Álgebra Linear
Aula 15

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Produto Vetorial

O produto vetorial $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ entre dois vetores em $\mathbb{R}^3$ é definido como

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Teorema 3.5.1

Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ forem vetores tridimensionais então temos

1. $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}) = 0$;
2. $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$;
3. $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \mathrm{sen}\alpha$, onde α é o ângulo entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$;
4. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})v - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})w$;
5. $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})v - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})u$;

Teorema 3.5.2

Se $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ forem vetores tridimensionais então temos

1. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$;
2. $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$;
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$;
4. $\lambda(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (\lambda\boldsymbol{v})$;
5. $\boldsymbol{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$;
6. $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.

Exemplo

Sejam $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ vetores do $\mathbb{R}^3$. Escreva $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ como uma combinação dos vetores da base canônica.

Exemplo

Considere $\boldsymbol{v} = (0, 1, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (1, 3, 4)$. Calcule a área do paralelogramo determinado por esses vetores.

Teorema 3.5.3

Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ forem vetores não paralelos tridimensionais então $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|$ é a área do paralelogramo determinado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Produto misto

Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

é o produto misto de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Produto misto

Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vetores do espaço tridimensional, dizemos que

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

é o produto misto de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Temos

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Sejam $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 2)$ e $\boldsymbol{w} = (2, 2, 0)$ vetores fixos. Calcule o volume do paralelepípedo determinado por esses três vetores.

Teorema 3.5.4

1. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são vetores bidimensionais então a área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é

$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.5.4

1. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são vetores bidimensionais então a área do paralelogramo no espaço bidimensional determinado por $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é
$$\det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}.$$
2. Sejam $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ vetores no espaço tridimensional. Temos que o volume do paralelepípedo definido por esses três vetores é $|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})|$.

Exemplo

Mostre que os vetores tridimensionais $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ e $\boldsymbol{w} = (2, 3, 2)$ são coplanares.

Exemplo

Mostre que os vetores tridimensionais $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 1)$ e $\boldsymbol{w} = (2, 3, 2)$ são coplanares.

Teorema 3.5.5

Os vetores tridimensionais $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são coplanares se e só se $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = 0$.