Inteligência artificial

Lógica Fuzzy

Introdução

- A lógica bivalente (Aristóteles) usa dois valores lógicos – verdadeiro e falso;
- Lógicas multivalentes usam muitos valores lógicos – frequentemente num intervalo de números reais entre 0 e 1.
- É importante notar a diferença entre lógica multivalente e probabilidade – $P(A) = 0.5$ significa que A pode ser verdadeira ou pode ser falsa – um valor lógico 0.5 significa que A é verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

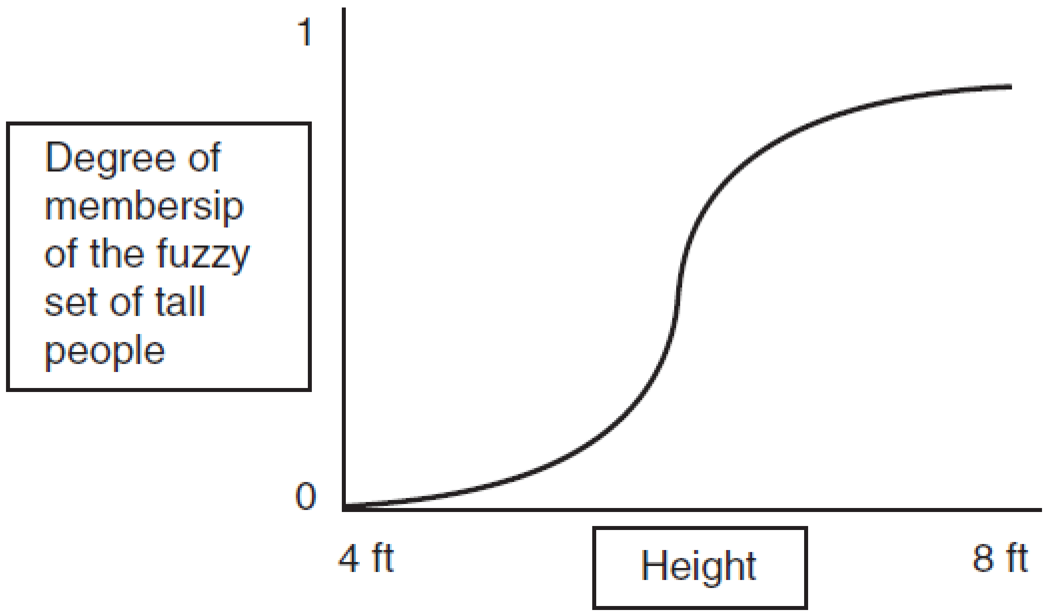
Variáveis Linguísticas

- Variáveis usadas em sistemas fuzzy para expressar qualidades tais como altura, que podem assumir valores como “alto”, “baixo” ou “muito alto”.
- Esses valores definem subconjuntos do universo de discurso.

Conjuntos Fuzzy

- Um conjunto crisp (nítido) é um conjunto no qual cada valor está ou não está contido no conjunto.
- Para um conjunto fuzzy, cada valor tem um valor de pertinência associado e assim é um membro até certo ponto.
- O valor de pertinência define até que ponto a variável é membro de um conjunto fuzzy.
- O valor de pertinência está entre 0 (não é membro do conjunto) e 1.

