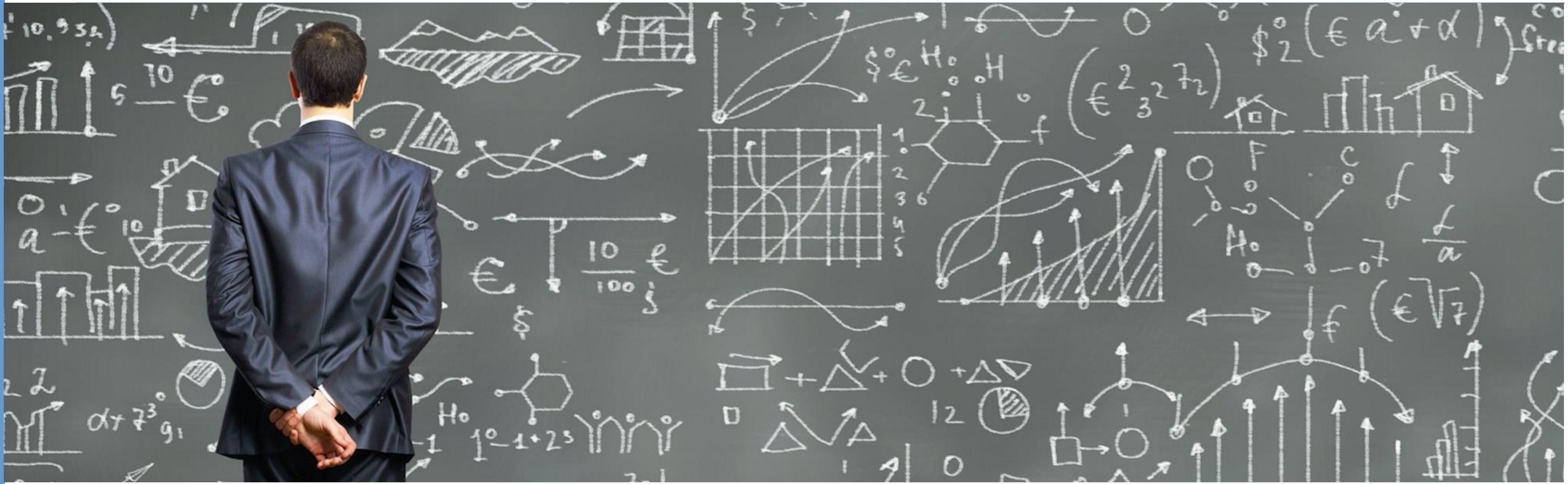
Métodos Numéricos

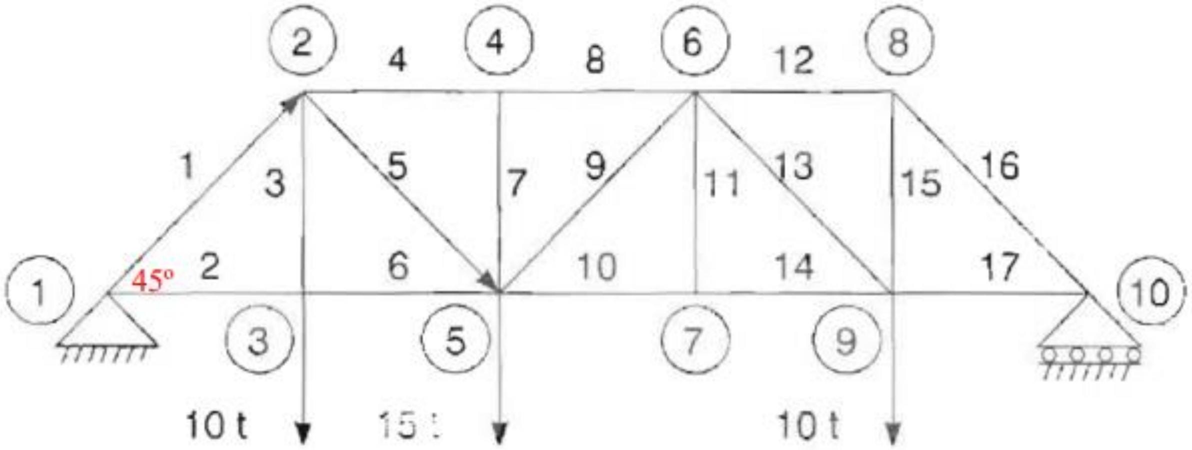
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ



