Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

Lista de exercícios para AP2

1) Encontre a série de Fourier de tempo discreto do sinal:

$$x[n] = \cos(0,25\pi n) + \sin(0,2\pi n) - 2.$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j0,25\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j0,25\pi n} + \frac{1}{2j}e^{j0,2\pi n} - \frac{1}{2j}e^{-j0,2\pi n} - 2$$

Período fundamental de $\cos(0,25\pi n)$: $\Omega_1 = 0,25\pi = \frac{2\pi k}{N_1}$, $N_1 = \frac{2\pi k}{0,25\pi} \rightarrow N_1 = 8k = 8$

Período fundamental de $\sin(0,2\pi n)$: $\Omega_2 = 0,2\pi = \frac{2\pi k}{N_2}$, $N_2 = \frac{2\pi k}{0,2\pi} \rightarrow N_2 = 10k = 10$

Período fundamental de $x[n]$: mínimo múltiplo comum (MMC) de N_1 e $N_2 \rightarrow N = 40$

Frequência fundamental de $x[n]$: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20} = 0,05\pi$

Achando a série de Fourier de tempo discreto por inspeção:

$$x[n] = \sum_{k=-20}^{19} X[k]e^{jk0,05\pi n}$$

$k = 0 \rightarrow X[0] = -2$

$k = 5 \rightarrow X[5] = \frac{1}{2}$

$k = -5 \rightarrow X[-5] = \frac{1}{2}$

$k = 4 \rightarrow X[4] = \frac{1}{2j}$

$k = -4 \rightarrow X[-4] = -\frac{1}{2j}$

A série de Fourier $X[k]$ foi descrita acima apenas para o primeiro período. Para k fora do intervalo $-20 \leq k \leq 19$, $X[k]$ é periódica com período $N = 40$.

2) Encontre a série de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\delta(t-3m) + \delta(t-5m)\right].$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

Período fundamental do primeiro termo: $T_1 = 3$

Período fundamental do segundo termo: $T_2 = 5$

Período fundamental de $x(t)$: mínimo múltiplo comum (MMC) de T_1 e $T_2 \rightarrow T = 15$

Frequência fundamental de $x(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{15}$

Calculando a série de Fourier:

$$X[k] = \frac{1}{15}\int_{-7.5}^{7.5}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\delta(t-3m)+\delta(t-5m)\right]\right]e^{-jk\frac{2\pi}{15}t}dt$$

$$X[k] = \frac{1}{15}\int_{-7.5}^{7.5}\left[\delta(t)+\delta(t-3)+\delta(t-6)+\delta(t+3)+\delta(t+6)+\delta(t)+\delta(t-5)+\delta(t+5)\right]e^{-jk\frac{2\pi}{15}t}dt$$

$$X[k] = \frac{1}{15}\left(2 + e^{j3\frac{2\pi}{15}k} + e^{-j3\frac{2\pi}{15}k} + e^{j5\frac{2\pi}{15}k} + e^{-j5\frac{2\pi}{15}k} + e^{j6\frac{2\pi}{15}k} + e^{-j6\frac{2\pi}{15}k}\right)$$

$$X[k] = \frac{1}{15}\left(2 + 2\cos\left(\frac{6}{15}\pi k\right) + 2\cos\left(\frac{10}{15}\pi k\right) + 2\cos\left(\frac{12}{15}\pi k\right)\right)$$

3) Encontre a resposta ao impulso em tempo discreto $h[n]$ do filtro passa-alta ideal cuja resposta em frequência é definida (no primeiro período) por:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 0, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \frac{\pi}{3} \leq |\Omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} e^{j\Omega n}d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} e^{j\Omega n}d\Omega$$

Para $n \neq 0$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\right|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\Omega n}}{jn}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{-j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\pi n}\right] + \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{j\pi n} - e^{j\frac{\pi}{3}n}\right]$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi jn}\left[e^{-j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\pi n} + e^{j\pi n} - e^{j\frac{\pi}{3}n}\right]$$

$$h[n] = \frac{1}{\pi n}\left[\sin(\pi n) - \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right]$$

$$h[n] = \frac{-1}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

Para $n = 0$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{3}} d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{3} + \pi\right)$$

$$h[n] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4) Encontre a transformada de Fourier (de tempo contínuo) do sinal: $x(t) = e^{-a|t|}$, para $a > 0$. Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$, em que $u(t)$ é a função degrau unitário.

Seja $x_1(t) = e^{-at}u(t)$:

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$X_1(j\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right|_0^{\infty}$$

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{-(a+j\omega)}\left[0-1\right] = \frac{1}{a+j\omega}$$

Seja $x_2(t) = e^{at}u(-t)$:

$$X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt$$

$$X_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$X_2((j\omega) = \frac{1}{(a-j\omega)}\left[1-0\right] = \frac{1}{a-j\omega}$$

Assim:

$$X(j\omega) = X_1(j\omega) + X_2(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{a-j\omega+a+j\omega}{(a+j\omega)(a-j\omega)}$$

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

5) Encontre a saída de um sistema LTI (de tempo discreto) cuja entrada é dada por: $x[n] = \frac{7}{\pi(n-\frac{1}{2})}\sin(0,3\pi(n-\frac{1}{2}))$, e a resposta ao impulso é dada por $h[n] = -\frac{1}{\pi(n-\frac{1}{3})}\sin(0,9\pi(n-\frac{1}{3}))$. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução:

Olhando na Tabela:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 7e^{-j\frac{1}{2}\Omega}, & |\Omega| \leq 0,3\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -e^{-j\frac{1}{3}\Omega}, & |\Omega| \leq 0,9\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando Teorema da convolução:

$$Y(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -7e^{-j\frac{5}{6}}, & {\scriptstyle |\Omega| \leq 0,3\pi,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Olhando na Tabela: $y[n] = \frac{-7}{\pi(n-\frac{5}{6})} \sin(0,3\pi(n-\frac{5}{6}))$

6) Encontre a transformada de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{j\pi t}e^{-at}u(t)\right),$$

para $a > 0$, em que $u(t)$ é a função degrau unitário. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução: Olhando na Tabela:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$$

Propriedade da multiplicação por exponencial complexa:

$$e^{j\pi t}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j(\omega-\pi)}$$

Propriedade da diferenciação:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{j\pi t}e^{-at}u(t)\right) \leftrightarrow \frac{j\omega}{a+j(\omega-\pi)}$$

Domínio de Tempo	*Periódico*	*Não periódico*	
Contínuo	*Série de Fourier* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt$ $x(t)$ tem período T $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$	*Transformada de Fourier* $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	*Não periódico*
Discreto	*Série de Fourier de Tempo Discreto* $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n}$ $x[n]$ e $X[k]$ têm período N $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$	*Transformada de Fourier de Tempo Discreto* $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tem período 2π	*Periódico*
	Discreto	*Contínuo*	*Domínio de Freqüência*