UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
Campus de Sobral
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Álgebra Linear SBL0056
Prof. Ailton Campos
Data: 31/01/2022 Período: 2021.2

Nome: Lucinora Alda de Araújo Carneiro

3ª Lista de Exercícios

1. Seja $\mathbb{U}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ definido por

$$\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5;\ x_1 = 3x_2 \text{ e } x_3 = 7x_4\}.$$

   a) Encontre uma base para $\mathbb{U}$.
   b) Estenda a base no item anterior para uma base de $\mathbb{R}^5$.
   c) Encontre um subespaço V de $\mathbb{R}^5$ tal que $\mathbb{R}^5 = \mathbb{U} \oplus \mathsf{V}$

2. Resolva os seguintes itens:

   a) Dê um exemplo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}(T) = N(T)$.
   b) Mostre que não existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ tal que $\mathrm{Im}(T) = N(T)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador definido por $T(x, y) = (2x - y, x + 4y)$. Verifique que T possui um autovalor único igual a 3 e que o auto-espaço E_3 tem dimensão 1. Conclua que se

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

   então não existe uma matriz invertível $\mathbf{b} \in M(2 \times 2)$ tal que $\mathbf{b}^{-1}\mathbf{ab}$ seja diagonal.

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador definido por $T(x, y) = (3x + y, 2x + 2y)$. Verifique que T possui autovalores 4 e 1. Ache uma base $\{u, v\} \in \mathbb{R}^2$ tal que $Tu = 4u$ e $Tv = v$. Dada a matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   ache uma matriz invertível $\mathbf{p} \in M(2 \times 2)$ tal que $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Resolva os seguintes itens:

   a) Prove que os autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   geram um espaço de dimensão 1 e forneça uma base para este espaço.

   b) Prove que os autovetores da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   geram um espaço de dimensão 2 e forneça uma base para este espaço. Quais são os autovalores desta matriz?

6. Encontre todos os autovalores e autovetores dos seguintes operadores lineares

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (y, x).$

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 0, 5x_3).$

c) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (x_1, 2x_2, 3x_3, ..., nx_n).$

d) $T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ Tp = p'.$

e) $T : \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_4(\mathbb{R}),\ (Tp)(x) = xp'(x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$

7. Mostre que os operadores lineares $T : E \to E$ abaixo são diagonalizáveis. Justifique a sua resposta. Em caso afirmativo, encontre uma base de E formada por autovetores de T de modo que a matriz de T com respeito a esta base seja diagonal.

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x + 3y, 3x + 2y).$

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (x - y, y - x).$

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (2x - y, y + 2x).$

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (-2x, 6y + z, y + 6z).$

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - z, x - y + 2z).$

Bom Trabalho!!!