Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral

Métodos Numéricos – 2020.2 (SBL0081)
Prof. Rui F. Vigelis

Avaliação Final

Nome:____

1. Aplique o método da bissecção para encontrar a raiz da função $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) - x/2$ no intervalo $[1, 2]$, com precisão $(b_n - a_n)/2 < \varepsilon = 5 \times 10^{-2}$.

$$n + 1 \geq \frac{\ln[(b-a)/\varepsilon]}{\ln(2)} = 4.321928094887363$$

n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$
0	1.000000	2.000000	1.500000	0.208073	-0.173178	0.244996
1	1.500000	2.000000	1.750000	0.244996	-0.173178	0.093228
2	1.750000	2.000000	1.875000	0.093228	-0.173178	-0.027220
3	1.750000	1.875000	1.812500	0.093228	-0.027220	0.036458
4	1.812500	1.875000	1.843750	0.036458	-0.027220	0.005453

2. Aplique o método da iteração de ponto fixo para encontrar a raiz da função $f(x) = x^3 - x - 2$ no intervalo $[1, 2]$, com função de iteração $g(x) = (x + 2)^{1/3}$, ponto inicial $x_0 = 1{,}0$, e precisão $|f(x_{n+1})| < \varepsilon = 5 \times 10^{-3}$. Verifique as hipóteses que garantem a convergência do método.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$$

$$|g'(x)| \leq k < 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+2)^{2/3}} \leq \frac{1}{3}\frac{1}{(0+2)^{2/3}} < 0.209986841649146$$

n	x_n	$f(x_n)$
0	1.000000000000000	-2.000000000000000
1	1.442249570307408	-0.442249570307409
2	1.509897449332355	-0.067647879024947
3	1.519724304991636	-0.009826855659281
4	1.521141269062731	-0.001416964071096

3. Dado o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 13 & -1 \\ 2 & 1 & 13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -29 \\ 48 \\ 35 \end{pmatrix},$$

encontre sua solução através do método da eliminação de Gauss. Encontre também a fatoração LU da matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & -29 \\ 1 & -2 & 13 & -1 & 48 \\ 2 & 1 & 13 & 1 & 35 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -15 \\ 0 & -3 & 11 & -4 & 55 \\ 0 & -1 & 9 & -5 & 49 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 34 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 13 & -1 \\ 2 & 1 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Dada a aproximação inicial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, encontre as aproximações sucessivas $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ usando o método de Jacobi.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.333333333333333 \\ 1.500000000000000 \\ -3.600000000000000 \end{pmatrix} \to$$

$$\to x^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.033333333333333 \\ 0.516666666666667 \\ -3.700000000000000 \end{pmatrix} \to x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.738888888888889 \\ 1.341666666666667 \\ -4.916666666666666 \end{pmatrix}$$

5. Usando o Método de Newton, encontre o valor do polinômio em $x = 2$, passando pelos pontos dados na tabela abaixo:

x	-2	-1	0	1
y	40	30	6	4

$$f[x_0] = y_0 = 40$$

$$f[x_1] = y_1 = 30$$

$$f[x_2] = y_2 = 6$$

$$f[x_3] = y_3 = 4$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = -10$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = -24$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = -2$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -7$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 11$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = 6$$

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p(2) = 40 - 10(2+2) - 7(2+2)(2+1) + 6(2+2)(2+1)(2-0) = 60$$

6. Calcule o valor da integral

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(x)dx,$$

aplicando a Regra 1/3 de Simpson Composta, com erro

$$|R_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| < 5 \times 10^{-3}.$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = 1$$

$$n^4 > \frac{1}{\varepsilon} \frac{(b-a)^5}{180} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} \frac{\pi^5}{180} = 340.021871983$$

$$n > 4.294145082839664$$

$$n = 6$$

$$I = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)$$

$$I = 2.000863189673537$$