Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 1 e 2

Matrizes

Introdução

- **Matriz:** é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

- **Vetor:** é uma matriz unidimensional (apenas uma linha ou coluna).

- Os elementos de uma matriz podem ser números (reais ou complexos), funções ou mesmo outras matrizes.

	Altura (m)	*Peso (kg)*	*Idade (anos)*
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

- Representamos uma matriz de m linhas e n colunas por:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

- Um elemento específico numa matriz pode ser localizado a partir de suas coordenadas de linha e coluna.

- **Definição:** Duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais, **A** = **B**, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$), e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & \operatorname{sen} 90^\circ & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Quadrada:** é uma matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

- Para matrizes quadradas $\mathbf{A}_{m \times m}$, dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz de ordem m.

- **Matriz Nula:** é uma matriz em que $\boldsymbol{a_{ij}} = 0$, para todo i e j.

Exemplos:

$$\mathbf{A}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Linha:** é uma matriz (vetor) que possui uma única linha (m = 1).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Coluna:** é uma matriz (vetor) que possui uma única coluna ($n = 1$).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **Matriz Diagonal:** é uma matriz quadrada ($m = n$), onde $\boldsymbol{a_{ij}} = 0$, para todo $i \neq j$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Identidade Quadrada:** é uma matriz diagonal quadrada ($m = n$), onde $\boldsymbol{a_{ij}} = 1$, para $i = j$ e $\boldsymbol{a_{ij}} = 0$, para todo $i \neq j$.

Exemplos:

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Triangular Superior:** é uma matriz quadrada ($m = n$), onde $\boldsymbol{a_{ij}} = 0$, para $i > j$ (todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

- **Matriz Triangular Inferior:** é uma matriz quadrada ($m = n$), onde $\boldsymbol{a_{ij}} = 0$, para $i < j$ (todos os elementos acima da diagonal principal são nulos).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Simétrica:** é uma matriz quadrada ($m = n$), onde $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}$ (os elementos acima da diagonal principal são uma reflexão dos elementos abaixo da diagonal principal).

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

Operações com Matrizes

- **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem, $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $\mathbf{B}_{m \times n} = [b_{ij}]$, é uma matriz $m \times n$, que denotamos **A** + **B**, cujos elementos são somas dos elementos correspondentes de **A** e **B**. Assim:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- Dadas as matrizes **A**, **B** e **C** de mesma ordem $m \times n$, temos:
  - **A + B = B + A** (comutatividade);
  - **A + (B + C) = (A + B) + C** (associatividade);
  - **A + 0 = A**, onde **0** (ou $\mathbf{0}_{m \times n}$) denota a matriz nula $m \times n$.

- **Multiplicação por escalar:** Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um escalar (número qualquer), então:

$$k\mathbf{A} = [k a_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- Dadas as matrizes **A** e **B** de mesma ordem $m \ x \ n$, e os valores escalares k, k_1 e k_2, temos:
  - $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{B} + k\mathbf{A}$;
  - $(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$;
  - $0 \ x \ \mathbf{A} = \mathbf{0}$;
  - $k_1(k_2)\mathbf{A} = k_1k_2\mathbf{A}$.

- **Transposição:** Dada uma matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $\mathbf{A'} = [\mathbf{b}_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de **A**, $\mathbf{b}_{ij} = a_{ji}$. **A'** é denominada *transposta* de **A**.

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \qquad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

- Dadas as matrizes **A** e **B**, temos:
  - Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual a sua transposta (**A** = **A'**);
  - **A''** = **A**;
  - **(A + B)'** = **A' + B';**
  - (k**A**)**'** = k**A'**.

- **Multiplicação:** Sejam **A** = **[a_{ij}]$_{m \times n}$** e **B** = **[b_{ij}]$_{n \times p}$**. Definimos **AB** = **[c_{uv}]$_{m \times p}$**, onde:

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \ldots + a_{un} b_{nv}$$

- O produto só pode ser efetuado se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda;

- A matriz resultado, **C** = **AB**, será de ordem *m x p* (linhas da primeira *x* colunas da segunda);

Sejam

$$\mathbf{A}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

e $$\mathbf{B}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

A matriz-produto **AB** é a matriz 2×2 definida como:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2(-1) + 1\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 4(-1) + 2\cdot 4 \\ 5\cdot 1 + 3\cdot 0 & 5(-1) + 3\cdot 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Não é possível efetuar esta multiplicação, porque o número de colunas da primeira é diferente do número de linhas da segunda.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 9 & 12 & -8 \\ 12 & 62 & -3 \\ 3 & 8 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Propriedades

- Dadas as matrizes **A** e **B** multiplicáveis, temos:
  - Em geral **AB** ≠ **BA**;
  - **AI** = **IA** = **A**;
  - **A(B + C)** = **AB + AC;**
  - **(A + B)C** = **AC + BC;**
  - **(AB)C** = **A(BC);**
  - **(AB)’** = **B’A’;**
  - **0** *x* **A** = **0** e **A** *x* **0** = **0.**

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 11-14, exercícios 1 ao 17.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.