# RESOLUÇÃO DE UMA PROVA DE FÍSICA 3

14 de Agosto de 2015

**Exercício 1.** Certa região no espaço o potencial elétrico é $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. Qual a magnitude do campo em um ponto $P$ com coordenadas $(1; 0; 2)$ m?

**Solução**

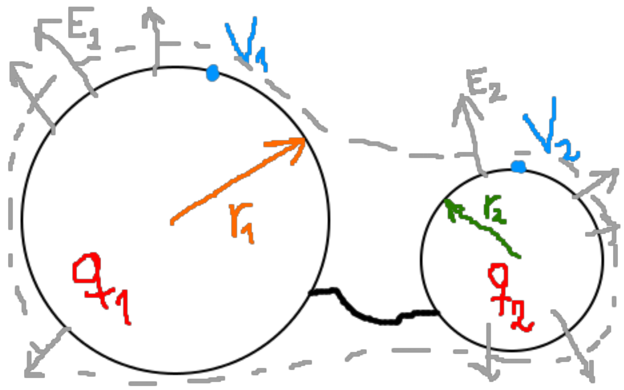
- Sabe-se que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\left[\frac{\partial}{\partial x} V\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} V\,\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} V\,\hat{k}\right]$
- Logo, substituindo a função potencial elétrico $(V)$ tem-se

$$\overrightarrow{E} = -\left[(5 - 6xy)\ \hat{i} + (-3x^2 + 2z^2)\ \hat{j} + (4yz)\ \hat{k}\right]$$

- Finalmente, o campo elétrico no ponto $P = (1; 0; 2)$ é $\overrightarrow{E_P} = -(5\,;\,5\,;\,0)$=$-\left[5\hat{i} + 5\hat{j}\right]\ \frac{N}{C}$ ♦

**Exercício 2.** Duas esferas condutoras são conectadas por um fio condutor longo, uma carga total de $20\,\mu C$ esta dividida entre elas. Uma esfera tem raio $4,0\,cm$ e a outra tem raio $6,0\,cm$. Qual o campo elétrico próximo da superfície de cada esfera?

**Solução**




* Quando as esferas são conectadas por um fio condutor, elas adquirem o mesmo potencial na sua superfície. Supondo que a distribuição de cargas seja uniforme em ditas superfícies, então

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q_2}{r_2} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}q_1}{r_1} = \int \frac{\mathrm{d}q_2}{r_2}$$

* Tanto $r_1$ como $r_2$ são constantes, não dependem de $\mathrm{d}q_1$ e $\mathrm{d}q_2$, por isso $(r_1 > r_2)$

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow q_1 = 3k \wedge q_2 = 2k$$

* A carga total é $Q = q_1 + q_2 = 3k + 2k = 5k = 20\,\mu C \Rightarrow k = 4\,\mu C$. Substituindo, tem-se $q_1 = 12\,\mu C \wedge q_2 = 8\,\mu C$.

* Calculando o campo elétrico na superfície de cada esfera carregada, (substituindo valores)

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q_1}{(r_1)^2}\widehat{r_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\,(r_1)^2}\widehat{r_1} = \frac{\left(9\,.\,10^9\right)\left(12\,.\,10^{-6}\right)}{36\,.\,10^{-4}}\widehat{r_1} = 3,0\,.\,10^7\,\widehat{r_1}$$

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q_2}{(r_2)^2}\widehat{r_1} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\,(r_2)^2}\widehat{r_2} = \frac{\left(9\,.\,10^9\right)\left(8\,.\,10^{-6}\right)}{16\,.\,10^{-4}}\widehat{r_2} = 4,5\,.\,10^7\,\widehat{r_2}$$

* Finalmente, os módulos dos campos elétricos são

$$E_1 = 3,0\,.\,10^7\,\frac{N}{C} \qquad \blacklozenge$$

$$E_2 = 4,5\,.\,10^7\,\frac{N}{C} \qquad \blacklozenge$$

**Exercício 3.** Uma carga $Q$ é dividida e duas esferas de mesmo tamanho, uma esfera fica com uma carga $q$ e a outra com $Q - q$. As esferas estão separadas a uma distância $d$ fixa. Qual a razão $q/Q$ que torna máxima a força elétrica entre as duas esferas?

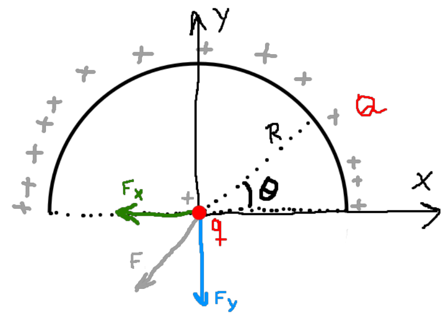
**Solução**

- ✱ A carga $Q$ é uma constante, logo, o módulo da força elétrica entre as duas cargas dependerá somente de $q$, então
$$F(q) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{q(Q-q)}{d^2} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\right)\left(qQ - q^2\right)$$
- ✱ Encontra-se um máximo possível para $F(q)$ fazendo que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}F(q) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\right)(Q - 2q) = 0 \Rightarrow Q = 2q$$
- ✱ A razão que torna a força máxima é $\frac{q}{Q} = \frac{1}{2}$ ♦

**Exercício 4.** Uma linha de cargas positivas é dobrada de modo que ela define o perímetro de um semicírculo de raio $R = 60\,cm$. A densidade de carga é dada por $\lambda = \lambda_0 \cos(\theta)$. A carga total no semicírculo é $12\,\mu C$. Calcule a força elétrica sobre uma carga de $12\,\mu C$ que esta no centro da curvatura.

