Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral

Cálculo Diferencial e Integral I – 2021.1 (SBL0057)
Prof. Rui F. Vigelis

2a Avaliação Progressiva

Nome:____

1. Ache a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ que é perpendicular à reta $3y - x + 2 = 0$.

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{3} = -\frac{1}{dy/dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -3$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9 = -3$$
$$3x^2 - 12x + 12 = 0$$
$$x_0 = 2$$
$$y_0 = x_0^3 - 6x_0^2 + 9x_0 - 4 = -2$$
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - (-2) = -3(x - 2)$$
$$y = -3x + 4$$

2. Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\Big)$;

$$\frac{\cos x(1 + \cos x) - (1 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1 + \cos x + \operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}$$

(b) $\dfrac{d}{dx}[(\operatorname{tg} x + x \operatorname{cosec} x)^{10}]$.

$$10(\operatorname{tg} x + x \operatorname{cosec} x)^9(\sec^2 x + \operatorname{cosec} x - x \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x)$$

3. Seja $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, a função dada implicitamente pela equação $y^3 - xy^2 + x^2y - x - 1 = 0$. Suponha que f seja derivável.

(a) Mostre que $f'(x) = \dfrac{f^2(x) - 2xf(x) + 1}{3f^2(x) - 2xf(x) + x^2}$;

$$y^3 - xy^2 + x^2y - x - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y^2y' - y^2 - 2xyy' + 2xy + x^2y' - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 - 2xy + 1}{3y^2 - 2xy + x^2}$$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

$$x = 0 \Rightarrow y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0^2} = \frac{2}{3}$$

$$(y - 1) = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{2}{3}x + 1$$

4. Determine os valores de x em que a função $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 6$ tem valores extremos relativos, indicando qual desses valores é máximo ou mínimo.

$$f'(x) = 12(x^3 - 2x^2 - 3x) = 12(x + 1)(x - 0)(x - 3)$$

$$f''(x) = 12(3x^2 - 4x - 3)$$

$$f''(-1) = 48 > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo relativo em } x = -1$$

$$f''(0) = -36 < 0 \Rightarrow f \text{ tem máximo relativo em } x = 0$$

$$f''(3) = 144 > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo relativo em } x = 3$$

5. Ache os extremos absolutos da função $f(x) = 3x(x + 4)^{2/3}$ no intervalo $[-5, -1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x + 4)^{2/3} + 3x\frac{2}{3}(x + 4)^{\frac{2}{3}-1} \\ &= 3\frac{x + 4}{(x + 4)^{1/3}} + \frac{2x}{(x + 4)^{1/3}} \\ &= \frac{5x + 12}{(x + 4)^{1/3}} \end{aligned}$$

$$\text{pontos críticos:} \ -\frac{12}{5} \text{ e } -4$$

$$f(-5) = -15$$

$$f(-1) = -3\sqrt[3]{9} = -6.240$$

$$f\left(-\frac{12}{5}\right) = -\frac{36}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{64}{25}} = -9.8495$$

$$f(-4) = 0$$

$$\Rightarrow f(-4) = 0 \text{ é máximo absoluto}$$

$$\Rightarrow f(-5) = -15 \text{ é mínimo absoluto}$$

6. Use o Teorema de Rôlle para mostrar que a equação $\cos(x) + 2x = 0$ possui uma única solução real.

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) + 2x$$

$$f(-\pi/2) = -\pi < 0 \text{ e } f(\pi/2) = \pi > 0 \Rightarrow \text{pelo TVI, } f(x) \text{ possui ao menos uma raiz}$$

$$\text{se } x_0 < x_1 \text{ com } f(x_0) = f(x_1) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{pelo Teo. de Rôlle, existe } x_2 \in (x_0, x_1) \text{ tal que } f'(x_2) = 0$$

$$\text{porém, } f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + 2 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{essa contradição implica que } f(x) \text{ possui uma única raiz real}$$