

Álgebra Linear

Aula 1 - Sistemas Lineares

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Informações

Do Professor

- **Dr. Josefran de O. Bastos;**
- **Email:** josefran@ufc.br;
- **Gabinete:** 22;
- **Telefone:** (85) 99603-7184.

Introdução

Exemplo 1

Dudu tem 3 picolés, chupa 1, com quantos ele fica?

Exemplo 2

Zeca tem R\$ 5,00 e deseja gastar tudo em bombom. Quantos bombons Zeca consegue comprar se cada um custar R\$ 1,00 e ele quiser gastar todo o dinheiro?

Exemplo 3

Sanji está preparando comida para a tripulação e odeia desperdiçar comida. Ele quer fazer 3 tipos de pratos diferentes e, como cozinheiro do mar experiente que é, possui a seguinte tabela de materiais necessários para cada prato.

Prato\Ing.	A	B	C
1	2	1	4
2	3	2	0
3	1	0	4

Se ele tem disponível 11 u. de A, 5 u. de B e 16 u. de C, quantos pratos de cada ele deve fazer para que não sobre nada?

Exemplo 4

Olhando para o céu você viu um meteoro e conseguiu fazer algumas anotações sobre a posição dele. Preveja aonde o meteoro vai estar daqui a 10 anos.

Exemplo 4

Olhando para o céu você viu um meteoro e conseguiu fazer algumas anotações sobre a posição dele. Preveja aonde o meteoro vai estar daqui a 10 anos.

Figura: Johann Carl Friedrich Gauss



Exemplo 5 - Problema 40 do Papiro de Ahmes - Egito 1650 a.c

Divida 100 sacos de cevada entre cinco homens em progressão aritmética de tal modo que a soma dos dois menores é um sétimo da soma dos três maiores.

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;
- Métodos Numéricos;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;
- Métodos Numéricos;
- Jogos de Estratégias;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;
- Métodos Numéricos;
- Jogos de Estratégias;
- Computação gráfica;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;
- Métodos Numéricos;
- Jogos de Estratégias;
- Computação gráfica;
- Piloto automático de aeronaves;

Aplicações mais avançadas

- Projeção, rotação e manipulação de imagens;
- Processos estocásticos;
- Métodos Numéricos;
- Jogos de Estratégias;
- Computação gráfica;
- Piloto automático de aeronaves;
- e por aí vai...

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares

1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares

1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana

1.2 Modelagem usando matrizes

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares

1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana

1.2 Modelagem usando matrizes

1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares

1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana

1.2 Modelagem usando matrizes

1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades

2. Determinantes e Regra de Cramer

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial
4. Espaços Vetoriais Arbitrários

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial
4. Espaços Vetoriais Arbitrários
 - 4.1 Definição, subespaço, independência linear, base, mudança de base, posto e nulidade

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial
4. Espaços Vetoriais Arbitrários
 - 4.1 Definição, subespaço, independência linear, base, mudança de base, posto e nulidade
 - 4.2 Transformações Lineares

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial
4. Espaços Vetoriais Arbitrários
 - 4.1 Definição, subespaço, independência linear, base, mudança de base, posto e nulidade
 - 4.2 Transformações Lineares
5. Autovetores e autovalores

O que vamos aprender neste curso

1. Sistemas Lineares
 - 1.1 Resolução por Eliminação Gaussiana
 - 1.2 Modelagem usando matrizes
 - 1.3 Matrizes inversas: Características e propriedades
2. Determinantes e Regra de Cramer
3. Vetores e Espaços Vetoriais Euclidianos
 - 3.1 Norma, produto escalar, distâncias e produto vetorial
4. Espaços Vetoriais Arbitrários
 - 4.1 Definição, subespaço, independência linear, base, mudança de base, posto e nulidade
 - 4.2 Transformações Lineares
5. Autovetores e autovalores
6. Diagonalização

Sistemas Lineares - Um exemplo

Exemplo 5

Resolva o seguinte problema.

$$5x + y = 3$$

$$2x - y = 4$$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis x_1, \dots, x_n é da forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, \dots, a_n, b são constantes.

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis x_1, \dots, x_n é da forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, \dots, a_n, b são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis x_1, \dots, x_n é da forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, \dots, a_n, b são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- Equação do plano: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Equação Linear

Equação Linear

Uma equação linear nas variáveis x_1, \dots, x_n é da forma

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde a_1, \dots, a_n, b são constantes.

Exemplos Eq. Lineares

- Equação da reta: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$
- Equação do plano: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

Equação Homogênea

A equação é dita homogênea se $b = 0$, i.e.,

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0,$$

Equações Lineares

Exemplos que não são

- Qualquer equação que contenha funções trigonométricas (*sen*, *cos*, ...);

Equações Lineares

Exemplos que não são

- Qualquer equação que contenha funções trigonométricas (*sen*, *cos*, ...);
- Qualquer equação com variáveis com potências diferentes de 1 (x^2 , \sqrt{x} , $\frac{1}{x}$, ...);

Sistema Linear

Forma Geral

A forma geral de um sistema linear com $n > 0$ variáveis e $m > 0$ equações é a seguinte

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

onde para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, a_{ij} e b_i são constantes.

Solução

Uma solução do sistema linear é uma n -upla ordenada (s_1, \dots, s_n) tal que ao tomarmos $x_i = s_i$ todas as equações do sistema são satisfeitas.

Exemplo 6

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & y & = & 4 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

Exemplo 7

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Exemplo 7

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & 2y & = & 8 \end{array}$$

Solução: $x = 4 - t$ e $y = t$.

Exemplo 7

$$\begin{array}{rcl} x & + & y = 4 \\ 2x & + & 2y = 8 \end{array}$$

Solução: $x = 4 - t$ e $y = t$. t é chamado de *parâmetro* e as duas equações soluções de *equações paramétricas*.

Exemplo 8

$$\begin{array}{rclcl} 2x & + & y & = & 4 \\ 2x & + & y & = & 6 \end{array}$$

Classificação dos sistemas

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;
- Consistente ilimitado - Possui infinitas soluções;

Classificação dos sistemas

- Consistente limitado - Possui uma única solução;
- Consistente ilimitado - Possui infinitas soluções;
- Inconsistente - Não possui soluções.