Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Substitua a integral cartesiana por uma integral equivalente. Em seguida, calcule a integral polar:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2\right)\,dxdy.$$

Qual o valor dessa integral?

Escolha uma:

- a. π
- b. 2π ✓
- c. $-\pi$
- d. -3π
- e. 3π

Sua resposta está correta.

Resposta:

Primeiramente, se converte os valores para polares para então encontrar o raio.

$0 \le y \le 2$

$0 \le x \le \sqrt{4-y^2}.$

A área está delimitada por um círculo com raio $r = 2$, logo: $0 \le r \le 2$.

A seguir, vamos encontrar os quadrantes:

$0 \le y \le 2$

$0 \le x \le \sqrt{4-y^2}.$

A região no quadrante 1 é:

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$

Convertemos dA em coordenadas polares e obtemos: $x^2+y^2 = r^2$.

Concluindo, após encontrarmos as coordenadas polares, integramos:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 r dr d\theta$

$= 2\pi.$

A resposta correta é: 2π

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule as integral $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u+v+w)\,du\,dv\,dw$.

Resposta: 0

SOLUÇÃO:

- Aplicando substituição de variável e atribuindo $x = v + w + u$:

= $\int_0^\pi (\cos(u+v+w)\,dx)$

= $\int_{v+w}^{v+w+\pi} (\cos(x)\,dx)$

= $[\sin(t)]_{v+w}^{v+w+\pi}$

= $\sin(v+w+\pi) - \sin(v+w)$

- Logo, a integral é:

= $\int_0^\pi \int_0^\pi (\sin(v+w+\pi) - \sin(v+w))dvdw$

- Calculando a integral em função de dv para $\int_0^\pi \sin(v+w+\pi) - \sin(v+w)dv$

- Aplicando substituição de variável atribuindo $x = w + v$, temos que:

= $\int_w^{w+\pi} \sin(x+\pi) - \sin(x)dx$

= $\int_w^{w+\pi} \sin(x+\pi)dx - \int_w^{w+\pi} \sin(x)dx$

= $\int_w^{w+\pi} \cos(x)\sin(\pi) + \cos(\pi)\sin(x)dx - \int_w^{w+\pi} \sin(x)dx$

- Simplicando a equação:

= $\int_w^{w+\pi} -\sin(x)dx - \int_w^{w+\pi} \sin(x)dx$

= $-[-\cos(x)]_w^{w+\pi} - [-\cos(x)]_w^{w+\pi}$

= $-[-\cos(w+\pi) + \cos(w)] - [-\cos(w+\pi) + \cos(w)]$

= $\cos(w+\pi) - \cos(w) - [-\cos(w+\pi) + \cos(w)]$

= $2\cos(\pi+w) - 2\cos(w)$

- Calculando a integral em função de dw :

= $\int_0^\pi (-2\cos(w) + 2\cos(\pi+w))\,dw$

= $\int_0^\pi -2\cos(w) + 2\,[\cos(\pi)\cos(w) - \sin(\pi)\sin(w)]\,dw$

= $-\int_0^\pi 2\cos(w)dw + \int_0^\pi 2\,(\cos(\pi)\cos(w) - \sin(\pi)\sin(w))\,dw$

= $2\int_0^\pi \cos(w)dw + 2\int_0^\pi \cos(\pi)\cos(w) - \sin(\pi)\sin(w)dw$

- Simplificando com a identidade trigonométrica:

= $2\int_0^\pi \cos(w)dw + 2\int_0^\pi -\cos(w)dw$

= $2[\sin(w)]_0^\pi - 2[\sin(w)]_0^\pi$

- Portanto, $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u+v+w)\,du\,dv\,dw = 0$

A resposta correta é: 0.

Questão **3**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual o valor da integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1+\cos(\theta)} 4r\, dr d\theta dz$

Escolha uma:

a. 14π

b. 12π ✓

c. 13π

d. 10π

e. 11π

Sua resposta está correta.

Resposta:

Resolvendo por partes, vamos resolver primeiro a integral mais interna, ou seja, o dr:

$\int_0^{1+\cos(\theta)} (4r)\, dr$

Substituindo:

$= 4\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos(\theta)}$

$= \left[2r^2\right]_0^{1+\cos(\theta)}$

$= 2(1+\cos(\theta)^2 - 0)$

Depois, resolvendo a integral que está mais externa do que a anterior, a $d\theta$:

$\int_0^{2\pi} (2(1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)))\, d\theta$

$= 2\int_0^{2\pi} (1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta))\, d\theta$

$= 2\left[\theta + 2\sin(\theta) + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin\,(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi}$

Substituindo, temos que:

$= 2\left(2\pi + 2\sin(2\pi) + \frac{2\pi}{2} + \frac{\sin(4\pi)}{4}\right)$

$= 2(2\pi + 0 + \pi + 0)$

$= 2(3\pi)$

$= 6\pi$

Resolvendo a integral mais externa de todas, o dz:

$\int_{-1}^{1} (6\pi)\, dz$

Como 6π em relação a dz é uma constante, temos que:

$6\pi \int_{-1}^{1}\, dz$

$= 6\pi[z]_{-1}^{1}$

$= 6\pi(1-(-1))$

$= 6\pi 2$

Logo, o resultado é:

$= 12\pi$

A resposta correta é: 12π

.

Questão **4**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} \frac{2x-y}{2}\, dx\, dy.$

Resposta: 2

SOLUÇÃO:

$\int_0^4 \frac{1}{2} \int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} -y+2xdx$

- Dividimos a resolução dessa integral em duas partes.

\- Primeira parte:

$-\int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} ydx$

$=[yx]_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} = -y$

\- Segunda parte:

$\int_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}} 2xdx$

$=2\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_{\frac{y}{2}}^{1+\frac{y}{2}}$

$=2\left(\frac{(2+y)^2}{8} - \frac{y^2}{8}\right)$

\- Somando os dois resultados obtidos:

$=-y+2\left(\frac{(2+y)^2}{8} - \frac{y^2}{8}\right)$

Logo, teremos:

$=\int_0^4 \frac{1}{2}\left(-y+2\left(\frac{(2+y)^2}{8} - \frac{y^2}{8}\right)\right) dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^4 -y+2\left(\frac{(2+y)^2}{8} - \frac{y^2}{8}\right) dy$

- Para a nova Integral resolveremos em três partes.

$=\frac{1}{2}\int_0^4 -ydy + \int_0^4 \frac{(2+y)^2}{4}dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4}dy$

\- Primeira parte:

$-\int_0^4 ydy$

$=-\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = -8$

\- Segunda parte:

$\int_0^4 \frac{(2+y)^2}{4}dy$

$=\int_0^4 \frac{y^2+4y+4}{4}dy$

$=\frac{208}{12}$

- Terceira parte:

$-\int_0^4 \frac{y^2}{4} dy$

$= -\frac{64}{12}$

somando os resultados

$= \frac{1}{2}\left(-8 + \frac{208-64}{12}\right)$

$= \frac{1}{2}(-8 + 12) = 2$

A resposta correta é: 2.

Questão **5**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a integral de reta de $f(x, y) = ye^{x^2}$ ao longo da curva $\vec{\mathbf{r}}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$, $-1 \leq t \leq 2$.

Escolha uma:

- a. $-15\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$ ✓
- b. $-13\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$
- c. $-12\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$
- d. $-11\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$
- e. $-14\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$

Sua resposta está correta.

Resposta:

$f = te^{t^2}$

Derivamos $\vec{\mathbf{r}}(t)$ e encontramos $\vec{\mathbf{v}}(t)$

$\vec{\mathbf{v}}(t) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

Calculamos o módulo de $\vec{\mathbf{v}}$:

$||\,\vec{\mathbf{v}}\,|| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$

$||\,\vec{\mathbf{v}}\,|| = \sqrt{16 + 9}$

$||\,\vec{\mathbf{v}}\,|| = 5$

Sabendo que $ds = 5dt$

I.L. $= \int_{-1}^{2} ye^{x^2}\, ds$

$= \int_{-1}^{2} -3te^{(4t)^2} 5dt$

$= -15\int_{-1}^{2} te^{16t^2} dt$

Chamamos $u = e^{16t^2}$

$du = 32te^{16t^2} dx$

$dx = \frac{du}{32tu}$

$= -15\int_{-1}^{2} \frac{tu}{32tu} du$

$= -15\int_{-1}^{2} \frac{1}{32}\, du$

$= -15\left[\frac{1}{32}u\right]_{-1}^{2}$

$= -15\left[\frac{e^{16t^2}}{32}\right]_{-1}^{2}$

$= -15\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$

A resposta correta é: $-15\left(\frac{e^{64}-e^{16}}{32}\right)$

.

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre o trabalho realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre a curva na direção de t crescente, onde:

- $\vec{\mathbf{F}} = \sqrt{z}\mathbf{i} \; - \; 2x\mathbf{j} \; + \sqrt{y}\mathbf{k}$
- C é o caminho dado pela função vetorial $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}, \; 0 \le t \le 1.$

Resposta: -0,2

Solução:

i) Derivando $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, obtemos:

$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$

ii) Parametrizando a função $\vec{\mathbf{F}} = \sqrt{z}\mathbf{i} \; - \; 2x\mathbf{j} \; + \sqrt{y}\mathbf{k}$ em termos de t:

$\vec{\mathbf{F}}(t) = \sqrt{t^4}\,\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \sqrt{t^2}\,\mathbf{k} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

iii) Simplificando para integração:

$\vec{\mathbf{F}}(t) \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}dt = \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}\right) \cdot \left(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}\right) dt = \left(t^2 - 4t^2 + 4t^4)dt\right) = \left(-3t^2 + 4t^4\right) dt$

iv) Após simplificarmos a expressão anterior, integramos:

$$\int_{C_2} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \int_a^b \vec{\mathbf{F}}\left(\vec{\mathbf{r}}(t)\right) \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}dt = \int_0^1 -3t^2 + 4t^4\,dt = \left[-\frac{3t^3}{3} + \frac{4t^5}{5}\right]_0^1 = -\frac{1}{5}$$

Resposta: $-\frac{1}{5} = -0,2.$

A resposta correta é: -0,2.

