Soluções lista 5

5.1

a.1) $D_{df} = \emptyset$, $Im = \emptyset$ (sendo que $\emptyset \subseteq B$)

É parcial injetora, pois:

— funcional: Sejam $x \in A$ e $y_1, y_2 \in B$. O condicional $\langle x, y_1 \rangle \in \emptyset \wedge \langle x, y_2 \rangle \in \emptyset \rightarrow y_1 = y_2$ é V, pois a premissa é falsa. Logo $\emptyset: A \rightarrow B$ é função parcial

— Injetora: Sejam $y \in B$ e $x_1, x_2 \in A$. O condicional $\langle x_1, y \rangle \in \emptyset \wedge \langle x_2, y \rangle \in \emptyset \rightarrow x_1 = x_2$ é V, pois a premissa é falsa.

— Não sobrejetora: $\nexists\ x \in A / \langle x, b \rangle \in \emptyset$ Logo não é epimorfismo

— Não total: $\nexists\ y \in B / \langle a, y \rangle \in \emptyset$. Logo não é monomorfismo.

a.2) $D_{df} = \{0, 1\}$; $Im = \{a, b\}$;

É função parcial injetora e sobrejetora $\Rightarrow$ epimorfismo

— funcional, pois $0 \neq 1$

— injetora, pois $a \neq b$

— sobrejetora, pois o conjunto imagem é igual ao contradomínio B

— Não total, pois o domínio de definição é diferente de C.

Não é monomorfismo, nem bijetora e nem isomorfismo

a.3) $D_{df} = \{a\}$, $Im = \{a\}$ É função injetora e monomorfismo

— funcional, pois contém apenas um par $\Rightarrow$ é parcial

— total, pois o D_{df} é A $\Rightarrow$ função

— injetora, pois contém apenas um par $\Rightarrow$ monomorfismo

— Não sobrejetora, pois o conjunto imagem é diferente do contradomínio B

Não é isomorfismo

a.4) $D_{df} = \mathbb{Z}$ $Im = \{ y \in \mathbb{Z} / y = x^2 \}$ quadrados perfeitos

É uma função

— funcional: Sejam $x, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} / \langle x, y_1 \rangle \in \mathbb{Z}^2$ e $\langle x, y_2 \rangle \in \mathbb{Z}^2$. Assim, $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow$ é funcional.

— Total, pois $D_{df} = \mathbb{Z}$

— Não sobrejetora, pois por exemplo, 3 não é quadrado perfeito. Logo não é também epimorfismo, nem bijetora e nem isomorfismo.

— Não injetora, pois $\langle 2,4 \rangle \in x^2$ e $\langle -2,4 \rangle \in x^2$, mas $2 \neq -2$. Assim, não é monomorfismo, nem bijetora e nem isomorfismo.

a.5) $D_{df} = \mathbb{N}^2$, $Im = \mathbb{N}$, pois $\forall n \in \mathbb{N}$, $ad \langle n,0 \rangle = n+0 = n$

É função sobrejetora e epimorfismo.

— funcional: sejam $x_1, x_2, y, y' \in \mathbb{N}$ / $ad\langle x_1,x_2 \rangle = y$ e $ad\langle x_1,x_2 \rangle = y'$.
Assim, $y = x_1 + x_2$ e $y' = x_1 + x_2 \Rightarrow y = y' \Rightarrow$ função parcial

— total, pois $D_{df} = \mathbb{N}^2 \Rightarrow$ é função

— Sobrejetora, pois o conjunto imagem é igual ao contradomínio $\mathbb{N} \Rightarrow$ epimorfismo

— Não injetora, pois, por exemplo $ad\langle 2,3 \rangle = ad\langle 4,1 \rangle$. Logo, não é monomorfismo, nem bijetora e nem isomorfismo.

a.6) $D_{df} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$; $Im = \mathbb{R}$

É parcial sobrejetora e epimorfismo, pois:

— funcional $\rightarrow \langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$. Assim, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$
$\Rightarrow$ é parcial

— Não total, pois $D_{df} \neq \mathbb{R}^2$. Também não é monomorfismo;

— Sobrejetora, pois o conjunto imagem é igual ao contradomínio $\mathbb{R}$. Logo, é um epimorfismo.

