z \geq 0$.

Tomando $u = r$ e $v = \theta$, temos a parametrização:

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Para o domínio de r temos que:

$z = \sqrt{9-r^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

logo,

$x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2+y^2})^2 = 9$

$2(x^2 + y^2) = 9$

$2r^2 = 9$

$r^2 = \dfrac{9}{2}$

$r = \sqrt{\frac{9}{2}}$

$r = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

$0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

.

Questão **4**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 2,00

Considere o campo $\vec{\mathbf{F}} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$, para fora (normal para longe do eixo x) através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 0$.

Utilize uma parametrização para encontrar o fluxo $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ através da superfície na direção determinada.

Resposta: 2 ✗

SOLUÇÃO:

- Sendo a parametrização:

$\vec{\mathbf{r}}\,(x\ ,\ y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}\ , 0 \leq x \leq 1\ , -2 \leq y \leq 2$

- Sendo:

$z = 0\ \Rightarrow\ 0 = 4 - y^2\ \Rightarrow\ \ y = \pm 2$

- Logo,

$\vec{\mathbf{r}}_x\ = \mathbf{i}$ e $\vec{\mathbf{r}}_y\ = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$

$$\Rightarrow\ \vec{\mathbf{r}}_x\ \times\ \vec{\mathbf{r}}_y\ = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

- Tendo:

$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_a^b \int_c^d \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y}{\|\ \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y\ \|} \|\ \vec{\mathbf{r}}_x\ \times\ \vec{\mathbf{r}}_y \ \|\ dydx$

- Substituindo z no produto escalar: $2xy - 3z$:

$= [2xy - 3(4 - y^2)]$

- Tendo finalmente: $\int_0^1 \int_{-2}^2 (2xy + 3y^2\ - 12)\ dydx$

= $\int_0^1\ \left[xy^2\ + y^3\ - 12y\right]_{-2}^{2} dx$

= $\int_0^1 -32\ dx$

= -32

A resposta correta é: -32.

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ através do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Obs: o campo está para fora (normal no sentido oposto ao eixo z) atravessando o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$.

Escolha uma:

- a. $\frac{4\pi}{3}$
- b. $\frac{5\pi}{3}$
- c. $\frac{2\pi}{5}$
- d. $\frac{3\pi}{2}$
- e. $\frac{2\pi}{3}$ ✓

Sua resposta está correta.

Resposta:

Utilizamos a parametrização $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\ \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Temos que:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Agora calculamos o determinante dessas derivadas:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin^2(\theta)\mathbf{k} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\cos^2(\theta)\mathbf{k}$$

$$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$$

Sabendo que o fluxo atravéz da superficie é:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} \|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|\, d\theta dr$$

Que:

$\frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \|} = \vec{\mathbf{n}}$

E que o campo vetorial é:

$\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k} = \left(r^2 \cos(\theta) \sin(\theta)\right) \mathbf{i} - r\mathbf{k}$

Calculamos:

$\| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \| = \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 + (-r)^2}$

$= \sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) + r^2}$

$= r\sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \|} \| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \| =$

$= \left(\frac{r\cos(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{r\sin(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{r}{r\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\left(r\sqrt{2}\right)$

$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$

Sendo assim, calculamos o produto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \|$

$= (r^2\cos(\theta)\sin(\theta),\ 0,\ -r) \cdot (r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ -r)$

$= r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2$

Agora calculamos a integral:

$\int_0^{2\pi}\int_0^1\ r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\ drd\theta$

$= \cos^2(\theta)\sin(\theta)\int_0^1\ r^3dr + \int_0^1 r^2dr$

$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 + \cos^2(\theta)\sin(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}$

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

Para $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$ precisaremos utilizar uma substituição:

Chamaremos $u = \cos(\theta)\ \Rightarrow\ du = -\sin(\theta)\ d\theta$

$= -\frac{1}{4}\int u^2\ du$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{u^3}{3}\right] = -\frac{\cos^3(\theta)}{12} + C$

Retomando:

$= \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3(\theta)}{12}\right]_0^{2\pi}$

$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{12}\right) - \left(0 - \frac{1}{12}\right)$

$= \frac{2\pi}{3}$