Unidade III: Resolução de Sistemas Lineares

Introdução

- A resolução de sistemas lineares é um problema que surge nas mais diversas áreas (ex. previsão do tempo, otimização de sinais de transito e linhas de metro, mecânica quântica, etc..).
- Considere, por exemplo, o problema de determinar as componentes horizontal e vertical das forças que atuam nas junções da treliça abaixo (ex. ponte de ferro).



Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Para isto, temos de determinar as 17 forças desconhecidas que atuam nesta treliça.
- As componentes da treliça são supostamente presas nas junções por pinos, sem fricção.
- Um teorema da mecânica elementar nos diz que, como o número de junções j está relacionado ao número de componentes m por 2j – 3 = m, a treliça é estaticamente determinante, isto significa que as forças componentes são determinadas completamente pelas condições de equilíbrio estático nos nós.

Introdução

- Sejam Fx e Fy as componentes horizontal e vertical, respectivamente. Fazendo α = sen (45°) = cos (45°) e supondo pequenos deslocamentos, as condições de equilíbrio são:

$$\text{Junção 2}\begin{cases}\Sigma F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0\\ \Sigma F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 3}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_2 + f_6 = 0\\ \Sigma F_y = f_3 - 10 = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 4}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_4 + f_8 = 0\\ \Sigma F_y = -f_7 = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 5}\begin{cases}\Sigma F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0\\ \Sigma F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - 15 = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 6}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} = 0\\ \Sigma F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 7}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_{10} + f_{14} = 0\\ \Sigma F_y = f_{11} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 8}\begin{cases}\Sigma F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} = 0\\ \Sigma F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 9}\begin{cases}\Sigma F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} = 0\\ \Sigma F_y = \alpha f_{13} + f_{15} - f_{10} = 0\end{cases}$$

$$\text{Junção 10}\ \{\Sigma F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} = 0$$

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Portanto, para obter as componentes perdidas é preciso resolver esse sistema linear que tem 17 variáveis: $f_1, f_2, f_3, \dots, f_{17}$ e 17 equações.
- Um sistema linear com m equação e n variáveis é escrito usualmente na forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde

a_{ij}	: coeficientes	$1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$
x_j	: variáveis	$j = 1, \dots, n$
b_i	: constantes	$i = 1, \dots, m$

Introdução

- A resolução de um sistema linear consiste em calcular os valores de x_j, (j=1, ..., n) caso eles existam, que satisfaçam as m equações simultaneamente.
- Usando notação matricial, o sistema linear poder ser assim representado.

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}$$

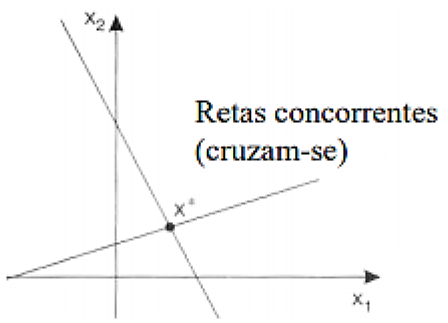
  - Onde A é a matriz (m,n) dos coeficientes, x é o vetor (n linhas) das variáveis e b (m linhas) é o vetor das constantes.

