2.2.2 Prova por Contraposição

A prova por contraposição baseia-se no seguinte resultado (denominado de *contraposição*), o qual foi verificado no EXEMPLO 2.18 - Contraposição:

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$$

Definição 2.15 - Prova por Contraposição
Uma prova é dita *Prova por Contraposição* ou *Demonstração por Contraposição* quando, para provar $p \to q$, prova-se $\neg q \to \neg p$, pois são formas equivalentes. Para provar $\neg q \to \neg p$ basta, a partir de $\neg q$, obter $\neg p$ (prova direta). ❑

EXEMPLO 2.27 - Prova por Contraposição
Para demonstrar o seguinte teorema (suponha $n \in \mathbf{N}$):

$$n! > (n+1) \to n > 2$$

pode-se, equivalentemente, demonstrar por contraposição que:

$$n \leq 2 \to n! \leq n+1$$

Observe que é muito simples provar que $n \leq 2 \to n! \leq n+1$, pois basta testar a proposição para os casos $n=0$, $n=1$ e $n=2$, o que se sugere como exercício. ❑

2.2.3 Prova por Redução ao Absurdo

A prova por redução ao absurdo baseia-se no seguinte resultado (denominado de *redução ao absurdo*), o qual foi verificado no EXEMPLO 2.19 - Redução ao Absurdo:

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to F$$

Definição 2.16 - Prova por Redução ao Absurdo
Uma prova é dita *Prova (Demonstração) por Redução ao Absurdo* ou simplesmente *Prova (Demonstração) por Absurdo* quando a prova de $p \to q$ consiste em supor a hipótese p, supor a negação da tese $\neg q$ e concluir uma contradição (em geral, $q \wedge \neg q$). ❑

Observe que a técnica de demonstração conhecida como *prova por contra-exemplo*, é uma demonstração por absurdo. De fato, em uma demonstração por absurdo, a construção da contradição $q \wedge \neg q$ é, em geral, a apresentação de um contra-exemplo.

EXEMPLO 2.28 - Prova por Redução ao Absurdo
Considere o seguinte teorema:

*0 é o único elemento neutro da adição em **N***

ou seja, reescrevendo na forma de $p \to q$:

*se 0 é elemento neutro da adição em **N**,*
*então 0 é o único elemento neutro da adição em **N***

Uma prova por redução ao absurdo é como segue:

a) Suponha que (hipótese) 0 é elemento neutro da adição em **N** e que (negação da tese) 0 *não* é o único elemento neutro da adição em **N**. Seja e um elemento neutro da adição em **N** tal que $e \neq 0$ (se 0 não é o único, então existe um outro, diferente de 0);

b) Então:
- como 0 é elemento neutro, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, vale $n = 0 + n = n + 0$. Em particular, para $n = e$, vale $e = 0 + e = e + 0$
- como e é elemento neutro, para qualquer $n \in \mathbf{N}$, vale $n = n + e = e + n$. Em particular, para $n = 0$, vale $0 = 0 + e = e + 0$
- portanto, como $e = 0 + e = e + 0$ e $0 = 0 + e = e + 0$, pela transitividade da igualdade, vale $e = 0$, o que é uma contradição, pois foi suposto que $e \neq 0$

Logo, é absurdo supor que o elemento neutro da adição em **N** não é único. Portanto, 0 é o único elemento neutro da adição em **N**. ❑

2.3 Exercícios

Exercício 2.1 Sabendo que os valores-verdade das proposições p e q são respectivamente V e F, determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $p \wedge \neg q$
b) $p \vee \neg q$
c) $\neg p \wedge q$
d) $\neg p \wedge \neg q$
e) $\neg p \vee \neg q$
f) $p \wedge (\neg p \vee q)$

Exercício 2.2 Determine $V(p)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
b) $V(q) = F$ e $V(p \vee q) = F$
c) $V(q) = F$ e $V(p \to q) = F$
d) $V(q) = F$ e $V(q \to p) = V$
e) $V(q) = V$ e $V(p \leftrightarrow q) = F$
f) $V(q) = F$ e $V(q \leftrightarrow p) = V$

Exercício 2.3 Determine $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(p \to q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
b) $V(p \to q) = V$ e $V(p \vee q) = F$
c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$
d) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = V$
e) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\neg p \vee q) = V$

