UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL
ENGENHARIA ELÉTRICA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

MÓDULO 4: VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS E DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

Prof.: Miguel Silva

Sumário

- Introdução
- Variáveis aleatórias contínuas e funções de densidade de probabilidade
- Funções de distribuição acumulada e valores esperados
- Distribuição Uniforme
- Distribuição Normal
- Distribuição gama
- Distribuição exponencial
- Distribuição lognormal

Introdução

Introdução

- Vimos no módulo passado va’s discretas.
- Va’s discretas assumem valores de um conjunto discreto ou que pode ser relacionado em uma sequência infinita ordenada.
- **Definição:**

  Uma va X é dita contínua se o seu conjunto de valores possíveis consistir do intervalo completo de todos os valores, isto é, para cada $A < B$, qualquer valor x entre A e B é possível.

Introdução

- Exemplo de va contínuas:
  - A profundidade de um lago em um ponto selecionado aleatoriamente consiste em uma va contínua. Existe uma profundidade mínima *A* e uma máxima *B.*
  - PH de um composto químico selecionado aleatoriamente consiste em uma va contínua que pode assumir qualquer valor entre 0 e 14.

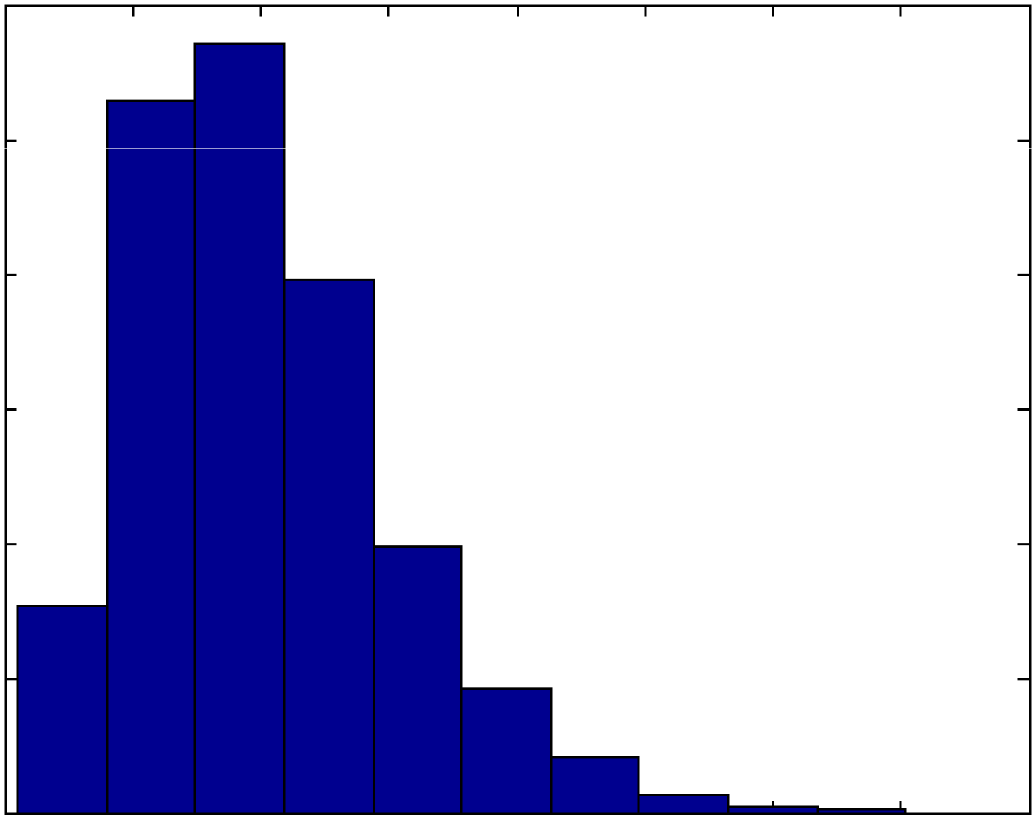
Variáveis aleatórias contínuas e funções de densidade de probabilidade

Introdução

- Considere uma va contínua que consiste na profundidade de um lago em um ponto aleatoriamente escolhido.
- Caso consideremos que a precisão da medição foi em valores inteiros de metro temos então uma va discreta.
- O histograma dessa va é mostrado a seguir.

Introdução

- Histograma da profundidade de uma lago (precisão em metros).



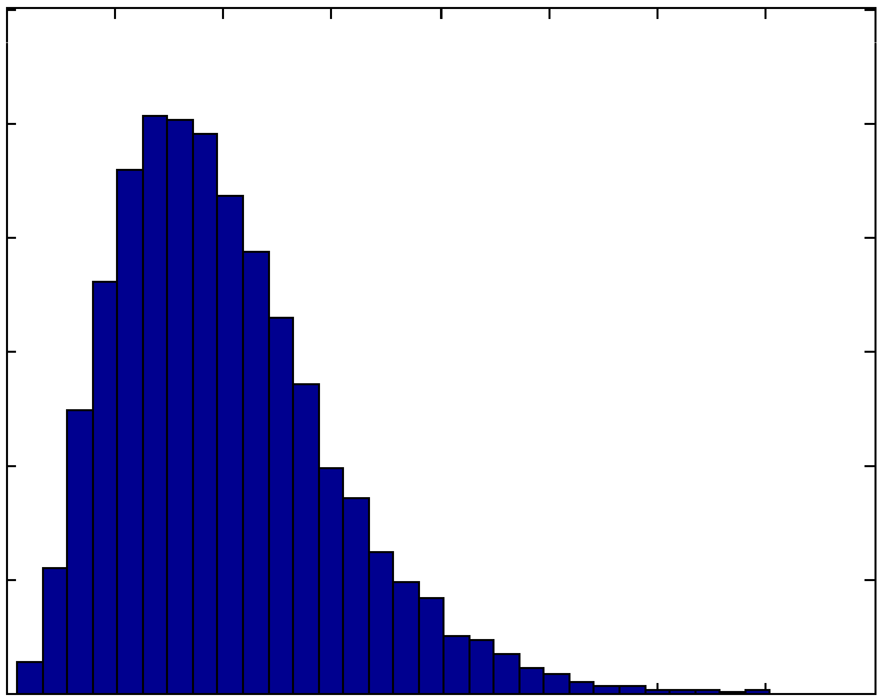
Caso no eixo y tenhamos medidas de freqüência relativa temos então que a área total sob o gráfico é unitária.

Introdução

- Considere agora que aumentamos a precisão das medidas e que agora podemos medir a profundidade em centímetros.
- Se no eixo y continuarmos usando a freqüência relativa ainda teremos uma área total sob o gráfico unitária.
- O novo histograma é mostrado a seguir.

Introdução

- Histograma da profundidade de uma lago (precisão em centímetros).

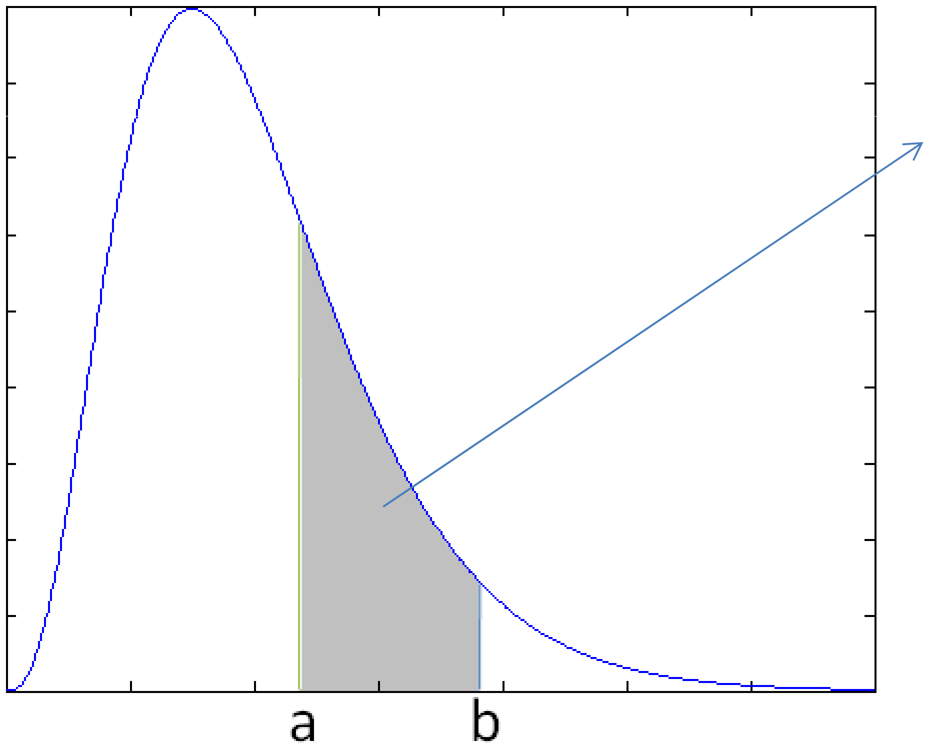


Introdução

- Se prosseguirmos com esse processo continuamente, teremos uma curva cada vez mais ajustada e contínua.
- A área sob a curva continuará sendo unitária
- A probabilidade de uma medida estar entre dois pontos *a* e *b* será igual a área sob a curva limitada por esses pontos.

Introdução

- Histograma da profundidade de uma lago (precisão cada vez maior).



