Álgebra Linear
Aula 13

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Produto Interno entre Vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. O produto interno entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é definido como

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|\|v\| \cos\theta = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemplo 7

Calcule

1. $\overrightarrow{(1,1)} \cdot \overrightarrow{(1,-1)}$;
2. $\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{(-1,-2)}$;
3. $\overrightarrow{(1,2)} \cdot \overrightarrow{\alpha(1,2)}$ para um escalar $\alpha \neq 0$.

Teorema (3.2.2)

Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$ e α um escalar.

1. $\|v\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$;
2. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$;
3. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
4. $\alpha(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v}$;
5. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0$, sendo $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ se e somente se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Ângulo entre vetores

Dados vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$, se

$$-\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \leq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

então ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser calculado como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Ângulo entre vetores

Dados vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$, se

$$-\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \leq \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

então ângulo θ entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pode ser calculado como

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}\right).$$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos que

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|.$$

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$;

Teorema (3.2.5)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ forem vetores do $\mathbb{R}^n$ então

1. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$;
2. $\operatorname{dist}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leq \operatorname{dist}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \operatorname{dist}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$.

Exemplo

Seja P um paralelogramo qualquer de quatro lados. Mostre que a soma dos quadrados das diagonais é igual a soma dos quadrados dos lados.

Exemplo

Seja P um paralelogramo qualquer de quatro lados. Mostre que a soma dos quadrados das diagonais é igual a soma dos quadrados dos lados.

Teorema (3.2.6)

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$ então

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2).$$

Teorema (3.2.7)

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ forem vetores em $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar, então

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2.$$

Produto Escalar vs Produto de Matrizes

Forma $\overrightarrow{u}$	Forma $\overrightarrow{v}$	Produto Escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
Coluna	Coluna	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}$
Coluna	Linha	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}$
Linha	Coluna	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}^T$
Linha	Linha	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}^T$

Produto Escalar vs Produto de Matrizes

Forma $\overrightarrow{u}$	Forma $\overrightarrow{v}$	Produto Escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$
Coluna	Coluna	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}$
Coluna	Linha	$\overrightarrow{u}^T \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}$
Linha	Coluna	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}^T \overrightarrow{u}^T$
Linha	Linha	$\overrightarrow{u} \overrightarrow{v}^T = \overrightarrow{v} \overrightarrow{u}^T$

Proposição

Assumindo $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como vetores coluna em $\mathbb{R}^b$ temos para toda matriz quadrada A de tamanho n

$$A\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot A^T \overrightarrow{v};$$

Produto de Matrizes

Sejam A uma matriz quadrada de tamanho n com vetores linhas $\overrightarrow{a}_1, \ldots, \overrightarrow{a}_n$ e B uma matriz quadrada de tamanho n com vetores colunas $\overrightarrow{b}_1, \ldots, \overrightarrow{b}_n$ temos

$$AB = \begin{bmatrix} \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_1 \cdot \overrightarrow{b}_n \\ \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_1 & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overrightarrow{a}_n \cdot \overrightarrow{b}_n & \overrightarrow{a}_2 \cdot \overrightarrow{b}_2 & \cdots & \overrightarrow{a}_n \cdot \overrightarrow{b}_n \end{bmatrix}$$

Ortogonalidade

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é ortogonal(ou perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Ortogonalidade

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é ortogonal(ou perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Conjunto Ortogonal

Um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ é chamado ortogonal se quaisquer dois vetores deste conjunto são ortogonais entre si.

Vamos falar de ortogonalidade

Ortogonalidade

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\overrightarrow{u}$ é ortogonal(ou perpendicular) a $\overrightarrow{v}$ se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Conjunto Ortogonal

Um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ é chamado ortogonal se quaisquer dois vetores deste conjunto são ortogonais entre si.

Conjunto Ortonormal

Um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ é ortonormal se é ortogonal e todos os elementos desse conjunto são unitários.

O que precisamos para definir uma reta em $\mathbb{R}^2$.

1. Dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$;

O que precisamos para definir uma reta em $\mathbb{R}^2$.

1. Dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$;
2. Coeficiente angular entre a reta e o eixo x e um ponto;

O que precisamos para definir uma reta em $\mathbb{R}^2$.

1. Dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$;
2. Coeficiente angular entre a reta e o eixo x e um ponto;
3. Um ponto e um vetor ortogonal a reta.

Vetor normal a reta/plano/hiperplano

Um vetor $\overrightarrow{n}$ é normal a reta/plano/hiperplano se ele é ortogonal a reta/plano/hiperplano. Em outras palavras, dado P_0 um ponto da reta/plano/hiperplano temos sua equação da forma

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Vetor normal a reta/plano/hiperplano

Um vetor $\overrightarrow{n}$ é normal a reta/plano/hiperplano se ele é ortogonal a reta/plano/hiperplano. Em outras palavras, dado P_0 um ponto da reta/plano/hiperplano temos sua equação da forma

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Exemplo 1

Calcule um vetor ortogonal a reta $ax + by = 0$ e a reta $ax + by + c = 0$ onde $a, b, c \neq 0$.

Teorema (3.3.1)

1. Se a e b são constantes não nulas então uma equação da forma
$$ax + by + c = 0$$
representa uma reta em $\mathbb{R}^2$ de normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{(a, b)}$;
2. Se a, b e c são constantes não nulas então uma equação da forma
$$ax + by + cz + d = 0$$
representa um plano em $\mathbb{R}^3$ de normal $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{(a, b, c)}$;

Equações vetoriais

Se $\overrightarrow{n}$ é um vetor de coeficientes e $\overrightarrow{x}$ um vetor de variáveis em $\mathbb{R}^n$ temos que

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{x} = 0$$

é a forma vetorial de um hiperplano.

Exemplo 2

Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = (5, 3)$ como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$.

Exemplo 3

Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = (5, 3)$ como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u} = (2, 1)$ e um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Exemplo 4

Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ e um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Teorema 3.3.2

Se $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{u}$ forem vetores de $\mathbb{R}^n$, com $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}$ pode ser escrito de maneira única na forma $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ onde w_1 é um múltiplo de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{w}_2$ é ortogonal a $\overrightarrow{a}$.