Álgebra Linear
Aula 2

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula.

Atividade 01

Marque V para Verdadeiro e F para Falso nos itens abaixo

1. ( ) A equação $2\operatorname{sen} x + 3y + z = 3$ é linear.
2. ( ) Todo sistema linear possui pelo menos uma solução.
3. ( ) Sejam a, b, c e d constantes e considere a equação $ax + by + cz = d$. Se essa equação é homogênea então $a = b = c = 1$.
4. ( ) As três operações naturais de manipulação de equações no processo de solução de um sistema linear são: trocar equações de posições, multiplicar uma equação por uma constante e somar uma equação a outra.

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula.

Atividade 01

Marque V para Verdadeiro e F para Falso nos itens abaixo

1. (F) A equação $2\operatorname{sen} x + 3y + z = 3$ é linear.
2. (F) Todo sistema linear possui pelo menos uma solução.
3. (F) Sejam a, b, c e d constantes e considere a equação $ax + by + cz = d$. Se essa equação é homogênea então $a = b = c = 1$.
4. (V) As três operações naturais de manipulação de equações no processo de solução de um sistema linear são: trocar equações de posições, multiplicar uma equação por uma constante e somar uma equação a outra.

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Relembre:

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as equações de posições;

Forma Geral

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Relembre:

- Multiplicamos uma equação inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as equações de posições;
- Substituímos uma equação por uma obtida após a soma/subtração por outra.

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operações elementares com linhas:

- Multiplicamos uma linha inteira por uma constante não nula;
- Trocamos as linhas de posições;
- Substituímos uma linha por uma obtida após a soma/subtração por outra.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem $n > 0$ é uma matriz tal que $a_{ii} = 1$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e todos os outros elementos são 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Usualmente a matriz identidade de ordem n é representada por I_n

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;
- Para quaisquer duas linhas distintas o primeiro elemento nulo da linha mais abaixo está sempre mais a direita que a do primeiro elemento não nulo outra.

Forma escalonada

Uma matriz está na forma escalonada se satisfaz:

- Nenhuma linha não nula está abaixo de uma linha inteiramente nula.
- O primeiro elemento não nulo de uma linha, chamado de pivô, é sempre 1;
- Para quaisquer duas linhas distintas o primeiro elemento nulo da linha mais abaixo está sempre mais a direita que a do primeiro elemento não nulo outra.

Forma escalonada reduzida

Uma matriz escalonada está na forma reduzida se todo pivô é o único elemento não nulo da coluna que pertence.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

- **Lideres**: relacionadas ao pivô.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

Variáveis

Considerando a matriz escalonada reduzida por linhas, classificamos as variáveis como

- **Lideres**: relacionadas ao pivô.
- **Livres**: as demais variáveis.

Eliminação de Gauss-Jordan

Algoritmo que, dado uma matriz de entrada A, obtém através de operações elementares com linha a forma escalonada reduzida de A.

Eliminação de Gauss-Jordan

Algoritmo que, dado uma matriz de entrada A, obtém através de operações elementares com linha a forma escalonada reduzida de A.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Eliminação de Gauss-Jordan

O algoritmo consiste de duas fases.

- *Fase 1 (para frente).* Através de operações elementares com linhas, transformar a matriz aumentada na sua forma escalonada.
- *Fase 2 (para trás).* Começando da última linha, utilizar operações com linhas para obter a forma escalonada reduzida da matriz.

Eliminação de Gauss-Jordan

O algoritmo consiste de duas fases.

- *Fase 1 (para frente).* Através de operações elementares com linhas, transformar a matriz aumentada na sua forma escalonada.
- *Fase 2 (para trás).* Começando da última linha, utilizar operações com linhas para obter a forma escalonada reduzida da matriz.

Eliminação Gaussina

O algoritmo que usa apenas a Fase 1 do algoritmo acima para obter a matriz escalonada é chamada de *eliminação gaussiana*.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
2x & - & y & - & 2w & + & 3z & = & 0 \\
-x & + & 2y & - & w & - & 3z & = & 0 \\
x & + & y & + & w & + & 4z & = & 0 \\
4x & - & 2y & & & + & 10z & = & 0
\end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & - & y & - & 2w & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & w & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & w & + & 4z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & & & + & 10z & = & 0 \end{array}$$

Teorema 1.2.1

Se um sistema homogêneo com n variáveis possuir, na sua matriz escalonada reduzida, r linhas não nulas então o sistema possui $n - r$ variáveis livres.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & - & 2w & + & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & w & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & w & + & 4z & = & 0 \\ 4x & - & 2y & & & + & 10z & = & 0 \end{array}$$

Teorema 1.2.1

Se um sistema homogêneo com n variáveis possuir, na sua matriz escalonada reduzida, r linhas não nulas então o sistema possui $n - r$ variáveis livres.

Teorema 1.2.2

Um sistema linear homogêneo com mais variáveis que equações tem uma infinidade de soluções.

Pergunta: Faz diferença a linha que escolhemos no processo para obter a matriz escalonada reduzida?

Pergunta: Faz diferença a linha que escolhemos no processo para obter a matriz escalonada reduzida?

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Pergunta: Faz diferença a linha que escolhemos no processo para obter a matriz escalonada reduzida?

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Teorema

A matriz escalonada reduzida de uma matriz A é única.

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ x & + & y & + & 4z & = & -6 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 3z & = & 7 \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ x & + & y & + & 4z & = & -6 \end{array}$$

Retrosubstituição

Consiste em usar os resultados obtidos a partir da última linha até a primeira afim de obter a solução do sistema.

Exemplo

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & - & y & - & 3z & = & 7 \\
-x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\
x & + & y & + & 4z & = & -6
\end{array}
$$

Retrosubstituição

Consiste em usar os resultados obtidos a partir da última linha até a primeira afim de obter a solução do sistema.

Importante

Lembre-se que não é possível armazenar $\frac{1}{3}$ perfeitamente em computadores.