Klayver Ximenes Carmo 427651

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

Painel ► SBL0059 ► 17 setembro - 23 setembro ► Teste de revisão

| | |
|---|---|
| **Iniciado em** | quarta, 30 Set 2020, 11:19 |
| **Estado** | Finalizada |
| **Concluída em** | quarta, 30 Set 2020, 12:05 |
| **Tempo empregado** | 46 minutos 4 segundos |
| **Avaliar** | **8,00** de um máximo de 10,00(**80**%) |

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.

Escolha uma:

a. $r(u, v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

$r(u, v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

b. $r(u, v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

c. $r(u, v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} - 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

d. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

e. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} - 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

Sua resposta está correta.

**Solução:**

Temos que $r = \sqrt{9} = 3$. Assim, temos que $y = 3\cos\theta$ e $z = 3\sin\theta$, pois $y^2 = 9\cos^2\theta$ e $z^2 = 9\sin^2\theta$ e assim, $9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$. Então, tomando $u = \theta$ e $v = x$ temos que a parametrização da superfície é dada por:

$r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 3$

A resposta correta é: $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

.

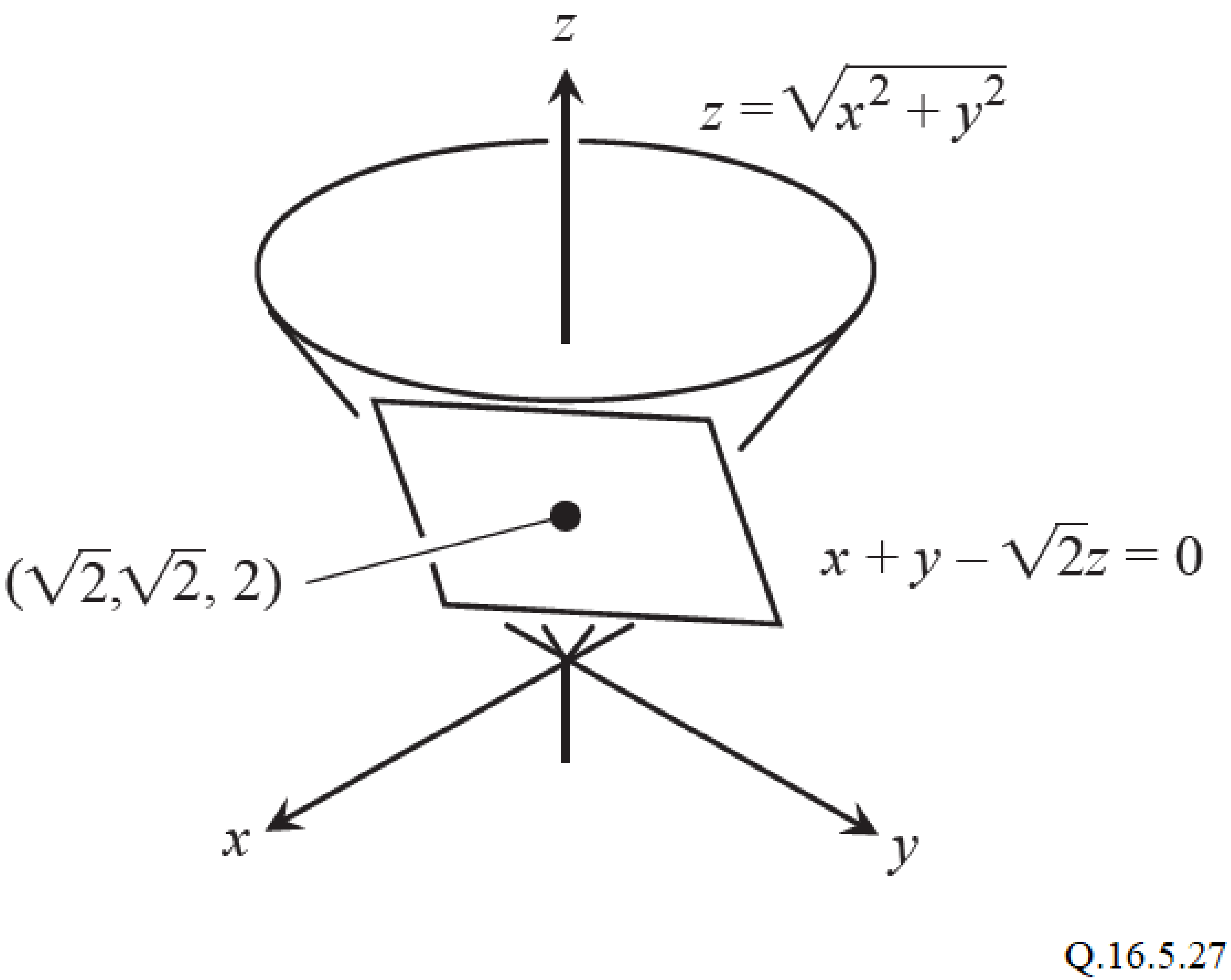
Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o plano tangente ao cone $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\theta) = (r\cos(\theta))\,\mathbf{i}\ +\ (r\sin(\theta))\,\mathbf{j}\ +\ r\mathbf{k},\ r \geq 0,$ onde $0\ \leq \theta \leq 2\pi$, no ponto $P_0\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\right)$ que corresponde a $(r,\theta)\ =\ \left(2,\frac{\pi}{4}\right).$

