Álgebra Linear
Aula 3

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula.

Atividade 02

1. (3 pt) Marque V para Verdadeiro e F para Falso nos itens abaixo
   1.1 ( ) Para uma matriz está na forma escalonada ela deve satisfazer 4 regras.
   1.2 ( ) Um sistema linear homogêneo sempre é consistente.
   1.3 ( ) Uma matriz A possui um única forma escalonada reduzida.
2. (7 pt) Para o sistema abaixo, apresente a matriz aumentada e utilizando os algoritmos apresentados na aula passada, encontre sua forma escalonada e a escalonada reduzida. Onde m_2 é o segundo dígito da sua matrícula.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & m_2 \\ x & + & 2y & = & 10 \end{array}$$

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula.

Atividade 02 - Gabarito

1. F, V, V.
2. As matrizes são respectivamente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & m_2 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & m_2 \\ 0 & 1 & 10 - m_2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2m_2 - 10 \\ 0 & 1 & 10 - m_2 \end{bmatrix}$$

Vamos falar de matrizes.

Vamos falar de matrizes.

- Toda matriz neste curso, salvo exceções claras, possuem entradas reais.

Vamos falar de matrizes.

- Toda matriz neste curso, salvo exceções claras, possuem entradas reais.
- Uma matriz de tamanho $m \times n$ possui m linhas e n colunas;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos falar de matrizes.

- Toda matriz neste curso, salvo exceções claras, possuem entradas reais.
- Uma matriz de tamanho $m \times n$ possui m linhas e n colunas;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matrizes geralmente são denotadas por letras maiúsculas enquanto seus elementos por letras minúsculas.

Vamos falar de matrizes.

Vamos falar de matrizes.

- Duas matrizes são iguais se possuírem o mesmo tamanho e todos os seus respectivos elementos forem iguais.

Matriz Transposta

Considere a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz transposta de A^T de A é definida como

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Vamos falar de matrizes.

Vamos falar de matrizes.

- A matriz resultante da soma de duas matrizes de mesmo tamanho é obtida pela soma dos elementos correspondentes.

Vamos falar de matrizes.

- A matriz resultante da soma de duas matrizes de mesmo tamanho é obtida pela soma dos elementos correspondentes.

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos falar de matrizes.

- A matriz resultante da subtração de duas matrizes de mesmo tamanho é obtida pela subtração dos elementos correspondentes.

$$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Vamos falar de matrizes.

- A matriz resultante produto por escalar.

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Sejam A e B matrizes de mesmo tamanho e c uma constante qualquer.

- $$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij};$$

Sejam A e B matrizes de mesmo tamanho e c uma constante qualquer.

- $$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij};$$

- $$(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij};$$

Sejam A e B matrizes de mesmo tamanho e c uma constante qualquer.

- $$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij};$$
- $$(A-B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij};$$
- $$(cA)_{ij} = c(A)_{ij}.$$

Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de Matrizes

O produto de duas matrizes $A_{m\times t}$ e $B_{t\times n}$ é uma matriz $P_{m\times n}$ tal que

$$(P)_{ij} = \sum_{s=1}^{t}(A)_{is}(B)_{sj}.$$

Submatriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Fixe conjuntos $V = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_{|V|}\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ e $T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_{|T|}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. A submatriz de A induzida pelos conjuntos V e T é uma matriz A' de tamanho $|V| \times |T|$ tal que

$$(A')_{ij} = (A)_{v_i t_j}.$$

Estendendo o conceito de equação linear:

Combinação Linear

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ objetos quaisquer. Uma combinação linear, quando fizer sentido, desses elementos com coeficientes $c_1, \ldots, c_r$ é escrita da seguinte forma

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r.$$

Traço

O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

- *Vetor Linha:* Por uma matriz de tamanho $1 \times n$

$$\overrightarrow{v} = [v_1 \cdots v_n].$$

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

- *Vetor Linha:* Por uma matriz de tamanho $1 \times n$

$$\overrightarrow{v} = [v_1 \cdots v_n].$$

- *Vetor Coluna:* Por uma matriz de tamanho $n \times 1$

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- Representação por vetores linhas. Denote

$$\overrightarrow{r_i} = [a_{i1} \cdots a_{in}]$$

o i-ésimo vetor linha de A.

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- Representação por vetores linhas. Denote

$$\overrightarrow{r_i} = [a_{i1} \cdots a_{in}]$$

o i-ésimo vetor linha de A. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{r_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{r_m} \end{bmatrix}$$

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- *Vetores Coluna:* Denotamos por

$$\overrightarrow{c_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

o i-ésimo vetor coluna de A.

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- *Vetores Coluna:* Denotamos por

$$\overrightarrow{c_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

o i-ésimo vetor coluna de A. Assim,

$$A = [\overrightarrow{c_1} \cdots \overrightarrow{c_n}].$$

De volta sistemas lineares...

$$Ax = b$$

De volta sistemas lineares...

$$Ax = b$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

De volta sistemas lineares...

$$
\begin{aligned}
&Ax = b \\
\leftrightarrow &\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow &\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De volta sistemas lineares...

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{c_i} x_i &= b
\end{aligned}
$$

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$;
- $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A$;