Conjuntos Fuzzy



Conjuntos Fuzzy

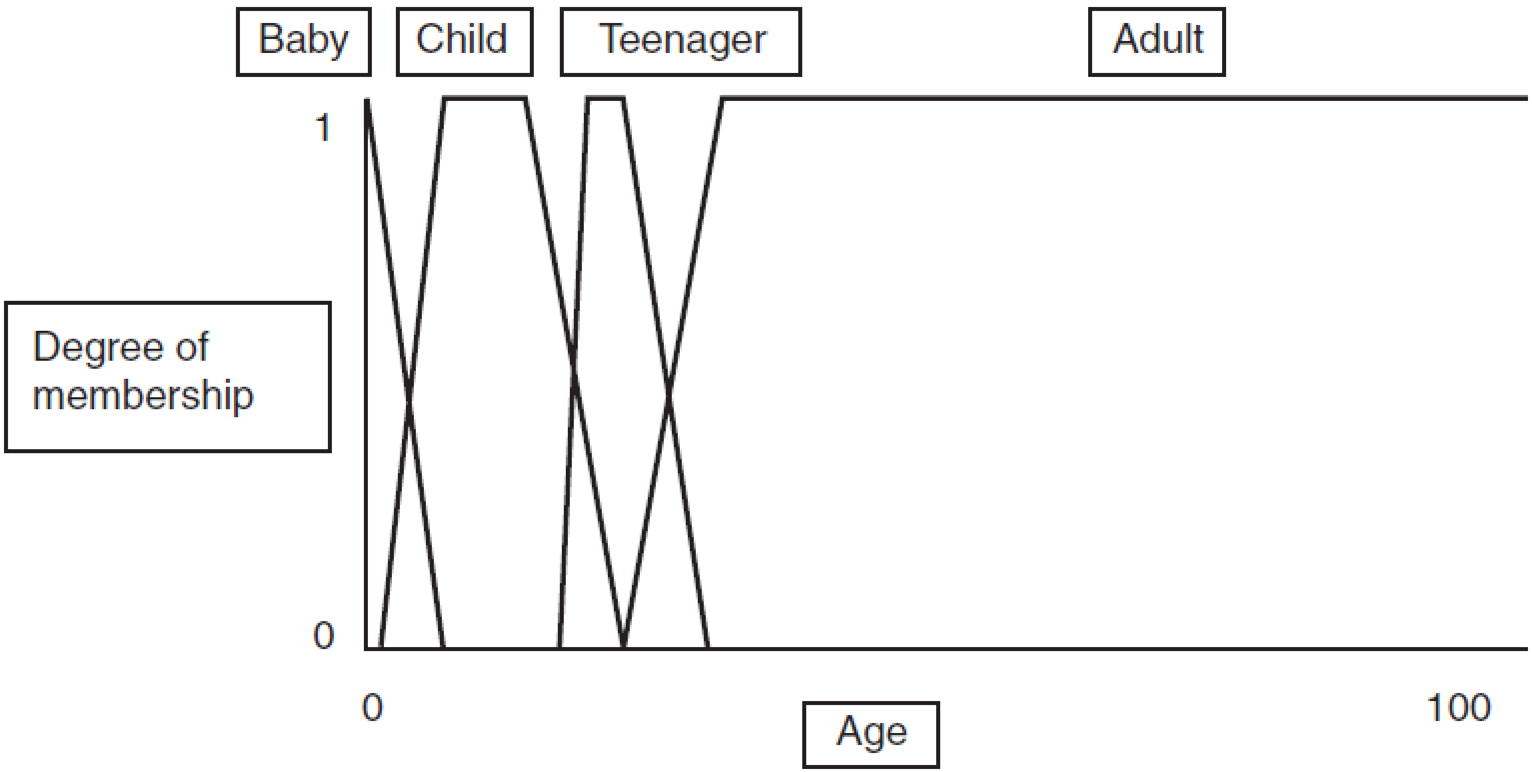
- Na lógica aristotélica nós temos os seguintes axiomas:

$$A \vee \neg A = \mathrm{TRUE}$$

$$A \wedge \neg A = \mathrm{FALSE}$$

- Na lógica fuzzy esses axiomas não são válidos!

Conjuntos Fuzzy



Funções de pertinência para conjuntos fuzzy

- Um conjunto fuzzy A é definido pela sua função de pertinência M_A

$$M_B(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & \text{for } x \le 2 \\ 0 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

$$M_C(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{6} & \text{for } x \le 7 \\ 1 & \text{for } x > 7 \text{ and } x \le 8 \\ \dfrac{14-x}{6} & \text{for } x > 8 \end{cases}$$

Funções de pertinência para conjuntos fuzzy

- De forma similar, nós poderíamos ter definido funções de pertinência para os conjuntos fuzzy T(teenager) e A (adult).
- Essas funções são arbitrárias e refletem a visão subjetiva do autor.
- Diferentes funções poderiam ser definidas para $M_B(x)$ e $M_C(x)$.