**Solução**

* Como as cargas do fio dobrado são positivas, então o valor de $\lambda$ sempre deve ser positivo, por isso $\lambda = |\lambda_0 \cos(\theta)| = \lambda_0 |\cos(\theta)|$.




* Seja a carga do fio dobrado $Q$, e a carga da partícula que esta no cento da curvatura, $q$. Dos dados do problema tem-se $Q = q = 12\,\mu C$.

* Seja o comprimento de arco $l = R\theta \Rightarrow \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$. Da definição de densidade de carga linear, para o fio dobrado, tem-se

$$\mathrm{d}Q = \lambda \mathrm{d}l = \lambda R \mathrm{d}\theta = \lambda_0 |\cos(\theta)| R\mathrm{d}\theta \Rightarrow Q = \int_I \lambda_0 |\cos(\theta)| R\mathrm{d}\theta = R\lambda_0 \int_I |\cos(\theta)| \mathrm{d}\theta$$

* O intervalo de integração é $I = [0; \pi]$, tem-se então

$$Q = R\lambda_0 \int_0^{\pi} |\cos(\theta)| \mathrm{d}\theta = R\lambda_0 \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \right] = 2R\lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{Q}{2R}$$

* Devido a simetria do semicírculo, a força elétrica resultante só tem direção $-\hat{j}$, isto é

$$\overrightarrow{F} = \left[ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}Q}{R^2} \right] (0; -\sin(\theta)) = \left[ \frac{q\lambda_0}{(4\pi\varepsilon_0) R} \int_0^{\pi} |\cos(\theta)| \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right] (0; -1)$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{q\lambda_0}{(4\pi\varepsilon_0) R} \left[ \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(\theta))\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right] (0; -1)$$

$$\overrightarrow{F} = \frac{q\lambda_0}{(4\pi\varepsilon_0) R} \left[ -\frac{1}{4} [\cos(2\theta)] \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} [\cos(2\theta)] \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] (0; -1) = \frac{q\lambda_0}{(4\pi\varepsilon_0) R} (0; -1) = \frac{qQ}{(4\pi\varepsilon_0) 2R^2} (0; -1)$$

* Finalmente, substituindo os valores, tem-se o valor da força

$$\overrightarrow{F} = \frac{qQ}{(4\pi\varepsilon_0) 2R^2} (0; -1) = -1,8\,\hat{j}\,N \qquad \blacklozenge$$

**Exercício 5.** Em um disco de raio $b$ foi feito um furo circular de raio $a$ concêntrico com o disco. Calcule o potencial elétrico em um ponto $P$ distante uma quantidade $x$ do centro do disco de modo perpendicular. O objeto possui uma densidade superficial de carga $\sigma$ uniforme.

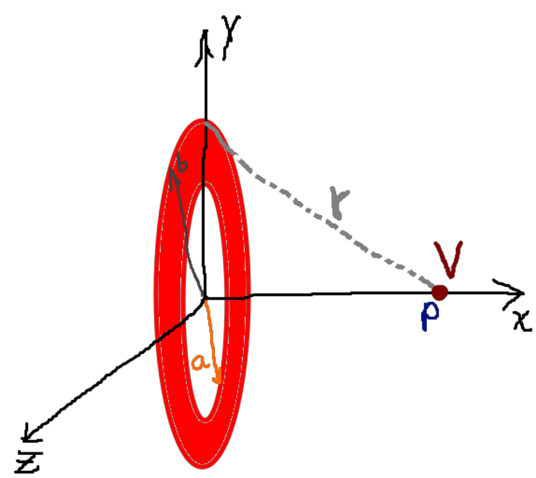
**Solução**

✱ Sabe-se que o potencial produzido por uma carga deslocada desde o infinito a uma distância $r$ de uma distribuição uniforme de carga $\mathrm{d}q$ é ($I$ é o intervalo de integração ainda não definido)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_I \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

✱ Da definição de densidade superficial de carga, tem-se $\sigma \mathrm{d}A = \mathrm{d}q$, onde a área do disco é igual a $A = \pi y^2 \Rightarrow \mathrm{d}A = 2\pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$. Seguidamente, tem-se

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}A = 2\sigma \cdot \pi \cdot y \cdot \mathrm{d}y$$




✱ A geometria da superfície é simétrica, em consequência só tem-se campo elétrico na direção $\hat{j}$, também pode-se concluir que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

✱ Substituindo as expressões anteriores, tem-se ($I = [a; b]$)

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{y \cdot \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_a^b \frac{2y \cdot \mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right] \text{ V} \qquad \blacklozenge$$