Sinais e Sistemas: Introdução

Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre R. Fernandes

Agenda

I. Introdução

II. Classificação de Sinais

III. Energia e Potência

IV. Operações Básicas em Sinais

V. Sinais Elementares

VI. Propriedades de Sistemas

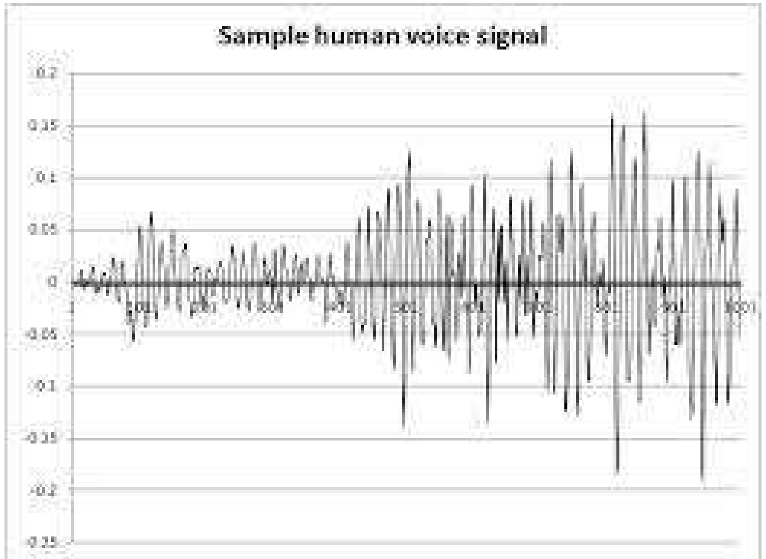
VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

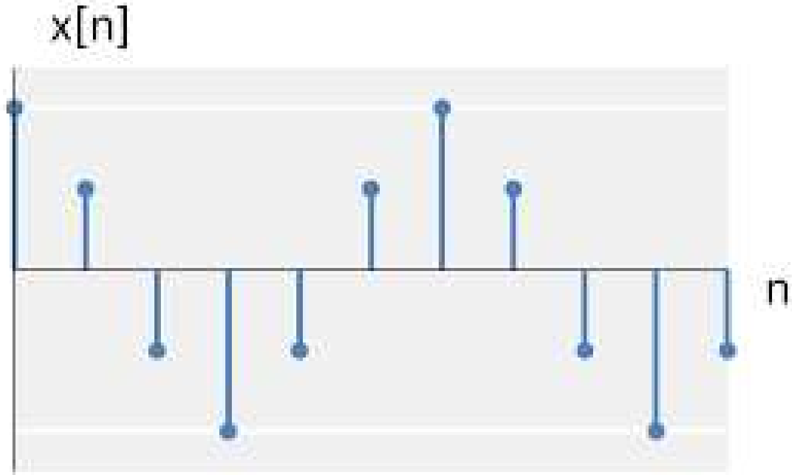
VIII. Propriedades da RI

I. Introdução

- **<u>Sinais:</u>** funções que contém informações sobre o comportamento ou a natureza de algum fenômeno