Funções de pertinência para conjuntos fuzzy

- Conjuntos fuzzy são representados por uma lista de pares, em que cada par representa um valor e um valor de pertinência para aquele valor.

$$A=\{(x_1,M_A(x_1)),\ldots,(x_n,M_A(x_n))\}$$

- Por exemplo, nós poderíamos definir B, o conjunto dos bebês, como:

$$B=\{(0,1),(2,0)\}$$

- Similarmente, para o conjunto C (crianças)

$$C=\{(1,0),(7,1),(8,1),(14,0)\}$$

Operadores de conjuntos fuzzy

- A teoria dos conjuntos tradicional (desenvolvida por Georg Cantor no século XIX), usa operadores que podem ser aplicados aos conjuntos A e B.
  - **Não** A
  - $A \cup B$
  - $A \cap B$
- Esses operadores podem ser relacionados aos operadores lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$

Operadores de conjuntos fuzzy

- Como resultado, os operadores de conjuntos são comutativos, associativos e distributivos e obedecem às leis de De Morgan:

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

- Nós podemos definir operadores similares para os conjuntos fuzzy. O complemento de um conjunto A cuja função de pertinência é $M_{A,}$ é definido como

$$M_{\neg A}(x) = 1 - M_A(x)$$

Operadores de conjuntos fuzzy

- Assim, nós poderíamos definir o grupo dos não-bebês como

$$M_{\neg A}(x) = 1 - M_A(x)$$

- De modo que:

$$\neg B = \{(0,0),\ (2,1)\}$$

- Similarmente

$$\neg C = \{(1,1),\ (7,0),\ (8,0),\ (14,1)\}$$

Operadores de conjuntos fuzzy

- Definição de intersecção de dois conjuntos fuzzy

$$M_{(A \cap B)}(x) = MIN(M_A(x), M_B(x))$$

- Por exemplo, a intersecção dos conjuntos dos bebês e das crianças

$$B = \{(0,1), (2,0)\}$$

$$C = \{(1,0), (7,1), (8,1), (14,0)\}$$

- Para determinar a intersecção, nós precisamos definir os conjuntos para os mesmos valores

Operadores de conjuntos fuzzy

$$B=\{(0,1), (1, 0.5), (2,0), (7,0), (8,0), (14, 0)\}$$

$$C=\{(0,0), (1,0), (2, 0.166),(7,1), (8,1), (14, 0)\}$$

- Agora, nós podemos encontrar a intersecção usando

$M_{(B \cap C)}(x)=MIN(M_B(x), M_C(x))$, que resulta:

$$B \cap C=\{(0,0), (1, 0), (2,0), (7,0), (8,0), (14, 0)\}$$

- O que está errado?
- Nós precisamos definir o conjunto usando valores que definirão o intervalo de forma apropriada.

Operadores de conjuntos fuzzy

$$B \cap C = \{(1, 0), (1.75, 0.125), (2,0)\}$$

- De forma similar, nós podemos definir a união de dois conjuntos fuzzy A e B como:

$$M_{(A \cup B)}(x) = MAX(M_A(x), M_B(x))$$

- Assim, a união dos conjuntos fuzzy dos bebês e crianças é:

