Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 21 e 22

Autovalores e Autovetores

Introdução

- **Problema 1:** Dada uma transformação linear T: $V \to V$, quais são os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$?

- **Exemplos:**

a) Identidade. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x, y)$.
   - $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para $\mathbf{v} = \mathbb{R}^2$.

b) Reflexão em x. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x, -y)$.
   - $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para $\mathbf{v} = (x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) Aplicação nula. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (0, 0)$.
   - $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para $\mathbf{v} = (0, 0)$.

- **Problema 2:** Dada uma transformação linear $T: V \to V$, e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, quais são os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$?

- Como $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ satisfaz a equação para todo λ, estamos apenas interessados nos vetores $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- O escalar λ é chamado de *autovalor* (ou *valor característico*) de T e o vetor $\mathbf{v}$ é o *autovetor* (ou *vetor característico*) de T.

Autovalor e Autovetor

- **Definição:** Dada uma transformação $T: V \to V$. Se existirem $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, λ é um *autovalor* de T e $\mathbf{v}$ um *autovetor* de T associado a λ.

- Observe que podemos ter $\lambda = 0$ enquanto que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

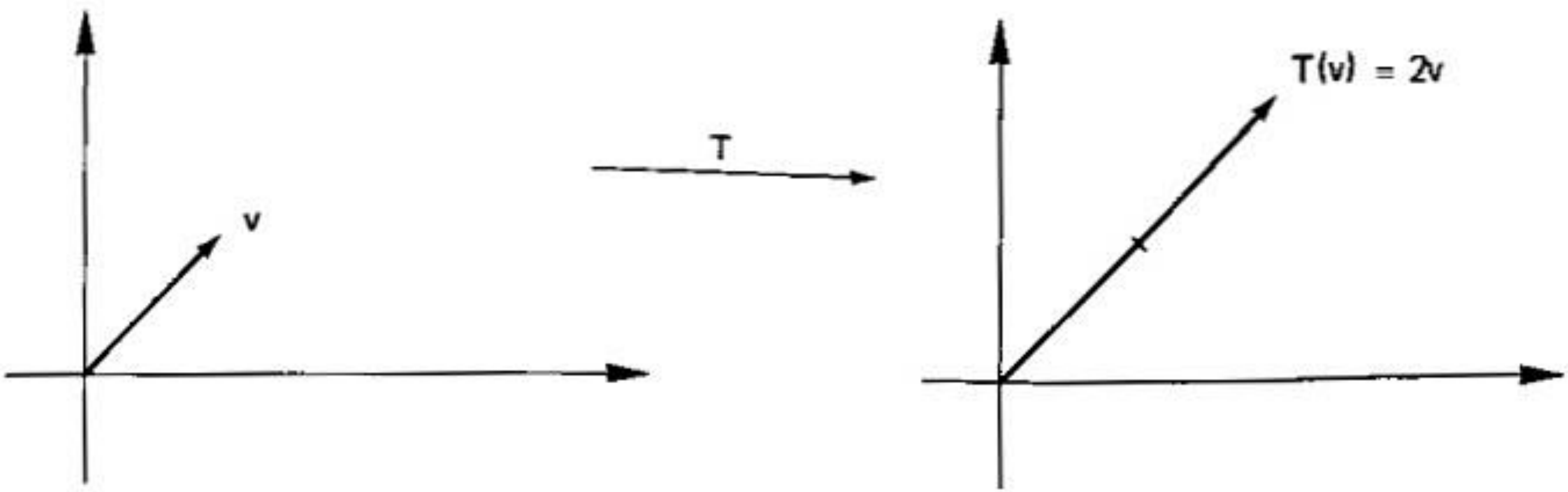
Exemplos

Exemplo 1:

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
$\mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Neste caso, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor 2. Observe geometricamente:



De um modo geral toda transformação

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$
$$\mathbf{v} \mapsto \alpha\mathbf{v},\ \alpha \neq 0$$

tem α como autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ como autovetor correspondente. Observe que $T(\mathbf{v})$ é sempre um vetor de mesma direção que $\mathbf{v}$. Ainda mais, se:

i) $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor.
ii) $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor.
iii) $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor.
iv) $\alpha = 1$, T é a identidade.