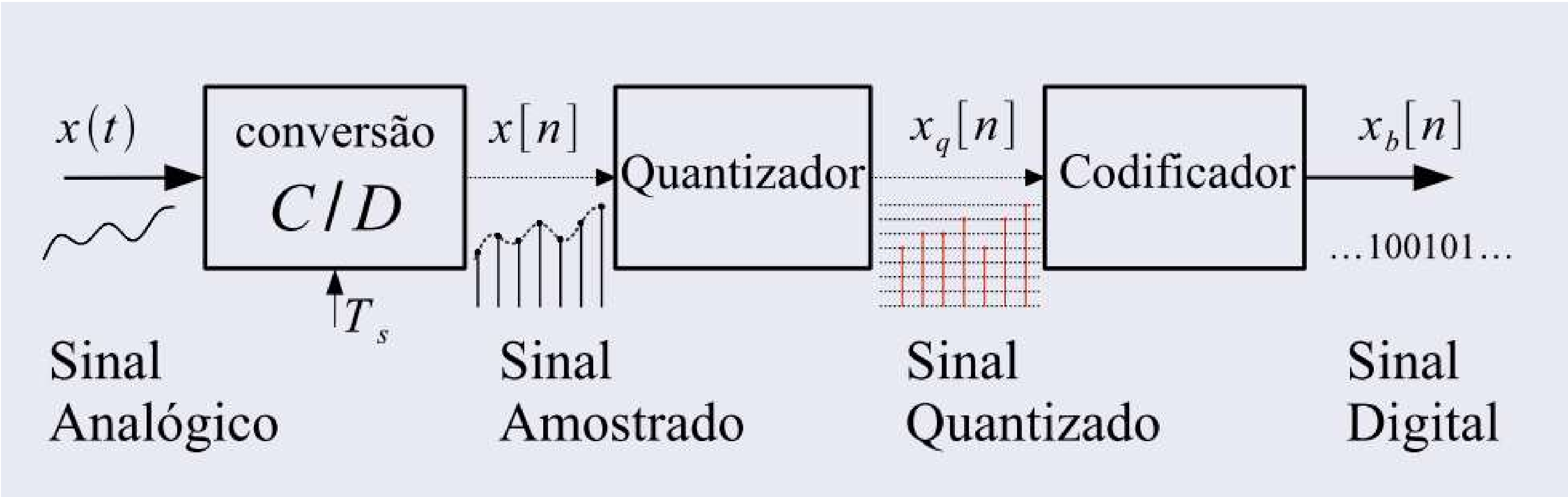
- Sinais são representados matematicamente como uma função de uma ou mais variáveis independentes.





I. Introdução

- Sinais analógicos → variável independente e amplitude contínuas
- Sinais discretos no tempo → variável independente discreta e ampitude contínua
- Sinais digitais → variável independente e amplitude discretas



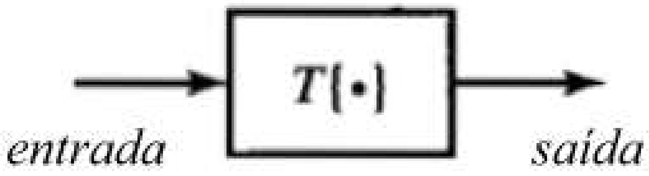
I. Introdução

- Exemplos de sinais:
  - Unidimensionais:
    - Áudio
    - Sinais biológicos: ECG, EEG
    - Sinais em sistemas de telecomunicações: sinais de rádio-freqüência, sinais ópticos
    - Sinais oriundos de sensores: temperatura, pressão, distância
  - Bidimensionais:
    - Imagem digital
    - Arranjo de antenas 2D
  - Tridimensional:
    - Vídeo digital
    - Holograma

I. Introdução

- **<u>Sistema:</u>** dispositivo cuja entrada e saída são sinais.

- Um sistema exerce transformações sobre os sinais, modificando-o.



- Sistemas contínuos → entrada e saída são sinais contínuos no tempo
- Sistemas discretos → entrada e saída são sinais discretos no tempo

I. Introdução

- Sistemas também são chamados de filtros.

- A filtragem de um sinal consiste na análise e/ou modificação de sinais de forma a extrair informações dos mesmos e/ou torná-los mais apropriados para alguma aplicação específica

- Conceitos de sinais e sistemas podem ter diversas áreas de aplicações:
  - Projeto de circuitos eletrônicos, acústica, engenharia biomédica, controle de processos químicos, mercado financeiro...