Probabilidade de a profundidade do lago estar entre *a* e *b*

Distribuição de probabilidade

- **Definição:**

  Seja X uma va contínua. A **distribuição de probabilidade** ou **função de densidade de probabilidade** (fdp) de X será, uma função f(x) tal que, para quaisquer dois números *a* e *b* com *a*≤*b*,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

  A probabilidade de X ter um determinado valor no intervalo [*a*, *b*] é a área abaixo da curva de densidade e limitada no intervalo

Distribuição de probabilidade

- Para que f(x) seja uma fdp legítima, deve satisfazer às duas condições a seguir

1. $f(x) \geq 0 \text{ para todos os } x$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \text{área abaixo do gráfico de } f(x) = 1$

Distribuição de probabilidade

- Exemplo: Considere uma va medida em graus cuja fdp é dada por:

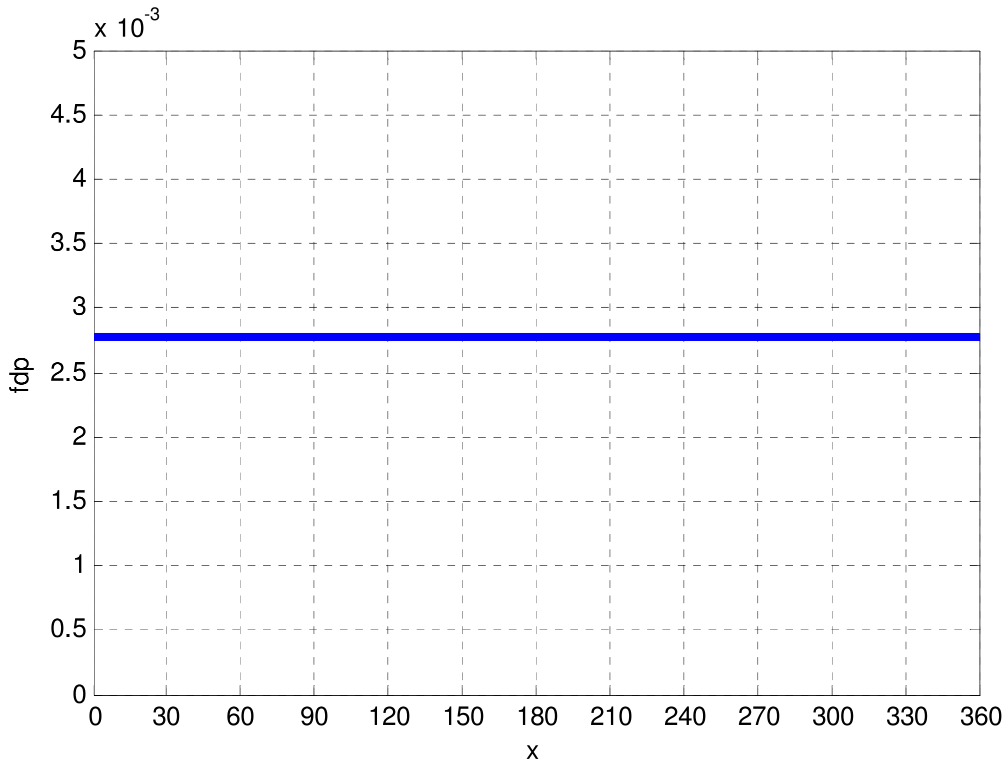
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{360} & 0 \leq x \leq 360 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A área sob a curva é unitária? Calcule a probabilidade de o ângulo estar entre 90 e 180 graus.

Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação):

  No gráfico abaixo ilustramos a fdp:



Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação):

  Área sob a curva pode ser calculada através da integral abaixo:

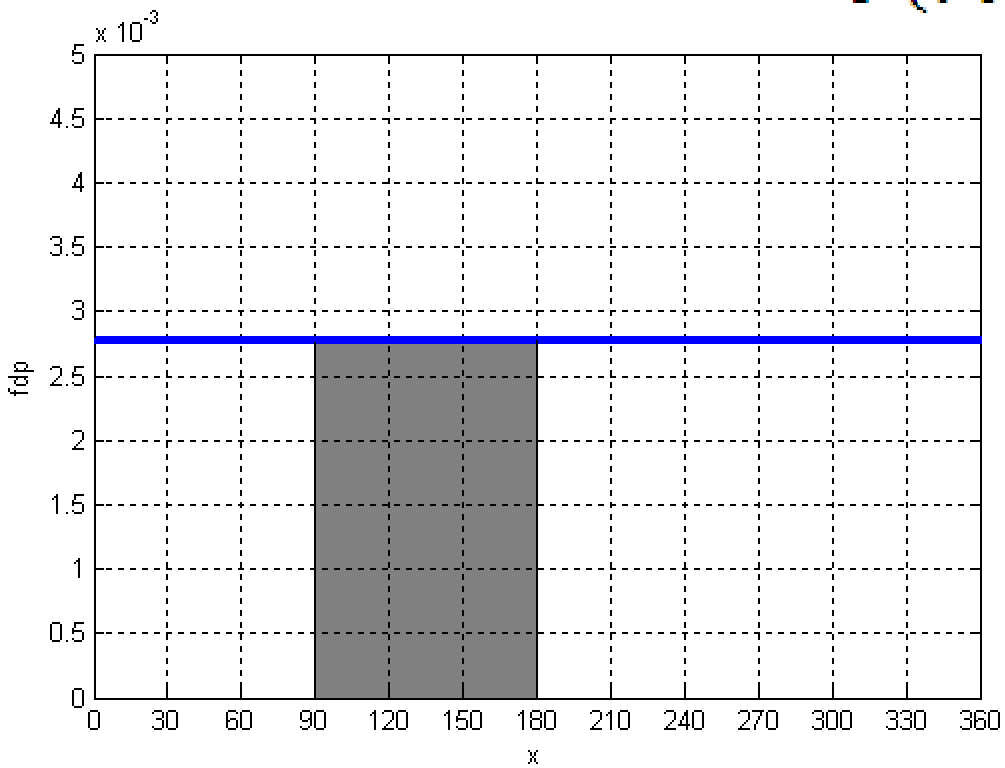
$$P(0 \leq X \leq 360) = \int_0^{360} \frac{1}{360} dx = \frac{x}{360}\Big|_{x=0}^{x=360} = 1$$

Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação): Probabilidade de o ângulo estar entre 90 e 180 graus:

$$P(90 \leq X \leq 180) = \int_{90}^{180} \frac{1}{360} dx$$

$$= \frac{x}{360}\bigg|_{x=90}^{x=180} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

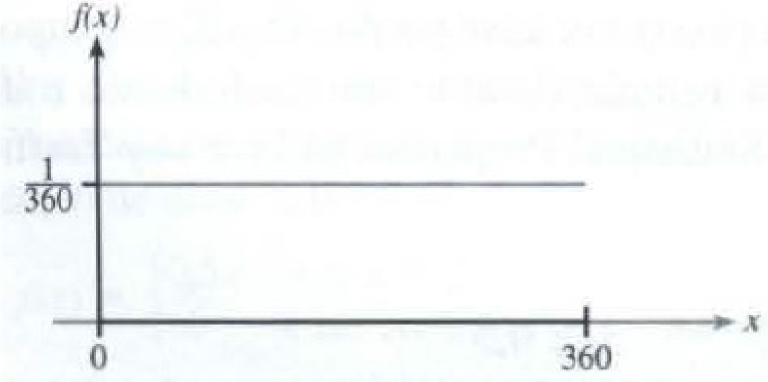


Distribuição de probabilidade

- Uma VA continua X é dita ter distribuição uniforme no intervalo [A, B] se a fdp de X for:

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \le x \le B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- O gráfico de qualquer fdp uniforme possui a aparência do gráfico:



Distribuição de probabilidade

- **Proposição**:

  Se X é uma va contínua, então para qualquer número c, P(X=c)=0. Além disso, para quaisquer dois números *a* e *b* com *a* < *b* temos:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$
$$= P(a < X < b)$$

Distribuição de probabilidade

- A probabilidade atribuída a qualquer valor específico é zero.

- A probabilidade de um intervalo não depende da inclusão ou não de seus pontos extremos.

- A área sob o gráfico acima de um intervalo não é afetada pela exclusão ou inclusão dos pontos extremos do intervalo.

Distribuição de probabilidade

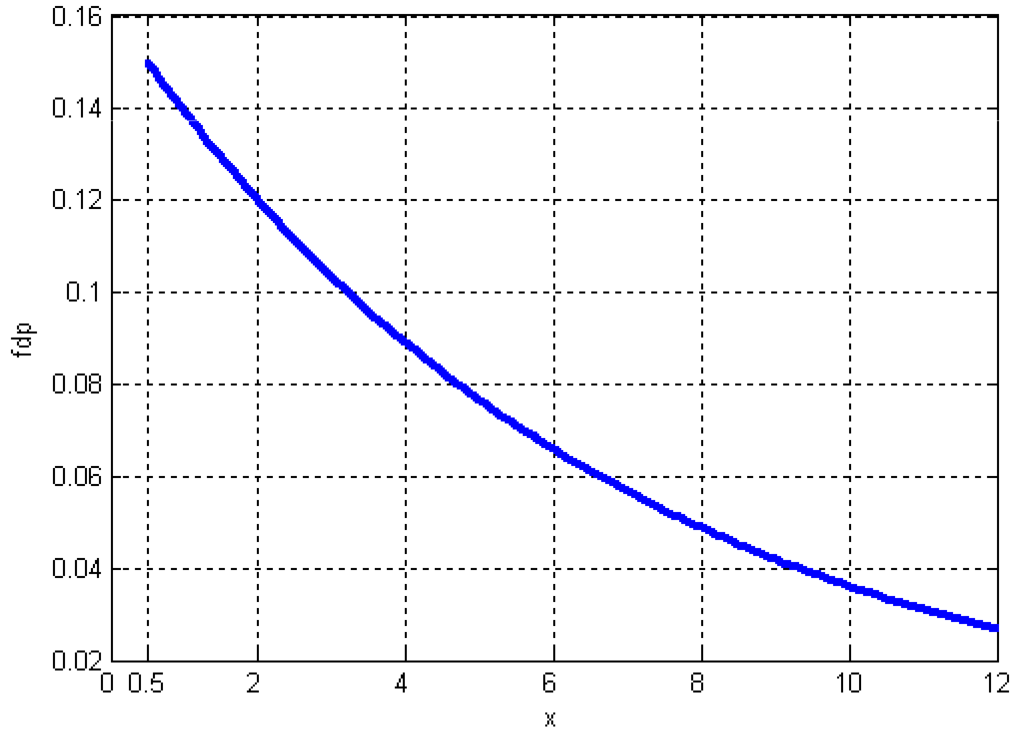
Exemplo: "Tempo de avanço" no fluxo de tráfego é o tempo entre o instante em que um carro termina de passar por um ponto fixo e o instante em que o próximo carro começa a passar por esse ponto. Seja X = tempo de avanço para dois carros consecutivos escolhidos ao acaso em uma estrada durante o período de tráfego intenso. A fdp de X pode ser dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)} & x \geq 0{,}5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a probabilidade do tempo ser no máximo 5 segundos.

Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação): O gráfico dessa fdp é dada por



Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação): Área total sob a curva:

$$P(0{,}5 \leq X \leq \infty) = \int_{0{,}5}^{\infty} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\,dx$$

Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação): Área total sob a curva:

$$P(0{,}5 \leq X \leq \infty) = \int_{0,5}^{\infty} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\, dx$$

Fazendo $u = -0{,}15(x - 0{,}5)$ temos $du = -0{,}15\, dx$

$$\int_{0,5}^{\infty} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\, dx = \int_{u_i}^{u_f} 0{,}15e^{u} \frac{1}{(-0{,}15)}\, du$$

$$= -\int_{u_i}^{u_f} e^{u}\, du = -e^{u}\Big|_{u_i}^{u_f}$$

$$= -e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\Big|_{0,5}^{\infty}$$

$$= -\left(0 - e^{-0{,}15(0{,}5-0{,}5)}\right) = 1$$

Distribuição de probabilidade

- Exemplo (continuação): Probabilidade de o tempo de avanço ser no máximo 5 segundos

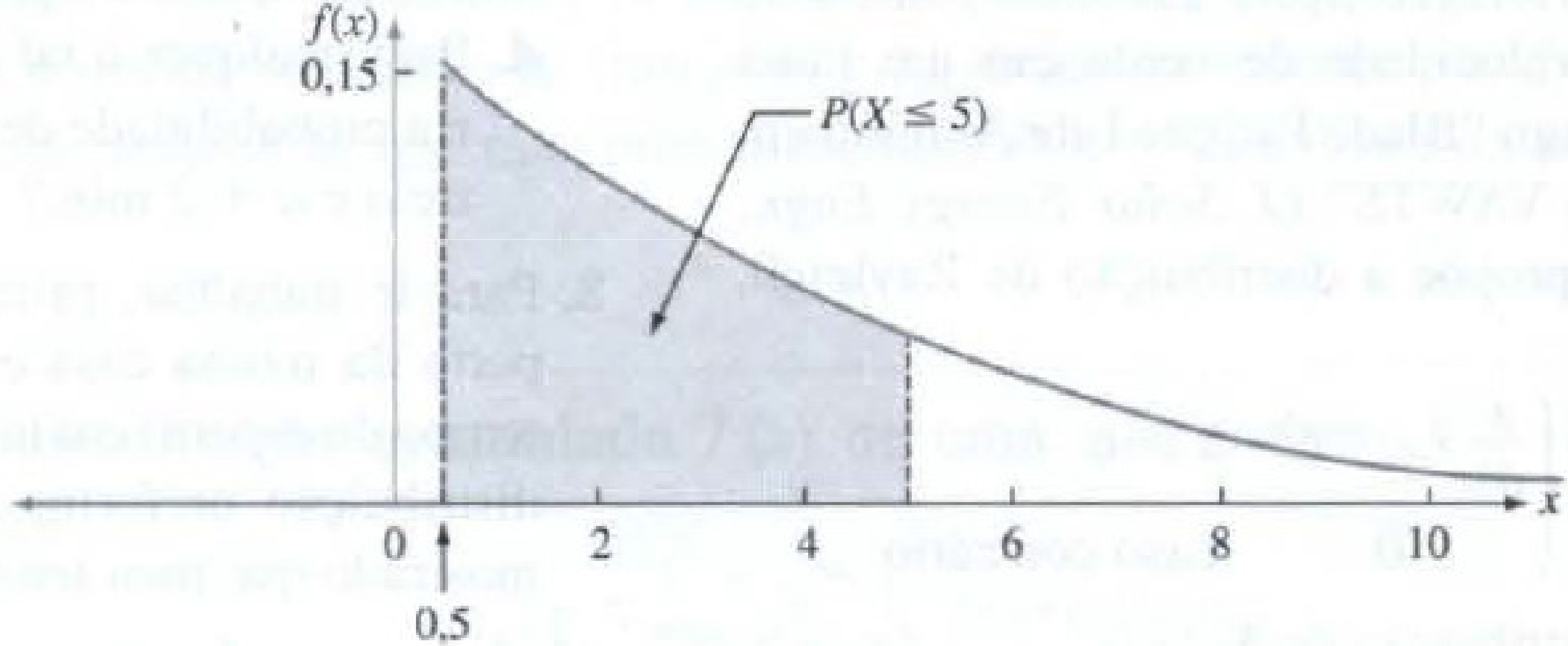
$$P(X \leq 5) = \int_{0,5}^{5} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\,dx$$

$$= -e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\Big|_{0,5}^{5}$$

$$= -\left(e^{-0{,}15(5-0{,}5)} - e^{-0{,}15(0{,}5-0{,}5)}\right)$$

$$= 0{,}4908$$

Distribuição de probabilidade



Distribuição de probabilidade

Exemplo: A fdp do tempo (em horas) de falha de um componente eletrônico de uma copiadora é:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x}{1000}}}{1000} \quad \text{para } x>0$$

Qual a probabilidade de um componente durar mais de 3000 horas?

Um componente falhar antes de 1000 horas?

Distribuição de probabilidade

Exemplo: A fdp do tempo (em horas) de falha de um componente eletrônico de uma copiadora é:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{-x}{1000}}}{1000} \quad \text{para } x>0$$

Qual a probabilidade de um componente durar mais de 3000 horas? f(x > 3000) = 0,049

Um componente falhar antes de 1000 horas?

f(x < 1000) = 0,632

Funções de distribuição acumulada e valores esperados

Função de distribuição acumulada

- A fda de uma va discreta X, denotada por F(x), fornece a probabilidade dessa va ser menor ou igual a x, ou seja, $P(X \leq x)$.
- A fda de uma va discreta F(x) é obtida pela soma dos valores da fmp p(y) para $y \leq x$.
- Va's contínuas também possuem fda's que são obtidas por integração ao invés de somas.

Função de distribuição acumulada

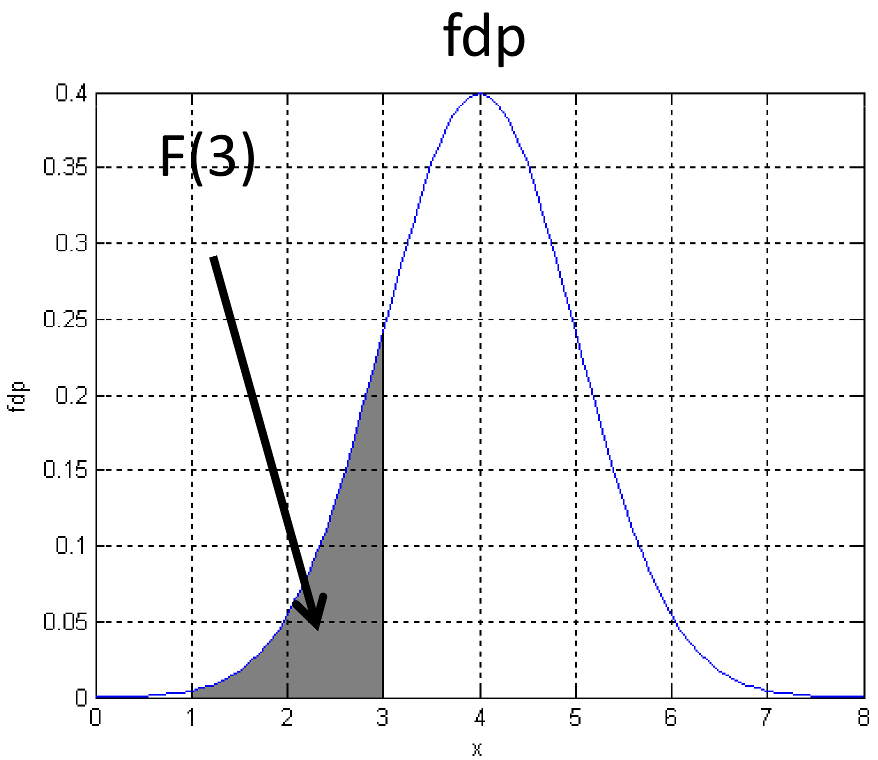
- **Definição:**

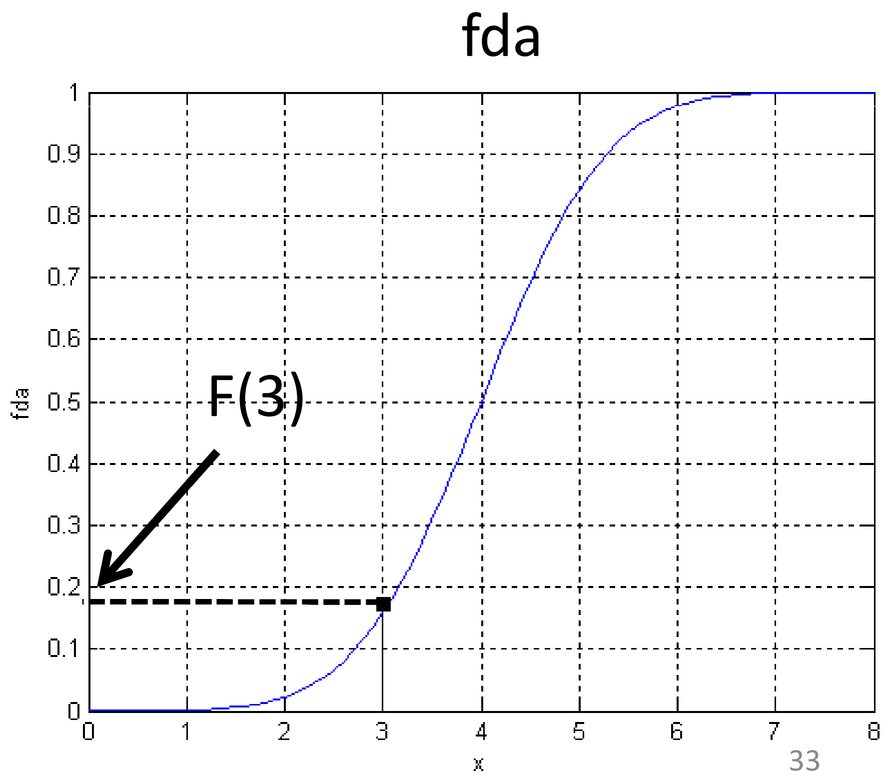
A **função de distribuição acumulada** fda F(x) de uma va contínua X é definida para cada número x por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Função de distribuição acumulada

- Exemplo gráfico da fda:





Função de distribuição acumulada

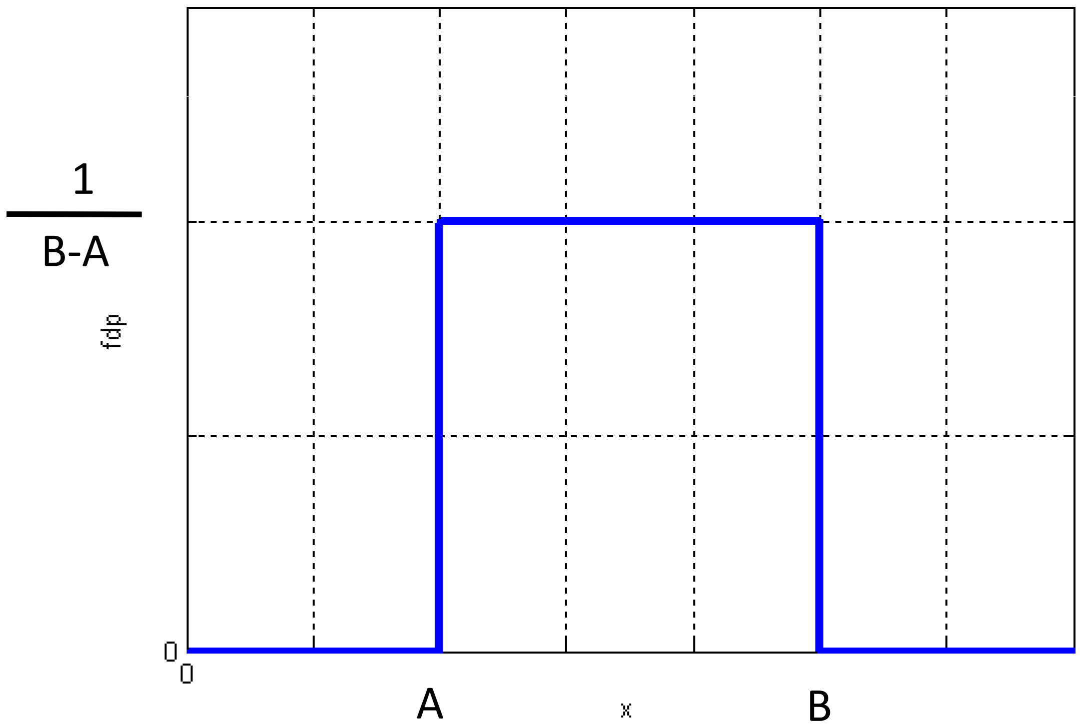
- Exemplo: Seja X, a espessura de uma determinada chapa de metal, com distribuição dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine a fda dessa distribuição.