Exemplo 2:

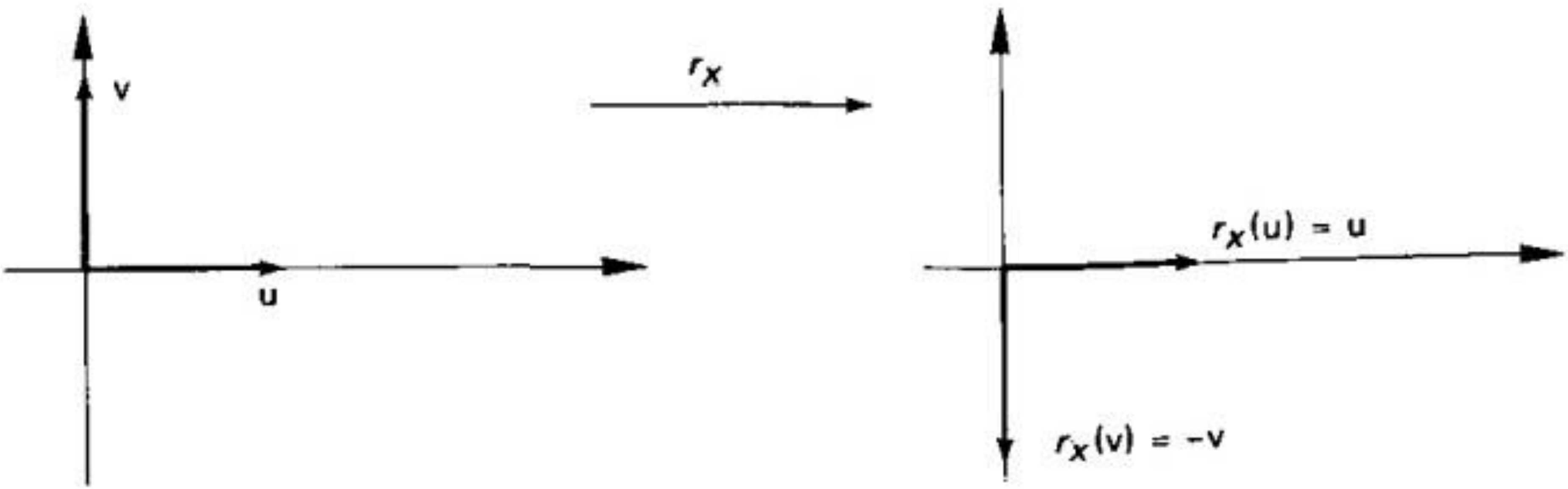
$r_x : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Reflexão no eixo-x)
$(x, y) \mapsto (x, -y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Os vetores da forma $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$ são tais que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Assim, todo vetor $(0, y)$, $y \neq 0$, é autovetor de r_x com autovalor $\lambda = -1$. Como já vimos no Exemplo 2 da seção 6.1.1 os vetores $(x, 0)$ são fixos por esta transformação, $r_x(x, 0) = 1(x, 0)$, ou seja, $(x, 0)$ são autovetores correspondentes ao autovalor 1.



Exemplo 3:

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (Rotação de $90°$ em torno da origem)
$(x, y) \mapsto (-y, x)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Note que nenhum vetor diferente de zero é levado por T num múltiplo de si mesmo. Logo, T não tem nem autovalores nem autovetores.

Este é um exemplo de que nem todo operador linear possui autovalores e autovetores.

Exemplo 4:

Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Então $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix}$

e $T_{\mathbf{A}}(x, y) = (2x + 2y, y)$.

Para procurar os autovetores e autovalores de $T_{\mathbf{A}}$ resolvemos a equação $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$ ou

$$\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$$

Assim, temos o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ \qquad\quad\; y = \lambda y \end{cases}$$

Consideremos os casos quando *i*) $y \neq 0$ e *ii*) $y = 0$.

i) Se $y \neq 0$, então da segunda equação $\lambda = 1$.

Logo $2x + 2y = x$ e $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos assim, para o autovalor $\lambda \doteq 1$, os autovetores do tipo $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$. Em outras palavras, como $T(x, -\frac{1}{2}x) = 1(x, -\frac{1}{2}x)$, os vetores sobre a reta $x = -2y$ são mantidos fixos pela transformação T.

ii) Se $y = 0$, x deve ser diferente de 0, pois senão o autovalor (x, y) seria nulo, o que não pode acontecer pela definição de autovetor. Da primeira equação, $2x + 0 = \lambda x$ ou $\lambda = 2$. Portanto, outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x, 0)$ é um autovetor correspondente. Então, todos os vetores sobre o eixo-x são levados em vetores de mesma direção: $T(x, 0) = (2x, 0)$ ou $T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$.

Temos assim, para esta transformação T, autovetores $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 1 e autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 2. Todos os outros vetores do plano são levados por T em vetores de direções diferentes.

- **Teorema:** Dada uma transformação T: $V \rightarrow V$ e um autovetor $\mathbf{v}$ associado a um autovalor λ, qualquer vetor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$)também é autovetor de T associado a λ.