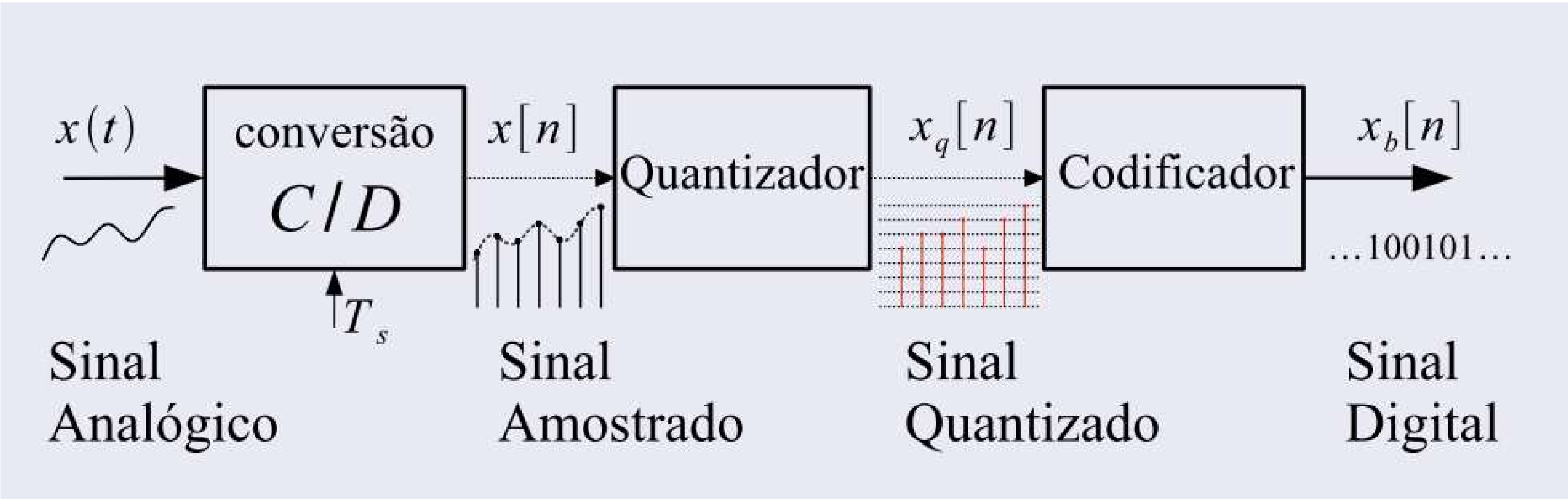
- Nesta disciplina, ficaremos limitados a sinais e sistemas unidimensionais (variável independente é o tempo) e reais.

I. Introdução

- Exemplos de Sistemas
  - Canal de Comunicação
  - Modulação e demodulação
  - Sistemas de Controle
  - Sistema Auditivo
  - Codificação e decodificação
  - Encriptação e desencriptação
  - Conversão de formatos

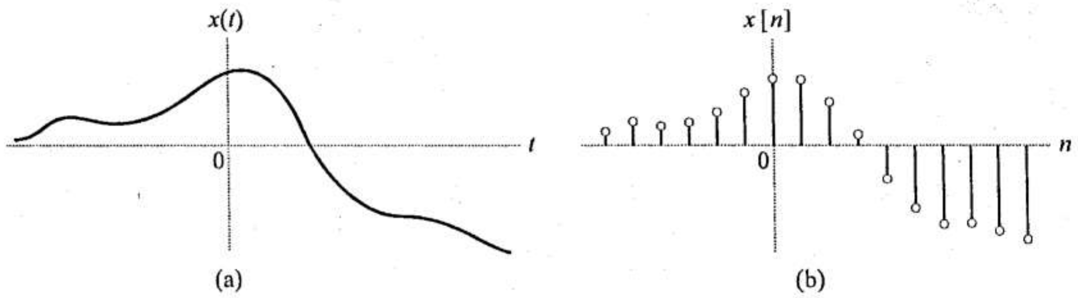
II. Classificação de Sinais

- <u>Sinais em tempo contínuo e discreto</u>



II. Classificação de Sinais

- **Sinais em tempo contínuo e discreto**
  - Sinal de tempo contínuo x(t):
    - Variável independente é contínua
    - Definidos para todo tempo "t" real
    - Surgem naturalmente de uma forma de onda física (temperatura ambiente, velocidade de um motor)



II. Classificação de Sinais

- **Sinais em tempo contínuo e discreto**
  - Sinal de tempo discreto x[n]:
    - Variável independente é discreta
    - Definidos apenas para instantes discretos (n é inteiro)
    - Também chamado de série temporal
    - Surgem naturalmente de forma discreta no tempo ou são derivados de um sinal de tempo contínuo (amostragem)

$$x[n] = x_a(nT)$$

- T é o período de amostragem
- $f_s = 1/T$ a frequência de amostragem.

II. Classificação de Sinais

- <u>**Sinais em tempo contínuo e discreto**</u>

- Diferença de notações:
  - Contínuos: x(t) e Discretos: x[n]

- Decisão entre abordagem digital ou analógica
  - Determinada pela aplicação de interesse, recursos disponíveis, custo envolvido na construção do sistema.
  - Tenta-se, ao máximo, utilizar uma abordagem digital: maior flexibilidade, adaptável à tecnologia, menor ruído, maior repetibilidade etc.

