LISTA 2 - PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

ALANNA MARIA MACHADO ALVES PAIVA - 421942

01)

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

a) Para ser uma f.d.p tem-se que:

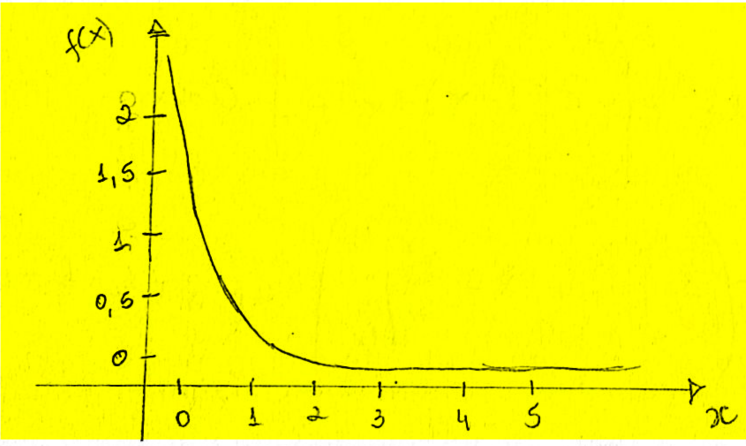
1) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Logo, e^{-x} é positivo, portanto $2e^{-2x}$ também será positiva para qualquer x.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - (-e^{-0}) = \underline{1}$$

b)



c) $P(X>10)$

$$P(X>10) = \int_{10}^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - (-e^{-2\cdot 10}) = \lim_{x\to\infty} -e^{-2x} - \lim_{x\to\infty} -e^{-2\cdot 10} =$$

$$= 0 - (-e^{-2\times 10}) = \boxed{\frac{1}{e^{20}}}$$

2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx, & 0 \leq x < 1/2 \\ c(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

a) Para ser uma f.d.p, tem-se que:

1) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; $c > 0$

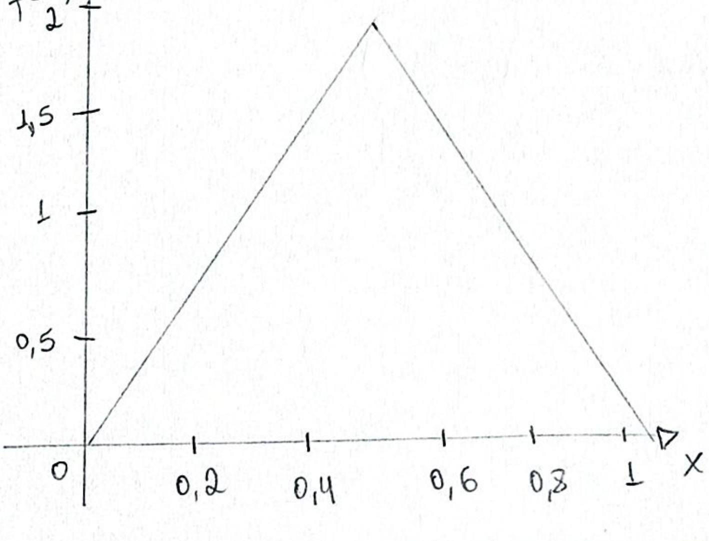
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1/2} cx\,dx + \int_{1/2}^{1} c(1-x)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx =$$

$$= c \cdot \int_{0}^{1/2} x\,dx + c\int_{1/2}^{1} (1-x)\,dx = c\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{0}^{1/2} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}\right) = c\left(\frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) =$$

$= c \cdot \frac{1}{4}$ ∴ Logo, o valor de c é 4

b)



c) $P(X \leq 1/2)$, $P(X > 1/2)$ e $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$

Para $P(X \leq 1/2)$:

$$P(X \leq \tfrac{1}{2}) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} 4x\,dx = 4\cdot\int_0^{1/2} x\,dx = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{1/2} =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{0^2}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2}\right] = 4\cdot\frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Para $P(X > 1/2)$:

$$P(X > \tfrac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Para $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$:

$$P(\tfrac{1}{4} \leq X \leq \tfrac{3}{4}) = \int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx = \int_{1/4}^{1/2} 4x\,dx + \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)\,dx = 4\cdot\int_{1/4}^{1/2} x\,dx +$$

$$4\cdot\int_{1/2}^{3/4} (1-x)\,dx = 4\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{1/4}^{1/2} + 4\left[(1)\Big|_{1/2}^{3/4} - (x)\Big|_{1/2}^{3/4}\right] = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$$

d) Para uma f.d.a:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

2) F é não decrescente

3) F é uma função contínua à direita e tem limite à esquerda.

