Álgebra Linear
Aula 1 - Sistemas Lineares

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Informações

Do Professor

- **Dr. Josefran de O. Bastos**;
- **Email:** josefran@ufc.br;
- **Gabinete:** 22;
- **Telefone:** (85) 99603-7184.

Introdução

Exemplo 1

Dudu tem 3 picolés, chupa 1, com quantos ele fica?

Exemplo 2

Zeca tem R$ 5,00 e deseja gastar tudo em bombom. Quantos bombons Zeca consegue comprar se cada um custar R$ 1,00?

Exemplo 3

Sanji está preparando comida para a tripulação e odeia desperdiçar comida. Ele quer fazer 3 tipos de pratos diferentes e, como cozinheiro dor mar experiente que é, possui a seguinte tabela de materiais necessários para cada prato.

Prato\Ing.	A	B	C
1	2	1	4
2	3	2	0
3	1	0	4

Se ele tem disponível 11 u. de A, 5 u. de B e 16 u. de C, quantos pratos de cada ele deve fazer para que não sobre nada?

Exemplo 4

Olhando para o céu você viu um meteoro e conseguiu fazer algumas anotações sobre a posição dele. Preveja aonde o meteoro vai estar daqui a 10 anos.

Exemplo 4

Olhando para o céu você viu um meteoro e conseguiu fazer algumas anotações sobre a posição dele. Preveja aonde o meteoro vai estar daqui a 10 anos.

Figura: Johann Carl Friedrich Gaus

Sistemas Lineares - Um exemplo

Exemplo 5

Resolva o seguinte problema.

$$5x + y = 3$$

$$2x - y = 4$$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é da forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, \ldots, a_n, b$ são constantes.

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ é da forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, \dots, a_n, b$ são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é da forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, \ldots, a_n, b$ são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- Equação do plano: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é da forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, \ldots, a_n, b$ são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- Equação do plano: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Equação Homogênea

A equação é dita homogenia se $b = 0$, i.e.,

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0,$$

Equações Lineares

Exemplos que não são

- Qualquer equação que contenha funções trigonométricas (*sen*, *cos*, ...);

Equações Lineares

Exemplos que não são

- Qualquer equação que contenha funções trigonométricas (*sen*, *cos*, ...);
- Qualquer equação com variáveis com potências diferentes de 1 $(x^2, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \ldots)$;

Sistema Linear

Forma Geral

A forma geral de um sistema linear com $n > 0$ variáveis e $m > 0$ equações é a seguinte

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

onde para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, a_{ij} e b_i são constantes.

Solução

Uma solução do sistema linear é uma n-upla ordenada $(s_1, \ldots, s_n)$ tal que ao tomarmos $x_i = s_i$ todas as equações do sistema são satisfeitas.

Exemplo 6

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Exemplo 7

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Exemplo 7

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Solução: $x = 4 - t$ e $y = t$.

Exemplo 7

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Solução: $x = 4 - t$ e $y = t$. t é chamado de *parâmetro* e as duas equações soluções de *equações paramétricas*.

Exemplo 8

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & y & = & 6 \end{array}$$

Classificação dos sistemas

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;
- Consistente ilimitado - Possui infinitas soluções;

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;
- Consistente ilimitado - Possui infinitas soluções;
- Inconsistente - Não possui soluções.

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Relembre:

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;

Forma Geral

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as equações de posições;

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as equações de posições;
- Substituímos uma equação por uma obtida após a soma/subtração por outra.

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operações elementares com linhas:

- Multiplicamos uma linha inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as linhas de posições;
- Substituímos uma linha por uma obtida após a soma/subtração por outra.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Usualmente a matriz identidade de ordem n é representada por I_n

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;
- Para quaisquer duas linhas distintas o primeiro elemento nulo da linha mais abaixo está sempre mais a direita que a do primeiro elemento não nulo outra.

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;
- Para quaisquer duas linhas distintas o primeiro elemento nulo da linha mais abaixo está sempre mais a direita que a do primeiro elemento não nulo outra.

Forma escalonada reduzida

Uma matriz escalonada está na forma reduzida se todo pivô é o único elemento não nulo da coluna que pertence.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

- **Lideres**: relacionadas ao pivô

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

- **Lideres**: relacionadas ao pivô
- **Livres**: variáveis com coeficiente não nulos que não estão relacionados ao pivô.

Eliminação de Gauss-Jordan

Algoritmo que, dado uma matriz de entrada A, obtém através de operações elementares com linha a forma escalonada reduzida de A.

Eliminação de Gauss-Jordan

Algoritmo que, dado uma matriz de entrada A, obtém através de operações elementares com linha a forma escalonada reduzida de A.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Eliminação de Gauss-Jordan

O algoritmo consiste de duas fases.

- *Fase 1 (para frente).* Através de operações elementares com linhas, transformar a matriz aumentada na sua forma escalonada.
- *Fase 2 (para trás).* Começando da última linha, utilizar operações com linhas para obter a forma escalonada reduzida da matriz.

Eliminação de Gauss-Jordan

O algoritmo consiste de duas fases.

- *Fase 1 (para frente).* Através de operações elementares com linhas, transformar a matriz aumentada na sua forma escalonada.
- *Fase 2 (para trás).* Começando da última linha, utilizar operações com linhas para obter a forma escalonada reduzida da matriz.

Eliminação Gaussina

O algoritmo que usa apenas a Fase 1 do algoritmo acima para obter a matriz escalonada é chamada de *eliminação gaussiana*.