03-d) Para uma f.d.a temos:

1º - $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

2° - F não decrescente

3° - Função contínua à direita com limite à esquerda

Com isso, a fda é $F(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt$

$$F(x) = \int_{3}^{x} 0{,}075x + 0{,}2\,dx = 0{,}075\int_{3}^{x} x\,dx + 0{,}2\int_{3}^{x} dx$$

$$= 0{,}075 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{3}^{x} + 0{,}2 \left. x \right|_{3}^{x}$$

$$= 0{,}075\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right) + 0{,}2(x-3)$$

$$F(x) = 0{,}0375x^2 + 0{,}2x - 0{,}9375$$

03- e) $E(x)$ e $Var(x)$

Como calculado em itens anteriores, $E(x) = \int_A^B x\, f(x)\, dx$

$$E(x) = \int_3^5 x\ 0{,}075x + 0{,}2\, dx = 0{,}075 \int_3^5 x^2\, dx + 0{,}2 \int_3^5 dx$$

$$= 0{,}075\ \frac{x^3}{3}\Big|_3^5 + 0{,}2\ x\Big|_3^5$$

$$= 0{,}075\left(\frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right) + 0{,}2\,(5-3) = 2{,}45 + 0{,}4 = \underline{2{,}85}$$

Para a $Var(x)$ temos: $Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$$E(x^2) = \int_3^5 x^2\, 0{,}075x + 0{,}2\, dx = 0{,}075\ \frac{x^4}{4}\Big|_3^5 + 0{,}2\ x\Big|_3^5$$

$$= 0{,}075\left(\frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4}\right) + 0{,}2\,(5-3) = \underline{10{,}6}$$

$$Var(x) = 10{,}6 - 2{,}85^2 = \underline{2{,}4775}$$

LISTA 02 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

KLAYVER XIMENES CARMO 427651

PROF.: AILTON CAMPOS ENG. DA COMPUTAÇÃO

01- $f(x) = \begin{cases} Kx, & 0 \leq x \leq 15 \\ 0, & \text{para os demais valores} \end{cases}$

a) Probabilidade de acertar o centro do alvo, se for um círculo de 2cm de raio.

Queremos então saber a probabilidade de $x < 2$.

Precisamos primeiramente calcular o valor da constante K, sabendo que o valor da integral em todo o seu domínio é igual a 1.

Então:

$$\int_0^{15} Kx\,dx = 1 \Rightarrow K \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{15} = 1$$

$$\Rightarrow K \cdot \left(\frac{15^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}}\right) = 1 \Rightarrow K \cdot 112{,}5 = 1$$

$$K \cong 0{,}009$$

Como $K \cong 0{,}009$ e desejamos saber $P(X < 2)$, então:

$$P(x<2) = \int_0^2 0{,}009\,x\,dx = 0{,}009 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 0{,}009 \cdot \frac{2^2}{2}$$

$P(x<2) = 0{,}009 \cdot 2$

$\underline{P(x<2) = 0{,}018}$

b) Probabilidade de acertar qualquer círculo concêntrico é proporcional a sua área.

Sabendo que a área de um círculo se dá por: $A = \pi r^2$ e que o raio máximo é igual a 15, então:

$$A = \pi 15^2$$

Com isso consideremos um círculo concêntrico qualquer com raio r. Calculemos então a $P(X < r)$.

$$P(X<r) = \int_0^r 0{,}009\, x\, dx \Rightarrow P(X<r) = 0{,}009 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^r$$

$$P(X<r) = 0{,}009 \frac{r^2}{2} = 0{,}0045 r^2$$

Como é proporcional à sua área, então:

$$0{,}0045 r^2 = \frac{\pi r^2}{\pi 15^2}, \text{ onde } \frac{\pi}{\pi 15^2} \simeq 0{,}0045$$

aproximação devido à constante K.

02- Encontrar o valor da constante c em:

$$f(x) = \begin{cases} c/x^2 , & x \geq 15 \\ 0 , & x < 15 \end{cases}$$

Sabemos que para todo o seu domínio a integral deve ser igual a 1, então:

$$\int_{15}^{\infty} (c/x^2)\,dx = 1 \Rightarrow c\int_{15}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1 \Rightarrow c\int_{15}^{\infty} x^{-2}\,dx = 1$$

$$\Rightarrow C \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{15}^{\infty} = 1 \qquad * \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow C \cdot \left[0 - \left(-\frac{1}{15}\right)\right] = 1 \Rightarrow C \cdot \frac{1}{15} = 1 \Rightarrow \underline{C = 15}$$