Questão **7**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

O campo $\vec{\mathbf{F}} = (z+y)\vec{\mathbf{i}} + z\vec{\mathbf{j}} + (y+x)\vec{\mathbf{k}}$ é conservativo.

Escolha uma opção:

- Verdadeiro
- Falso ✓

Solução:

O teste das componentes para campos conservativos define que um campo

$\vec{\mathbf{F}} = M(x,y,z)\vec{\mathbf{i}} + N(x,y,z)\vec{\mathbf{j}} + P(x,y,z)\vec{\mathbf{k}}$

qualquer é conservativo se, e somente se,

$\frac{\partial(P)}{\partial(y)} = \frac{\partial(N)}{\partial(z)}$, $\frac{\partial(M)}{\partial(z)} = \frac{\partial(P)}{\partial(x)}$ e $\frac{\partial(N)}{\partial(x)} = \frac{\partial(M)}{\partial(y)}$

Assim, temos que para este caso:

$M(x,y,z) = z+y$

$N(x,y,z) = z$

$P(x,y,z) = y+x$

E fazendo então os testes temos (lembrando que caso uma igualdade do teste seja quebrada já temos que o campo não é conservativo):

$\frac{\partial(P)}{\partial(y)} = \frac{\partial(y+x)}{\partial(y)} = x$ e $\frac{\partial(N)}{\partial(z)} = \frac{\partial(z)}{\partial(z)} = 1.$

Como a igualdade esperada não foi obtida, já podemos afirmar que $\vec{\mathbf{F}}$ **não é conservativo**.

A resposta correta é 'Falso'.

Questão **8**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize o teorema de Green para encontrar a circulação em sentido anti-horário para o campo $\vec{\mathbf{F}} = (x - y)\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$ e a curva C (o quadrado limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$).

Resposta: 0

Resposta:

Tomando $M = x - y$ e $N = y - x$

Calculamos as derivadas:

$\frac{\partial M}{\partial x} = 1; \frac{\partial N}{\partial y} = 1; \frac{\partial M}{\partial y} = -1; \frac{\partial N}{\partial x} = -1$

Circulação:

$\iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\,dxdy$

$= \int_0^1 \int_0^1 \,-1 - (-1)\,\, dxdy$

$= 0$

A resposta correta é: 0.

Questão **9**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual a parametrização da calota cortada da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$?

Escolha uma:

a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ ✓

b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 + r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Sua resposta está correta.

Solução:

A coordenada cilíndrica fornece uma parametrização.

Um ponto no cone tem $x = r\cos(\theta)$; $y = r\sin(\theta)$;

como $x^2 + y^2 = r^2$, então $z^2 = 9 - \left(x^2 + y^2\right) = 9 - r^2$

assim, $z = \sqrt{9 - r^2}$, para $z \ge 0$.

Tomando $u = r$ e $v = \theta$, temos a parametrização:

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$

Para o domínio de r temos que:

$z = \sqrt{9 - r^2}$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,

logo,

$$x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = 9$$

$$2(x^2 + y^2) = 9$$

$$2r^2 = 9$$

$$r^2 = \frac{9}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$r = \frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$0 \le r \le \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\mathbf{k}$; para $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le r \le \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9-r^2}\mathbf{k}$; para $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

.

Questão **10**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Integre $G(x, y, z) = x\,y\,z$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Escolha uma:

a. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$ ✓

b. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{6}$

c. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{5}$

d. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{3}$

e. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{2}$

Sua resposta está correta.

Solução:

Como o sólido esta no primeiro octante então a superfície é uma caixa com face em :
$x = a$,$y = b$ e $z = c$
$x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$

Para as faces que estão em zero a função $G(x, y, z)$ é igual a zero por isso não precisa calcular, para as outras a integral será:
Para $x = a$:
$G(a, y, z) = ayz$

$$\iint_S G d\sigma = \iint_S ayz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\, dydz = \frac{ab^2c^2}{4}$$

Para $y = b$:
$G(a, y, z) = xbz$

$$\iint_S G d\sigma = \iint_S xbz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^a xbz\, dxdz = \frac{a^2bc^2}{4}$$

Para $z = c$:
$G(a, y, z) = xyc$

$$\iint_S G d\sigma = \iint_S xyc\, d\sigma = \int_0^b \int_0^a xyc\, dxdy = \frac{a^2b^2c}{4}$$

Logo:

$$\iint_S G d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\, dydz + \int_0^c \int_0^a xbz\, dxdz + \int_0^b \int_0^a xyc\, dxdy$$

$$\iint_S G(x, y, z) d\sigma = \frac{abc(ab + ac + bc)}{4}.$$

A resposta correta é: $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$

.