Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

6.2 Determine a transformada de Laplace bilateral e a RDC de cada um dos seguintes sinais:

(b) $x(t) = e^{2t}u(-t+2)$

(c) $x(t) = \delta(t-t_0)$

(b) $x(t) = e^{2t} \; u(-t+2)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{2} e^{2t} \cdot e^{-st} \, dt$$

$$= \frac{-1}{s-2} e^{-(s-2)t} \Big|_{-\infty}^{2}$$

$$= \frac{-e^{-2(s-2)}}{s-2}$$

ROC : $\mathrm{Re}(s) < 2$

(c) $x(t) = \delta(t-t_0)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} \, dt$$

$$= e^{-st_0}$$

ROC : entire s plane

6.16 Determine a transformada de Laplace bilateral e a RDC correspondente para cada um dos seguintes sinais:

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)$

(c) $x(t) = e^{2t+4}u(t+2)$

(f) $x(t) = e^{-t}\frac{d}{dt}(e^{-t}u(t+1))$

$\boxed{6.16}$

(a) $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} u(t) + e^{t} u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-st} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-st} dt$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

ROC : $(\mathrm{Re}\{s\} > -2) \cap (\mathrm{Re}\{s\} > -1) \cap (\mathrm{Re}\{s\} < 1)$

$= -1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$

(c) $x(t) = e^{2t+4} u(t+2)$

$$= e^{2(t+2)} u(t+2)$$

$$\ell(t+2) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{2s} L(s)$$

$$X(s) = \frac{e^{2s}}{s-2}$$

ROC : $\mathrm{Re}\{s\} > 2$

(f) $x(t) = e^{-t} \frac{d}{dt}(e^{-t} u(t+1))$

$$= e^{-t} e \frac{d}{dt}\left(e^{-(t+1)} u(t+1)\right)$$

$$\frac{d}{dt}(e^{-(t+1)} u(t+1)) \longleftrightarrow \frac{s \cdot e^{s}}{s+1}$$

$$e^{-t} \ell(t) \longleftrightarrow L(s+1)$$

$$\therefore X(s) = \frac{e(s+1) e^{s+1}}{s+2}$$

ROC : $\{\mathrm{Re}\{s\} > -1\} - \{\mathrm{Re}\{-1\}\} = \mathrm{Re}\{s\} > -1$

6.17 Use as tabelas de transformadas e propriedades para determinar os sinais de tempo que correspondem às seguintes transformadas de Laplace bilaterais:

(a) $X(s) = e^{5s} \dfrac{1}{s+2}$ com RDC $\mathrm{Re}(s) > -2$

(c) $X(s) = s\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s}\right)$ com RDC $\mathrm{Re}(s) < 0$

$\boxed{6.17}$

(a) $X(s) = e^{5s}\dfrac{1}{s+2}$, ROC : $\mathrm{Re}\{s\} > -2$

causal (right - sided)

$x(t) = e^{-2(t+5)}\ u(t+5)$

(c) $X(s) = s\left(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2s}}{s}\right)$

ROC : $\mathrm{Re}\{s\} < 0$
anticausal (left - sided)

$X(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s} - e^{-2s}$

Usando: $-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{A_k}{s-d_k}$ com RDC $\mathrm{Re}(s) < d_k$

$x(t) = -u(-t) + u(-t+1) - \delta(t-2)$

6.19 Um sistema tem a função de transferência $H(s)$, como é dado abaixo. Determine a resposta ao impulso, supondo

(i) que o sistema é causal

(ii) que o sistema é estável.

(a) $H(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-1}$

(b) $H(s) = \dfrac{5s+7}{s^2+3s+2}$

$\boxed{6.19}$

(a) $H(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-1}$

$= \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{s-1}$

(i) causal : $h(t) = (2e^{-t} + e^{t})\,u(t)$
(ii) stable : ROC must include $j\omega$ axis

$h(t) = 2e^{-t}\ u(t) - e^{t}\ u(-t)$

(b) $H(s) = \dfrac{5s+7}{s^2+3s+2}$

$= \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{3}{s+2}$

(i) causal : $h(t) = (2e^{-t} + 3e^{-2t})\,u(t)$

(ii) stable : $h(t) = 2e^{-t}\,u(t) + 3e^{-2t}\,u(t)$

6.20 Um sistema estável tem entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, como é dado abaixo. Use transformadas de Laplace para determinar a função de transferência e a resposta ao impulso do sistema.

(b) $x(t) = e^{-2t}u(t), \quad y(t) = -2e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$

(b) $x(t) = e^{-2t}\, u(t)$,

$y(t) = -2e^{-t}\, u(t) + 2e^{-3t}\, u(t)$

$$X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

$$H(s) = \frac{-2(s+2)}{s+1} + \frac{2(s+2)}{s+3}$$

$$= -2\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}\right]$$

$$h(t) = -2\left(e^{-t} + e^{-3t}\right) u(t)$$

6.21 A relação entre a entrada $x(t)$ e a saída $y(t)$ de um sistema causal é descrita por cada uma das equações diferenciais dadas abaixo. Use transformadas de Laplace para determinar a função de transferência e a resposta ao impulso de cada sistema.

