Álgebra Linear
Aula 9

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 07

Assuma que as matrizes abaixo tem o tamanho correto para que as operações possam ser realizadas.

1. Considere o sistema $Ax = b$ aonde $b^T = [m_1 \ m_2]$. Assuma que $(1, -1, 1)$ e $(1, 2, 3)$ sejam soluções do sistema. Podemos afirmar que o sistema tem mais soluções? Se sim, apresente pelo menos mais uma.
2. Suponha que analisando o sistema $A_1 x = b_1$ você encontrou uma solução x_0. Apresente duas formas distintas para decidir se x_0 é a única solução.

Gabarito

1. Fixe $k \neq 0$, temos que $x' = (1,-1,1) + k((1,-1,1) - (1,2,3)) = (1,-1-3k, 1-2k)$ é solução.
2. Primeira forma, mostrar que A_1 é invertível. Segunda forma, mostrar que o sistema $A_1 x = b_1'$ é consistente para todo vetor b_1'.

Questão 1

Em sala vimos duas formas distintas de obter a matriz inversa de uma matriz. Aplique as duas formas para obter a inversa da matriz abaixo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & m_4+1 \\ m_1 & m_3+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Questão 2

Considere o seguinte sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & m_1 + 2m_2 \\ x & + & y & - & 2z & = & m_1 + m_2 \\ 2x & + & 7y & + & 22z & = & 2m_1 + 7m_2 \end{array}$$

Para este sistema, resolva.

1. Apresente a matriz aumentada do sistema.
2. Aplique o algortimo de Eliminação Gaussiana na matriz aumentada e apresente sua forma escalonada.
3. Aplique o algortimo de Gauss-Jordan a partir da matriz obtida no item anterior e obtenha sua forma escalonada reduzida.
4. Cheque se de fato a solução obtida é solução do sistema.

Questão 3

Dos itens abaixo escolha APENAS UM prove (ou desprove). Para cada item considere as matrizes em questão tais que as operações desejada sejam possíveis de realizar.

1. $A(BC) = (AB)C$.
2. $(AB)^T = B^T A^T$.
3. Se A é uma matriz quadrada e B é tal que $AB = I$ então A é invertível.

Problema Fundamental

Encontre uma relação para os elementos de $b^T = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ tal que o sistema $Ax = b$ seja consistente, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

Uma matriz quadrada D é dita diagonal se $(D)_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Proposição

Uma matriz diagonal é inversível se e só se todas as entradas da sua diagonal principal são diferentes de zero. Em particular, para

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k \end{bmatrix}$$

temos

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_k \end{bmatrix}$$

Exemplo

Para a matriz A abaixo, calcule A^2 e A^3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

Uma matriz quadrada A é dita *triangular superior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i > j$, i.e., se todas as entradas abaixo da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular Inferior

Uma matriz quadrada A é dita *triangular inferior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i < j$, i.e., se todas as entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular Inferior

Uma matriz quadrada A é dita *triangular inferior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i < j$, i.e., se todas as entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular

Uma matriz quadrada A é dita triangular se ela for ou triangular superior ou triangular inferior.

Teorema 1.7.1

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);
3. Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas da diagonal principal são todas não nulas;

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);
3. Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas da diagonal principal são todas não nulas;
4. A inversa de uma matriz triangular inferior (superior) invertível é uma matriz triangular inferior (superior).

Matrizes Simétricas

Uma matriz A é dita simétrica se $A = A^T$.

Matrizes Simétricas

Uma matriz A é dita simétrica se $A = A^T$.

Propriedades

Se A e B são matrizes simétricas de mesmo tamanho, temos

1. A^T é simétrica;
2. $A \pm B$ é simétrica;
3. Para k escalar temos que kA é simétrica.

Matrizes Simétricas

Uma matriz A é dita simétrica se $A = A^T$.

Propriedades

Se A e B são matrizes simétricas de mesmo tamanho, temos

1. A^T é simétrica;
2. $A \pm B$ é simétrica;
3. Para k escalar temos que kA é simétrica.

Propriedade

O produto de duas matrizes simétricas é simétrica se e somente si elas comutam.

Teorema - Inversa de uma matriz simétrica

Se uma matriz A é simétrica e invertível então sua inversa é simétrica.

Exemplo

Considere as matrizes abaixo. Calcule o produto delas por sua transposta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere as matrizes abaixo. Calcule o produto delas por sua transposta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposição

Para qualquer matriz A, temos que AA^T e A^TA são simétricas.

Exemplo

Considere as matrizes abaixo. Calcule o produto delas por sua transposta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposição

Para qualquer matriz A, temos que AA^T e A^TA são simétricas.

Teorema 1.7.5

Se A é uma matriz invertível então AA^T e A^TA são invertíveis.

Fluxo

O problema de fluxo em rede é um problema que consiste na análise da capacidade da capacidade de fluxo de “produtos de interesse” através de uma rede definida.

