| | |
|---|---|
| **Iniciado em** | Wednesday, 2 Nov 2022, 16:00 |
| **Estado** | Finalizada |
| **Concluída em** | Wednesday, 2 Nov 2022, 16:24 |
| **Tempo empregado** | 23 minutos 34 segundos |
| **Avaliar** | **8,00** de um máximo de 10,00(**80**%) |

Questão **1**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 2,00

Qual a área da porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\sqrt{7}\pi}{2}$ ✖
- b. $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$
- c. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$
- d. $\frac{\sqrt{5}\pi}{3}$
- e. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

Sua resposta está incorreta.

**Resposta:**

Podemos usar a parametrização explicita:

$$z = f(x, y) \qquad z = \frac{2 - y}{2}$$

Definindo os parâmetros:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

$$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (rcos\theta)\mathbf{i} + (rsen\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{2 - rsen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Fazendo a Derivada Parcial de $r$:

$$\vec{\mathbf{r}}_r = (cos\theta)\mathbf{i} + (sen\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{sen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Fazendo a Derivada Parcial de $\theta$:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-rsen\theta)\mathbf{i} + (rcos\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{rcos\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial temos:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ cos\theta & sen\theta & -\frac{sen\theta}{2} \\ --rsen\theta & rcos\theta & -\frac{rcos\theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-rsen\theta cos\theta}{2} + \frac{sen\theta rcos\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{rsen^2\theta + rcos^2\theta}{2}\right)\mathbf{j} + \left(rcos^2\theta + rsen^2\theta\right)\mathbf{k}$$

Simplificando:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{j} + (r)\mathbf{k}$$

Calculando o diferencial da área de  superficie:

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| \; dr\, d\theta$$

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Calculando a área pela fórmula diferencial para área da superfície $A = \iint\limits_S d\sigma$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{5}r}{2}\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}r^2}{4}\Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{4}\, d\theta \\ &= \frac{\sqrt{5}\theta}{4}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \end{aligned}$$

A resposta correta é: $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual parametrização do **cilindro parabólico entre planos**, cosiderando a superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$?

Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = -x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .
- b. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .
- c. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\mathbf{j} - \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .
- d. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .
- e. $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .

Sua resposta está correta.

Resposta:

Para iniciarmos, a questão nos dá que a superfície cortada do cilindro parabólico é definida por: $z = 4 - y^2$ .

Para prosseguir com a parametrização, podemos deixar o vetor $\vec{\mathbf{r}}$ ser uma função de $x$ e $y$, logo obtemos:

$\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$.

A seguir, com o vetor $\vec{\mathbf{r}}$ obtido, e com o valor de $z = 0$ dada na questão, podemos substituir na função $z = 4 - y^2$ , logo:

$0 = 4 - y^2$

$y^2 = 4$

$y = \sqrt{4}$

$y = -2$ e $y = 2$

Onde $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}$ para $-2 \leq y \leq 2$ e $0 \leq x \leq 2$ .

.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da calota cortada da esfera $x^2+y^2+z^2=9$ cortada pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ ?

Escolha uma opção:

a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}-\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}-r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}-r\sin(\theta)\mathbf{j}-\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ✔

e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9+r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Sua resposta está correta.

**Solução:**

A coordenada cilíndrica fornece uma parametrização.

Um ponto no cone tem $x=r\cos(\theta)$ ; $y=r\sin(\theta)$ ;

como $x^2+y^2=r^2$, então $z^2=9-\left(x^2+y^2\right)=9-r^2$

assim, $z=\sqrt{9-r^2}$, para $z\geq 0$.

Tomando $u=r$ e $v=\theta$, temos a parametrização:

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$

Para o domínio de $r$ temos que:

$z=\sqrt{9-r^2}$ e $x^2+y^2+z^2=9$,

logo,

$$x^2+y^2+(\sqrt{x^2+y^2})^2=9$$

$$2(x^2+y^2)=9$$

$$2r^2=9$$

$$r^2=\frac{9}{2}$$

$$r=\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$r=\frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$0\leq r\leq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta)=r\cos(\theta)\mathbf{i}+r\sin(\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

.

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\pi a^2}{3}$
- b. $\frac{\pi a^4}{4}$
- c. $\frac{\pi a^2}{6}$
- d. $\frac{\pi a^4}{5}$
- e. $\frac{\pi a^3}{6}$ ✔

Sua resposta está correta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a \sin \phi \sin \theta) + (a \cos \phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que $\phi$ e $\theta$ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a $\phi$ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a \cos \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a \cos \phi \sin \theta)\mathbf{j} - (a \sin \phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a $\theta$ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a \sin \phi \sin \theta)\mathbf{i} + (a \sin \phi \cos \theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2 \sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin \phi \cos \phi)\mathbf{k}$.

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a \cos \phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada $S$ na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi.$$

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$

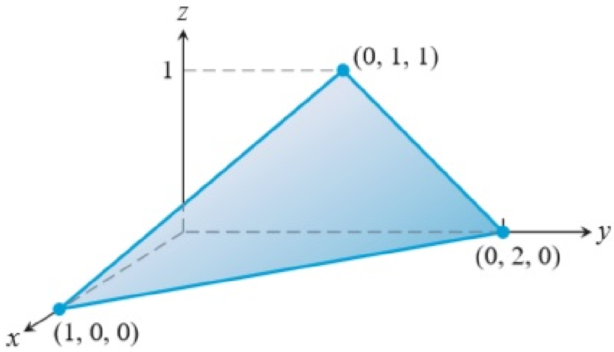
.

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 1, 1)$.




Escolha uma opção:

- a. $\frac{5}{\sqrt{6}}$
- b. $\frac{7}{3\sqrt{6}}$
- c. $\frac{7}{5\sqrt{6}}$
- d. $\frac{2}{\sqrt{6}}$
- e. $\frac{1}{5\sqrt{6}}$

Sua resposta está correta.

**Solução:**

Para uma superfície $S$ fornecida implicitamente por $F(x, y, z) = c$, onde $F$ é uma função continuamente derivável, com $S$ acima de sua região fechada e limitada $R$ no plano coordenado abaixo dela, a integral de superfície da função contínua $G$ sobre $S$ é fornecida pela integral dupla sobre $R$:

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(x, y, z)\, \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}}|}\; dA,$$

onde $\vec{\mathbf{p}}$ é um vetor unitário normal a $R$ e $\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}} \neq 0$

Assim, temos:

$F(x, y, z) = 2x + y + z = 2$ , $\qquad p = k$

E calculando o gradiente de $F$, temos:

$\nabla F = 2i + j + k$, onde $|\nabla F| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

e

$|\nabla F \cdot p| = 1$, assim como $d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot p|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6} dydx$ .

Assim, substituindo os valores na integral mostrada anteriormente e calculando esta, obtemos:

$$\Rightarrow \iint_S G d\sigma = \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} xy\,(2 - 2x - y)\,\sqrt{6} dydx = \sqrt{6} \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} \left(2xy - 2x^2 y - xy^2\right) dydx$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4\right) dx = \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{15}\right) = \sqrt{6}\,\frac{1}{30} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

A resposta correta é: $\frac{1}{5\sqrt{6}}$

.