(a) $5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$

(b) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$

$\boxed{6.21}$

(a) $5\frac{d}{dt}\, y(t) + 10\, y(t) = 2x(t)$

$$(5s + 10)\, Y(s) = 2\, X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$= \frac{2}{5(s+2)}$$

$$h(t) = \frac{2}{5}\, e^{-2t}\, u(t)$$

(b) $\frac{d^2}{dt^2}\, y(t) + 5\frac{d}{dt}\, y(t) + 6\, y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}\, x(t)$

$$(s^2 + 5s + 6).Y(s) = (s+1).X(s)$$

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3}$$

$$h(t) = \left(-e^{-2t} + 2e^{-3t}\right) u(t)$$

6.22 Determine a descrição por equação diferencial de um sistema com cada uma das seguintes funções de transferência:

(a) $H(s) = \dfrac{2s+1}{s(s+2)}$

(b) $H(s) = \dfrac{3s}{s^2+2s+10}$

(c) $H(s) = \dfrac{2(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$\boxed{6.22}$

(a) $$H(s) = \frac{2s+1}{s(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) = x(t) + 2\frac{d}{dt} x(t)$$

(b) $$H(s) = \frac{3s}{s^2+2s+10}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) + 10\, y(t) = 3\frac{d}{dt} x(t)$$

(c) $$H(s) = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{2(s^2-s-2)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

6.24 Determine se os sistemas descritos pelas seguintes funções de transferência podem ser

(i) tanto estáveis como causais

(ii) se existe um sistema inverso estável e causal.

(a) $H(s)\dfrac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+10)}$

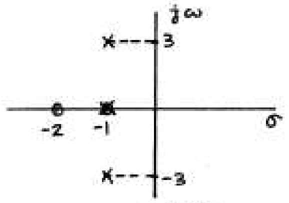
(b) $H(s)\dfrac{s^2-2s-3}{(s+2)(s^2+4s+5)}$

(c) $H(s)\dfrac{s^2+3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)}$

$\boxed{6.24}$

(a) $$H(s) = \frac{(s+1)\ (s+2)}{(s+1)\{(s+1)^2+3^2\}}$$

Pole Zero Plot :

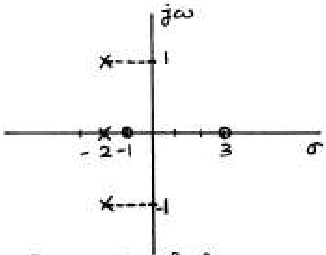


(i) All poles are in LHP, and with ROC : $Re\{s\} > -1$ the system is both stable and causal

(ii) All zeros are in LHP, so a stable and causal inverse system exists

(b)

$$H(s) = \frac{s^2-2s-3}{(s+2)(s^2+4s+5)} = \frac{(s-3)\ (s+1)}{(s+2)\{(s+2)^2+1\}}$$

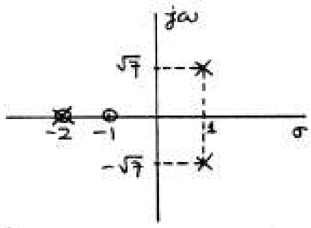


(i) All poles are in LHP, with ROC : $Re\{s\} > -2$, the system is both stable and causal

(ii) Not all the zeros are in LHP, no stable and causal inverse system exists

(c)

$$H(s) = \frac{s^2+3s+2}{(s+2)(s^2-2s+8)} = \frac{(s+2)\ \ (s+1)}{(s+2)\{(s-1)^2+7\}}$$



(i) No (poles are in RHP)

(ii) Yes (all zeros are in LHP)

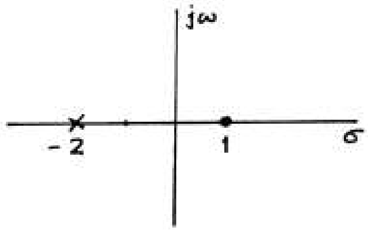
6.1 Um sinal $x(t)$ tem a transformada de Laplace $X(s)$ conforme é dado abaixo. Plote os pólos e zeros no plano s e determine a transformada de Fourier de $x(t)$ sem inverter $X(s)$. Assuma que $x(t)$ é absolutamente integrável.

(a) $X(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^2 + 3s + 2}$

(b) $X(s) = \dfrac{2s^2}{s^2 + 2\sqrt{2}\,s + 4}$

$\boxed{6.1}$

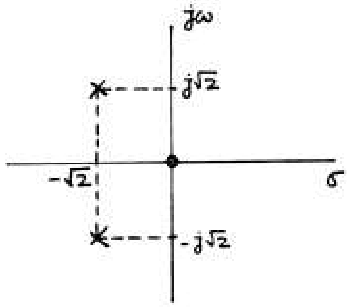
(a) $X(s) = \dfrac{s^2 - 1}{s^2 + 3s^2 + 2} = \dfrac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+1)} = \dfrac{s-1}{s+2}$



$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=0+j\omega} = \dfrac{j\omega - 1}{j\omega + 2}$

poles : $s = -2$
zeros : $s = 1$

(b) $X(s) = \dfrac{2s^2}{s^2 + 2\sqrt{2}\,s + 4} = \dfrac{2s^2}{(s+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}$



$X(j\omega) = X(s)\Big|_{s=0+j\omega} = \dfrac{-2\omega^2}{j\omega\, 2\sqrt{2} + 4 - \omega^2}$

poles : $s = -\sqrt{2} \pm j\sqrt{2}$
zeros : $s = 0$ (double)

Sugestão de outros exercícios para fazer:
6.1 (b)(c)
6.2 (a)(d)
6.16 (b)(e)
6.18 (a)(b)
6.19 (c)
6.20 (a)
6.21 (c)