- Cálculo Diferencial e Integral 1 - 1ª Avaliação Progressiva:
- Nome: William Bruno Sales de Paula Lima
- Matrícula: 497345

2ª)

a) $\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{2x^2-9} - x}{x+3}$

i) Vimos que se substituirmos o x diretamente por -3, chegaremos a uma indeterminação:

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{2x^2-9} - x}{x+3} = \frac{\sqrt{2\cdot(-3)^2-9} - (-3)}{-3+3} = \frac{6}{0} = \nexists$$

ii) Tentaremos acabar com a indeterminação usando:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{2x^2-9} - x}{x+3} \cdot \frac{(\sqrt{2x^2-9}+x)}{(\sqrt{2x^2-9}+x)} = \lim_{x \to -3} \frac{(\sqrt{2x^2-9})^2 - x^2}{(x+3)\cdot(\sqrt{2x^2-9}+x)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x^2-9-x^2}{(x+3)(\sqrt{2x^2-9}+x)} = \lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{(x+3)(\sqrt{2x^2-9}+x)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(\sqrt{2x^2-9}+x)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-9}+x} \cdot \frac{(\sqrt{2x^2-9}-x)}{(\sqrt{2x^2-9}-x)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x-3(\sqrt{2x^2-9}-x)}{2x^2-9+x^2} = \lim_{x \to -3} \frac{x-3(\sqrt{2x^2-9}-x)}{x^2-9} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x-3\cdot(\sqrt{2x^2-9}-x)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{2x^2-9}-x}{x+3} = \frac{6}{0} = \nexists$$

Continuação 2ª a:

- Portanto, não há como remover a indeterminação do limite, ou seja:

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{2x^2-9}-x}{x+3} = \nexists \text{ , não existe.}$$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-2x^2-5x+6}$

i) Substituindo a variável x por 1, chegamos a uma indeterminação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-2x^2-5x+6} = \frac{1+3\cdot 1-4}{1^3-2\cdot 1^2-5\cdot 1+6} = \frac{4-4}{7-7} = \frac{0}{0} = \nexists$$

ii) Como $x=1$ é raiz de ambos os polinômios, iremos dividi-los por $x-1$ e usar o fato que:

Dividendo = (Divisor)·(Quociente) + Resto para fatorá-los.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2+3x-4 & x-1 \\ \hline - & x^2+x & x+4 \\ & 4x-4 & \\ - & 4x+4 & \\ & (0) & \end{array}$$

$x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$

$$\begin{array}{rl|l} & x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \hline & -x^3+x^2 & x^2-x-6 \\ & -x^2-5x & \\ + & x^2-x & \\ & -6x+6 & \\ + & 6x-6 & \\ & (0) & \end{array}$$

$x^3-2x^2-5x+6 = (x-1)(x^2-x-6)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^3-2x^2-5x+6} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x^2-x-6)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+4}{x^2-x-6} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 4}{\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2 - \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 6} = \frac{1+4}{1^2-1-6} = \frac{5}{-6} = \boxed{-\frac{5}{6}} \;//$$

3ª)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ L, & x = 1 \end{cases}$$

• <u>Teorema</u>: Para que uma função $f(x)$ seja contínua em $x = a$:

i) $f(a)$ existe ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

1) $f(1) = L$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \dfrac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 1} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x \to 1} x} + \lim\limits_{x \to 1} 1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

3) Portanto, para que $f(x)$ seja contínua em $x = 1$,

$$L = f(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}}$$

//

4ª)

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{para } x \leq 3 \\ Kx^2, & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

i) Limites laterais de $f(x)$ em $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 3x - 5 = 3 \cdot \lim_{x \to 3^-} x - \lim_{x \to 3^-} 5 = 3 \cdot 3 - 5 = \underline{4}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} Kx^2 = K \cdot \left(\lim_{x \to 3^+} x\right)^2 = K \cdot 3^2 = \underline{9K}$$

ii) Para que $f(x)$ seja contínua em $x = 3$:

$\lim_{x \to 3} f(x)$ existe se e somente se: $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) \iff$

$$\iff 4 = 9K \quad \div (9) \iff \boxed{K = \frac{4}{9}}$$

Dessa forma: $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 9K = 9 \cdot \frac{4}{9} = 4 = \lim_{x \to 3^-} f(x) \implies$

$$\implies \lim_{x \to 3} f(x) = 4 = f(3)$$

Portanto, para $K = \frac{4}{9}$, $f(x)$ é contínua em $x = 3$

5ª)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sec(x)}{x^2}$ • Dados: • $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ • $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

• $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos(x)}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2 \cdot \cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2(x)} - 1}{x^2 \cdot \cos(x)} \cdot \frac{\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1\right)}{\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1 - \sin^2(x)}\right)^2 - 1^2}{x^2 \cdot \cos(x) \cdot \left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2(x)}{x^2 \cdot \cos(x) \cdot \left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{-1}{\cos(x) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{-1}{\cos(x) \cdot \left(\sqrt{1 - \sin^2(x)} + 1\right)} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\cos(x) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(x) + 1}} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \left[\frac{\lim\limits_{x \to 0} -1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) \cdot \left(\sqrt{\lim\limits_{x \to 0} 1 - \left(\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)\right)^2} + \lim\limits_{x \to 0} 1\right)}\right] =$$

$$= 1 \cdot \left[\frac{-1}{1 \cdot \left(\sqrt{1 - 0} + 1\right)}\right] = 1 \cdot \left[\frac{-1}{2}\right] = -\frac{1}{2}$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{cotg(3x)}{cossec(4x)}$ • $cotg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

• $cossec(x) = \frac{1}{sin(x)}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cotg(3x)}{cossec(4x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{cos(3x)}{sin(3x)}}{\frac{1}{sin(4x)}} = \lim_{x \to 0} \frac{sin(4x) \cdot cos(3x)}{sin(3x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4x}{4x} \cdot sin(4x) \cdot cos(3x)}{\frac{3x}{3x} \cdot sin(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \frac{sin(4x)}{4x} \cdot cos(3x)}{3 \cdot \frac{sin(3x)}{3x}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} 4 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin(4x)}{4x} \cdot \lim_{x \to 0} cos(3x)}{\lim_{x \to 0} 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sin(3x)}{3x}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{4}{3} //$$

Digitalizado com CamScanner

6ª)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[2]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

i) Ao tentarmos substituir x por 1 no limite, temos uma indeterminação:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{\sqrt{1}-1}{\sqrt[3]{1}-1} = \frac{0}{0} = \nexists$$

ii) Removendo a indeterminação utilizando os produtos notáveis: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- Seja $a=\sqrt{x}$ e $b=1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2-1^2}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}$$

- Seja $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(\sqrt[3]{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{[(\sqrt[3]{x})^3-1^3]\cdot(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \to 1} x} + \lim_{x \to 1} 1}{\sqrt{\lim_{x \to 1} x} + \lim_{x \to 1} 1} = \frac{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}{\sqrt{1}+1} =$$

$$= \frac{3}{2}$$