Álgebra Linear
Aula 19-20

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Exemplo

Considere o seguinte conjunto $S = \{(0,0,1),(1,0,0)\}$. Qual dos seguintes vetores podem ser adicionados a S tal que S continue LI.

1. $(1,0,1)$;
2. $(0,1,0)$;
3. $(2,0,1)$;
4. $(1,2,3)$;

Exemplo

Considere o seguinte conjunto $S = \{(0,0,1),(1,0,0)\}$. Qual dos seguintes vetores podem ser adicionados a S tal que S continue LI.

1. $(1,0,1)$;
2. $(0,1,0)$;
3. $(2,0,1)$;
4. $(1,2,3)$;

Exemplo

Qual vetor podemos remover conjunto $S = \{(1,2,4),(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ sem alterarmos o espaço gerado por S?

Teorema 4.5.3 - Teorema do mais/menos

Seja S um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

1. Se S for um conjunto LI e se $\overrightarrow{v} \in V$ é tal que $\overrightarrow{v} \notin \text{ger}(S)$ então $S \cup \{\overrightarrow{v}\}$ é LI.
2. Se $\overrightarrow{v} \in S$ puder ser expresso como uma combinação dos outros vetores em S então

$$\text{ger}(S) = \text{ger}(S - \{\overrightarrow{v}\}).$$

Exemplo

Considere o seguinte conjunto de vetores $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n\} \subset \mathbb{R}^3$. Como mostramos que S é base de $\mathbb{R}^3$?

Exemplo

Considere o seguinte conjunto de vetores $S = \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Como mostramos que S é base de $\mathbb{R}^3$?

Teorema 4.5.4

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e S um conjunto em V com exatamente n vetores. Então S é uma base de V se, e só se, S gera V ou S é LI.

Exemplo

Decida quais dos conjuntos abaixo são base do $\mathbb{R}^3$. Para aqueles que não são base, como devemos altera los para que se tornem base?

1. $\{(0,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$
2. $\{(1,2,3),(1,2,2),(0,0,1),(0,1,0)\}$
3. $\{(1,1,0),(2,1,0)\}$

Teorema 4.5.5

Seja S um conjunto finito de vetores em um espaço vetorial V de dimensão finita.

1. Se S gerar V, mas não for uma base de V, então S pode ser reduzido a uma base de V removendo vetores apropriados de S.
2. Se S for LI, mas não for uma base de V então S pode ser ampliada a uma base de V acrescentando vetores apropriados a S.

Teorema 4.5.6

Se W for um subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita V então

1. W tem dimensão finita.
2. $\dim(W) \leq \dim(V)$.
3. $W = V$ se, e só se, $\dim(W) = \dim(V)$.

Exemplo

Considere as seguintes bases

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$
- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Exemplo

Considere as seguintes bases

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$
- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Dado $\overrightarrow{v} = (10,6)$, calcule $(\overrightarrow{v})_{S_1}$ e $(\overrightarrow{v})_{S_2}$.

Exemplo

Considere as seguintes bases

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$
- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Dado $(\overrightarrow{v})_{S_1} = (10,6)$, calcule $(\overrightarrow{v})_{S_2}$.

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos em $\mathbb{R}^2$

- $T = \{\overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2\}$
- $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$

Dado $(\overrightarrow{v})_B = (v_1, v_2)$, calcule $(\overrightarrow{v})_T$.

Problema

Dado bases $B = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ e $B' = \{\overrightarrow{u}'_1, \ldots, \overrightarrow{u}'_n\}$ de um espaço vetorial V. Para um vetor fixo v, qual a relação entre $[v]_B$ e $[v]_{B'}$?

Problema

Dado bases $B = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ e $B' = \{\overrightarrow{u}'_1, \ldots, \overrightarrow{u}'_n\}$ de um espaço vetorial V. Para um vetor fixo v, qual a relação entre $[v]_B$ e $[v]_{B'}$?

Solução

Temos que

$$[v]_B = P_{B' \to B}[v]_{B'},$$

onde as colunas de P são os vetores de coordenadas de cada elemento da base B' na base B.