Exercício 2.4 Construa as tabelas-verdade das seguintes fórmulas e identifique as que são tautologias ou contradições:

a) $\neg(p \vee \neg q)$
b) $\neg(p \to \neg q)$
c) $p \wedge q \to p \vee q$
d) $\neg p \to (q \to p)$
e) $(p \to q) \to p \wedge q$
f) $q \leftrightarrow \neg q \wedge p$
g) $p \to (q \to (q \to p))$

h) $\neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
i) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$
j) $\neg p \wedge r \rightarrow q \vee \neg r$
k) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \neg r$
l) $p \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow q \vee r$
m) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\neg p \leftrightarrow q \vee \neg r)$

Exercício 2.5 Sabendo que as proposições $x = 0$ e $x = y$ são verdadeiras e que as proposições $y = z$ e $y = t$ são falsas, determinar o valor-verdade (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $x = 0 \wedge x = y \rightarrow y \neq z$
b) $x \neq 0 \vee y = t \rightarrow y = z$
c) $x \neq y \vee y \neq z \rightarrow y = t$
d) $x \neq 0 \vee x \neq y \rightarrow y \neq z$
e) $x = 0 \rightarrow (x \neq y \vee y \neq t)$

Exercício 2.6 Considere a tabela-verdade ilustrada na Figura 2.11. Para cada uma das seguintes implicações, procure justificar os nomes associados:

a) *Adição.*

$$p \Rightarrow p \vee q$$

b) *Simplificação.*

$$p \wedge q \Rightarrow p$$

Exercício 2.7 Prove, usando tabela-verdade, as seguintes equivalências:

a) *Idempotência.*

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$
$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

b) *Comutativa.*

$$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$
$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

c) *Associativa.*

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

d) *Distributiva.* A prova da distributividade do conetivo ou sobre o conetivo e, ou seja:

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

foi apresentada na tabela-verdade ilustrada na Figura 2.8. Prove a distributividade do conetivo e se sobre o conetivo ou, ou seja:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

e) *Dupla negação.*

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

f) *DeMorgan* (Augustus DeMorgan, nascido na Índia, de família/educação inglesa, 1806-1871).

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

g) *Absorção.*

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$
$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

Exercício 2.8 Prove, usando tabela-verdade, as seguintes equivalências:

a) $p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
b) $q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$
c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$
d) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

Exercício 2.9 Prove, usando tabela-verdade, que qualquer dos conetivos estudados pode ser expresso usando somente os conetivos $\neg$ e $\wedge$.

Observação: este exercício é mais importante do que pode aparentar em um primeiro momento. De fato, esse resultado é usado ao longo do livro e é fundamental para estudos desenvolvidos em *Técnicas Digitais*, onde as diversas portas lógicas são expressas em termos de $\neg$ e $\wedge$.

Exercício 2.10 Prove, usando tabela-verdade, que os seguintes conetivos podem ser expressos usando os conetivos já estudados:

a) Conetivo EXOR (abreviatura dos termos em inglês *exclusive* e *or*) cuja semântica é dada pela tabela ilustrada na Figura 2.15;
b) Conetivo NAND (abreviatura dos termos em inglês *not* e *and*) cuja semântica é dada pela tabela ilustrada na Figura 2.15.

x	y	x EXOR y	x NAND y
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Figura 2.15 Tabela-verdade: EXOR e NAND

Exercício 2.11 Suponha o conjunto universo **R**.

a) Determine o valor-verdade (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a.1) $(\forall x)(|x| = x)$
a.2) $(\exists x)(x^2 = x)$
a.3) $(\exists x)(|x| = 0)$
a.4) $(\exists x)(x + 2 = x)$
a.5) $(\forall x)(x + 1 > x)$
a.6) $(\forall x)(x^2 = x)$
a.7) $(\exists x)(2x = x)$
a.8) $(\exists x)(x^2 + 3x = -2)$
a.9) $(\exists x)(x^2 + 5 = 2x)$
a.10) $(\forall x)(2x + 3x = 5x)$

b) Negue cada uma das proposições do item acima.

Exercício 2.12 Para ilustrar este exercício, considere o EXEMPLO 2.23 - Quantificador Universal, Quantificador Existencial. Observe que, no exemplo em questão, sempre que uma proposição quantificada universalmente é verdadeira, a mesma proposição, mas quantificada existencialmente, também é verdadeira. Esta observação vale para qualquer proposição (trocando o quantificador universal pelo existencial)? Justifique a sua resposta.