Função de distribuição acumulada

- Exemplo (continuação): A fdp dessa questão é ilustrada na figura abaixo



Função de distribuição acumulada

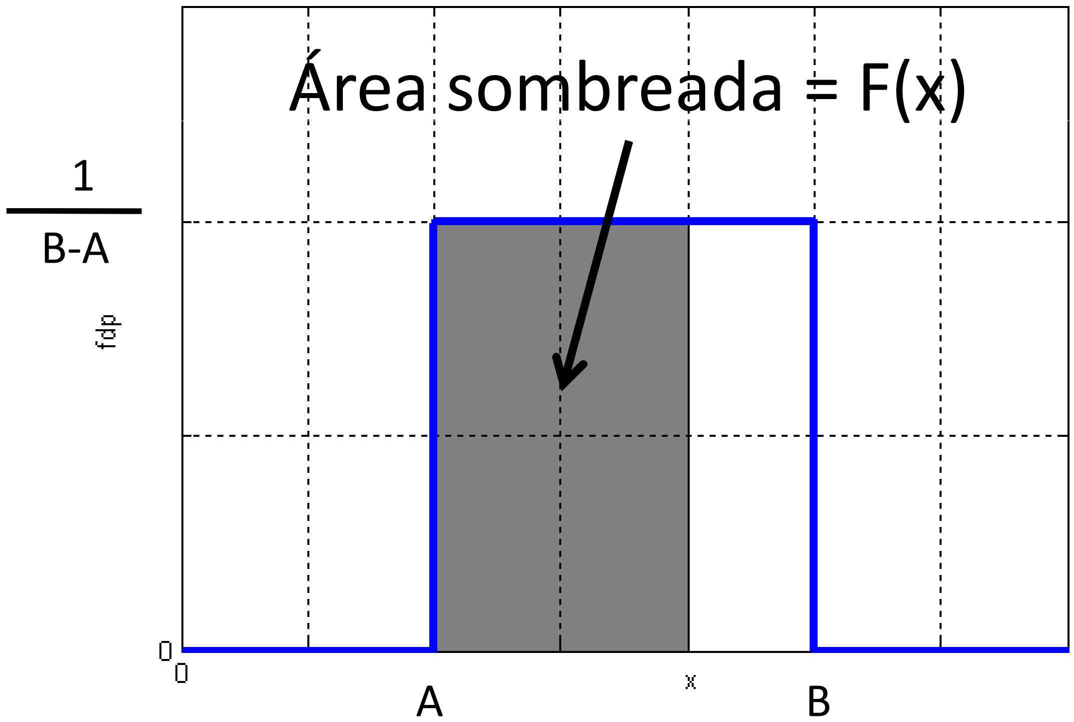
- Exemplo (continuação): A fda é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$$= \int_{A}^{x} \frac{1}{B - A} dy = \frac{1}{B - A} \cdot y|_{y=A}^{y=x} = \frac{x - A}{B - A}$$

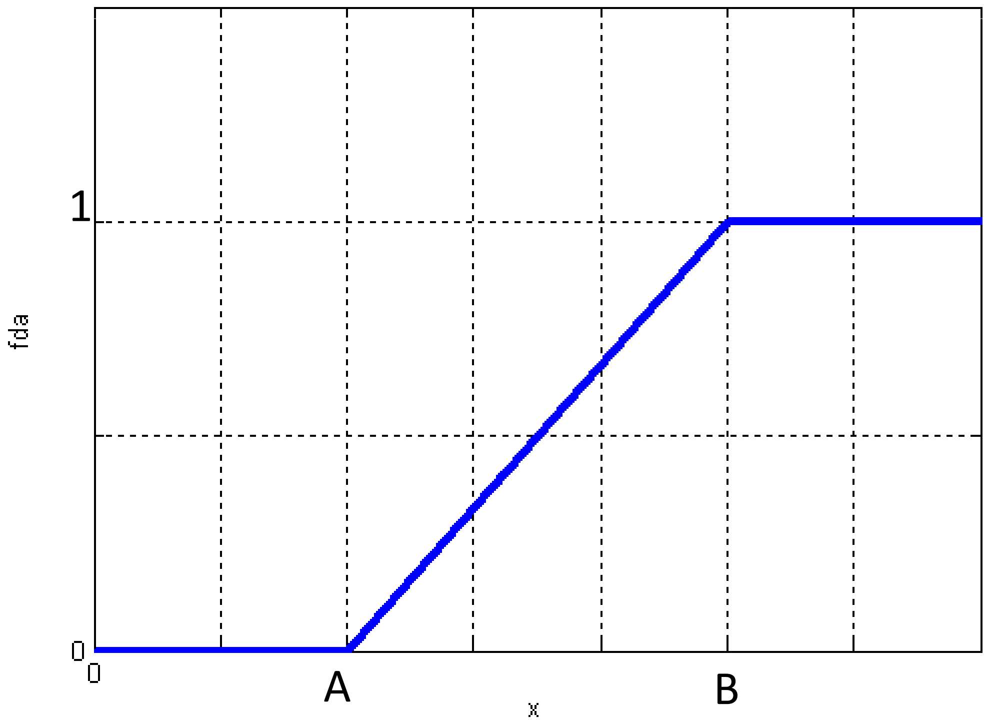
Função de distribuição acumulada

- Exemplo (continuação): Interpretação gráfica



Função de distribuição acumulada

- Exemplo (continuação): Gráfico da fda completa é:



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < A \\ \dfrac{x - A}{B - A} & A \le x < B \\ 1 & x \ge B \end{cases}$$

Cálculo de probabilidades através de fda's

- **Proposição**:

  Seja X uma va contínua com fdp f(x) e fda F(x). Então, para qualquer número *a*

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

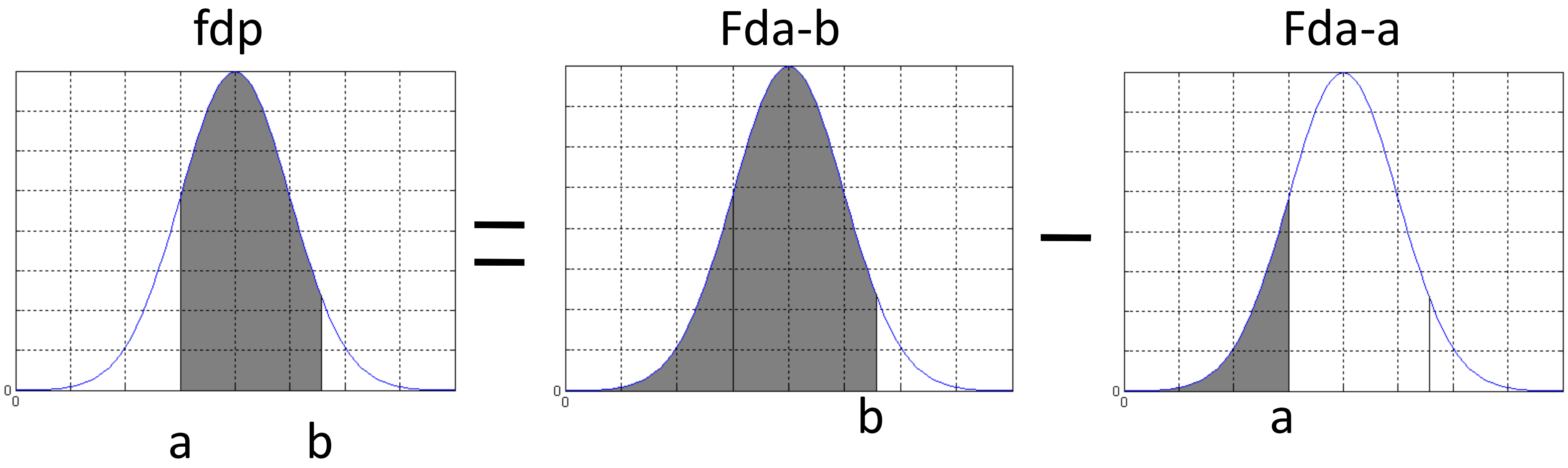
  E, para quaisquer dois números *a* e *b* com *a*<*b*

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Cálculo de probabilidades através de fda's

- Interpretação gráfica de

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$



Cálculo de probabilidades através de fda's

- Exemplo: Suponha que a fdp da grandeza X de uma carga dinâmica em uma ponte (em Newtons) seja dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a fda dessa distribuição

Cálculo de probabilidades através de fda's

- Exemplo (continuação):

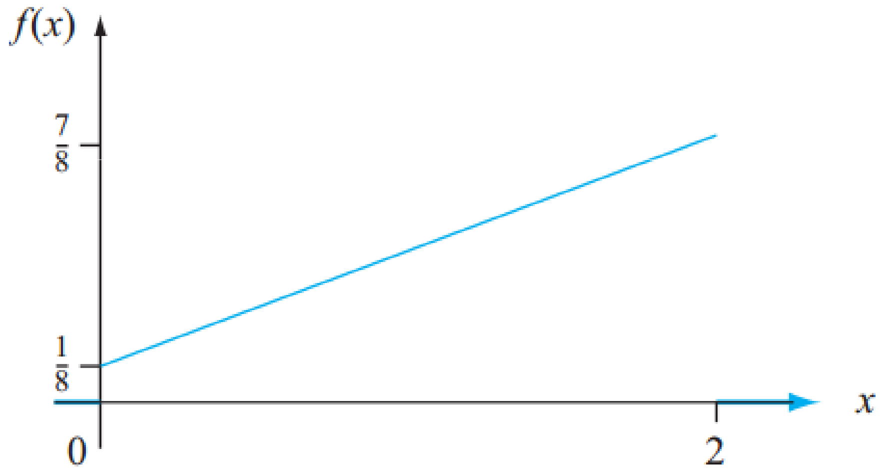
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