- **Definição:** O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V: T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado de *subespaço associado ao autovalor* λ.

Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada, **A**, de ordem n, estaremos entendendo por *autovalor e autovetor de* **A** autovalor e autovetor da transformação linear $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, associada à matriz **A** em relação à base canônica, isto é, $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbf{R}$ de **A**, e um autovetor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, são soluções da equação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.

Exemplo: Dada a matriz diagonal

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e dados os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n =$
$= (0, 0, \dots, 0, 1)$, temos

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11}\mathbf{e}_1 \quad \text{e em geral,}$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{e}_i$. Então, estes vetores da base canônica de R^n são autovetores para $\mathbf{A}$, e o autovetor $\mathbf{e}_i$ é associado ao autovalor a_{ii}.

Veremos na próxima secção que dada uma transformação linear $T: V \to V$ e fixada uma base β podemos reduzir o problema de encontrar autovalores e autovetores para T à determinação de autovalores para a matriz $[T]_\beta^\beta$.

Polinômio Característico

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Procuramos vetores $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ e escalares $\lambda \in \mathbf{R}$ tais que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Observe que se $\mathbf{I}$ for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma $\mathbf{Av} = (\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$, ou ainda, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$.
Escrevendo explicitamente

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se escrevermos explicitamente o sistema de equações lineares equivalente a esta equação matricial, iremos obter um sistema de três equações e três incógnitas. Se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, saberemos que este sistema tem uma única solução, que é a solução nula, ou seja $x = y = z = 0$. (Veja a observação final de 3.7.2.) Mas estamos interessados em calcular os autovetores de $\mathbf{A}$, isto é, vetores $\mathbf{v} \neq 0$, tais que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Neste caso $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ deve ser zero, ou seja

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

E portanto $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$.

Vemos que $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ é um polinômio em λ. Este polinômio é chamado o polinômio característico de **A**. Continuando a resolução, temos $(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3) = 0$.

Logo $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são as raízes do polinômio característico de **A**, e portanto os autovalores da matriz **A** são 2 e 3. Conhecendo os autovalores podemos encontrar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, para os casos:

i) $\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y \\ y + 2z = 2z \end{cases}$$

A terceira equação implica que $y = 0$ e por isso vemos na segunda que $x = 0$. Como nenhuma equação impõe uma restrição em z, os autovetores associados a $\lambda = 2$ são do tipo $(0, 0, z)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(0, 0, 1)]$.

ii) $\lambda = 3$

Resolvendo a equação $\mathbf{Av} = 3\mathbf{v}$, temos

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases}$$

Tanto da primeira equação quanto da segunda vemos que $x = -2y$ e da terceira vem $z = y$. Os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são do tipo $(-2y, y, y)$, ou seja, pertencem ao subespaço $[(-2, 1, 1)]$.

6.2.1. O que fizemos neste exemplo com uma matriz **A** de ordem 3, pode ser generalizado. Seja **A** uma matriz de ordem n. Quais são os autovalores e autovetores correspondentes de **A**? São exatamente aqueles que satisfazem a equação $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ ou $\mathbf{Av} = (\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ ou ainda $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$. Escrevendo esta equação explicitamente, temos

Escrevendo esta equação explicitamente, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Chamemos de $\mathbf{B}$ a primeira matriz acima. Então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = 0$. Se $\det \mathbf{B} \neq 0$, sabemos que o posto da matriz $\mathbf{B}$ é n e portanto o sistema de equações lineares homogêneo indicado acima tem uma única solução. Ora, como $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ (ou $\mathbf{v} = 0$) sempre é solução de um sistema homogêneo, então esta única solução seria a nula. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores $\mathbf{v}$ (soluções não nulas da equação acima) é termos $\det \mathbf{B} = 0$, ou seja,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n.

$P(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$ + termos de grau $< n$, e os autovalores procurados são as raízes deste polinômio. $P(\lambda)$ é chamado *polinômio característico* da matriz $\mathbf{A}$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 2 = \mathbf{P}(\lambda).$$

$$P(\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2.$$

Então os autovalores de $\mathbf{A}$ são 1 e -2.

i) $\lambda = 1$

Temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Então, temos que $x = y$.

Portanto os autovetores associados a $\lambda = 1$ são os vetores $\mathbf{v} = (x, x)$, $x \neq 0$.