Introdução

- Analisemos a seguir, através de exemplos com das equações e duas variáveis as situações que podem ocorrer com relação ao numero de soluções de um sistema linear:

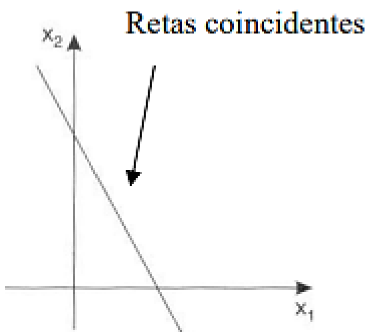
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$$

o sistema linear tem solução única;



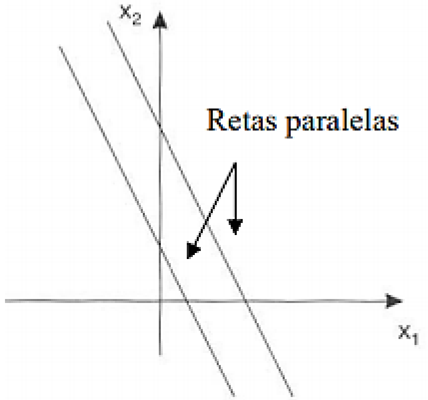
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

o sistema linear admite infinitas soluções;



$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

o sistema linear não admite solução.

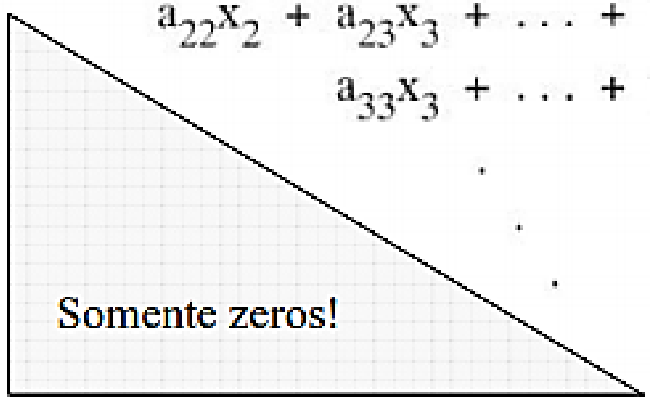


Resolução de Sistemas Triangulares

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Seja Ax = b, onde A é uma matriz nxn triangular superior.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad\quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\qquad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$



$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3 \quad \dots \quad - a_{1,n}x_n}{a_{1,1}}$$

$$x_i = \frac{b_n - \sum_{k=i-1}^{n} a_{i,k}x_k}{a_{i,i}} \quad , \quad i = n, n-1, \dots, 1$$

Método da Eliminação de Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- O método consiste em transformar o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.
  - **Teorema 1:** Seja Ax = b um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma sequencia de operações escolhidas entre.
    - Trocar duas equações;
    - Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
    - Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

  - A eliminação é efetuada por colunas e chamaremos de etapa k do processo a fase em que se elimina a variável x_k das equações k+1, k+2, ..., n.
  - Usaremos a notação $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final da k-ésima etapa, com como $b_i^{(k)}$ será o i-ésimo elemento do vetor constante no final da etapa k.

Método da Eliminação de Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Seja o sistema linear $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

Etapa 0: Escrever a matriz dos coeficientes junto do vetor das constantes

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Etapa 1: Eliminação dos elementos a_{j1} (j=2,...., n), também chamada de 1º pivoteamento.

Eliminar x_1 das equações 2 e 3:

Para facilitar o entendimento do processo, de agora em diante usaremos a notação L_i para indicar o vetor linha formado pelos elementos da linha i da matriz $A^{(k)} \mid b^{(k)}$. Assim, nesta etapa, $L_1 = (3\ 2\ 4\ 1)$.

Pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$

$m_{21} = 1/3$

$m_{31} = 4/3$

$L_2' \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$

$L_3' \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$

Linha do pivô

Operações aritméticas com as linhas

Fator multiplicador

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Elemento a ser zerado

Pivô

Etapa 1

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array}\right)$$

$1 - \frac{1}{3}3 = 0$ $\quad 1 - \frac{1}{3}2 = \frac{1}{3}$ $\quad 2 - \frac{1}{3}4 = \frac{2}{3}$ $\quad 2 - \frac{1}{3}1 = \frac{5}{3}$

$4 - \frac{4}{3}3 = 0$ $\quad 3 - \frac{4}{3}2 = 0$ $\quad -2 - \frac{4}{3}4 = 0$ $\quad 3 - \frac{4}{3}1 = \frac{5}{3}$

Método da Eliminação de Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Seja o sistema linear $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1/3} & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

Etapa 2: Eliminação dos elementos a_{j2} (j=3,...., n), também chamada de 2º pivoteamento.

Eliminar x_2 da equação 3:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

$$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Linha do pivô

$L_3' \leftarrow L_3 - m_{32}L_2'$ } Operações aritméticas com as linhas

Etapa 2

$$\Rightarrow A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & \boxed{1/3} & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Assim, resolver $Ax = b$ é equivalente a resolver $A^{(2)}x = b^{(2)}$:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{X_3 = 0}$

A solução deste sistema é o vetor $x* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Método da Eliminação de Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- No algoritmo de eliminação de Gauss, é necessário que $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, ou seja, os pivôs devem ser não nulo.
- Se ocorrer o caso de $a_{kk}^{(k)} = 0$ deve-se efetuar a troca da linha k por outra abaixo dela de modo que o elemento que fará o papel de pivô seja não nulo.

$$\begin{aligned} 0{,}000100\,x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}000100 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x = 1 \quad e \quad y = 0$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 0{,}000100\,x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0{,}000100 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = 1 \quad e \quad y = 1$$

Método da Eliminação de Gauss

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Para assegurar a estabilidade numérica no método de eliminação de Gauss, frequentemente é necessário trocar linhas e/ou colunas não somente quando o pivô é nulo, mas também quando ele é próximo de zero.
- Como já observamos, além de ser impossível de se trabalhar com um pivô nulo, pivôs próximos de zero condizem a resultados totalmente imprecisos.
- Pivôs perto de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que por sua vez origina em uma ampliação dos erros de arredondamento.
- Para se contornar estes problemas deve-se adotar uma estratégia de pivoteamento, ou seja, um processo de seleção da linha e/ou coluna pivotal.
    - **No inicio da etapa k da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes. Assim, deve-se trocar as linhas se for necessário.**

Trabalho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Implementar no Matlab um algoritmo para a solução de um sistema linear através do método da eliminação de Gauss.

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Seja o sistema linear $Ax = b$, o método de Fatoração LU consiste na decomposição da matriz dos coeficientes num produto de duas matrizes

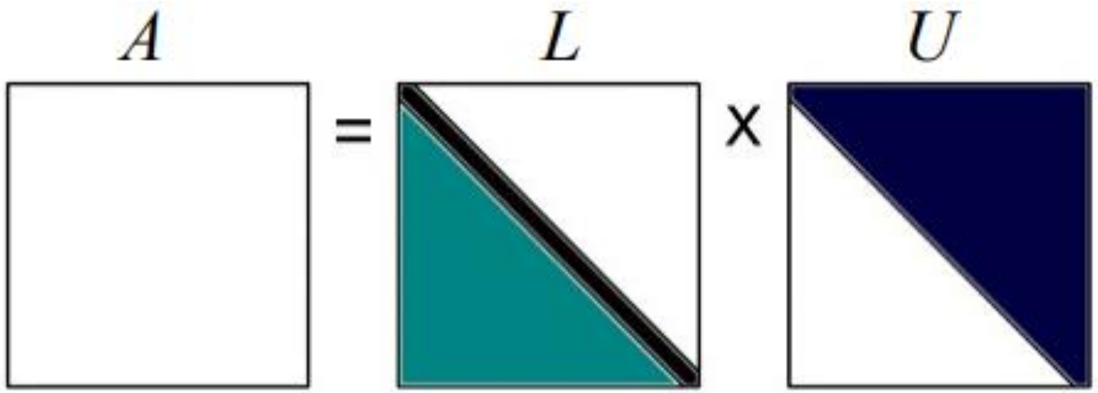
$$A = L \times U$$

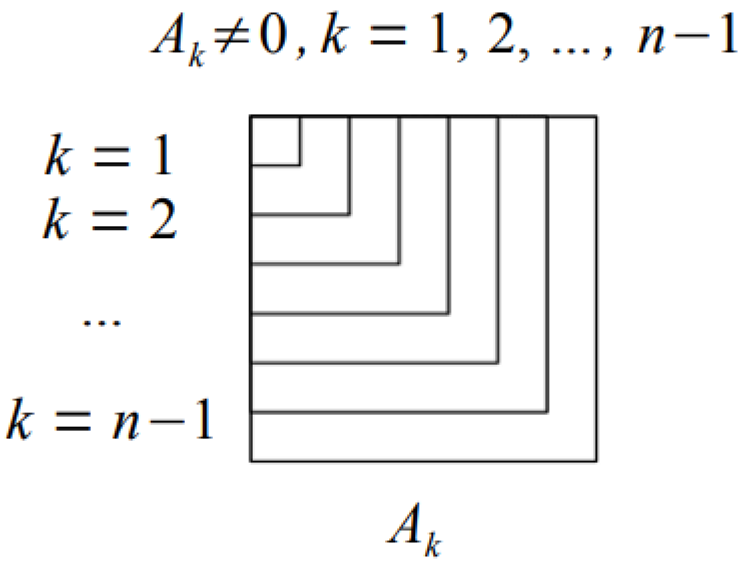
- Onde as Matrizes L e U possuem características específicas
  - L (lower)→ Triangular inferior
  - U (upper)→ Triangular superior

- A decomposição de A em L e U procede efetivamente como uma variante do processo de Eliminação de Gauss.

Fatoração LU

- Equivalência dos Sistemas
  - Seja Ax = b um sistema de n equações e n incógnitas tal que
    - Temos que A pode ser escrita de forma: $A = L \cdot U$
    - Onde L é uma matriz triangular inferior com os elementos da diagonal iguais a 1.
    - E U é uma matriz triangular superior.





Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Seja o sistema linear $Ax = b$, e fazendo $A = L \cdot U$, temos:

$$(L \cdot U)x = b$$

$$L(U \cdot x) = b$$

- Fazendo y $= (U \cdot x)$, temos a decomposição do sistema em:

$$\begin{cases} U \cdot x = y \\ L \cdot y = b \end{cases}$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Assim após a decomposição da matriz A nas matrizes L e U a resolução do sistema se dá da seguinte forma:
  - O segundo sistema (triangular inferior) é resolvido por substituição direta;
    - Resultando no vetor y;
  - Com o resultado de y o primeiro sistema (triangular superior) é resolvido por substituição inversa;
    - Resultando no solução x;

$$\begin{cases} U \cdot x = y \\ L \cdot y = b \end{cases}$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Para o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 \qquad = 2 \end{cases}$

- Efetuamos a decomposição

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & ½ & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & ½ \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L \cdot y = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$U \cdot x = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Cálculo dos Fatores L e U
  - Os fatores L e U podem ser obtidos através do processo básico de eliminação de gauss.
    - Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \qquad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

$$(\text{supondo que } a_{11}^{(0)} \neq 0)$$

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix} = A$$

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)} \qquad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1}\, a_{1j}^{(0)} \qquad \text{para } i = 2, 3 \text{ e } j = 1, 2, 3$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Cálculo dos Fatores L e U
  - Desta forma temos a equivalência $M^{(0)}A^{(0)} = A^{(1)}$
  - Onde $A^{(1)}$ é a matriz obtida ao final da etapa 1 do processo de Gauss.

