Álgebra Linear
Aula 10

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Exemplo

Calcule o determinante da matriz A a seguir e compare com o determinante da obtida após uma única operação elementar em A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k \det(A)$;

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k \det(A)$;
2. Se B é uma matriz obtida a partir de A após permutarmos duas linhas (ou colunas) então $\det(B) = -\det(A)$;

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k\det(A)$;
2. Se B é uma matriz obtida a partir de A após permutarmos duas linhas (ou colunas) então $\det(B) = -\det(A)$;
3. Se B é uma matriz obtida a partir de A após somarmos um múltiplo de uma linha (coluna) a outra linha (coluna) então $\det(B) = \det(A)$.

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Pergunta 1

Será que o determinante preserva soma, produto e multiplicação por escalar?

Exemplo 1

Suponha que A e B seja matrizes quadradas de tamanhos 2×2 e 3×3 respectivamente. Para um escalar k, calcule $\det(kA)$ e $\det(kB)$.

Exemplo 1

Suponha que A e B seja matrizes quadradas de tamanhos 2×2 e 3×3 respectivamente. Para um escalar k, calcule $\det(kA)$ e $\det(kB)$.

Proposição 1

Sejam A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$ e k um escalar. Temos que

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

Exemplo 2

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$, $\det(A+B)$, $\det(A+C)$ e $\det(B+C)$.

Exemplo 2

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$, $\det(A+B)$, $\det(A+C)$ e $\det(B+C)$.

Teorema (2.3.1)

Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem em uma única linha, a r-ésima, e suponha que a r-ésima linha de C possa ser obtida através somando as entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de A e B. Então

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

O mesmo vale para as colunas.

Exemplo 3

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_1)$ e $\det(E_1 A)$.

Exemplo 4

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_2)$ e $\det(E_2 A)$.

Exemplo 5

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_3)$ e $\det(E_3 A)$.

Teorema (2.3.2)

Se E é uma matriz elementar e B uma matriz qualquer de mesmo tamanho de E então

$$\det(EB) = \det(E)\det(B).$$

Pergunta

O que acontece com o determinante de uma matriz que não é invertível?

Teorema 2.3.3

Uma matriz quadrada A é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(AB)$.

Teorema 2.3.4

Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$