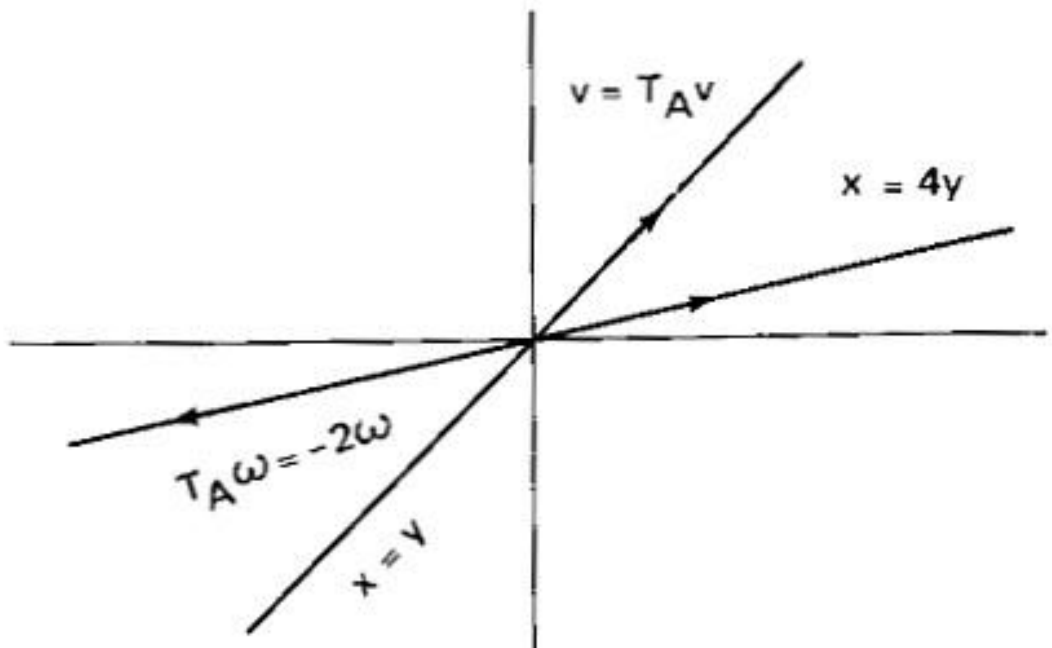
ii) $\lambda = -2$.

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -3x + 4y \\ -x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x = 4y.$$

Os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma $v = (4y, y)$, $y \neq 0$ (ou $v = (x, \frac{1}{4}x)$).



Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathrm{I}) = \det \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{3} - \lambda)^2 + 1$$
$$= \lambda^2 - 2\sqrt{3}\,\lambda + 4.$$

$P(\lambda) = 0$ não admite raiz real ($\Delta = -4$), logo a matriz **A** não admite autovalores (nem autovetores). Isto significa que a transformação dada pela matriz **A** não preserva a direção de nenhum vetor. $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) \neq \lambda \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq 0$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Então, $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (3 - \lambda)^2 \ (-1 - \lambda)$.

Os autovalores de **A** são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

i) Autovetores associados a $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x \quad - 4z = 3x \\ 3y + 5z = 3y \\ -z = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4z = 0 \\ 5z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$$

A solução é: $z = 0$ e x, y quaisquer.

Portanto os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (x, y, 0)$.

ii) Autovetores associados a $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 4z = -x \\ 3y - 5z = -y \\ -z = -z \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4x - 4z = 0 \\ 4y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Solução: $x = z$, $y = \frac{5}{4} z$, z qualquer.

Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (z, \frac{5}{4} z, z)$, $z \neq 0$.

Exemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & -4 \\ 0 & 3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2\ (-1-\lambda).$$

Observe que este polinômio é o mesmo que o do exemplo anterior. Então os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

i) Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x - 3y - 4z = 3x \\ \qquad 3y + 5z = 3y \\ \qquad\qquad -z = 3z \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -3y - 4z = 0 \\ \qquad 5z = 0 \\ \quad -4z = 0 \end{cases}$$

$y = 0$, $z = 0$, x qualquer.

Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (x, 0, 0)$, $x \neq 0$.

ii) Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{cases} 3x - 3y - 4z = -x \\ \qquad 3y + 5z = -y \\ \qquad\qquad -z = -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 3y - 4z = 0 \\ \qquad 4y + 5z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases}$$

$x = -\dfrac{31}{16}z$, $y = -\dfrac{5}{4}z$, z qualquer.

Os autovetores são do tipo $\mathbf{v} = (-\dfrac{31}{16}z, -\dfrac{5}{4}z, z)$, $z \neq 0$.

Exemplo

Seja $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$.
Procuremos seus autovalores e autovetores. Notemos que se α é a base canônica de $\mathbf{R}^2$

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e, portanto,}$$

podemos dar o polinômio característico de T como $P(\lambda) = \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 194 a 196, exercícios 3, 4, 7, 11, 13, 16, 17, 22, 26abc.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.