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$M^{(0)}A^{(0)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} & a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)}$$

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Cálculo dos Fatores L e U
  - Supondo agora que o pivô da segunda etapa a $a_{22}{}^{(1)} \neq 0$, o multiplicador da etapa 2 será:

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

  - Para eliminarmos x_2 da linha 3 multiplicamos a linha 2 por m_{32} e subtraímos o resultado da linha 3.

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 1, 2, 3$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 2, 3$$

$$a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - m_{32}\, a_{2j}^{(1)} \qquad \text{para } j = 2, 3$$

Fatoração LU

- Cálculo dos Fatores L e U
  - Onde $A^{(2)}$ é a matriz obtida ao final da etapa 2 do processo de Gauss.

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$M^{(1)}A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - m_{32}a_{22}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

Fatoração LU

- Cálculo dos Fatores L e U

Temos então que:

$A = A^{(0)}$

$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$

$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A^{(0)} = M^{(1)}M^{(0)}A$

onde $A^{(2)}$ é triangular superior.

$A = (M^{(1)}M^{(0)})^{-1}A^{(2)} = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}A^{(2)}$

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Ou seja: $L = (M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}$ e $U = A^{(2)}$.

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Etapa 1:

$$\text{Pivô} = a_{11}^{(0)} = 3$$

$$\text{Multiplicadores: } m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{1}{3} \text{ e } m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1 \end{array} \quad \text{e} \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1/3 & -10/3 \end{pmatrix}$$

Etapa 2:

Pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$

Multiplicadores: $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = \dfrac{1/3}{1/3} = 1$

$$L_1 \leftarrow L_1$$
$$L_2 \leftarrow L_2$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2$$

e $$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 4/3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

i) $Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ 1/3y_1 + y_2 = 2 \\ 4/3y_1 + y_2 + y_3 = 3 \end{cases} \qquad y = (1 \quad 5/3 \quad 0)^T$$

Fatoração LU

- Exemplo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ii) $Ux = y$:

$$Ux = y \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ \quad - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad x = (-3 \quad 5 \quad 0)^T.$$

Fatoração LU

- Qual é então a vantagem inerente ao método da fatoração LU para solução de sistemas lineares?

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 56 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 26 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 46 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 45 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 23 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 51 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 21 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 40 \end{cases}$$

Fatoração LU

- Pivoteamento Parcial
  - A estratégia de pivoteamento parcial no método de Fatoração LU requer a permutação de linhas na matriz $A^{(k)}$.
  - Por este motivo quando utilizamos a estratégia pivoteamento parcial no calculo dos fatores L e U devemos analisar os efeitos das permutações realizadas na solução dos sistemas $L \cdot y = b$ e $U \cdot x = y$.
  - Uma matriz quadrada de ordem n é uma **matriz de permutação** se pode ser obtida da matriz identidade de ordem n permutando-se suas linhas (ou colunas).
  - Desta forma pré-multiplicando uma matriz A por uma matriz de permutação P obtém-se a matriz PA com as linhas permutadas e esta permutação de linhas é a mesma efetuada na matriz identidade para se obter P.

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Pivoteamento Parcial

Trocar L1 por L2 e depois L2 por L3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

  - Devemos então efetuar as mesmas permutações sobre o vetor b uma vez que permutar as linhas de A implica permutar as eq. de $A \cdot x = b$.
  - Seja então $b' = Pb$
    - Resolvemos os sistemas $L \cdot y = Pb$ e $U \cdot x = y$ afim de obter a solução do sistema original.