A f.d.a é $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow F(x) = \int_0^x 4t\,dt = 2x^2$

Logo, para $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, temos:

$$F(x) = \int_0^{1/2} 4t\,dt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)\,dt = 4\cdot\int_0^{1/2} t\,dt + 4\cdot\int_{1/2}^{x} (1-t)\,dt =$$

$$= 4\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^{1/2} + 4\left(\int 1\,dt + \int t\,dt\right) = 4\cdot\frac{1}{8} + 4\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{x^2}{2}\right) = \boxed{-2x^2 + 4x - 1}$$

Logo,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 2x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 4x - 2x^2 - 1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

2)

$$\underline{E(X)} = \int_0^{0} x\,(0)\,dx + \int_0^{1/2} x(4x)\,dx + \int_{1/2}^{1} x(4(1-x))\,dx + \int_0^{\infty} 0\,dx =$$

$$= 4\int_0^{1/2} x^2\,dx + 4\cdot\int_{1/2}^{1} x(1-x)\,dx = 4\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^{1/2} + 4\cdot\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^{1} - \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1/2}^{1}\right] =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{24} + 4\left[\frac{3}{8} - \frac{7}{24}\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_0^{1/2} x^2(4x)\,dx + \int_{1/2}^{1} x^2(4(1-x))\,dx = 4\cdot\int_0^{1/2} x^3\,dx + 4\left[\int_{1/2}^{1} x^2\,dx - \int_{1/2}^{1} x^3\,dx\right]$$

$$= 4\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^{1/2} + 4\left[\left[\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{1/2}^{1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_{1/2}^{1}\right] = \frac{1}{16} + 4\left(\frac{7}{24} - \frac{15}{64}\right) = \frac{7}{24}$$

Logo, $\underline{Var(X)} = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{7}{24} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{24}}$

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{1}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{12} \approx \boxed{0{,}204124}$$

03) $\mu = 10.000$, $\sigma = 1500$, X = depositos

a) $P(X \leq 10000) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq \frac{10.000 - 10.000}{1500}\right) = P(Z \leq 0) = \underline{0{,}5}$

b) $P(X \geq 10000) = P(Z \geq 0) = \underline{0{,}5}$

03) Transforma a variável X em Z. $\Rightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

c) $P(12000 \leqslant X \leqslant 15000) = P\left(\frac{12000-10000}{1500} \leqslant Z \leqslant \frac{15000-10000}{1500}\right) =$

$= P\left(\frac{2000}{1500} \leqslant Z \leqslant \frac{5000}{1500}\right) = P(1,33 \leqslant Z \leqslant 3,33) = 0,49957 - 0,40824 \cong$

$\cong \boxed{0,9133.}$

d)

$P(X > 20.000) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{20000-10000}{1500}\right) = P\left(Z > \frac{10.000}{1500}\right) =$

$= P(Z > 6,666\ldots) \cong \underline{0}$

04)

a) $P(X>13) \Rightarrow Z = \frac{(X-10)}{2}$; $X>13$ corresponde a $Z>1,5$

$P(X>13) = P(Z>1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,93319 = \boxed{0,06681}$

05)

Nº FILHOS	PORCENTAGEM
0	10
1	20
2	30
3	25
4	15
TOTAL	100

a) Um procedimento possível, é usar 20 fichas do total de 100 e diminuir a porcentagem para cada grupo de filhos. Ou seja, duas fichas com número 0, quatro fichas com o número 1, seis fichas com o número 2, cinco fichas com o número 3 e três fichas com o número 4, mudando o procedimento e mantendo a probabilidade da tabela.

b)

Calculando a probabilidade para cada uma das famílias:

$P(X_1=0|X_2=0)=0{,}010$
$P(X_1=0|X_2=1)=0{,}020$
$P(X_1=0|X_2=2)=0{,}030$
$P(X_1=0|X_3=3)=0{,}025$
$P(X_1=0|X_4=4)=0{,}015$