a) $P(X > 25)$

Utilizando os mesmos princípios do item anterior temos:

$$P(X > 25) = \int_{25}^{\infty} \frac{15}{x^2}\,dx = 15 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{25}^{\infty} = 15 \cdot \frac{1}{25}$$

$$P(X > 25) = \frac{15}{25} = \underline{0{,}6}$$

02- b) função de distribuição acumulada $F(x)$

Para uma f.d.a temos:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

2) F é não decrescente

3) F é uma função contínua à direita e tem limite à esquerda

A f.d.a é $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$

Q2 - c) $E(x)$ e $Var(x)$

Para $E(x)$ temos: $E(x) = \int_A^B x\, f(x)\, dx$ onde $f(x) = \frac{c}{x^2}$

Substituindo temos:

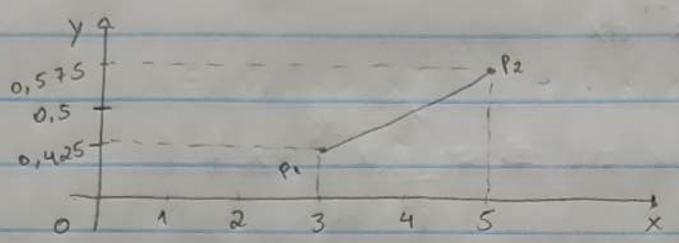
$$E(x) = \int_{15}^{\infty} x \left(\frac{15}{x^2}\right) dx = 15 \int_{15}^{\infty} x^{-1}\, dx$$

03- a) Esboçar o gráfico e a área total sob a curva

Para o gráfico, é notório que a função se trata de uma reta, com isso verificaremos seus valores nos extremos (3 e 5)

$P_1 = 0{,}075 \cdot 3 + 0{,}2 = 0{,}425$

$P_2 = 0{,}075 \cdot 5 + 0{,}2 = 0{,}575$



Para calcular a densidade sob a curva temos:

$$\int_3^5 0{,}075x + 0{,}2\,dx = \int_3^5 0{,}075x\,dx + \int_3^5 0{,}2\,dx$$

$$= 0{,}075 \frac{x^2}{2}\Big|_3^5 + 0{,}2\,x\Big|_3^5 = 0{,}075\left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) + 0{,}2\,(5-3)$$

$= 0{,}6 + 0{,}4 = 1$ confirmando a igualdade.

03- b) Calcular $P(X \leq 4)$

Para $x \leq 4$ temos:

$$P(X \leq 4) = \int_3^4 0,075x + 0,2 \, dx$$

$$= 0,075 \left.\frac{x^2}{2}\right|_3^4 + 0,2 \left. x \right|_3^4$$

$$= 0,075 \left(\frac{4^2}{2} - \frac{3^2}{2}\right) + 0,2 \cdot (4-3)$$

$$= 0,262 + 0,2 = 0,462$$

Para calcular $P(X < 4)$ utilizamos seu complemento, calculando $1 - P(4 \leq X \leq 5)$, visto que $P(X < 4)$ não inclui o valor 4.

Com isso, $P(X \leq 4) < P(X < 4)$.

03-c) $P(3,5 \leq x \leq 4,5)$

Semelhante ao item anterior, temos:

$$P(3,5 \leq x \leq 4,5) = \int_{3,5}^{4,5} 0,075\,x + 0,2\,dx$$

$$= 0,075 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{3,5}^{4,5} + 0,2\,x\Big|_{3,5}^{4,5}$$

$$= 0,075\left(\frac{4,5^2}{2} - \frac{3,5^2}{2}\right) + 0,2\,(4,5 - 3,5)$$

$$= 0,3 + 0,2 = \underline{0,5}$$

* $P(4,5 < x) = 1 - P(4,5 \leq x \leq 5)$ Calculamos o complemento

$$P(4,5 \leq x \leq 5) = \int_{4,5}^{5} 0,075\,x + 0,2\,dx$$

$$= 0,075 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{4,5}^{5} + 0,2\,x\Big|_{4,5}^{5} = 0,075\left(\frac{5^2}{2} - \frac{4,5^2}{2}\right) + 0,2\,(5 - 4,5)$$

$$= 0,178 + 0,1 = \underline{0,278}$$

$$P(4,5 < x) = 1 - 0,278 = \underline{0,722}$$

06- c) Continuação...