Fatoração LU

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício
  - Encontre os valores de x do sistema utilizando o método de fatoração LU.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Definição
  - Seja Ax = b um sistema linear de ordem n, com det (A) ≠ 0.
  - Os métodos iterativos tem por objetivo definir um processo de operações sucessivas, de modo que a sequencia de vetores $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ produzida convirja para a solução x, independentemente da escolha do chute inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
  - Uma sequência de vetores $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ converge para um vetor x, se

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$$

Métodos Iterativos

- Definição
  - Os métodos iterativos são em geral usados para sistemas de grande dimensão onde A tem uma grande percentagem de elementos nulos (matriz esparsa).
  - Apresentam autocorreção de erros e desta forma podem ser utilizados para refinar a solução obtida por métodos exatos.
  - Não necessitam de qualquer “espaço de armazenamento” extra para solução do sistema.
  - Em contrapartida após solucionar um sistema do tipo $Ax = b_1$, todo cálculo deve ser refeito para encontrar a solução de um sistema do tipo $Ax = b_2$.

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Definição
  - O método consiste em criar um processo recursivo através de um sistema equivalente a Ax = b.
    - Transformar Ax = b em um sistema equivalente da forma:

$$x = Cx + g$$

em que $C \in M(n, n)$ e $g \in \mathbb{R}^n$ são conhecidos.

- Dado um chute inicial $x^{(0)}$, obtemos uma sequência $\{x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}$ através do processo iterativo:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g \qquad k=0, 1, 2\dots$$

Métodos Iterativos

- Método de Gauss-Jacobi
  - Dado Ax = b e supondo, sem perda de generalidade, que $a_{ii} \neq 0$, i = 1, . . . , n, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

  - A forma como o Método de Gauss-Jacobi transforma Ax = b em x = Cx + g é feita isolando cada coordenada x_i do vetor x na i-ésima equação do sistema.

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Jacobi
  - Logo,

$$\begin{cases} x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 &= (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ x_3 &= (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \cdots - a_{3n}x_n)/a_{33} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ x_n &= (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{cases}$$

  - Desta forma temos o sistema equivalente x = Cx + g, em que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & -a_{n,n-1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Jacobi
  - Portanto, dado o chute inicial $x^{(0)}$, o processo iterativo e dado por:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} &= \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right)/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} &= \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right)/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} &= \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right)/a_{33} \\ \vdots & \vdots \qquad \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)/a_{nn} \end{cases}$$

  - Desta forma temos o sistema equivalente x = Cx + g, em que:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ -a_{31}/a_{33} & -a_{32}/a_{33} & 0 & \cdots & -a_{3n}/a_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \cdots & -a_{n,n-1}/a_{nn} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Jacobi
  - Para obter $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ a partir de Ax = b, fazemos:
    - Seja D uma matriz diagonal formada pela diagonal de A, assim

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D} + \mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x} + \mathbf{Dx} = \mathbf{b}$$

    - Dessa forma,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{Dx}^{(k+1)} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Dx}^{(k+1)} = (\mathbf{D} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

    - Portanto,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\left(\mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\right)}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}} .}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Critérios de Parada
  - Dados ε > 0 e $k_{max} \in \mathbb{N}$, temos:
    - Erro absoluto

$$\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

    - Erro relativo

$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|} < \varepsilon$$

    - Teste de resíduo

$$\left\|b - Ax^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

    - Numero máximo de iterações

$$k = k_{max}$$

Métodos Iterativos

- Exemplo

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{10}x_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\frac{2}{10}x_1^{(k)} - \frac{3}{10}x_2^{(k)} + 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10} \end{cases}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ e } \varepsilon = 0.05.$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ e } \varepsilon = 0.05$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2\,(-1.6) - 0.1 \times 0.6 + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.2 \times 0.6 - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.3\,(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ e } \varepsilon = 0.05$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

$$E_r^{(1)} = \frac{E_A^{(1)}}{max|x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{\underset{1 \leq i \leq 3}{\text{máx}} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \varepsilon$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} \text{ e } \varepsilon = 0.05.$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Jacobi
  - Estudo da Convergência
    - O Método de Gauss-Jacobi converge para a solução de Ax = b, independentemente da escolha de $x^{(0)}$, se satisfazer um dos critérios:
      - Critério das linhas