$$B \cup C = \{(0, 1), (1.75, 0.125), (7,1), (8,1), (14,0)\}$$

Operadores de conjuntos fuzzy

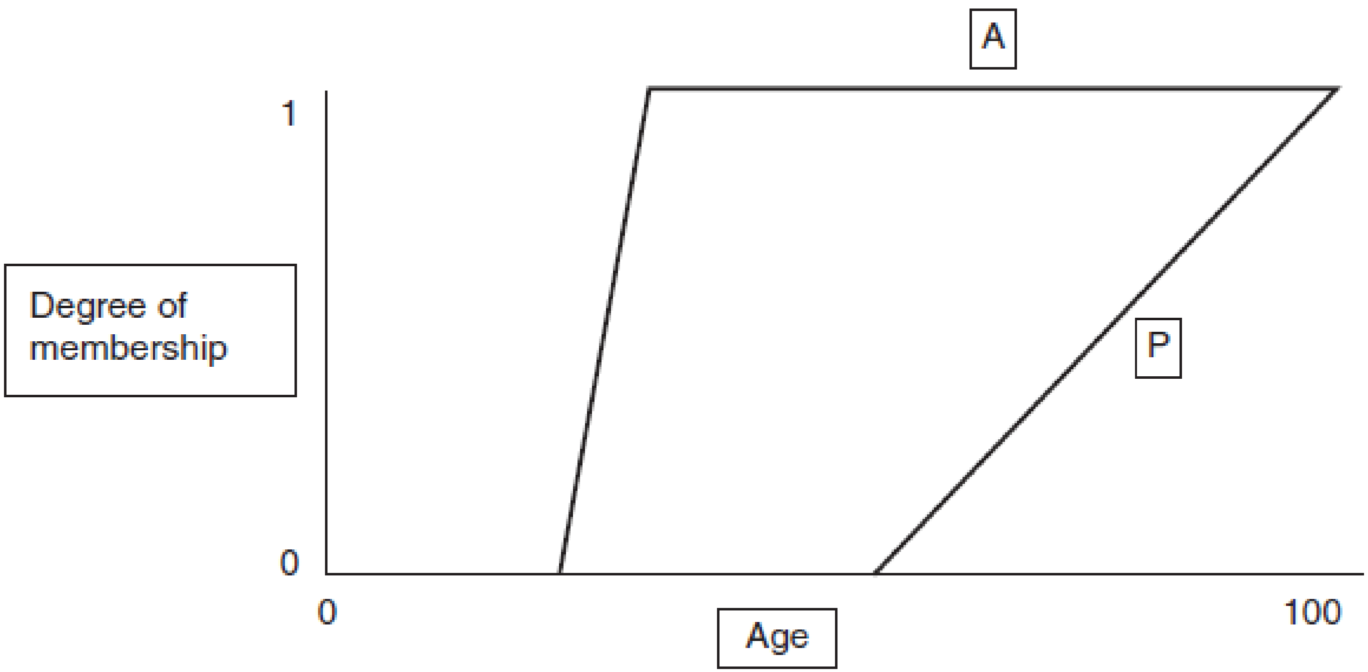
- O último operador de conjuntos fuzzy é a **inclusão**
- Na teoria dos conjuntos tradicional, se um conjunto A contém um conjunto B, então todos os elementos do conjunto B são também elementos do conjunto A.
- Em outras palavras:

$$A \cup B = A$$

$$A \cap B = B$$

- Nesse caso, $A \supset B$.

Operadores de conjuntos fuzzy



Operadores de conjuntos fuzzy

- Para exemplificar, consideremos um conjunto fuzzy denominado “aposentados” (pensioners)

$$M_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 55 \\ \dfrac{x-55}{45} & \text{for } x > 55 \end{cases}$$

- A figura mostra claramente que a intersecção de A e P é P. Assim, P é um subconjunto de A, ou A ⊃ P.

Operadores de conjuntos fuzzy

- A definição de contenção fuzzy é:

  $A \supset B$ se e somente se $\forall x(M_B(x) \leq M_A(x))$

- Em outras palavras, B é um subconjunto fuzzy de A se todo valor de pertinência em B é menor ou igual ao valor de pertinência de A.

Hedge (modificador)

- Um hedge é um qualificador de conjunto fuzzy, como "muito", "extremamente", "um pouco". Quando um desses qualificadores é aplicado ao conjunto fuzzy, tal como "pessoas altas", nós produzimos um novo conjunto.
- Por exemplo, quando aplicamos o hedge "muito" para "pessoas altas", nós produzimos um subconjunto de "pessoas altas" chamado "pessoas muito altas".