Matrizes de transição

A matriz $P_{B' \to B}$ é denominada matriz de transição de B' para B.

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$
- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos

- $B = \{(1,0),(0,1)\}$
- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Encontre as matrizes de transição $P_{B\to S_1}$, $P_{B\to S_2}$ e $P_{S_1\to S_2}$.
Aplique em $\overrightarrow{v} = (10,6)$, $(\overrightarrow{v})_{S_1}$ e $(\overrightarrow{v})_{S_2}$.

Teorema 4.6.1

Se P for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B'.

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos

- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Exemplo

Considere os seguintes conjuntos

- $S_1 = \{(1,1),(2,1)\}$
- $S_2 = \{(3,4),(2,0)\}$

Encontre a matriz de transição $P_{S_1 \to S_2}$.

Algoritmo para calcular $P_{B \to B'}$

Algoritmo para calcular $P_{B\to B'}$

1. Monte a matriz $[B'|B]$

Algoritmo para calcular $P_{B \to B'}$

1. Monte a matriz $[B'|B]$
2. Reduza a matriz acima para a forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas

Algoritmo para calcular $P_{B \to B'}$

1. Monte a matriz $[B'|B]$
2. Reduza a matriz acima para a forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas
3. A matriz resultante será $[I|P_{B \to B'}]$ (Pq?)

Pergunta

Como reconhecer uma matriz de transição?

Pergunta

Como reconhecer uma matriz de transição?

Teorema 4.6.2

Sejam $B' = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$ e S a base canônica. Se os vetores estão escritos na forma coluna então

$$P_{B'\to S}[\overrightarrow{u}_1|\overrightarrow{u}_2|\cdots|\overrightarrow{u}_n].$$

Atenção

Lembre-se que um vetor pode ser expresso por uma n-upla ordenada, ou uma matriz coluna ou matriz linha.

Atenção

Lembre-se que um vetor pode ser expresso por uma n-upla ordenada, ou uma matriz coluna ou matriz linha.

Teorema 4.7.1

Um sistema $Ax = b$ de equações lineares é consistente se, e só se, b está no espaço coluna de A.

Exemplo

Mostre que o vetor

$$\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

esta no espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Relembre (Teorema 3.4.4)

A Solução geral de um sistema linear consistente $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ pode ser obtida somando uma solução específica qualquer de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ à solução geral de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Relembre (Teorema 3.4.4)

A Solução geral de um sistema linear consistente $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ pode ser obtida somando uma solução específica qualquer de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ à solução geral de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Exemplo

Analise o sistema abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 4.7.2

Se $\overrightarrow{x_0}$ denotar uma solução qualquer de um sistema linear consistente $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ e se $S = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_k}\}$ for uma base do espaço nulo de A, então cada solução de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ pode ser expressa na forma

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0} + c_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + c_k\overrightarrow{v_k}.$$

Reciprocamente, com qualquer escolha dos escalares $c_1, \ldots, c_k$, o vetor $\overrightarrow{x}$ fórmula é uma solução de $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

Pergunta

Dada uma matriz A, como podemos encontrar uma base para o espaço linha/coluna?

Pergunta

Dada uma matriz A, como podemos encontrar uma base para o espaço linha/coluna?

Encontre uma base para o espaço linha da matriz abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.7.5

Se uma matriz R está em forma escalonada por linhas, então os vetores linha com os pivôs (ou seja, os vetores linha não nulos) formam uma base do espaço linha de R, e os vetores coluna com os pivôs vetores linha formam uma base do espaço coluna de R.

Exemplo

Encontre uma base para o subespaço vetorial gerado pelos vetores $(1, 2, 2, 3), (1, 3, 2, 1), (1, 1, 1, 1)$ e $(1, 0, 1, 0)$.

Encontre uma base para o espaço coluna da matriz abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.7.6

Sejam A e B matrizes equivalentes por linha.

1. Um conjunto qualquer de vetores coluna de A é LI se, e só se, o conjunto de vetores correspondentes de B é LI;
2. Um conjunto qualquer de vetores coluna de A forma uma base do espaço coluna de A se, e só se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B formam uma base para o espaço coluna de B.