— Não injetora: pois $div(8,4) = div(6/3)$.

b.1) $\langle a,a \rangle \in A \times B$ e $\langle a,b \rangle \in A \times B$, mas $a \neq b$.

b.2) $\langle 0,1 \rangle \in C$ e $\langle 0,2 \rangle \in C$ (pois $0 < 1$ e $0 < 2$), mas $1 \neq 2$.

5.2

a) a dual é: $x^{2\,op}: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ onde $x^{2\,op} = \{\langle y, x\rangle \in \mathbb{Z}^2 / y = x^2\}$

$x^{2\,op}$ ñ é funcional pois: $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \;/\; (x_1)^2 = (x_2)^2 = y$ e $x_1 \neq x_2$

Por exemplo, $y = 4$, $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$. Não é função parcial

b.1) $ad^{op}: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ onde $ad^{op} = \{\langle y, \langle a, b\rangle\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / y = a + b\}$

Não funcional, pois sejam $y = 5$, $\langle a_1, b_1\rangle = \langle 2, 3\rangle$ e $\langle a_2, b_2\rangle = \langle 1, 4\rangle$
então $5 = 2 + 3 = 1 + 4 = 5$. Não é função parcial

b.2) $div^{op}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ onde $div^{op} = \{\langle z, \langle x, y\rangle\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 / z = x/y\}$

Não funcional, pois sejam $z = 5$, $\langle x_1, y_1\rangle = \langle 10, 2\rangle$ e $\langle x_2, y_2\rangle = \langle 15, 3\rangle$
então $5 = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = 5$. Não é função parcial

---

5.5 Suponha que $R: A \to B$ e $S: B \to C$ são relações funcionais. Como a composição de relações é uma relação, então $S \circ R: A \to C$ é uma relação. Portanto temos que provar que $S \circ R$ é injetora ou seja, dado $S \circ R: A \to C$ (com S e R injetoras) teremos

$$(\forall c \in C)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(a_1 (S \circ R) c \wedge a_2 (S \circ R) c \to a_1 = a_2)$$

Suponha $c \in C$, $a_1 \in A$ e $a_2 \in A$ / $a_1 (S \circ R) c \wedge a_2 (S \circ R) c$. Então,

$a_1 (S \circ R) c \wedge a_2 (S \circ R)\, c \Rightarrow$ (definição de composição $S \circ R$

$(\exists b_1 \in B)(\exists b_2 \in B)(a_1 R b_1 \wedge a_2 R b_2 \wedge b_1 S c \wedge b_2 S c) \Rightarrow$ (S é injetora)

$b_1 = b_2 \wedge a_1 R b_1 \wedge a_2 R b_2 \Rightarrow$ (R é injetora) $a_1 = a_2$ → onde queríamos chegar

Assim, se S e R são injetoras, $S \circ R$ também será cqd

5.12

a) $f_1 = \{\langle a,x\rangle\}$
$f_2 = \{\langle a,y\rangle\}$
$f_3 = \{\langle a,z\rangle\}$

b) $\exists$ apenas a função vazia

c) Existe apenas a função:
$f = \{\langle a,x\rangle, \langle b,x\rangle, \langle c,x\rangle\}$

d) Não existe função.
Como $\{a,b,c\} \times \phi = \phi$ a única relação possível de ser definida é a relação vazia $\phi: \{a,b,c\} \to \phi$ que ñ é total

e) $f_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle\}$
$f_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$
$f_3 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle\}$
$f_4 = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle\}$

