# Álgebra Linear
# Aula 13

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que $m_i$ é o $i$-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

## Atividade 10

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ m_1 + 1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}.$$

Utilizando apenas as propriedades de determinantes apresentados na última aula, calcule o determinante de $A$.

## Gabarito

0.

## Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_1)$ e $\det(E_1 A)$.

## Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_2)$ e $\det(E_2 A)$.

## Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(E_3)$ e $\det(E_3 A)$.

## Teorema (2.3.2)

Se $E$ é uma matriz elementar e $B$ uma matriz qualquer de mesmo tamanho de $E$ então

$$\det(EB) = \det(E)\det(B).$$

### Pergunta

O que acontece com o determinante de uma matriz que não é invertível?

**Teorema 2.3.3**
Uma matriz quadrada $A$ é invertível se e só se $\det(A) \neq 0$.

**Pergunta**

O que podemos então falar sobre o produto de matrizes?

## Teorema 2.3.4

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

## Teorema 2.3.4

Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

## Corolário 2.3.5

Se $A$ for invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

## Exemplo

Calcule associando os cofatores de uma linha a linha diferente.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

## Exemplo

Calcule associando os cofatores de uma linha a linha diferente.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

## Proposição

Sejam $A$ uma matriz $n \times n$. Para todo $i, j \in [n] = \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} C_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ki} C_{kj} = 0.$$

## Definição 8.1

Se $A$ é uma matriz $n \times n$ qualquer então denominamos a matriz

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

como a matriz adjunta de $A$.

## Teorema 2.3.6

Se $A$ é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{Adj}(A).$$

## Exemplo

Calcule a inversa da matriz a seguir e analise o sistema $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Teorema 2.3.7

Se $Ax = b$ for um sistema de $n$ equações e $n$ incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$ então o sistema tem uma única solução. Essa solução é

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

para todo $i \in [n]$, onde $A_i$ é a matriz obtida substituindo a $i$-ésima coluna de $A$ pela matriz coluna $b$.