$P(X_1=1|X_2=0)=0{,}020$
$P(X_1=1|X_2=1)=0{,}040$
$P(X_1=1|X_2=2)=0{,}060$
$P(X_1=1|X_2=3)=0{,}050$
$P(X_1=1|X_2=4)=0{,}030$

$P(X_1=2|X_2=0)=0{,}030$
$P(X_1=2|X_2=1)=0{,}060$
$P(X_1=2|X_2=2)=0{,}090$
$P(X_1=2|X_2=3)=0{,}075$
$P(X_1=2|X_2=4)=0{,}045$

$P(X_1=3|X_2=0)=0{,}025$
$P(X_1=3|X_2=1)=0{,}050$
$P(X_1=3|X_2=2)=0{,}075$
$P(X_1=3|X_3=3)=0{,}063$
$P(X_1=3|X_4=4)=0{,}038$

$P(X_1=4|X_2=0)=0{,}015$
$P(X_1=4|X_2=1)=0{,}030$
$P(X_1=4|X_2=2)=0{,}045$
$P(X_1=4|X_2=3)=0{,}038$
$P(X_1=4|X_2=4)=0{,}023$

x_2	0	1	2	3	4	$P(X_2=x_2)$
0	0,010	0,020	0,030	0,025	0,015	0,10
1	0,020	0,040	0,060	0,050	0,030	0,20
2	0,030	0,060	0,090	0,075	0,045	0,30
3	0,025	0,050	0,075	0,063	0,038	0,25
4	0,015	0,030	0,045	0,038	0,023	0,15
$P(X_1=x_1)$	0,10	0,20	0,30	0,25	0,15	1

c) $P(2,3,3,1)=\frac{30}{100}\left(\frac{25}{100}\right)^2\cdot\frac{20}{100}=\frac{375\cancel{000}}{1000\cancel{000}}=\boxed{0{,}00375}=0{,}375\ \%$

06)

$\bar{X} = 148$

Assumindo H_0 como os parafusos de origem B e $\mu = 155$.

Assumindo H_1 em que os parafusos não são de origem B.

BILATERAL	ESQUERDA	DIREITA
$H_0: \mu = 155$	$H_0: \mu = 155$	$H_0: \mu = 155$
$H_1: \mu \neq 155$	$H_1: \mu < 155$	$H_1: \mu > 155$
$RC = \{\bar{X} : \bar{X} \leq \bar{X}_{c_1} \text{ ou } \bar{X} \geq \bar{X}_{c_2}\}$	$RC = \{\bar{X} : \bar{X} \leq \bar{X}_{c_1}\}$	$RC = \{\bar{X} : \bar{X} \geq \bar{X}_{c_2}\}$

região crítica

Tipos de Erro:

1 - Achar que os parafusos são de B, mas não são.

2 - Achar que os parafusos não são de B, mas são.

$P(\text{Erro tipo 1}) = P(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é falso}) = \beta$

$P(\text{Erro tipo 2}) = P(\bar{X} \in RC | H_0 \text{ é verdadeira}) = \alpha$

Para $\alpha = 5\%$, temos:

$5\% = P(\text{Erro tipo 2}) = P(\bar{X} < \bar{X}_{c_1} \text{ ou } \bar{X} > \bar{X}_{c_2} | \bar{X} \sim N(155; 16)) =$

$= P(Z < -1,96 \text{ ou } Z > 1,96) \Rightarrow -1,96 = \frac{\bar{X}_{c_1} - 155}{4} \Rightarrow \boxed{\bar{X}_{c_1} = 147,16}$ e

$1,96 = \frac{\bar{X}_{c_2} - 155}{4} \Rightarrow \boxed{\bar{X}_{c_1} = 162,84}$

$$\boxed{RC = \{\bar{x} : \bar{X} < 147,16 \text{ ou } \bar{X} > 1,62,84\}}$$

07) $H_0 : p_1 = p_2 = \dots p_6 = 1/6$, em que $p_i = P(face), i = 1,2,\dots,6$.