Exercício 2.13 Suponha o conjunto universo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Apresente um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x)(x + 5 < 12)$
b) $(\forall x)(x \text{ é primo})$
c) $(\forall x)(x^2 > 1)$
d) $(\forall x)(x \text{ é par})$

Exercício 2.14 Suponha o conjunto universo $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) Determine o valor-verdade (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
   a.1) $(\forall x)(\forall y)(x + 5 < y + 12)$
   a.2) $(\forall x)(\exists y)(x * y \text{ não é primo})$
   a.3) $(\exists y)(\forall x)(x * y \text{ não é primo})$
   a.4) $(\exists x)(\exists y)(x^2 > y)$
   a.5) $(\forall x)(\exists y)(x^2 > y)$
   a.6) $(\exists x)(\forall y)(x^2 > y)$
   a.7) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + y > z)$
   a.8) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(x + y > z)$
   a.9) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(x + y > z)$
   a.10) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + y > z)$
   a.11) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(x + y > z)$
   a.12) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(x + y > z)$
   a.13) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)(x + y > z)$
b) Negue cada uma das proposições do item acima.

Exercício 2.15 Para demonstrar o seguinte teorema:

$$n! > (n + 1) \rightarrow n > 2$$

pode-se, equivalentemente, demonstrar por contraposição que:

$$n \le 2 \rightarrow n! \le n + 1$$

Observe que é muito simples provar que $n \le 2 \rightarrow n! \le n + 1$, pois é suficiente testar a proposição para os casos $n = 0$, $n = 1$ e $n = 2$. Detalhe esta prova.

3 Álgebra de Conjuntos

Álgebra, desde a sua origem até a sua forma atual, refere-se a cálculos. Com limitações, é desenvolvida de maneira informal ou formal, em praticamente todos os níveis de escolaridade. Por exemplo, as operações aritméticas básicas (adição, multiplicação etc.) sobre o conjunto dos números reais constituem uma álgebra.

Historicamente, o estudo das álgebras em Computação e Informática destaca-se a partir de 1950, com o desenvolvimento da Teoria dos Autômatos e Linguagens Formais. De certa forma, toda a Computação e Informática é baseada, direta ou indiretamente, sobre álgebras. Como comentado anteriormente, as Diretrizes Curriculares do MEC para Cursos de Computação e Informática [MEC 2005] referem-se à Álgebra como sendo uma denominação alternativa para a Matemática Discreta.

Um conceito mais formal de álgebra é introduzido ao longo do livro. Em um primeiro momento, considere (informalmente) que uma *Álgebra* é constituída de operações definidas sobre uma coleção de objetos. Nesse contexto, *Álgebra de Conjuntos* corresponderia às operações definidas sobre todos os conjuntos.

Antes de introduzir as operações sobre conjuntos, o seguinte é tratado:

a) *Diagramas de Venn*, os quais, usando uma representação diagramática, auxiliam o entendimento dos conceitos e raciocínios relacionados com conjuntos;
b) *Paradoxo de Russell*, o qual estabelece um importante resultado relativamente à Teoria dos Conjuntos.

As operações sobre conjuntos são classificadas em *reversíveis* e *não-reversíveis*. Embora as não-reversíveis sejam as mais usuais, as reversíveis são especialmente importantes para Computação e Informática, como será destacado adiante. As seguintes operações são definidas sobre conjuntos:

a) *Não-Reversíveis.*
   - *União*;
   - *Intersecção*;
b) *Reversíveis.*
   - *Complemento*;
   - *Conjunto das Partes*;
   - *Produto Cartesiano*;
   - *União Disjunta*.

Adicionalmente, é introduzida a operação de *diferença*, do tipo não-reversível, a qual é derivada a partir da composição das operações complemento e intersecção.

O estudo da Álgebra de Conjuntos fica sobremaneira facilitado considerando a seguinte observação.

Observação 3.1 - Lógica × Álgebra dos Conjuntos
No estudo da Álgebra de Conjuntos, o leitor atento poderá observar uma relação direta entre os conetivos lógicos introduzidos e as operações sobre conjuntos, como segue: