Iniciado em	segunda-feira, 12 jun. 2023, 15:08
Estado	Finalizada
Concluída em	sábado, 17 jun. 2023, 16:11
Tempo empregado	5 dias 1 hora
Avaliar	**5,00** de um máximo de 10,00(**50**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize a integral de superfície no teorema de Stokes para calcular a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}$ ao redor da curva C na direção indicada.

$\vec{\mathbf{F}} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

- a. 3π
- b. 4π
- c. 8π
- d. -8π ✔
- e. -4π

Sua resposta está correta.

Solução: Primeiro, calculamos o rotacional: $\text{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3x^2y^2\mathbf{k}$. Como $\vec{\mathbf{n}} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{4}$, então $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\frac{3}{4}x^2y^2z$. Dessa forma, $d\sigma = \frac{4}{z}\,dA$. Portanto,

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\int_R \left(-\frac{3}{4}x^2y^2z\right)\left(\frac{4}{z}\right)\,dA = -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2\cos^2\theta)(r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = -3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 (\cos\theta\,\sin\theta)^2\,d\theta = -32\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2$$

A resposta correta é:
-8π

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize a integral de superfície no teorema de Stokes para calcular a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}$ ao redor da curva C na direção indicada.

$\vec{\mathbf{F}} = (y^2+z^2)\mathbf{i} + (x^2+y^2)\mathbf{j} + (x^2+y^2)\mathbf{k}$, onde C é o quadrado limitado pelas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$ no plano xy, no sentido anti-horário quando visto de cima.

- a. 0 ✔
- b. 1.5
- c. -1
- d. 1
- e. 2

Sua resposta está correta.

Solução: Primeiro, calculamos o rotacional: $\operatorname{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & x^2+y^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = (2y)\mathbf{i} + (2z-2x)\mathbf{j} + (2x-2y)\mathbf{k}$. Como $\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$, então $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 2x - 2y$. Dessa forma, $d\sigma = dx\,dy$. Portanto, $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(2x-2y)dxdy = \int_{-1}^{1} -4ydy = 0$.

A resposta correta é:
0

Questão **3**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Seja S o cilindro $x^2+y^2=a^2$, $0 \le z \le h$, juntamente com seu topo, $x^2+y^2 \le a^2$, $z = h$. Seja $\vec{\mathbf{F}} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. Utilize o teorema de Stokes para encontrar o fluxo exterior de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$ através de S.

- a. $-\pi a^2$
- b. $-3\pi a^2$ ✖
- c. $2\pi a^2$
- d. $3\pi a^2$
- e. πa^2

Sua resposta está incorreta.

Solução: O fluxo de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\,d\sigma = \oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, então $\vec{\mathbf{r}} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\sin t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$,

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$. Portanto, $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = ay\sin t + ax\cos t = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t = a^2$

O fluxo de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} a^2\,dt = 2\pi a^2$

A resposta correta é:
$2\pi a^2$

Questão **4**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Seja $\vec{\mathbf{n}}$ a normal unitária exterior (normal para longe da origem) da casca parabólica S: $4x^2 + y + z^2 = 4$, $y \geq 0$, e seja $\vec{\mathbf{F}} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\mathbf{i} + (tg^{-1}y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\mathbf{k}$. Encontre o valor de $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$.

a. 2π ✖

b. -4π

c. π

d. 4π

e. -2π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Primeiro, calculamos o rotacional: $\text{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -z + \frac{1}{2+x} & tag^{-1} & x + \frac{1}{4+z} \end{vmatrix} = -2\mathbf{j}$.

Se $f(x, y, z) = 4x^2 + y + z^2$, então $\nabla f = 8x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

Como $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ e $\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{j}$, $|\nabla f \cdot \vec{\mathbf{p}}| = 1$, $d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{\mathbf{p}}|}\, dA$=$|\nabla f|\, dA$, então $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \frac{1}{|\nabla f|}(-2\mathbf{j} \cdot \nabla\mathbf{f}) = \frac{-2}{|\nabla f|}$.

Então podemos escrever $\nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = -2\, dA$.

Portanto, $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int\int_R -2\, dA = -2$ (Area de R)=$-2(\pi)(1)(2) = -4\pi$.

A resposta correta é:
-4π

Questão **5**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Utilize a integral de superfície no teorema de Stokes para calcular a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}$ ao redor da curva C na direção indicada.

$\vec{\mathbf{F}} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, onde C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ no plano xy, no sentido anti-horário quando vista de cima.

- a. 3π
- b. 4π
- c. π
- d. 2π
- e. 0 ✖

Sua resposta está incorreta.

Solução: Primeiro, calculamos o rotacional: $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 2x & z^2 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (2-0)\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$. Como $\vec{\mathbf{n}} = \mathbf{k}$, então $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 2$. Dessa forma, $d\sigma = dx\,dy$. Portanto, $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\int_S 2\,dA = 2$ (Área da elipse) $= 4\pi$.