Com os valores definidos é possível montar a tabela ANOVA

F.V	G.L	SQ	QM
Regressão	1	168,939	168,939
Resíduo	7	7,161	1,023
Total	8	176,100	22,013

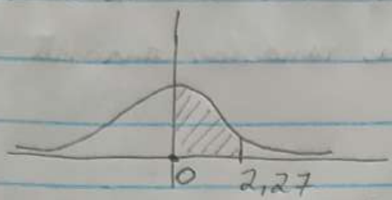
06- d) O valor de S^2 é 22,013, encontrado no item anterior.

Após a comparação com o valor de S_e^2 que é 1,023 podemos verificar que sim, é pequeno.

06- e) Sim, visto que a estimativa de regressão e os valores medidos mostam essa confirmação, sendo possível perceber que quanto maior o volume do pacote maior o tempo de empacotamento.

04- Sendo Z uma v.a. normal padrão, ou seja, adotando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, calcular as prob. e esboçar os gráficos.

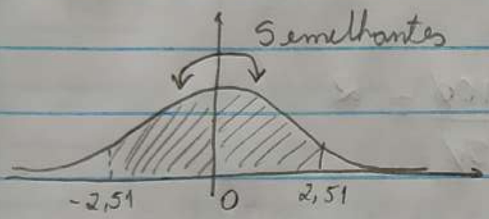
a) $P(0 \leq Z \leq 2,27)$



De acordo com a tabela II do livro e sabendo que a parte inteira, primeiro decimal e segundo decimal são 2,27, a $P(0 \leq Z \leq 2,27) = 0,4884$

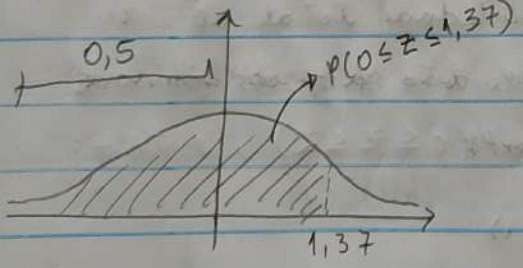
{ Obs.: Todos os outros itens seguem a mesma lógica.

b) $P(-2,51 \leq Z \leq 0)$



Sabendo que $-2,51$ é simétrico à $2,51$, calcularemos $P=(0 \leq Z \leq 2,51)$ que segundo a tabela é $0,4939$ então, $P(-2,51 \leq Z \leq 0) = \underline{0,4939}$.

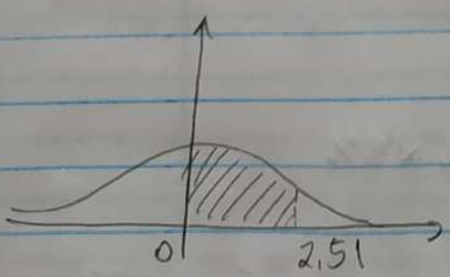
c) $P(Z \leq 1,37) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 1,37)$



$P(0 \leq Z \leq 1,37) = 0,4146$

$0,4146 + 0,5 = \underline{0,9146}$

d) $P(|Z| \leq 2,51)$



Como Z está em módulo, assumirá apenas valores positivos, ficando então:

$$P(0 \leq Z \leq 2,51) = \underline{0,4939}$$

como já visto no item b.

05- média $\rightarrow \mu = 500$

desvio padrão $\rightarrow \sigma = 50$

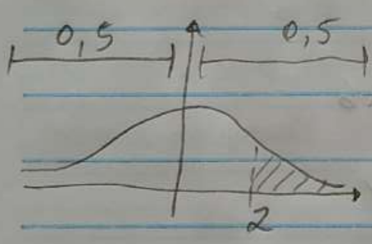
Sabendo que as vendas tem distribuição aproximadamente normal, consideramos que X seja a quantidade de peças vendidos durante um mês, então temos:

$$X \sim N(500, 50^2) \quad | \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Segundo a questão, deseja-se calcular $P(X > 600)$, então a v.a. se dá por:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{600 - 500}{50} = \frac{10\cancel{0}}{5\cancel{0}} = 2$$

então: $P(Z > 2)$



Sabendo que a probabilidade total é 1 e metade é 0,5, então a probabilidade pode ser escrita como:

$$P(Z > 2) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 2)^{(1)}$$

(1) $P(0 \leq Z \leq 2) = 0,4772$

$$P(Z > 2) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228 = 2,28\%$$

A probabilidade de que não consiga suprir a demanda é 2,28%.