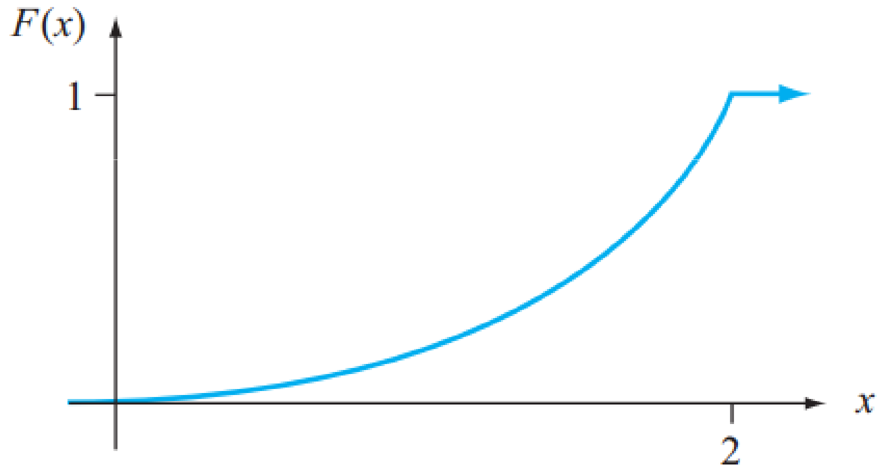
$$= \int_{0}^{x} \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{8}y\right) dy = \frac{x}{8} + \frac{3}{16}x^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{3}{16}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

Cálculo de probabilidades através de fda's

- Exemplo (continuação):





Cálculo de probabilidades através de fda’s

- Qual a probabilidade de a carga estar entre 1 e 1,5?

- Qual a probabilidade da carga exceder 1?

Cálculo de probabilidades através de fda's

- Qual a probabilidade de a carga estar entre 1 e 1,5?

= F(1,5) – F(1) = 0,297

- Qual a probabilidade da carga exceder 1?

= 1 – F(1) = 0,688

Obtendo fdp da fda

- A fdp de uma va discreta p(x) é obtida pela diferença entre dois valores da fda F(x).
- Para va's contínuas o raciocínio é o mesmo trocando as diferenças pelas derivadas.
- **Proposição:**

  Se X for uma va contínua com fdp f(x) e fda F(x) então, para qualquer x em que a derivada F'(x) existir, f(x) =F'(x).

Obtendo fdp da fda

- Exemplo: Considere uma va com fda:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < A \\ \dfrac{x - A}{B - A} & A \leq x \leq B \\ 1 & B < x \end{cases}$$

Encontre a fdp dessa va.

Obtendo fdp da fda

- Exemplo (continuação): F(x) é contínua para todos valores de x mas não é diferenciável nos pontos A e B

Para x < A: $F(x) = 0 \rightarrow f(x) = F'(x) = 0$

Para x > B: $F(x) = 1 \rightarrow f(x) = F'(x) = 0$

Para A < x < B:

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x - A}{B - A}\right) = \frac{1}{B - A}$$

Valor esperado

- **Definição**:

  O valor médio ou esperado de uma va contínua X com fdp f(x) é:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Valor esperado

- Valor esperado do exemplo a seguir é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x}{8} + \dfrac{3}{16}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

Valor esperado

- Valor esperado do exemplo:

$$E(x) = \int_0^2 x \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx$$

$$E(x) = \int_0^2 x \cdot f(x) dx = \left[\frac{x^2}{16} + \frac{3x^3}{24} \right]_0^2 = 1{,}25$$

Valor esperado de funções

- **Definição**:

  Se X for uma va contínua com fdp f(x) e h(X) for qualquer função de X, então

$$E\big(h(X)\big) = \mu_{h(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot f(x)dx$$

Variância

- **Definição**:

  A variância de uma va contínua X com fdp f(x) e média μ é

$$\sigma_X^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx = E[(X - \mu)^2]$$

  O **desvio padrão** consiste na raiz quadrada da variância

Variância

- **Proposição**:

  A variância também pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V(X) = E[(X)^2] - E[X]^2$$

Exemplo

- A distribuição da quantidade de cascalho (em toneladas) vendida por uma empresa de materiais de construção em uma semana é uma va contínua *X com fdp*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

- Calcular o valor médio da va contínua X:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot (1 - x^2) \right) dx$$

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

Exemplo

- Calcular a variância da va contínua X:

$$V(x) = E\left[(X)^2\right] - E\left[X\right]^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot (1 - x^2)\right) dx = \frac{1}{5}$$

$$V(x) = \frac{1}{5} - (\frac{3}{8})^2 = 0{,}059$$

Distribuição uniforme

Introdução

- Na distribuição uniforme, a principal hipótese existente é de que a probabilidade de uma va uniforme assumir qualquer valor em um dado intervalo é proporcional ao comprimento deste intervalo:

Função de densidade de probabilidade

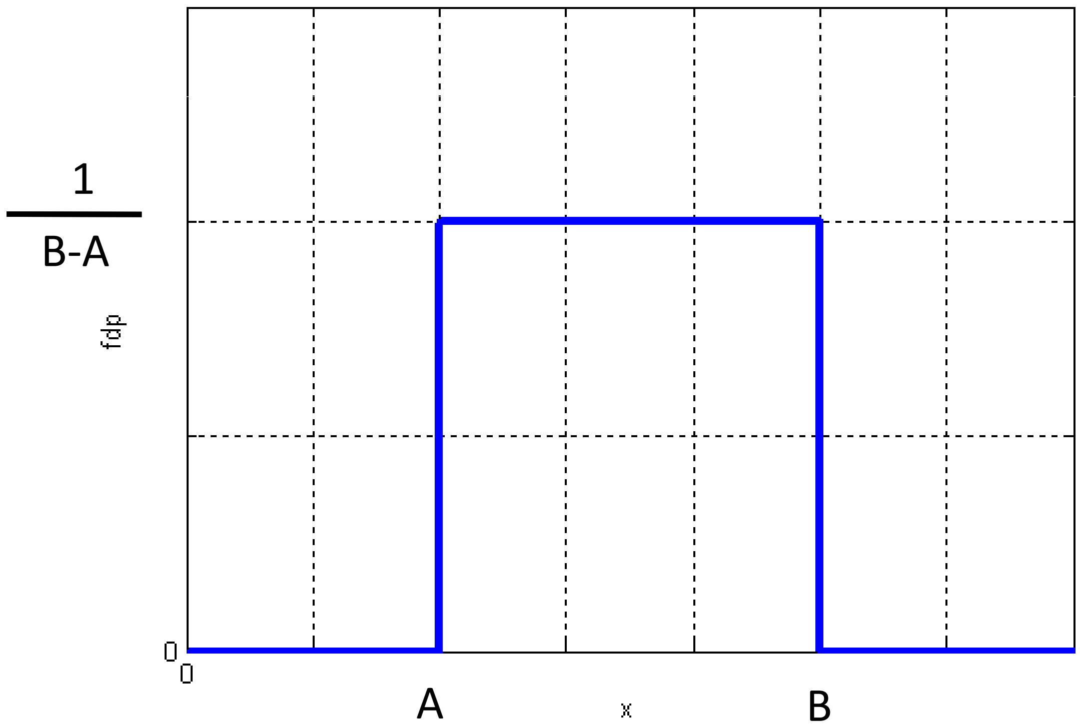
- **Definição**:

  Uma va continua X é dita ter distribuição uniforme no intervalo [*A*, *B*] se a fdp de X for:

$$f(x; A, B) = \begin{cases} \dfrac{1}{B - A} & A \leq x \leq B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função de densidade de probabilidade

- Ilustração da fdp de uma va uniforme:



Função de distribuição acumulada

- **Definição**:

  A fda de uma va X com distribuição uniforme no intervalo [*A*, *B*] é dada por

$$F(x; A, B) = \begin{cases} 0 & x < A \\ \dfrac{x - A}{B - A} & A \leq x \leq B \\ 1 & x > B \end{cases}$$

Média e variância

- Valor esperado ou médio:

$$E(x) = \mu = \frac{B + A}{2}$$

- Variância:

$$V(x) = \sigma^2 = E\left[(x - \mu)^2\right] = \frac{(B + A)^2}{12}$$

Distribuição normal ou gaussiana

Introdução

- Distribuição normal ou gaussiana é, sem dúvidas, a mais importante distribuição dentre todas em probabilidade e estatística:
- Muitas populações numéricas podem ser ajustadas aproximadamente por uma curva normal:
  - Características biométricas;
  - Erros em medidas em experimentos científicos;
  - Ruído térmico em comunicações.

Função de densidade de probabilidade

- **Definição:**

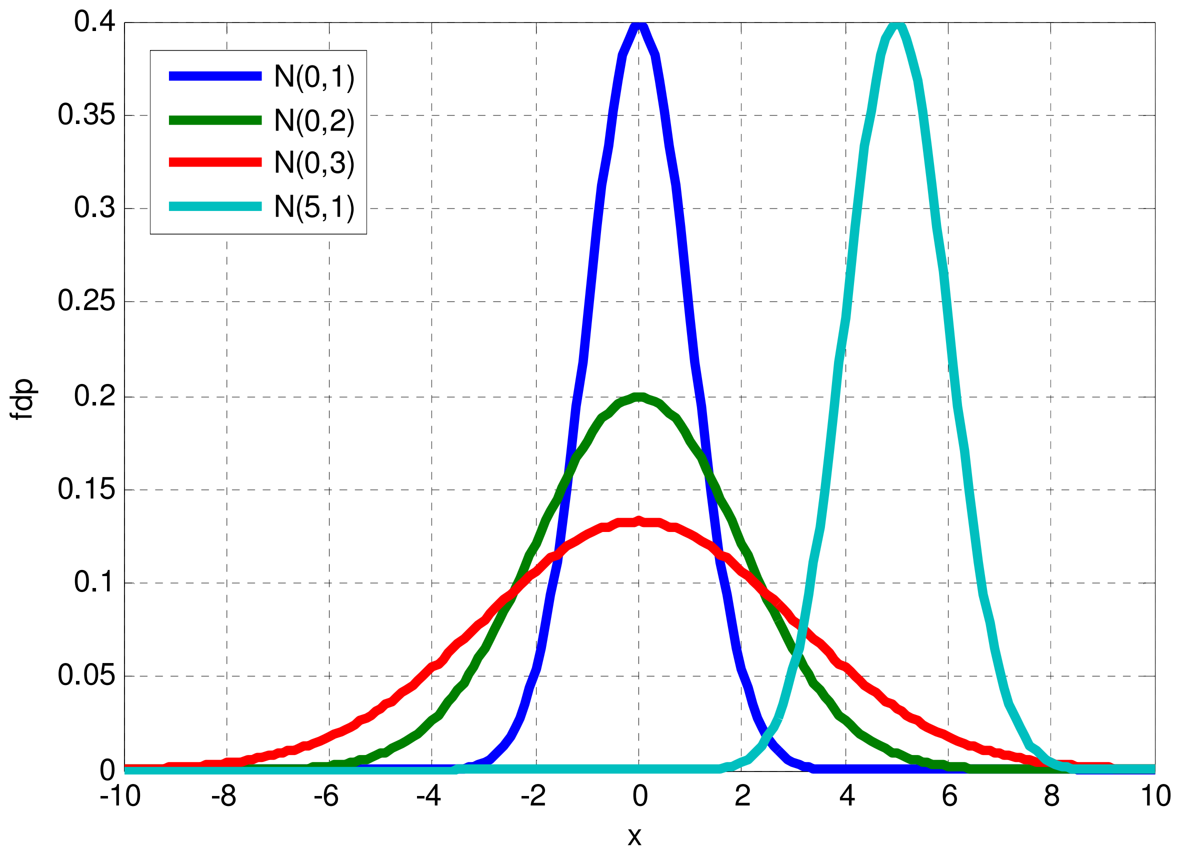
Diz-se que uma va contínua X possui uma distribuição normal com parâmetros μ e σ, onde $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma$, se a fdp de X for:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Normalmente, usa-se X~N(μ, σ) para dizer que X possui distribuição gaussiana.