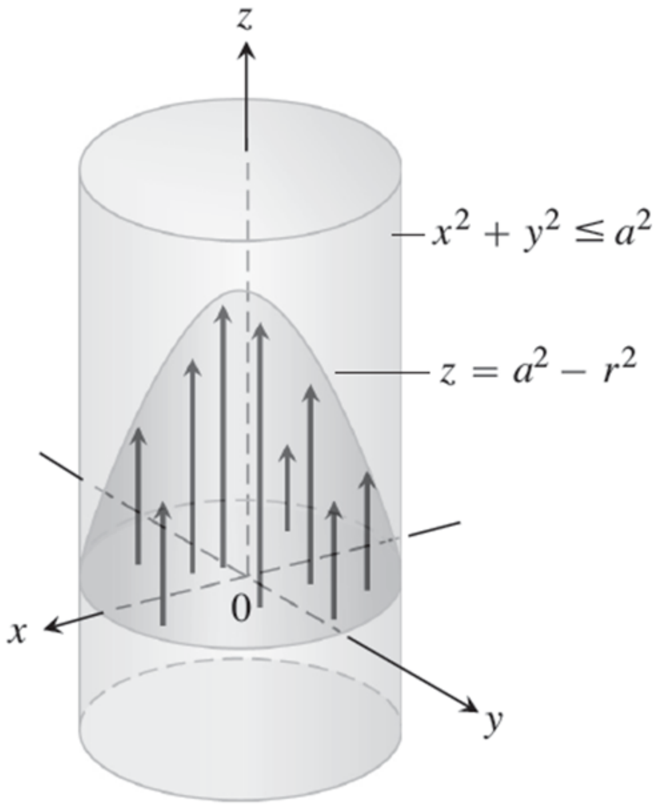
A resposta correta é:
4π

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a divergência do campo de velocidade da figura abaixo,



onde a equação do campo é dada por $\vec{\mathbf{v}} = (a^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$, onde a base desses vetores encontra-se no plano xy e extremidades está no parabolóide $z = a^2 - r^2$.

- a. 4
- b. 1
- c. 3
- d. 2
- e. 0 ✔

Sua resposta está correta.

Solução: Temos $z = a^2 - r^2$ em coordenadas cilíndricas, como $r^2 = x^2 + y^2$, substituímos e obtemos $z = a^2 - (x^2 + y^2)$

$\vec{\mathbf{v}} = (a^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$, assim \(div\,{\bf\vec v}=0\0

A resposta correta é:
0

Questão **7**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Cubo $\vec{\mathbf{F}} = (y-x)\mathbf{i} + (z-y)\mathbf{j} + (y-x)\mathbf{k}$, D: O cubo limitado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$.

- a. 15 ✖
- b. 16
- c. -15
- d. -16
- e. 11

Sua resposta está incorreta.

Solução: Primeiro calculamos as derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x}(y-x) = -1, \frac{\partial}{\partial y}(z-y) = -1, \backslash, \frac{\partial}{\partial z}(y-x) = 0$$

Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = -2$ como a divergência, então podemos calcular o fluxo

$$flux = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2\,dx\,dy\,dz = -2(2^3) = -16$$

A resposta correta é:
-16

Questão **8**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Lata cilíndrica $\vec{\mathbf{F}} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2 z)\mathbf{j} + 4x^2 y^3 \mathbf{k}$, D: A região cortada do primeiro octante pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelo plano $z = 3$.

- a. $112 + 6\pi$ ✔
- b. $-111 - 6\pi$
- c. $115 - 6\pi$
- d. $114 - 6\pi$
- e. $-113 + 6\pi$

Sua resposta está correta.

Solução: Primeiro fazemos a derivada parcial

$\frac{\partial}{\partial x}(6x^2 + 2xy) = 12x + 2y, \frac{\partial}{\partial y}(2y + x^2 z) = 2, \backslash, \frac{\partial}{\partial z}(4x^2 y^3) = 0$. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = 12x + 2y + 2$. Então calculamos o fluxo:

$$flux = \int\int_D \int (12x + 2y + 2)\,d\vec{\mathbf{V}} = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (12r\cos\theta + 2r\sin\theta + 2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(32\cos\theta + \frac{16}{3}\sin\theta + 4\right)\,d\theta\,dz = \int_0^3 (32 + 2$$

A resposta correta é:
$112 + 6\pi$

Questão **9**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Esfera espessa $\vec{\mathbf{F}} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, D: A região $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$.

- a. 14π
- b. 15π
- c. 12π
- d. 11π ✖
- e. 13π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Temos $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, fazemos:

$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho}$, $\frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{z}{\rho}$. Dando continuidade

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \left(\frac{x}{\rho^2}\right)\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}$. Similar $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}$ e $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}$. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{3}{\rho} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^3} = \frac{2}{\rho}$. Então calculamos o fluxo:

$$flux = \int\int_D \int \frac{2}{\rho}\, d\vec{\mathbf{V}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^2 \left(\frac{2}{\rho}\right)(\rho^2 \sin\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 3\sin\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} 6\, d\theta = 12\pi$$

A resposta correta é:
12π

Questão **10**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Cilindro e paraboloide $\vec{\mathbf{F}} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$, D: A região dentro do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leq 4$ entre o plano $z = 0$ e o paraboloide $z = x^2 + y^2$.

- a. -14
- b. -16
- c. 14
- d. 16
- e. -8π ✔

Sua resposta está correta.

Solução: Inicialmente calculamos a derivada parcial

$\frac{\partial}{\partial x}(y) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x, \backslash, \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = x - 1$, como $z = x^2 + y^2$, em que $z = r^2$ em coordenadas cilíndricas. Seguimos calculando a integral tripla da divergência para encontrarmos o fluxo:

$$Flux = \int \int_D \int (x-1)\,dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2} (r\,\cos\,\theta - 1)\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3\,\cos\,\theta - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\cos\,\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{32}{5}\right.$$

A resposta correta é:
-8π