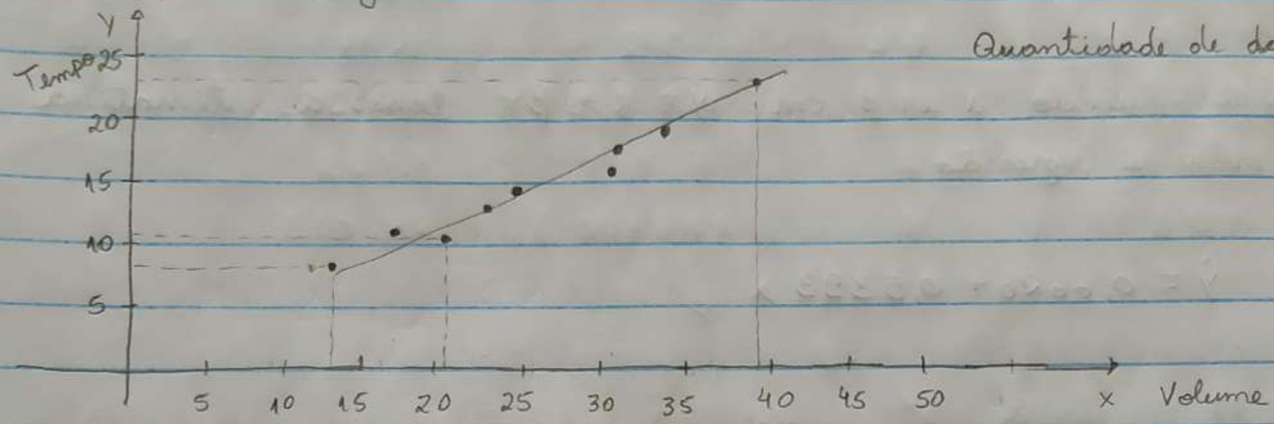
06-

Tempo	10,8	14,4	19,6	18,0	8,4	15,2	11,0	13,3	23,1
Volume	20,39	24,92	34,84	31,72	13,59	30,87	17,84	23,22	39,65

a) Esboço do diagrama

* $n = 9$

Quantidade de dados



b) Para estimar a reta de regressão, utilizaremos o método dos mínimos quadrados para encontrar os valores de α e β em:

$\hat{y} = \alpha + \beta x$, onde $\alpha = \bar{y} + \beta \bar{x}$ e $\quad n = 9$

$$\beta = \frac{\sum xy - (\sum x \cdot \sum y)/n}{\sum x^2 - (\sum x)^2/n} \qquad \sum x^2 = 6823,944$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{237,04}{9} = 26,3377 \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{133,8}{9} = 14,8666$$

$$\sum xy = 3837,245 \qquad \overline{xy} = 3837,245 / 9 = 426,3605$$

Substituindo os valor calculados com base nos dados, temos:

$$\beta = \frac{3837,245 - (133,8 \cdot 237,04)/9}{6823,944 - (237,04^2)/9} = 0,5393$$

06-b) Continuação...

Para α temos

$$\alpha = 14,8666 - 0,5393 \cdot 26,3377 = 0,6626$$

Substituindo α e β em $\hat{y} = \alpha + \beta x$ temos a estimativa da reta de regressão.

$$\hat{y} = 0,6626 + 0,5393\, x$$ //

06- c) Para organizar informações da análise de variância utilizamos a tabela ANOVA, que tem a seguinte estrutura:

Fonte de Variação	G. de liberdade	S. de Quadrados	Q. médio
Regressão	1	SQ Reg	SQ Reg = QM Reg
Resíduo	$n-2$	SQ Res	SQ Res / $(n-2) = S_e^2$
Total	$n-1$	SQ Tot	SQ Tot / $(n-1) = S^2$

Para SQ Res temos:

* utilizando os valores do item anterior

$$SQRes = \sum \hat{e}_i^2 = \sum (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

Substituindo todos os valores e fazendo o somatorio dos quadrados temos:

$$SQRes = \sum (y_i - 0{,}662 - 0{,}539 x_i)^2 = \underline{7{,}161}$$

Para o SQTot:

$$SQTot = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum (y_i - 14{,}866)^2 \cong \underline{176{,}1}$$

Com SQRes e SQTot podemos calcular SQ Reg, S_e^2 e S^2

$$SQ Reg = SQTot - SQRes = 176{,}1 - 7{,}161 = \underline{168{,}939}$$

$$S_e^2 = \frac{SQRes}{n-2} = \frac{7{,}161}{9-2} = \underline{1{,}023}$$

$$S^2 = SQTot / (n-1) = 176{,}1 / (9-1) = \underline{22{,}013}$$