5.13

a.1) $=: A \to B$ → já analizada na questão 5.1(a.3): é função injetora (monomorfismo) e não sobrejetora

a.2) $id_B: B \to B \to \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}. B \to B$

$D_{def} = B$ $\quad$ $Im = B$

É injetora, sobrejetora, monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo, pois:
— Funcional: pois os primeiros componentes dos pares são distintos entre si;
— Total: pois o domínio de definição é B
— Injetora: pois $\forall (a_1, b_1)$ e $(a_2, b_2) \in R$, $b_1 \neq b_2$
— Sobrejetora: $Im = B =$ contradomínio

a.3) já analizado em 5.1(a.4): é função não-injetora e sobrejetora. É epimorfismo não monomorfismo e não isomorfismo

a.4) já analizado em 5.1(a.5): é função ñ-injetora e sobrejetora. É epimorfismo, não é monomorfismo e não é isomorfismo.

a.5) $D_{def} = \phi$, $Im = \phi$

É função injetora, sobrejetora, monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo.

— Funcional: $\underbrace{\langle x,y_1\rangle \in \phi \wedge \langle x,y_2\rangle \in \phi}_{F} \to y_1 = y_2$ é V

— Total: $D_{def} = \phi$

— Injetora: $\underbrace{\langle x_1,y\rangle \in \phi \ \langle x_2,y\rangle \in \phi}_{F} \to x_1 = x_2$ é V

— Sobrejetora: $Im = \phi$

a.6) $D_{def} = \mathbb{R}$; $Im = [-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq \sin x \leq 1\}$

É total, não sobrejetora, não é monomorfismo e epimorfismo, pois

— Funcional: $\underbrace{\langle x, y_1\rangle \in \mathbb{R}\ \langle x, y_2\rangle \in \mathbb{R}}_{V} \to y_1 = y_2$ é V

— Total: $D_{def} = \mathbb{R}$

— Não injetora, pois $\langle \pi, 0\rangle \in R$ e $\langle 2\pi, 0\rangle \in R$, mas $\pi \neq 2\pi$.

— Não sobrejetora, pois $Im = [-1,1] \neq \mathbb{R}$.

b.1) não é total → 5.1 (a.1)

b.2) não é total → 5.1 (a.2)

b.3) não é funcional → 5.1 (b.1)

b.4) não é funcional → 5.1 (b.2)

b.5) não é total → 5.1 (a.6)

5.17 $const_b : A \to B$ é a função constante em b se $(\forall x \in A)(x \underbrace{const_b}_{\text{relação}} b)$

a) A função identidade em geral não é uma função constante, pois, para cada elemento do Domínio, resulta o próprio elemento.
Ou seja, identidade: $A \to B$ tal que identidade $(a) = a$ ou

$ident = \{\langle x, y\rangle \in A \times B \mid x = y\}$

Então só será constante se os argumentos possíveis tem no máximo uma opção, isto é, quando o domínio é, no máximo, um conjunto unitário, o qual também é o Ddef.

E a função $\phi : A \to B$?

* Se $B = \phi$ não será função $const_b$ para b algum ($\nexists b \in B$). Logo $\phi . A \to \phi$ ñ é uma função constante

* Se $B \neq \phi$. Então, seja $b \in B$. Assim,

— Se $A \neq \phi$, então seja $a \in A$. Entretanto, $\langle a, b\rangle \notin \phi \Rightarrow \phi : A \to B$ ñ é uma função constante para b algum

— Se $A = \phi$, deve valer $(\forall x \in A)(x\ const_b\ b) \Rightarrow \underbrace{(\forall x)(\underbrace{x \in A}_{F} \rightarrow x\ const_b\ b)}_{V}$. Como

Assim, $\phi : \phi \rightarrow B$ é uma função constante

Mas não é uma função identidade, pois

Domínio $\neq$ Contra-domínio.

