RESOLUÇÃO EXERCICIOS 1.4 – BOLDRINI 3 EDIÇÃO

1) Sejam;

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2, & -1 \end{bmatrix}$

Encontre:

a) $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 2+0 & 3+1 \\ 2+3 & 1+0 & (-1)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-1) + 2.2 + 3.4 \\ 2.(-1) + 1.2 + (-1).4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$

c) $B \cdot C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2).(-1) + 0.2 + 1.4 \\ 3.(-1) + 0.2 + 1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $C \cdot D = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1).2 & (-1).(-1) \\ 2.2 & 2.(-1) \\ 4.2 & 4.(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

e) $D \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+(-1).2 & 2.2+(-1).1 & 2.3+(-1).(-1) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

f) $D \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.(-2)+(-1).3 & 2.0+(-1).0 & 2.1+(-1).1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $-A = -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

h) $-D = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$

2) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$ Se $A' = A$, então $x =$

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$ como $A = A'$, logo;

$\Rightarrow x^2 = 2x - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x^2 - 1)^2 = 0$

$\boxed{x = 1}$

3) Se A é uma matriz simetrica, então $A - A' =$

$\begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 2 - 0 & x^2 - 2x + 1 \\ 2x - 1 - x^2 & 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4) Se A é uma matriz triangular superior, então A' é =

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$ matriz triangular inferior pois $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

5) Se A é uma matriz diagonal, então A':

$A' = \begin{bmatrix} 2 & 2x-1 \\ x^2 & 0 \end{bmatrix}$ matriz identidade pois, $a_{ij} = 0$ e $i \neq j$

6) verdadeiro ou falso? (Propriedades das matrizes)

a) $(-A)' = -(A')$ (verdadeiro)

b) $(A+B)' = B' + A'$ (verdadeiro)

c) Se $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$ (falso)

d) $(K_1 A)(K_2 B) = (K_1 K_2) AB$ (verdadeiro)

e) $(-A)(-B) = -(AB)$ (falso)

f) Se A e B são matrizes simétricas, então $AB = BA$ (falso)

g) Se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$ (falso)

h) Se podemos efetuar o produto $A \cdot A$, então A é uma matriz quadrada (verdadeiro)

7) Se $A^2 = A \cdot A$, então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2 = A^2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$

8) Se A é uma matriz triangular superior então A^2 é matriz triangular superior pois $m = n$ $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

9) Ache x, y, z, w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 1)\ 2x+3y = 1 \quad (\times 3) \\ 2)\ 3x+4y = 0 \quad (-2) \\ 3)\ 2z+3w = 0 \quad (-3) \\ 4)\ 3z+4w = 1 \quad (\times 2) \end{cases}$$

1 e 2) $\begin{cases} \cancel{6x} + 9y = 3 \\ \cancel{6x} - 8y = 0 \end{cases}$

$\boxed{y = 3}$

Subst y em 2

$3x + 4 \cdot 3 = 0$

$3x = -12$

$x = \dfrac{-12}{3}$

$\boxed{x = -4}$

3 e 4) $-\cancel{6z} - 9w = 0$

$\cancel{6z} + 8w = 2$

$-w = 2$

$\boxed{w = -2}$

3) $2z + 3(-2) = 0$

$2z - 6 = 0$

$2z = 6$

$z = \dfrac{6}{2}$

$\boxed{z = 3}$

ou seja; $x = -4$, $y = 3$, $z = 3$, $w = -2 \Rightarrow$ logo $= \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

10) Dadas:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

mostre que AB = AC.

$AB = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$BC = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ AB = AC, porém não implica em B = C.

11) Suponha que $A \neq 0$ e $AB = AC$ onde A, B, C são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.

a) $B = C$?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 9999 \end{bmatrix}$

não pois $AB = AC = 0$, mas $B \neq C$.

b) Se existir uma matriz Y, tal que $YA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

Suponha que exista Y (chamada inversa direita de A) temos $AB = AC$, multiplicando pelo lado direito por Y temos $YAB = YAC$, como $YA = I$, então $IB = IC$ que implica $B = C$.

12) Explique por que, em geral, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ e $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

A operação de matrizes não é comutativa, ou seja, não podemos escrever que $AB = BA$. Dessa forma, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ e $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$.

13) Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

a) mostre que $AB = BA = 0$, $AC = A$ e $CA = C$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $AC = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ $CA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

B) Use os resultados de (a) para mostrar que $ACB = CBA$, $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ e $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

I) observamos que $ACB = AB$ (pois $AC = 0$) e $AB = 0$. Da mesma forma $CBA = CAB = AB = 0$

II) como $AB = BA$, podemos cancelá-los em: $A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$.

III) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$. Como $AB = BA = 0$, $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

14) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, Ache B de modo que $B^2 = A$

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $B^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot x \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$

$a^2 + bc = 3$ (*)

$bc + d^2 = 3 \rightarrow a^2 = d^2$ e $a = \pm d$,

- $ab + bd = -2$, subs $a = d$, temos $2bd = -2$ ou $bd = -1$ implicando que $b = (-1/d)$.
- $ac + cd = -4$, sub $a = d$, temos $2cd = -4$ ou $cd = -2$ implicando que $c = 2b$.
- subs em (*) temos $d^2 + b(2b) = 3$ ou $d^2 + 2b^2 = 3$ ou $d^2 + 2(1/d^2) = 3$, multiplicando todos termos por d^2;

$\rightarrow d^4 + 2 = 3d^2$, subs o termo $d^2 = y$, temos a solução de uma equação biquadrada,

$y^2 - 3y + 2 = 0$, onde pela fatoração $y = 1$, $y = 2$, ou seja $d = \pm\sqrt{2}$ ou $d = \pm 1$,

- Possíveis matrizes:

• se $d = +\sqrt{2}$ $a = \sqrt{2}$, $b = -1/\sqrt{2}$ $c = -2/\sqrt{2}$

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

• se $d = -\sqrt{2}$, $a = -\sqrt{2}$, $b = 1/\sqrt{2}$ e $c = 2/\sqrt{2}$

$$B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

• se $d = -1$, $a = -1$, $b = -1/-1$ e $c = -2/-1$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

• se $d = 1$, $a = 1$, $b = -1/1$ e $c = -2/1$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

15) Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregado em cada tipo de casa é dada pela tabela:

	ferro	madeira	vidro	tinta	tijolo
moderno	5	20	16	7	17
mediterrâneo	7	18	12	9	21
colonial	6	25	8	5	13

O número de unidades de materiais em cada tipo de casa aumenta proporcionalmente ao numero de casas construidas, ou seja $(1\times 3)\cdot(3\times 5)$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \end{bmatrix}$$

Ferro: 146
madeira = 526
vidro = 260
tinta = 158
tijolo = 388

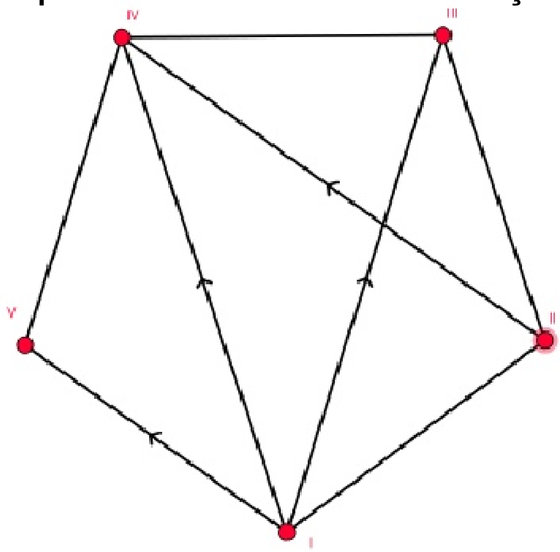
b) $\begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ = material x preço $\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$ moderno / mediterrâneo / colonial

c) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 11736 \end{bmatrix}$

16- Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma. Apresentamos uma figura que representa as relações de transmissão entre as estações. Os pontos representam as estações e estão rotuladas com números romanos, as ligações com seta indicam a transmissão (direta) orientada no sentido estação de saída – estação de chegada e as ligações sem seta indicam que a transmissão (direta) ocorre nos dois sentidos. Como exemplo, a estação III pode transmitir diretamente à estação IV e viceversa. Já a estação II pode transmitir diretamente à estação IV, porém a estação IV não pode transmitir diretamente à estação II.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Solução.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $c_{13} = 2$ e significa que a estação I transmite para estação III através de uma terceira de dois modos (através da estação II e da estação IV).

c) Cada elemento de A^2 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma terceira estação.

d) Cada elemento de $A+A^2$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra, diretamente e através de uma terceira para uma outra.

$$A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Veja:

O elemento 14 indica que há 4 maneiras de se transmitir da estação I à estação IV: Diretamente: I $\rightarrow$ IV; Através de uma terceira: I $\rightarrow$ V $\rightarrow$ IV, I $\rightarrow$ II $\rightarrow$ IV e I $\rightarrow$ III $\rightarrow$ IV.

Cada elemento de A^3 representa o número de modos que uma estação transmite para uma outra através de uma quarta estação.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Veja:

O elemento 25 indica que há 2 maneiras de se transmitir da estação I para a estação II através de uma quarta estação: II $\rightarrow$ III $\rightarrow$ IV $\rightarrow$ V e II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ IV $\rightarrow$ V.

Cada elemento de $A+A^2+A^3$ representa a soma do número de modos que uma estação transmite para outra estação, diretamente, através de uma terceira e de uma quarta.

$$A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Veja:

Experimente listar as maneiras de se transmitir da estação III para a estação V considerando transmissões diretas, através de uma terceira e através de uma quarta.

e) Se A fosse simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, isso significaria que a estação i transmite para estação j sempre que a estação j transmitir para a i.

17- Existem três marcas de automóveis disponíveis no mercado: o Jacaré, o Piranha e o Urubu. O termo a_{ij} da matriz A abaixo é a propabilidade de que um dono de carro da linha i mude para o carro da coluna j, quando comprar um carro novo.

		Para		
		J	P	U
	J	0, 7	0, 2	0, 1
De	P	0, 3	0, 5	0, 2
	U	0, 4	0, 4	0, 2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{59}{100}.$$

$$a_{12} = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100}.$$

$$a_{13} = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{13}{100}.$$

$$a_{21} = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{44}{100}$$

$$a_{22} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{39}{100}.$$

$$a_{12} = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{100}.$$

$$a_{31} = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{48}{100}.$$

$$a_{32} = \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{36}{100}$$

$$a_{33} = \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{16}{100}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{59}{100} & \frac{7}{25} & \frac{13}{100} \\ \frac{11}{25} & \frac{39}{100} & \frac{17}{100} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}$$