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1\,, \quad \text{com} \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

      - Critério das colunas

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k\} < 1\,, \quad \text{com} \quad \alpha_k = \frac{\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |a_{ik}|}{|a_{kk}|}$$

Métodos Iterativos

- Método de Gauss-Jacobi
  - Estudo da Convergência
    - Exemplo

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1;$$

$$\alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1;$$

$$\alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1$$

$$\text{máx } \alpha_k = 0.5 < 1$$

Métodos Iterativos

- Método de Gauss-Jacobi
  - Estudo da Convergência
    - Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$$

Não se pode garantir a convergência

$$\alpha_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{1+1}{3} = \frac{2}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{0+6}{8} = \frac{6}{8}$$

CONVERGE

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Pode ser considerado uma variação do método de Gauss-Jacobi.
  - Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema Ax = b é escrito na forma x = Gx + d através da separação por diagonal:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} \dots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} \dots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \dots \qquad \dots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} \dots - a_{n\,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

  - Desta forma, quando desejamos calcular $x_j^{(k+1)}$ fazemos uso de todos os valores $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$, disponíveis até o momento e os valores $x_{j-1}^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$, restantes.

Métodos Iterativos

- Método de Gauss-Seidel
  - Para obter $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ a partir de Ax = b. Considere A = L + R, em que L é a matriz triangular inferior de A e R é a matriz triangular superior de A sem a diagonal. Assim,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{L}+\mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Lx} + \mathbf{Rx} = \mathbf{b}$$

    - Dessa forma,

$$\mathbf{Lx}^{(k+1)} + \mathbf{Rx}^{(k)} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Lx}^{(k+1)} = -\mathbf{Rx}^{(k)} + \mathbf{b}$$

    - Portanto,

$$\boxed{\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{\left(-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\right)}_{\mathbf{C}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbf{g}}\,.}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Exemplo

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{com } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varepsilon = 5 \times 10^{-2}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.875 \end{cases}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Exemplo

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}. \end{cases} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \times 0.75 + 0.2 \times 0.875 = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \times 1.025 - 0.25 \times (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = -0.5 \times 1.025 - 0.5 \times 0.95 = -0.9875 \end{cases} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Exemplo

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix} \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.20 \qquad \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.2}{\max\limits_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1125$$

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Estudo da Convergência
    - O Método de Gauss-Seidel converge para a solução de Ax = b, independentemente da escolha de $x^{(0)}$, se satisfazer:

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\} < 1\,, \quad \text{com}$$

$$\beta_1 = \frac{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|}{|a_{11}|} \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

Critério de Sassenfeld

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ

- Método de Gauss-Seidel
  - Estudo da Convergência
    - Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + 0.5x_2 - 0.1x_3 + 0.1x_4 = 0.2 \\ 0.2x_1 + x_2 - 0.2x_3 - 0.1x_4 = -2.6 \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 + x_3 + 0.2x_4 = 1.0 \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + x_4 = -2.5 \end{cases}$$

$$\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \{\beta_i\} = 0.7 < 1$$

$$\beta_1 = [0.5 + 0.1 + 0.1]/1 = 0.7$$

$$\beta_2 = [(0.2)(0.7) + 0.2 + 0.1]/1 = 0.44$$

$$\beta_3 = [(0.1)(0.7) + (0.2)(0.44) + 0.2]/1 = 0.358$$

$$\beta_4 = [(0.1)(0.7) + (0.3)(0.44) + (0.2)(0.358)]/1 = 0.2736.$$

CONVERGE

Métodos Iterativos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Gauss-Seidel, com $\epsilon < 10^{-2}$

k	0	1	2	3	4
x_1	0	1	1.025	1.0075	1.0016
x_2	0	0.75	0.95	0.9913	0.9987
x_3	0	−0.875	−0.9875	−0.9994	−1.0002