Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

Lista de exercícios para AP2

1) Encontre a série de Fourier de tempo discreto do sinal:

$$x[n] = \cos(0,5\pi n) + \sin(0,75\pi n) + 5.$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{1}{2}\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{1}{2}\pi n} + \frac{1}{2j}e^{j\frac{3}{4}\pi n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{3}{4}\pi n} + 5$$

Período fundamental de $\cos(0,5\pi n)$: $\Omega_1 = \frac{1}{2}\pi$, $N_1 = \frac{2\pi k}{\Omega_1} \rightarrow N_1 = 4$

Período fundamental de $\sin(0,75\pi n)$: $\Omega_2 = \frac{3}{4}\pi$, $N_2 = \frac{2\pi k}{\Omega_2} \rightarrow N_2 = \frac{8}{3}k \rightarrow N_2 = 8$

Período fundamental de $x[n]$: mínimo múltiplo comum (MMC) de N_1 e $N_2 \rightarrow N = 8$

Frequência fundamental de $x[n]$: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Achando a série de Fourier de tempo discreto por inspeção:

$$x[n] = \sum_{k=-4}^{3} X[k]e^{jk\frac{\pi}{4}n}$$

$k = 2 \rightarrow X[2] = 1/2$

$k = -2 \rightarrow X[-2] = 1/2$

$k = 3 \rightarrow X[3] = \frac{1}{2j}$

$k = -3 \rightarrow X[-3] = -\frac{1}{2j}$

$k = 0 \rightarrow X[0] = 5$

A série de Fourier $X[k]$ foi descrita acima apenas para o primeiro período. Para k fora do intervalo $-4 \leq k \leq 3$, $X[k]$ é periódica com período $N = 8$.

2) Encontre a série de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{2}{3}m) + \delta(t - 2m).$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

Período fundamental do primeiro termo: $T_1 = \frac{2}{3}$

Período fundamental do segundo termo: $T_2 = 2$

Período fundamental de $x(t)$: mínimo múltiplo comum (MMC) de T_1 e $T_2 \rightarrow T = 2$

Frequência fundamental de $x(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Calculando a série de Fourier:

$$X[k] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{2}{3}m) + \delta(t - 2m) \right] e^{-jk\pi t} dt$$

$$X[k] = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\delta(t) + \delta(t - \frac{2}{3}) + \delta(t + \frac{2}{3}) + \delta(t) \right] e^{-jk\pi t} dt$$

$$X[k] = \frac{1}{2} \left[2 + e^{-jk\pi\frac{2}{3}} + e^{jk\pi\frac{2}{3}} \right]$$

$$X[k] = 1 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right)$$

3) Encontre a resposta ao impulso em tempo discreto $h[n]$ do filtro passa-baixa ideal cuja resposta em frequência é definida (no primeiro período) por:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j2\Omega}, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-j2\Omega} e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{j\Omega(n-2)} d\Omega$$

Para $n \neq 2$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\Omega(n-2)}}{j(n-2)} \right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j(n-2)} \left[e^{j\frac{\pi}{2}(n-2)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(n-2)} \right]$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(n-2))}{\pi(n-2)}$$

$$h[n] = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}(n-2))}{\frac{\pi}{2}(n-2)}$$

Para $n = 2$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} 1|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Resultado final:

$$h[n] = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{\pi}{2}(n-2))$$

4) Encontre a transformada de Fourier (de tempo contínuo) do sinal: $x(t) = e^{at}u(-t)$, para $a > 0$, em que $u(t)$ é a função degrau unitário. Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt$$

$$X(j\omega) = \left.\frac{e^{(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\right|_{-\infty}^{0}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a-j\omega)}\left[1-0\right]$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a-j\omega)}$$

5) Encontre a saída de um sistema LTI (de tempo discreto) cuja entrada é dada por: $x[n] = \frac{3}{\pi n}\sin(\frac{1}{2}\pi n)$, e a resposta ao impulso é dada por $h[n] = \frac{1}{\pi(n-1)}\sin(\frac{1}{3}\pi(n-1))$. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução:

Olhando na Tabela:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 3, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega}, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando Teorema da convolução:

$$Y(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 3e^{-j\Omega}, & |\Omega| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Olhando na Tabela: $y[n] = \frac{3}{\pi(n-1)} \sin(\frac{1}{3}\pi(n-1))$

6)Encontre a transformada de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \cos(\frac{1}{3}\pi t)\frac{d}{dt}\left(te^{-at}u(t)\right),$$

para $a > 0$, em que $u(t)$ é a função degrau unitário. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução: Olhando na Tabela:

$$\boxed{te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}}$$

Propriedade da diferenciação:

$$\frac{d}{dt}\left(te^{-at}u(t)\right) \leftrightarrow \frac{j\omega}{(a+j\omega)^2}$$

Propriedade da multiplicação por exponencial complexa:

$$\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{1}{3}\pi t} + e^{-j\frac{1}{3}\pi t}\right)\frac{d}{dt}\left(te^{-at}u(t)\right) \leftrightarrow \frac{j(\omega - \frac{1}{3}\pi)}{2(a+j(\omega-\frac{1}{3}\pi))^2} + \frac{j(\omega + \frac{1}{3}\pi)}{2(a+j(\omega+\frac{1}{3}\pi))^2}$$