Função de densidade de probabilidade

- Impacto da variação dos parâmetros μ e σ



Média e variância

- Valor médio ou esperado:

$$E[X] = \mu$$

- Variância:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

Distribuição normal padrão

- Para calcular a probabilidade de uma va normal X estar no intervalo [a,b] devemos calcular:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x;\mu,\sigma)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- Nenhuma das técnicas de integração padrão podem ser usadas para calcular a integral acima;
- Devem ser utilizadas técnicas de integração numéricas;

Distribuição normal padrão

- De forma a contornar esse problema, os valores dessa integral foram calculados e tabulados quando μ = 0 e σ = 1, que consiste em uma **distribuição normal padrão**
- A fdp dessa distribuição é dada por

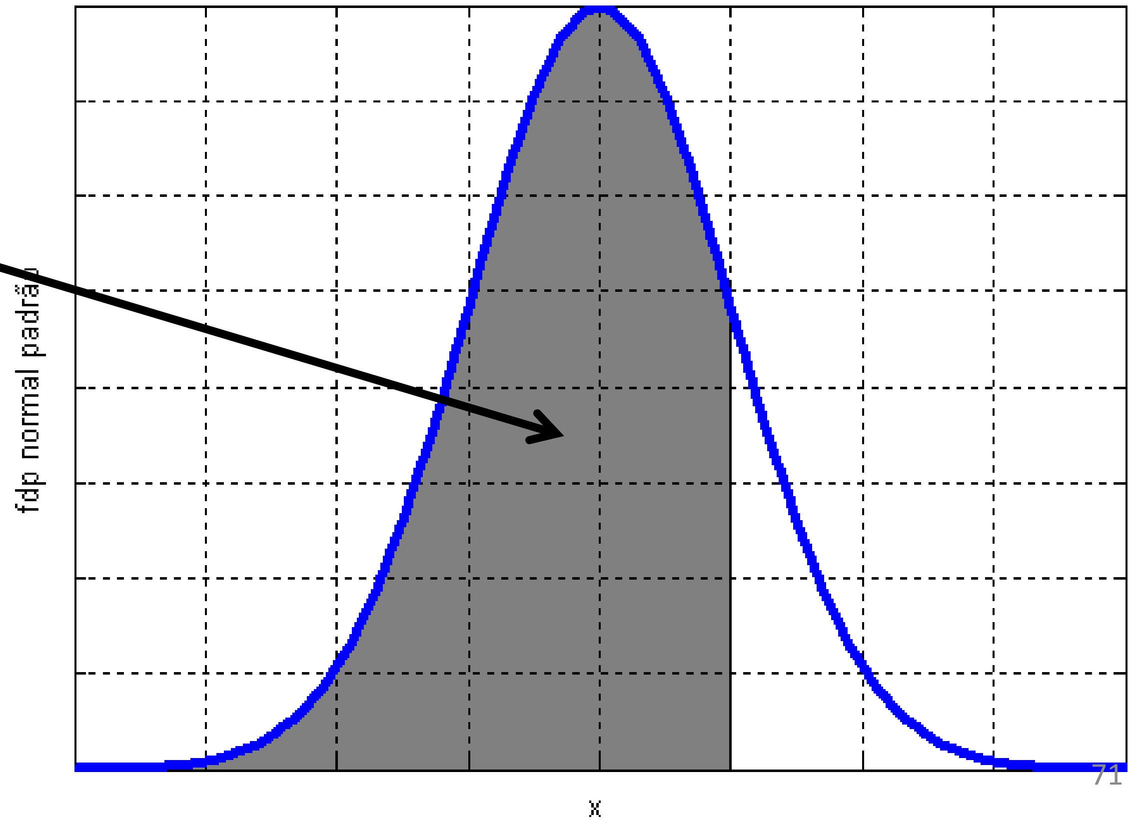
$$f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(z)^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

- A fda de Z é $P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(y;0,1)dy = \Phi(z)$

Distribuição normal padrão

- Em geral, as tabelas de distribuições normais padrão fornecem os valores de $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

Área sombreada = $\Phi(z)$



Distribuição normal padrão

- Exemplo: Usando as tabelas A.3 do apêndice do livro de Jay Devore calcule as probabilidades abaixo para uma va Z com distribuição normal padrão:

  a) $P(Z \leq 1,25)$

  b) $P(Z > 1,25)$

  c) $P(Z \leq -1,25)$

  d) $P(-0,38 \leq Z \leq 1,25)$

Distribuição normal padrão

- Exemplo (continuação):

  a) $P(Z \leq 1,25)$: Na tabela mencionada basta olhar o valor na interseção da linha 1,2 e 0,05. O valor encontrado é 0,8944

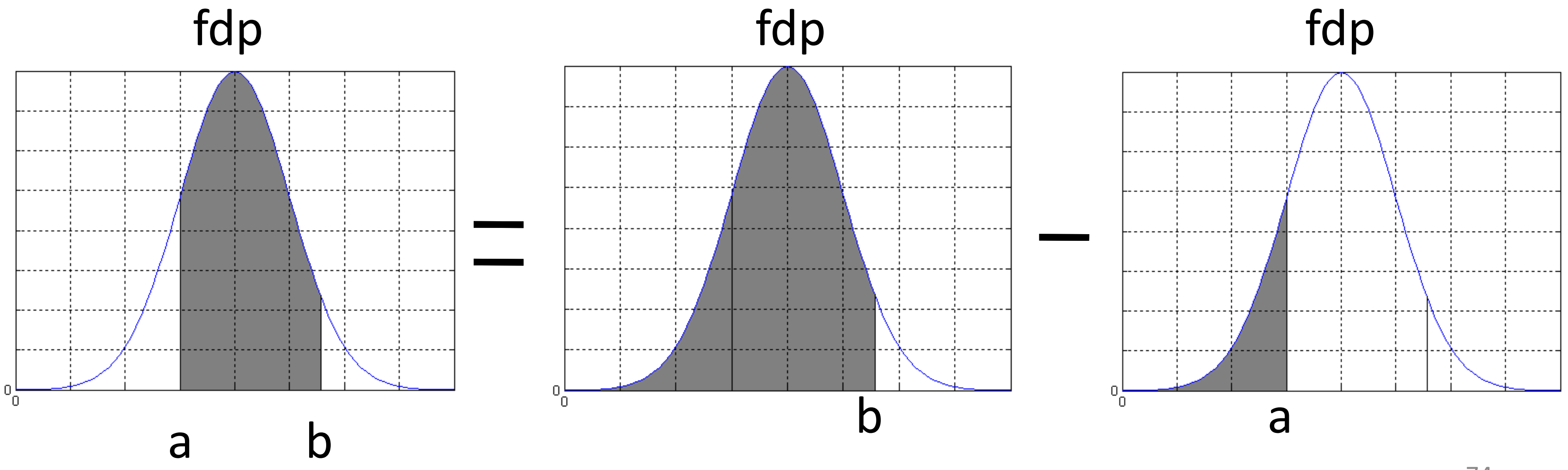
  b) $P(Z>1,25)=1 - P(Z \leq 1,25) = 1 – \Phi(1,25) = 1 – 0,8944 = 0,1056$

  c) $P(Z \leq -1,25)$: Na tabela mencionada basta olhar o valor na interseção da linha -1,2 e 0,05. O valor encontrado é 0,1056. O valor é o mesmo do item anterior devido a simetria da distribuição

Distribuição normal padrão

- Exemplo (continuação):

  d) P(-0,38≤Z ≤1,25) = P(Z≤1,25) - P(Z≤-0,38) = Φ(1,25) - Φ(-0,38) = 0,8944 – 0,3520 = 0,5424



Distribuições normais não padrão

- Vimos que o cálculo de probabilidades quando temos va's normais padrão, devemos recorrer à técnicas numéricas ou tabelas.
- E quando a distribuição normal é não padrão? Ou seja, a va é distribuída como ~ N(μ, σ)?
- Devemos recorrer à padronização dessa va.

Distribuições normais não padrão

- **Proposição**:

  Se X tem distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, então:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

  tem distribuição normal padrão.

Distribuições normais não padrão

- **Proposição (continuação)**:

  Assim

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \qquad P(X \geq b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Distribuições normais não padrão

- Exemplo: Considere que o tempo de reação de uma pessoa às luzes de freio de um veículo em desaceleração pode ser modelado com uma distribuição normal com média 1,25 s e desvio padrão 0,46 s. Qual é a probabilidade de que o tempo de reação esteja entre 1,00 e 1,75?

Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação):

  Temos uma va normal não padrão. A padronização sugere que:

$$1{,}00 \leq X \leq 1{,}75$$

$$\frac{1{,}00 - 1{,}25}{0{,}46} \leq \frac{X - 1{,}25}{0{,}46} \leq \frac{1{,}75 - 1{,}25}{0{,}46}$$

Distribuições normais não padrão

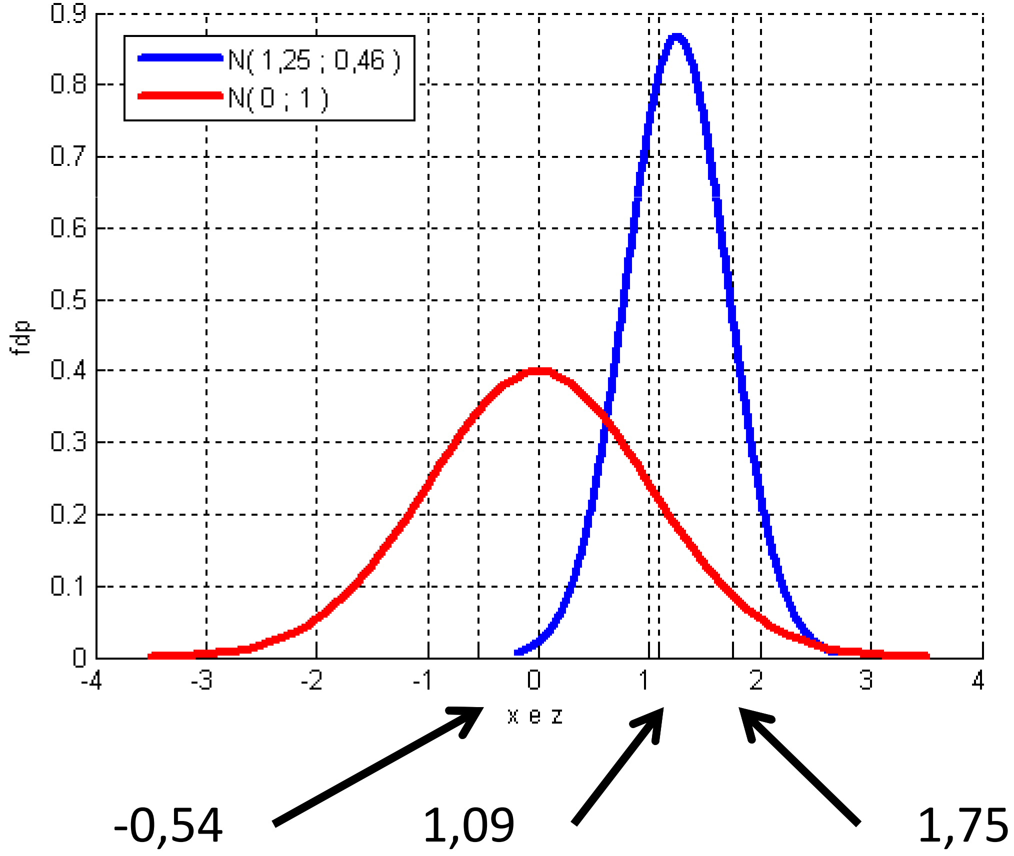
- Exemplo (continuação):

  Dessa forma

$$P(1{,}00 \leq X \leq 1{,}75)$$
$$= P\left(\frac{1{,}00 - 1{,}25}{0{,}46} \leq Z \leq \frac{1{,}75 - 1{,}25}{0{,}46}\right)$$
$$= P(-0{,}54 \leq Z \leq 1{,}09)$$
$$= \Phi(1{,}09) - \Phi(-0{,}54)$$
$$= 0{,}8621 - 0{,}2946 = 0{,}5675$$

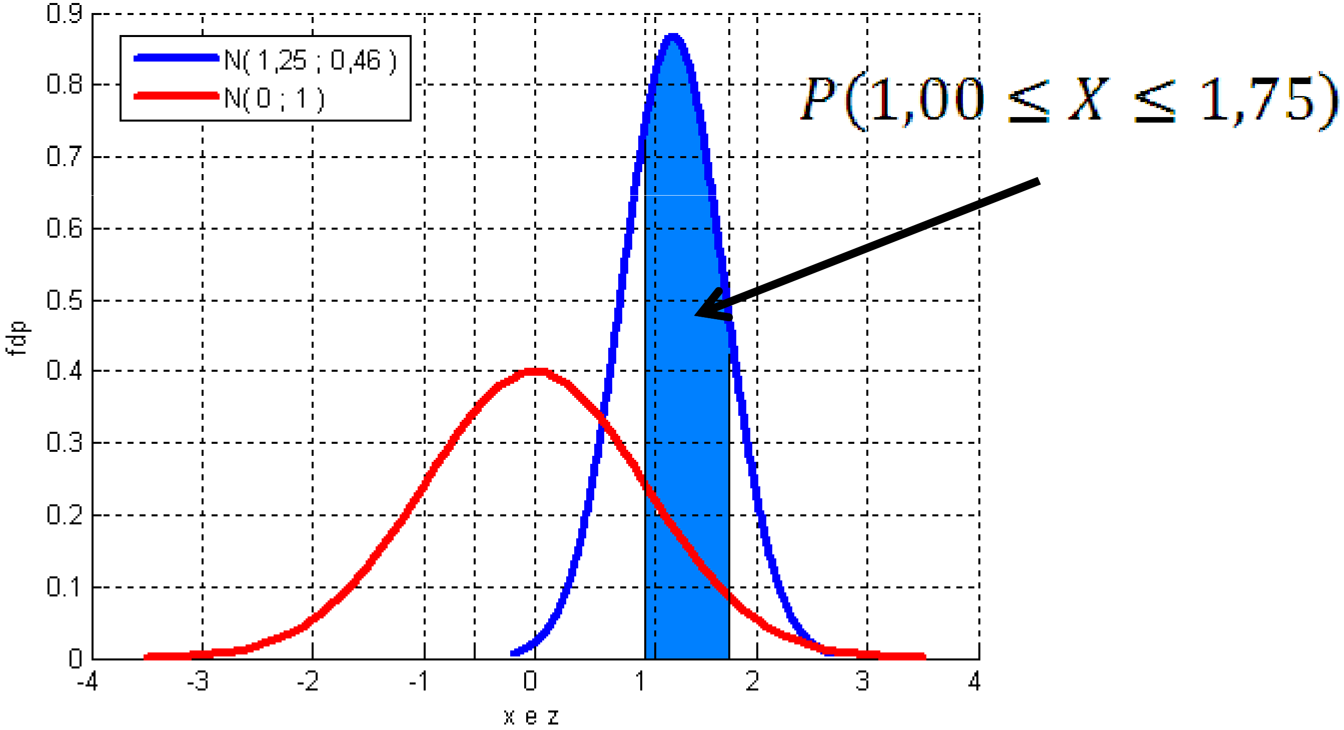
Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação): Fdp’s das distribuições normais padrão e não padrão



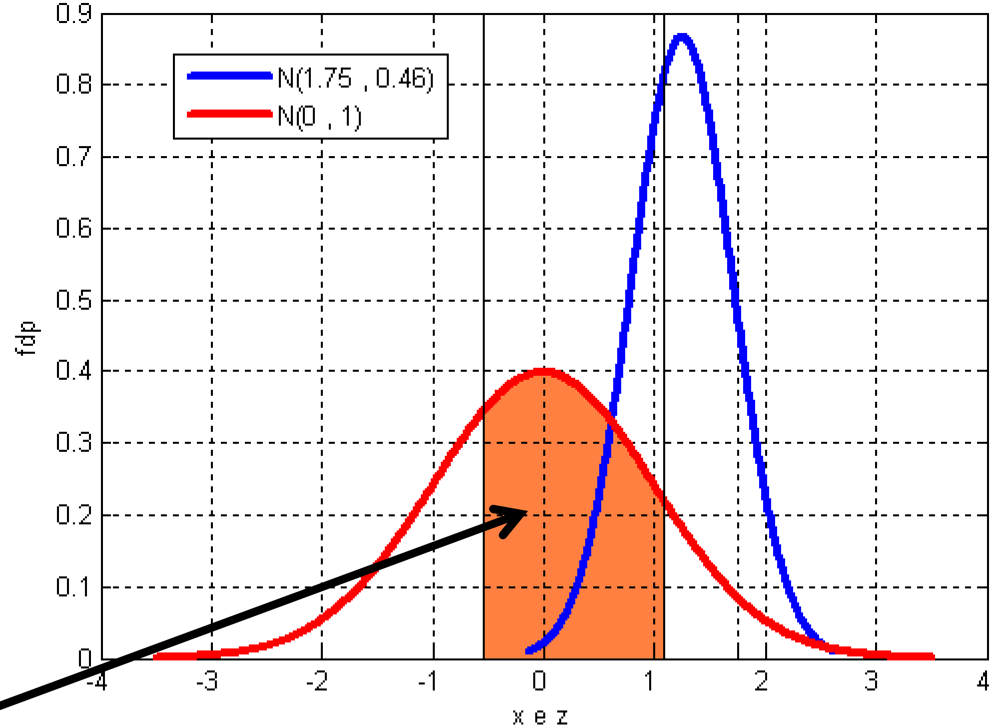
Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação): Probabilidade na distribuição não padrão



Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação): Probabilidade na distribuição padrão



$$P(-0{,}54 \leq Z \leq 1{,}09)$$

Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação): Qual a probabilidade de o tempo de resposta ser maior que 2 segundos?

Distribuições normais não padrão

- Exemplo (continuação): Qual a probabilidade de o tempo de resposta ser maior que 2 segundos?

$$p(x > 2) = p\left(Z > \frac{2 - 1{,}25}{0{,}46} \right) = p(Z > 1{,}63)$$

$$= 1 - \phi(1{,}63) = 0{,}0516$$

Distribuições normais não padrão

- Exemplo: A tensão de ruptura de um diodo possui distribuição normal. Qual é a probabilidade dessa tensão estar a 1 desvio padrão de seu valor médio?

Distribuições normais não padrão

- Exemplo: A tensão de ruptura de um diodo possui distribuição normal. Qual é a probabilidade dessa tensão estar a 1 desvio padrão de seu valor médio?

$$p(\mu + \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = ?$$

Distribuições normais não padrão

- Exemplo: A tensão de ruptura de um diodo possui distribuição normal. Qual é a probabilidade dessa tensão estar a 1 desvio padrão de seu valor médio?

$$p(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = ?$$

$$p\left(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$p(-1 \leq Z \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1) =$$

$$\phi(1) - \phi(-1) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = 0{,}6826$$

Distribuição gama

Introdução

- O gráfico de qualquer fdp Normal possui formato de sino e é simétrico.
- Existem situações práticas em que a va estudada pode ter uma certa assimetria em sua distribuição.
- A **distribuição gama** possui uma distribuição assimétrica.
- Aplicações: Desvanecimento multipercurso em comunicações sem fio, tempo entre sinapses entre neurônios, distribuição de chuvas em um reservatório.