II. Classificação de Sinais

- **Sinais com simetria par ou impar ou sem simetria**
  - Simetria par (sinal simétrico):
    - $x(t) = x(-t)$
    - $x[n] = x[-n]$
  - Sinais simétricos com relação ao eixo vertical
  - Exemplo: cosseno

  - Simetria impar (sinal antissimétrico):
    - $x(t) = -x(-t)$
    - $x[n] = -x[-n]$
  - Sinais antissimétricos em relação ao eixo vertical
  - Exemplo: seno

II. Classificação de Sinais

- Qualquer sinal pode ser decomposto com um sinal par mais um sinal impar:

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

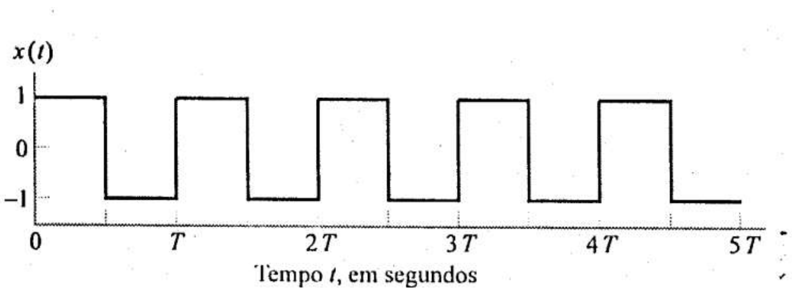
$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t) \right)$$

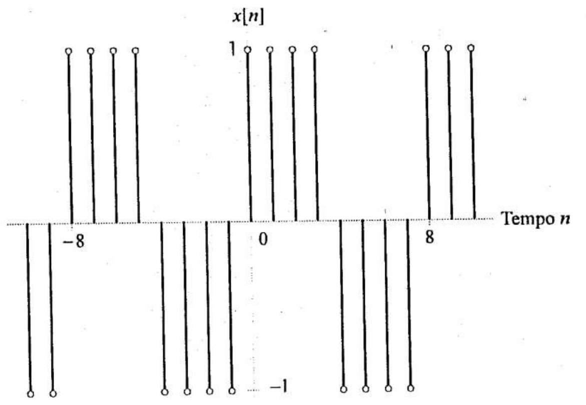
$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t) \right)$$

- O caso discreto no tempo é análogo.

II. Classificação de Sinais

- <u>**Sinais periódicos e não-periódicos**</u>
  - Sinal Periódico:
    - Contínuo: satisfaz a equação: $x(t) = x(t + T)$
    - Discreto: satisfaz equação: $x[n] = x[n + N]$
    - Período fundamental: Menor valor de T ou N que satisfaça equação anterior
    - Ex: seno, cosseno, trem de pulsos





III. Energia e Potência

- Potência instantânea de um sinal:

$$p(t) = x^2(t) \qquad\qquad P[n] = x^2[n]$$

- Potência média de um sinal:
  - Sinal aperiódico:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt \qquad\qquad P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} x^2[n]$$

  - Sinal periódico:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt \qquad\qquad P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

III. Energia e Potência

- Energia de um sinal:

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

- Sinais podem ter potência e energia finita ou infinita (mas sempre positiva)

IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com variáveis Dependentes**
  - Mudança de escala de amplitude

$$y(t) = cx(t) \qquad\qquad y[n] = cx[n]$$

Ex: amplificadores operacionais

  - Adição (ou subtração) de sinais

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \qquad\qquad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

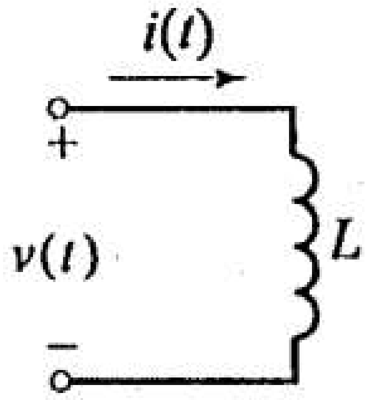
Ex.: misturador de áudio

IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com variáveis Dependentes**
  - Multiplicação (ou divisão) de sinais

$$y(t) = x_1(t)x_2(t) \qquad y[n] = x_1[n]x_2[n]$$

Ex: modulação AM (sinal portadora)