OCORR.	1	2	3	4	5	6	TOTAL
FREQ. Obsv. (n_i)	43	49	56	45	66	41	300
FREQ. ESP. (n^*_i)	50	50	50	50	50	50	300

$n = 300$

$E_i = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$

$i = 6$

a)

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{K/2}\,\Gamma(K/2)} \cdot x^{K/2 - 1} e^{-x/2}, \quad x \geq 0$$

K = nº de liberdade

$\Gamma(K/2)$ = função gamma

$q = K - 1$

$$X^2_{obs} = \sum_{1}^{6} \frac{(n_i - n^*_i)^2}{n^*_i} = \frac{(43-50)^2}{50} + \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(56-50)^2}{50} +$$

$$+ \frac{(45-50)^2}{50} + \frac{(66-50)^2}{50} + \frac{(41-50)^2}{50} = 0{,}98 + 0{,}02 + 0{,}72 +$$

$$+ 0{,}5 + 5{,}12 + 1{,}62 = 8{,}96$$

b) Usando a distribuição de qui-quadrado com $q = K - 1 = 5$ graus de liberdade, o nível descritivo é calculado por:

$$P = P(X^2_5 \geq 8{,}96) = 11{,}070 > 8{,}96$$

Assumindo um nível de insignificancia de $p = 5\%$, encontra-se na tabela o valor de 11,070, que é maior que o valor encontrado de 8,96, logo, Ho não será rejeitado.

08)

a) $n = 20$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = (0,99 + 1,02 + 1,15 + 1,29 + 1,46 + 1,36 + 0,87 + 1,23 + 1,55 + 1,40 + 1,19 + 1,15 + 0,98 + 1,01 + 1,11 + 1,20 + 1,26 + 1,32 + 1,43 + 0,95) = 23,92$$

$$\sum_{i=1}^{20} y_i = (90,01 + 89,05 + 91,43 + 93,74 + 96,73 + 94,45 + 87,59 + 91,77 + 99,42 + 93,54 + 92,52 + 90,56 + 89,54 + 89,85 + 90,39 + 93,25 + 93,41 + 94,98 + 87,33) = 1843,21$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^{20} x_i}{20} = \frac{23,92}{20} = \boxed{1,196}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_1^{20} y_i}{20} = \frac{1843,21}{20} = \boxed{92,1605}$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 29,2892 \quad e \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 170.044,5321$$

$$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 2214,6566$$

Logo, $S_{xx} = \sum_1^{20} x_i^2 - \frac{\left(\sum_1^{20} x_i\right)^2}{20} = 29,2892 - \frac{(23,92)^2}{20} = \boxed{0,68088}$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{20} x_i y_i - \frac{\left(\sum_1^{20} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{20} y_i\right)}{20} = 2214,6566 - \frac{(23,92)(1843,21)}{20} =$$

$$= \boxed{10,17744}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{x,x}} = \frac{10,17744}{0,68088} = \boxed{14,94748}$$

Estimativa de mínimos quadrados da inclinação e interseção.

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} = 92,1605 - 14,94748 \cdot 1,196 = \boxed{74,28331}$$

Modelo de regressão linear ajustado

b)

$\hat{y} = 74,283 + 14,947x$

logo, $\hat{y} = 89,23$ quando $x = 1\%$.

e)

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{20} y_i^2 - \frac{\left(\sum_{1}^{20} y_i\right)^2}{20} = 170044,5321 - \frac{(1843,21)^2}{20} \cong$$

$\hat{\beta}_1 = 14,947$

$n = 20$

$$\cong \boxed{173,376895}$$

$$SQR = S_{yy} - \hat{\beta}_1 \cdot S_{xy} = 173,376895 - 14,94748 \cdot 10,17744 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SQR \cong \boxed{21,24981}$$ → Quadrado medio residual

$$\sigma^2 = \frac{SQR}{n-2} = \frac{21,24981}{20-2} = \boxed{1,18}$$

Suponhamos que se deseja testar a hipótese de que a inclinação é igual a constante $\beta_{1,0}$.

As hipóteses são:

$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0}$; $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$

Para o t observado, temos:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{S_{xx}}}} = \frac{14,94748}{\sqrt{\frac{1,18}{0,68088}}} \cong \boxed{11,35434}$$

Para o t crítico, temos:

grau de liberdade = 20 - 2 = 18

grau de significância = 0,05

$t_c = 2,100922$ ou $2,88$ → T crítico

Como o $T_{obs} > 2,88 \Rightarrow 11,35434 > 2,88$, rejeita-se a hipótese $H_0 : \beta_1 = 0$