Veja uma ilustração abaixo:




Escolha uma:

a. $x + y - \sqrt{2}z = 0$

b. $x + y + \sqrt{2}z = 0$

c. $-x + y - \sqrt{2}z = 0$

d. $x - y - \sqrt{2}z = 0$

e. $-x - y - \sqrt{2}z = 0$

Sua resposta está correta.

**Resposta:**

Temos que:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{k} - \sqrt{2}\mathbf{i} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Plano tangente:

$$-\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+2\left(z-2\right)=0$$

$$-\sqrt{2}x+2-\sqrt{2}y+2+2z-4=0$$

$$\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2z=0$$

$$x+y-\sqrt{2}z=0$$

A resposta correta é: $x+y-\sqrt{2}z=0$

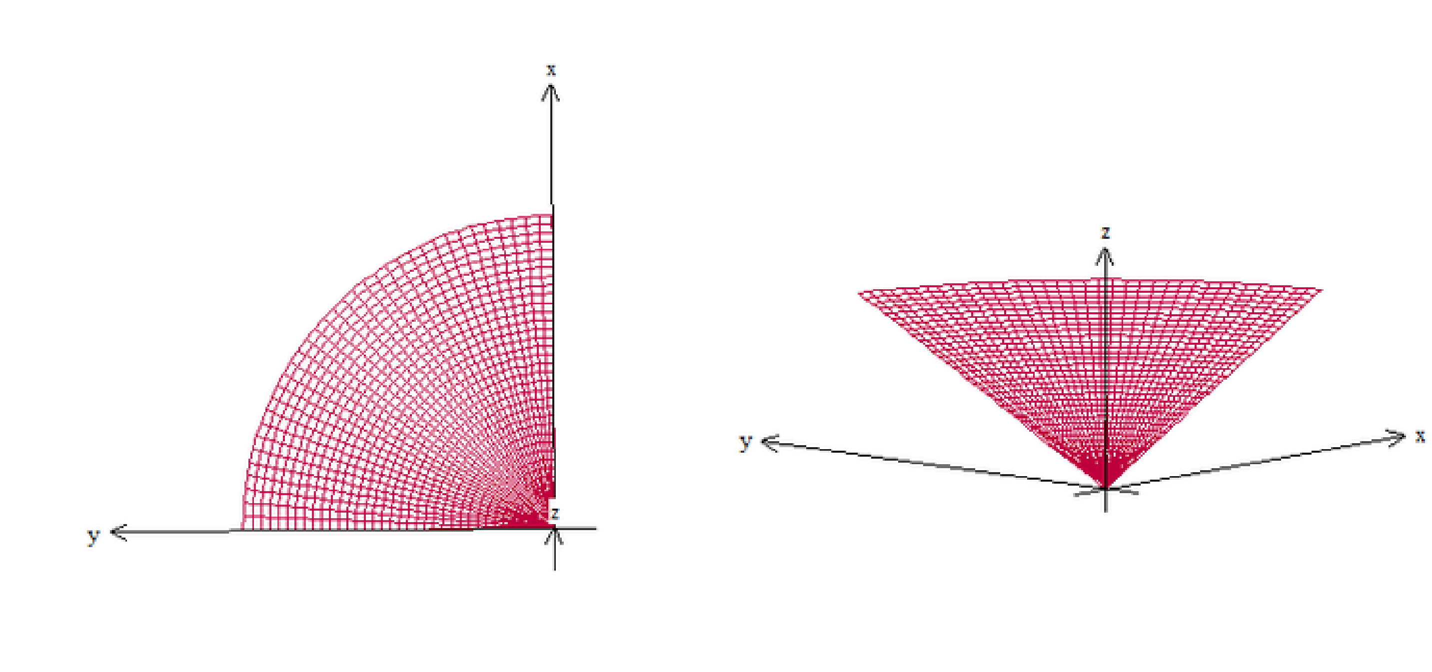
.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção no primeiro octante do cone $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$? (Veja a figura abaixo)




Escolha uma:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 6.$

- b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 3.$

c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$.

d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$.

e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$.