Hedge (modificador)

- O significado desses modificadores são subjetivos como os dos próprios conjuntos fuzzy.
- Contudo, é usual usar uma definição matemática sistemática para esses modificadores de modo que eles possam ser aplicados logicamente.
- Frequentemente um modificador é aplicado elevando a função de pertinência a uma determinada potência.
- Por exemplo, se MA é a função de pertinência do conjunto fuzzy de pessoas altas, então a função de avaliação de VA (pessoas muito altas) é:

$$M_{VA}(x) = (M_A(x))^2$$

Hedge (modificador)

- De forma similar, nós podemos definir modificadores como “razoavelmente”, “pouco” ou “extremamente” como a elevação das funções de pertinência de determinado conjunto fuzzy para 1.3, 0.5 e 4, respectivamente.
- Perceba que enquanto modificadores como “muito”, “extremamente” definem um subconjunto de um conjunto fuzzy, delimitadores como “mais ou menos” expandem o conjunto. Uma pessoa que não é alta pode ser definida como, por exemplo, “mais ou menos alta”.

Lógica fuzzy

- Lógica fuzzy é uma forma de lógica que utiliza variáveis fuzzy.
- Lógica fuzzy é não-monotônica, no sentido de que se um novo fato fuzzy for adicionado à base de dados, esse fato pode contradizer conclusões que foram previamente obtidas da base de dados.
- Da mesma forma que MIN e MAX foram usadas para a intersecção e união de conjuntos fuzzy, elas também podem ser usadas para calcular a conjunção e disjunção de variáveis fuzzy.

Lógica fuzzy

- Cada variável fuzzy pode assumir o valor 0 (inteiramente falso), 1 (inteiramente verdadeiro), ou algum valor intermediário, como 0.5 (tanto verdadeiro como falso).
- Se A e B são variáveis fuzzy, então nós podemos definir os conectivos lógicos e como:

$$A \vee B = MAX(A,B)$$

$$A \wedge B = MIN(A,B)$$

De forma similar, podemos definir a negação como:

$$\neg A = 1 - A$$

Lógica fuzzy

- Assim como na lógica proposicional, podemos definir qualquer conectivo binário usando apenas $\wedge$ e $\neg$, na lógica fuzzy podemos definir qualquer conectivo usando apenas MIN e $f(x)=1-x$;
- Evidentemente, não é possível escrever uma tabela-verdade completa para um conectivo fuzzy porque cada variável pode assumir um número infinito de valores.
- Contudo, podemos escrever uma tabela-verdade para um conjunto finito de valores de entrada. Por exemplo, podemos considerar o conjunto {0, 0.5, 1}, os quais serão usados em uma lógica multivalente que assume três valores lógicos.

Lógica fuzzy

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	0.5	0.5
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	1
1	0.5	1
1	1	1

A	¬A
0	1
0.5	0.5
1	0

Lógica fuzzy

- A lógica fuzzy também possui o operador $\rightarrow$
- De acordo com a lógica clássica, a seguinte igualdade é verdadeira

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$

- Desse modo, parece natural definir um conjunto fuzzy como segue:

$$A \rightarrow B = MAX((1-A), B)$$

Lógica fuzzy

A	B	A → B
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Alguma coisa errada?

Lógica fuzzy

- Como resultado, algumas definições alternativas para a implicação fuzzy foram propostas. Uma dessas definições é conhecida como implicação de Gödel, que pode ser definida como:

$$A \rightarrow B = (A \leq B) \vee B$$

Lógica fuzzy

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0
0.5	0.5	1
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1

Lógica fuzzy

Modus Ponens

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
0	0	1	1
0	0.5	1	1
0	1	1	1
0.5	0	0	1
0.5	0.5	1	0.5
0.5	1	1	1
1	0	0	1
1	0.5	0.5	1
1	1	1	1

Slides baseados no livro **Inteligência Artificial**, Ben Coppin, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2010.