Em geral, um fluxo definido em uma rede deverá satisfazer as seguintes propriedades:

Fluxo

O problema de fluxo em rede é um problema que consiste na análise da capacidade da capacidade de fluxo de "produtos de interesse" através de uma rede definida.

Em geral, um fluxo definido em uma rede deverá satisfazer as seguintes propriedades:

1. Conservação de fluxo: a quantidade de fluxo que entra em um nó deverá ser igual a quantidade de fluxo que sai do mesmo nó;

Fluxo

O problema de fluxo em rede é um problema que consiste na análise da capacidade da capacidade de fluxo de "produtos de interesse" através de uma rede definida.

Em geral, um fluxo definido em uma rede deverá satisfazer as seguintes propriedades:

1. Conservação de fluxo: a quantidade de fluxo que entra em um nó deverá ser igual a quantidade de fluxo que sai do mesmo nó;
2. O fluxo entre dois nós nunca deverá exceder a capacidade máxima daquele trecho;

Fluxo

O problema de fluxo em rede é um problema que consiste na análise da capacidade da capacidade de fluxo de "produtos de interesse" através de uma rede definida.

Em geral, um fluxo definido em uma rede deverá satisfazer as seguintes propriedades:

1. Conservação de fluxo: a quantidade de fluxo que entra em um nó deverá ser igual a quantidade de fluxo que sai do mesmo nó;
2. O fluxo entre dois nós nunca deverá exceder a capacidade máxima daquele trecho;
3. Apenas os nós de fonte (que fornece fluxo a rede) e nós sumidouros (que absorvem fluxo) podem violar a lei da conservação de fluxo.

Exemplo

Analise o seguinte fluxo e descubra os valores que estão faltando.

Exemplo

Descubra os valores das correntes no seguinte circuito.

Exemplo

Equilibre a seguinte reação química:

$$HCl + Na_3PO_4 \to H_3PO_4 + NaCl.$$

Polinômio Interpolador

Dado um conjunto de pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ se existir um polinômio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$ então dizemos que $p(x)$ é o polinômio interpolador desses pontos.

Polinômio Interpolador

Dado um conjunto de pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_m, y_m)$ se existir um polinômio $p(x)$ tal que $p(x_i) = y_i$ então dizemos que $p(x)$ é o polinômio interpolador desses pontos.

Teorema

Dado um conjunto de pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ no qual $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ então existe um único polinômio interpolador de grau n que passa por esses pontos.

Exemplo

Descubra o polinômio interpolador dos pontos $(0,0),(1,1),(2,2)$ e $(3,2)$.

Exemplo - Desafio

Uma empresa de internet possui 5 centrais interligadas entre si. Ela deseja testar a comunicação entre as centrais. O teste é realizado da seguinte forma: escolhemos dois conjuntos disjuntos de centrais, digamos A e B, e inserimos em um tester. Este tester irá testar as comunicações entre as centrais em A e as centrais em B. A empresa necessita testar todas as comunicações e, por razões econômicas, nenhuma par de cidades podem ser testados mais de uma vez. Qual o menos número de testes a empresa deve realizar?

Problema

Encontre critérios para a inversão de uma matriz 3×3.

Submatriz Menor $T_{i,j}$

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ definimos a submatriz $T_{i,j}$ como sendo a matriz quadrada de tamanho $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir de A após "deletarmos" a linha i e a coluna j.

Submatriz Menor $T_{i,j}$

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ definimos a submatriz $T_{i,j}$ como sendo a matriz quadrada de tamanho $(n-1) \times (n-1)$ obtida a partir de A após "deletarmos" a linha i e a coluna j.

Determinante

O determinante $\det(A)$ de uma matriz quadrada A é definido como

$$\det(A) = \begin{cases} (A)_{1,1}, & \text{se } n = 1; \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} (A)_{1,j} \det(T_{1,j}), & \text{c.c.} \end{cases}$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ temos

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_1+j}(A)_{i_1,j}\det(T_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_2+j}(A)_{i_2,j}\det(T_{i_2,j}).$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ temos
$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_1+j} (A)_{i_1,j} \det(T_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_2+j} (A)_{i_2,j} \det(T_{i_2,j}).$$
2. Para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq k \leq n$ temos
$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (A)_{i,j} \det(T_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} (A)_{j,k} \det(T_{j,k}).$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada, temos que $\det(A) = \det(A^T)$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

- **Expansão em cofatores ao longo da linha** i

$$\det(A) = (A)_{i,1} C_{i,1} + \cdots + (A)_{i,n} C_{i,n}.$$

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

- **Expansão em cofatores ao longo da linha i**

$$\det(A) = (A)_{i,1}C_{i,1} + \cdots + (A)_{i,n}C_{i,n}.$$

- **Expansão em cofatores ao longo da coluna j**

$$\det(A) = (A)_{1,j}C_{1,j} + \cdots + (A)_{n,j}C_{n,j}.$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Proposição

Se A é uma matriz triangular de tamanho $n \times n$ então $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Teorema

Se A é uma matriz quadrada com uma linha ou coluna nula então $\det(A) = 0$.