Sua resposta está correta.

**Solução:**

**i)** Para parametrizarmos a função precisamos lembrar que podemos utilizar coordenadas cilíndricas com um ponto típico $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Como a equação do cone dada na questão é: $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, concluímos que $z = \frac{r}{2}$.

Então $\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$.

**ii)** Agora iremos encontrar as variações de $z$ de $r$ e $\theta$.

Como é mostrado na questão o cone é cortado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$, portanto:

Para $z$ temos: $0 \leq z \leq 3$;

Para $r$ temos: Se $z = \frac{r}{2} \rightarrow 0 \leq \frac{r}{2} \leq 3$;

Para $\theta$ temos: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, pois a questão pede o setor do cone no primeiro octante, demonstrado nos gráficos abaixo:

A resposta correta é: \( {\bf{\vec{r}}}(r,\theta) = (r\cos\theta){\bf{i}}+(r\sin\theta){\bf{j}}+\left(\frac{r}{2}\right){\bf{k}} \) para \(0\leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\)  e \( 0\leq \frac{r}{2} \leq 3 \).

.

Questão **4**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S\:\mathbf{\vec{F}}\cdot\mathbf{\vec{n}}d\sigma$ do campo $\mathbf{\vec{F}}= z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma:

- a. $\frac{\pi a^{4}}{5}$
- b. $\frac{\pi a^{2}}{3}$
- c. $\frac{\pi a^{4}}{4}$
- d. $\frac{\pi a^{2}}{6}$
- e. $\frac{\pi a^{3}}{6}$

Sua resposta está incorreta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\mathbf{\vec{r}}(\phi ,\theta )$:

$\mathbf{\vec{r}}(\phi ,\theta )= (a\sin \phi \cos \theta )\mathbf{i}+(a\sin \phi \sin \theta )+(a\cos \phi )\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho =a$ e $a\geq0$.

Para o primeiro octante, temos que $\phi$ e $\theta$ estão situados entre:

$0\leq \phi \leq \frac{\pi }{2}$ e $0\leq \theta  \leq \frac{\pi }{2}$.

Vamos derivar em relação a $\phi$ para obtermos o vetor $\mathbf{\vec{r}_\phi }$, logo:

$\mathbf{\vec{r}_\phi }=(a\cos \phi \cos \theta )\mathbf{i}+(a\cos \phi \sin \theta )\mathbf{j}-(a\sin \phi )\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a $\theta $ para obtermos o vetor $\mathbf{\vec{r}_\theta }$, como foi feito na etapa anterior.

$\mathbf{\vec{r}_\theta }=(-a\sin \phi \sin \theta )\mathbf{i}+(a\sin \phi \cos \theta )\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\mathbf{\vec{r}_\phi }$ e $\mathbf{\vec{r}_\theta }$ que encontramos acima, logo:

$${{\bf\vec r}_\phi }\times\mathbf{\vec{r}_\theta }= \begin{vmatrix} \mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k} \\ a\cos \phi \cos \theta& a\cos \phi \sin \theta&-a\sin \phi \\ -a\sin \phi \sin \theta&a\sin \phi \cos \theta&0\end{vmatrix}$$

$$=(a^{2}\sin ^{2}\phi \cos \theta )\mathbf{i}+(a^{2}\sin ^{2}\phi \sin \theta )\mathbf{j}+(a^{2}\sin \phi \cos \phi )\mathbf{k}.$$

Feito isso, podemos calcular $\mathbf{\vec{F}}\cdot \mathbf{\vec{n}}d\sigma$.

Sendo, $\mathbf{\vec{n}}=\frac{\mathbf{r_\phi \times r_\theta }}{\:\left\Vert \mathbf{r_\phi \times r_\theta}\right\Vert}$, temos: $\mathbf{\vec{F}}\cdot\frac{\mathbf{r_\phi \times r_\theta }}{\:\left\Vert \mathbf{r_\phi \times r_\theta}\right\Vert}\left\Vert \mathbf{r_\phi \times r_\theta }\right\Vert d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^{3}\cos ^{2}\phi \sin \phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\mathbf{\vec{F}}=z\mathbf{k}$, temos que: $(a\cos \phi )\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\mathbf{\vec{F}}$ através de uma superfície orientada $S$ na direção de $\mathbf{\vec{n}}$ é dado por:

$\iint\limits_S\:\mathbf{\vec{F}}\cdot\mathbf{\vec{n}}d\sigma$.