Função gama

- **Definição**:

  Para $\alpha > 0$, a função gama $\Gamma(\alpha)$ é definida por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Distribuição gama

- **Definição**:

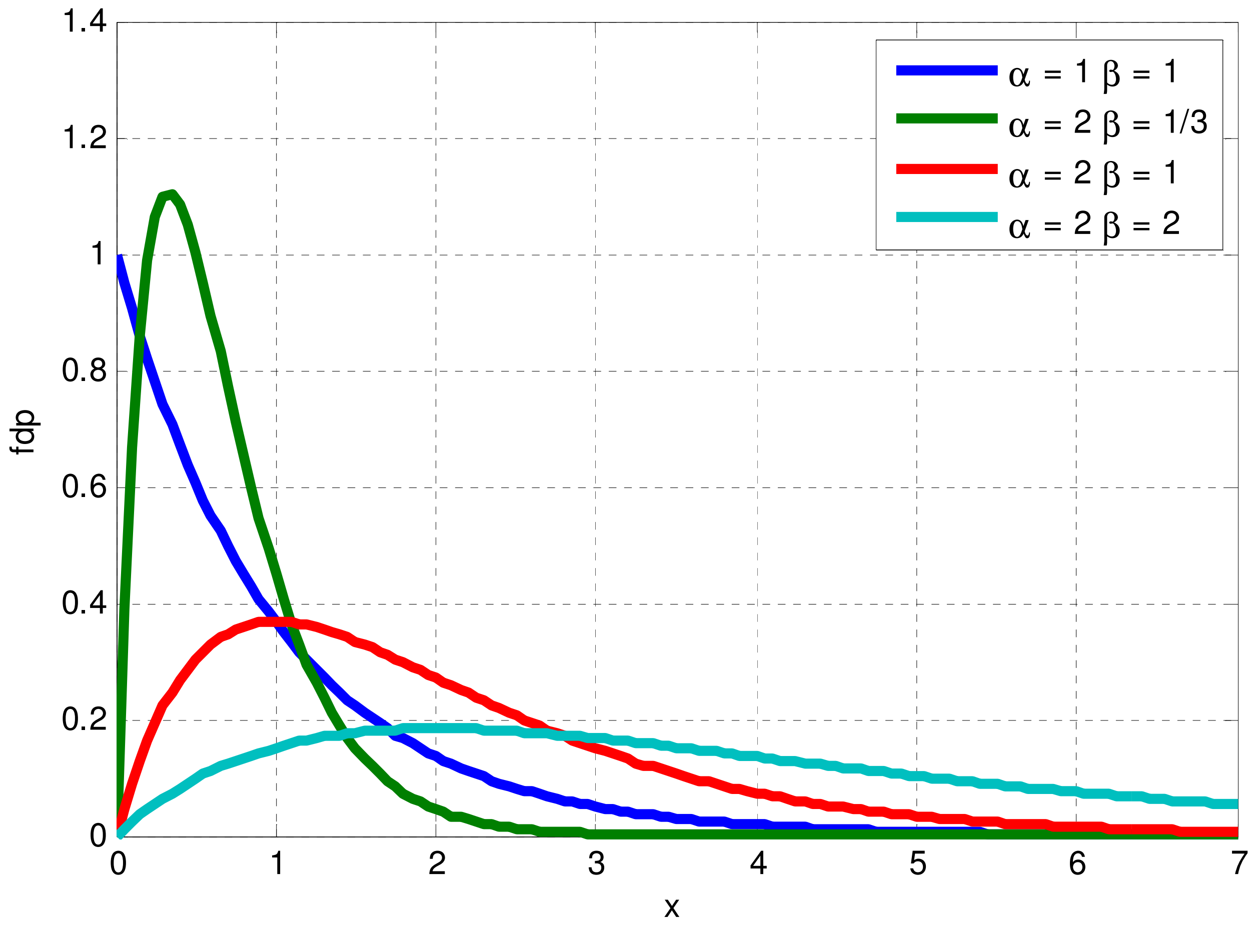
  Uma va contínua X tem distribuição gama se a fdp de X é dada por

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  Em que α > 0 e β > 0. A **distribuição gama padrão** é aquela em que β = 1

Distribuição gama

- Fdp gama para diversos valores de α e β. Chamamos β de parâmetro de Escala.



Valores esperados da distribuição gama

- **Definição**:

  A média e a variância de uma va gama X com distribuição f(x; α, β) é dada por:

$$E(X) = \mu = \alpha\beta \quad V(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Função gama incompleta

- Quando temos uma distribuição gama padrão (β = 1), temos que a fda é chamada de **função gama incompleta** e é dada por:

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy$$

- Apêndice 4 do livro de Jay L. Devore contém valores tabelados dessa função.

Distribuição Gama

- Exemplo: Suponha que o tempo de reação de um indivíduo a um determinado estímulo possui distribuição gama padrão com $\alpha = 2$.

  a) Qual a probabilidade do tempo de reação estar entre 3 e 5 segundos?

  b) Qual a probabilidade de o tempo de reação ser maior que 4 segundos?

Distribuição Gama

- Exemplo: Suponha que o tempo de reação de um indivíduo a um determinado estímulo possui distribuição gama padrão com $\alpha = 2$.

a) Qual a probabilidade do tempo de reação estar entre 3 e 5 segundos? $P(3 \leq X \leq 5)$?

$= F(5;2) - F(3;2) = 0{,}960 - 0{,}801 = 0{,}159$

b) Qual a probabilidade de o tempo de reação ser maior que 4 segundos? $1 - F(4;2) = 0{,}092$

Função gama normalizada

- **Proposição:**

  Seja X uma va com distribuição gama de parâmetros α e β. Então para qualquer x > 0, a fda de X é dada por:

$$P(X \leq x) = P(X \leq x; \alpha, \beta) = F\left(\frac{x}{\beta}; \alpha\right)$$

  Em que F(. ; α) é a função gama incompleta (Normalizada).

Distribuição Gama

- Exemplo: Suponha que o tempo de sobrevivência X em semanas de um roedor exposto a radiação que possua distribuição gama com $\alpha = 8$ e $\beta = 15$.

  a) Qual a probabilidade de um roedor viver entre 60 e 120 semanas?

  b) Qual a probabilidade de ele viver ao menos 30 semanas?

Distribuição Gama

a) Qual a probabilidade de um roedor viver entre 60 e 120 semanas?

$p(60 \leq X \leq 120) = F(120/15;8) - F(60/15;8) =$

$= F(8;8) - F(4;8) = 0{,}547 - 0{,}051 = 0{,}496$

Distribuição Gama

a) Qual a probabilidade de um roedor viver entre 60 e 120 semanas?

$p(60 \leq X \leq 120) = F(120/15;\ 8) - F(60/15;\ 8) =$

$= F(8;8) - F(4;8) = 0{,}547 - 0{,}051 = 0{,}496$

b) Qual a probabilidade de ele viver ao menos 30 semanas?

$= p(X \geq 30) = 1 - F(30/15;\ 8) = 1 - F(2;8) =$

$= 1 - 0{,}001 = 0{,}999$

Distribuição Gama

c) O tempo esperado de sobrevida do camundongo?

Distribuição Gama

c) O tempo esperado de sobrevida do camundongo?

$E[X] = \alpha * \beta = 8*15 = 120$ semanas

Distribuição exponencial

Introdução

- Distribuições exponenciais fornecem modelos probabilísticos largamente utilizados em engenharia.
- Distribuição exponencial consiste em um caso particular das distribuições gama com o parâmetro $\alpha = 1$ e $\beta=1/\lambda$.
- Aplicações: tempo entre chamadas telefônicas, distância entre mutações no DNA, altura das moléculas de um gás a uma temperatura e pressão fixas.

Função densidade de probabilidade

- **Definição:**

  A fdp de uma va exponencial X com parâmetro λ (λ > 0) é dada por

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

- **Proposição:**

  A fda de uma va exponencial X com parâmetro λ (λ > 0) é dada por

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Valores esperados da distribuição exponencial

- **Definição**:

  A média e a variância de uma va exponencial X com distribuição f(x; λ) é dada por

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Valores esperados da distribuição exponencial

- Exemplo: Suponha que o tempo de resposta em um terminal de um computador tenha distribuição exponencial com tempo de resposta esperado de 5 segundos. Qual a probabilidade de o tempo de resposta ser no máximo 10 segundos? E de estar entre 5 e 10 segundos?

Valores esperados da distribuição exponencial

- Exemplo (continuação): P(x ≤10)?

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 5$$

$$\lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$P(X \leq 10) = F(10;0.2) = 1 - e^{-(10 \cdot 0{,}2)} = 1 - 0{,}135 = 0{,}865$$

Valores esperados da distribuição exponencial

- Exemplo (continuação): p(5≤ x ≤10)?

$$p(5 \leq x \leq 10) = F(10;0.2) - F(5;0.2)$$

$$p(5 \leq x \leq 10) = \left(1 - e^{-2}\right) - \left(1 - e^{-1}\right) = 0,233$$

Distribuição lognormal

Função densidade de probabilidade

- **Definição:**

  Uma va X possui uma distribuição lognormal se uma va Y = ln(X) possui uma distribuição normal. A fdp de X com parâmetros μ e σ é dada por:

$$
f(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{\frac{-(ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}
$$

Função de distribuição acumulada

- **Proposição:**

  A fda de uma va lognormal pode ser calculada através do uso de tabelas normais padrão de acordo com a propriedade:

$$F(x;\mu,\sigma) = P(X \leq x) = P\big(ln(X) \leq ln(x)\big)$$

$$= P\big(Y \leq ln(x)\big) = P\left(Z \leq \frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$$

Valores esperados da distribuição lognormal

- **Definição**:

  A média e a variância de uma va lognormal X com distribuição f(x; μ, σ) é dada por

$$E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

$$V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}.\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

Distribuição Lognormal

- Exemplo: O módulo de elasticidade X (psi), de vigas de madeira construídas com certa especificação possui distribuição Lognormal com $\mu = 0{,}353$ e $\sigma = 0{,}754$. Qual a probabilidade do módulo de elasticidade estar entre 1 e 2 psi?

Distribuição Lognormal

- Exemplo: (continuação)

  P(1≤ x ≤2)?

$$P(1 \leq x \leq 2) = P(\ln 1 \leq \ln x \leq \ln 2)$$

$$P(1 \leq x \leq 2) = P(0 \leq y \leq 0{,}6931)$$

$$P(1 \leq x \leq 2) = p\left(\frac{0 - 0{,}353}{0{,}754} \leq Z \leq \frac{0{,}6931 - 0{,}353}{0{,}754}\right)$$

$$P(1 \leq x \leq 2) = \phi(0{,}47) - \phi(-0{,}45)$$

$$P(1 \leq x \leq 2) = 0{,}354$$

Distribuição Lognormal

- Exemplo: (continuação)

Calculemos a média e o desvio de X:

$$E(x) = \mu = e^{0,353+\frac{0,754^2}{2}} = e^{0,6373} = 1,891$$

$$V(x) = \sigma^2 = e^{2\cdot 0,353+(0,754)^2} \cdot (e^{0,754^2} - 1) = 2,7387$$

Sugestão de exercícios

- Capítulo 4 (Livro: Probabilidade e Estatística para engenharia e ciências; Autor: Jay L. Devore)

  – Seção 4.1 – 1, 3, 4, 5, 8;
  – Seção 4.2 – 11, 12, 15, 19, 20-a), 21, 22-a) e c) e d), 23;
  – Seção 4.3 – 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 40, 41, 44;
  – Seção 4.4 –55, 56, 57, 58, 59, 60, 63;
  – Seção 4.5 – 72,73,75;
  – Exercícios suplementares – 92, 93, 94, 95, 96, 100, 101, 106;