Assim, Uma função identidade é uma função constante no caso $id : 1 \rightarrow 1$, sendo 1 um conjunto unitário.

b.1) Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se e somente se:

$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \rightarrow a_1 = a_2)$

✱ $B \neq \phi$: para $const_b : A \rightarrow B$ vale $(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)(const_b(x_1) = const_b(x_2) = b)$

ou seja, para ser injetora $(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)(const_b(a_1) = const_b(a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$

Seja $a_1, a_2 \in A$. Então:

$const_b(a_1) = const_b(a_2) \rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$ ($const_b(a_1) = const_b(a_2)$ é sempre V)

$V \rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow (V \rightarrow p \Leftrightarrow p)$

$a_1 = a_2 \Rightarrow A$ é um conjunto unitário

✱ $B = \phi$

$B = \phi \Rightarrow$ (definição de total)

$A = \phi$

Assim, A condição para $const_b : A \rightarrow B$ seja injetora é A ser um conjunto unitário ou ser um conjunto vazio.

b.2) Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se e somente se: $(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y)$

Então:

✱ $B \neq \phi$

$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y) \Rightarrow$ ($const_b$ é uma função constante em b)

$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y \wedge y = b) \Rightarrow$ (simplificação $p \wedge q \Rightarrow p$)

$(\forall y \in B)(y = b) \Rightarrow B = \{b\}$

✱ $B = \phi$

$B = \phi \Rightarrow A = \phi$

Assim, os únicos função constante sobrejetoras possíveis são:

$const_b : A \to \{b\}$

$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$

Logo, A condição para $const_b : A \to B$ ser sobrejetora é $B = \{b\}$ ou $B = \emptyset$

(5.22) $f^{op} = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle \} : \{0,1,2\} \to \{1,2\}$

Para ser função deve ser parcial e total

Não é total, pois $\nexists \langle 2, a \rangle \in f^{op} \,/\, a \in \{1,2\}$

(5.23) Suponha que $R : A \to B$ e $S : B \to C$ são relações sobrejetoras. Como a composição de relações é uma relação, então $S \circ R : A \to C$ é uma relação. Então temos que provar que $S \circ R$ é sobrejetora, ou seja,

$$(\forall c \in C)(\exists a \in A)(a (S \circ R) c)$$

Seja $c \in C$, então,

$c \in C \Rightarrow$ (S é sobrejetora)

$(\exists b \in B)(b S c) \Rightarrow$ (R é sobrejetora)

$(\exists b \in B)(\exists a \in A)(a R b \wedge b S c) \Rightarrow$ (definição de composição)

$(\exists a \in A)(a (S \circ R) c)$

Assim, $S \circ R : A \to C$ é uma relação sobrejetora

(5.24) O elemento não ocorre no multiconjunto, ou seja, não é elemento do multiconjunto

---

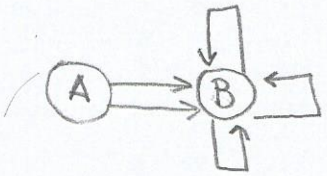
(5.25) Um multiconjunto A de objetos do conjunto X é uma função

$$A : X \to \mathbb{N}$$

sendo $\langle x, n \rangle \in A$ significa que o multiconjunto A contém n ocorrências do elemento x. Assim, o número de ocorrências de um elemento no multiconjunto é determinado por um nº natural

Logo, a estrutura não é um multiconjunto, pois não existe nº natural capaz de expressar as infinitas ocorrências de c.

5.26



$$G = \{ \underbrace{\langle A, B \rangle, \langle A, B \rangle}_{2\times}, \underbrace{\langle B, B \rangle, \langle B, B \rangle, \langle B, B \rangle}_{3\times} \}$$

Assim, $G : \{ \langle A, B \rangle, \langle B, B \rangle \} \to \mathbb{N}$ tal que $G = \{ \langle \langle A, B \rangle, 2 \rangle, \langle \langle B, B \rangle, 3 \rangle \}$