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$\int _0^{\frac{\pi }{2}}\int _0^{\frac{\pi }{2}}\:a^3\cos ^{2}\phi \sin \phi d\theta d\phi$.

Que tem como resultado a parametrização: $=\frac{\pi a^{3}}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^{3}}{6}$

.

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S {\bf \vec F} \cdot {\bf \vec n}\ d\sigma$ do campo ${\bf \vec F} = 2xy{\bf i} + 2yz{\bf j} + 2xz{\bf k}$ através da porção do plano $x + y + z = 2a$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, no plano $xy$.

Escolha uma:

- a. ${\frac{19a^4}{7}}$
- b. ${\frac{17a^4}{6}}$
- c. ${\frac{13a^4}{6}}$
- d. ${\frac{11a^4}{6}}$
- e. ${\frac{13a^4}{7}}$

Sua resposta está correta.

**Resposta:**

Para esse exercicio utilizaremos a equação do fluxo dada por:

$\iint\limits_S {\bf \vec F} \cdot {\bf \vec n}\ d\sigma$ , onde $({\bf \vec n} = \frac{{\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y}{\begin{Vmatrix} {\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y \end{Vmatrix}})$ e $d\sigma = \begin{Vmatrix} {\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y \end{Vmatrix}\ dy\ dx.$

Como foi dado a variação de $x$ e $y$ descobriremos uma função de $f(x,y)$ dada pela equação $x + y + z = 2a$ onde:

$$ x = x $$

$$ y = y $$

$$ z = (2a - x - y) $$

Assim $f(x,y) = (x){\bf i} + (y){\bf j} + (2a - x - y){\bf k}$. Sabendo que:

$$ {\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y = \begin{vmatrix}{\bf i}&{\bf j}&{\bf k}\\ \frac{\partial f}{\partial x}\:&\frac{\partial f}{\partial x}& \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\:&\frac{\partial f}{\partial y}&\frac{\partial f}{\partial y}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}{\bf i}&{\bf j}&{\bf k}\\ 1\:&0&-1\\ 0\:&1&-1\end{vmatrix} = {\bf k} + {\bf j} + {\bf i} $$

Substituindo os dados na equação do fluxo obtemos:

$$ \iint\limits_S {\bf \vec F} \cdot {\bf \vec n}\ d\sigma = \iint\limits_S {\bf \vec F} \cdot \frac{{\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y}{\begin{Vmatrix} {\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y \end{Vmatrix}} \begin{Vmatrix} {\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y \end{Vmatrix}\ dy\ dx $$

$$ \iint\limits_S {\bf \vec F} \cdot ({\bf \vec r}_x \times {\bf \vec r}_y)\ dy\ dx = \int_{0}^{a}\int_{0}^{a} (2xy{\bf i} + 2yz{\bf j} + 2xz{\bf k})\cdot({\bf i} + {\bf j} + {\bf k})\ dy\ dx $$

Substituindo o valor de \(z\) na integral

$$ \int_{0}^{a}\int_{0}^{a} [(2xy + 2y(2a - x - y) + 2x(2a - x - y)]\ dy\ dx $$

$$ =\int_{0}^{a}\int_{0}^{a} (4ay - 2y^2 + 4ax - 2x^2 - 2xy)\ dy\ dx $$

$$ =\int_{0}^{a} \left({\frac{4ay^2}{2}} - {\frac{2y^3}{3}} + 4ax - 2x^2 - {\frac{2xy^2}{2}}\right)\bigg|_{0}^{a}\ dx$$

$$ =\int_{0}^{a} \left({\frac{4a^3}{3}} + 3a^2x - 2ax^2\ \right)\ dx $$

$$ =\left({\frac{4a^3x}{3}} + {\frac{3a^2x^2}{2}} - {\frac{2ax^3}{3}}\right) \bigg|_{0}^{a} $$

$$ =\left({\frac{4a^4}{3}} + {\frac{3a^4}{2}} - {\frac{2a^4}{3}}\right) $$

$$= {\frac{13a^4}{6}} $$

A resposta correta é: \( {\frac{13a^4}{6}} \)

.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

O universal pelo regional.

# Mais informações

UFC - Sobral

EE- Engenharia Elétrica

EC - Engenharia da Computação

PPGEEC- Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Computação

# Contato

Rua Coronel Estanislau Frota, s/n – CEP 62.010-560 – Sobral, Ceará

Telefone: (88) 3613-2603

E-mail:

Social