  - Diferenciação contínua

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Ex: Indutor (entrada = corrente, saída = tensão

$$v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$$

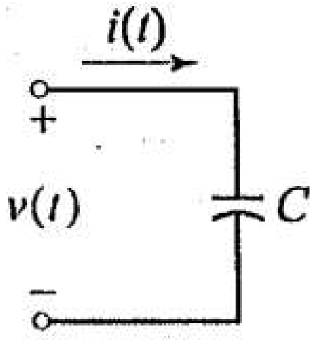
IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com variáveis Dependentes**

Integração contínua

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

Ex: Capacitor



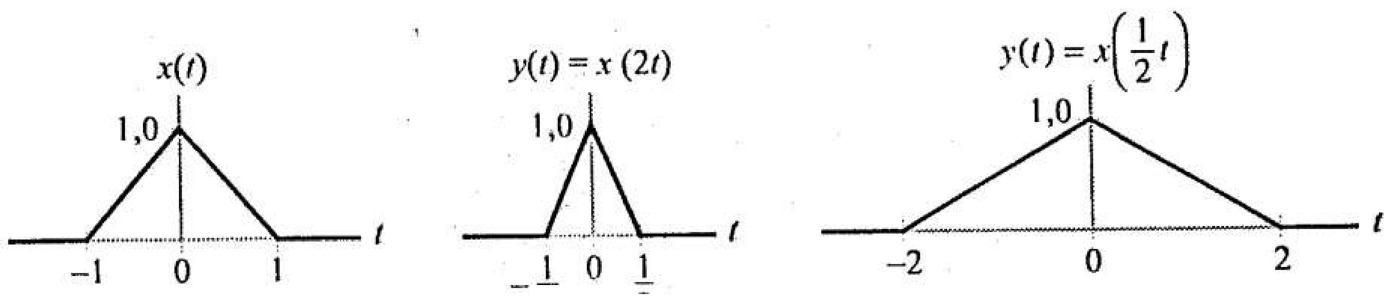
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau$$

IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com a variável independente**
  - Mudança de escala de tempo (contínuo):

$$y(t) = x(at)$$

  - a > 1, "versão comprimida" do sinal
  - 0 < a < 1, "versão expandida" do sinal

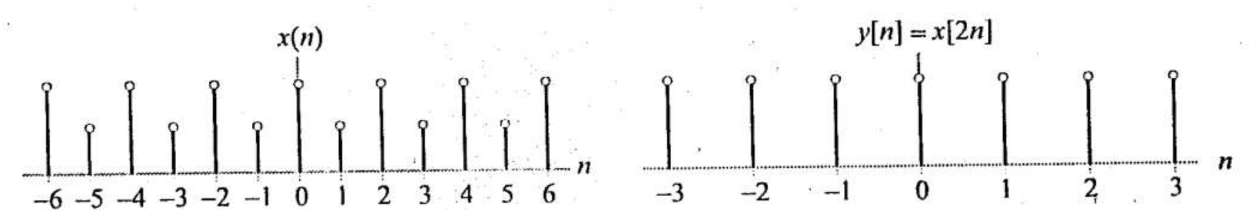


IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com a variável independente**
  - Mudança de escala de tempo (discreto)

$$y[n] = x[kn],$$

  - só para valores inteiros de k > 1 (há apenas a "versão comprimida")
  - Valores do sinal de tempo discreto são perdidos

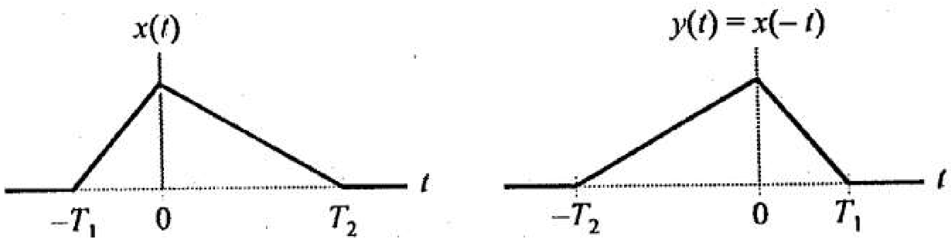


IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com a variável independente**
  - Reflexão na escala de tempo (espelhamento):

$$x(t) = x(-t) \qquad\qquad x[n] = x[-n]$$

  - sinal par permanece o mesmo
  - sinal impar é a versão refletida

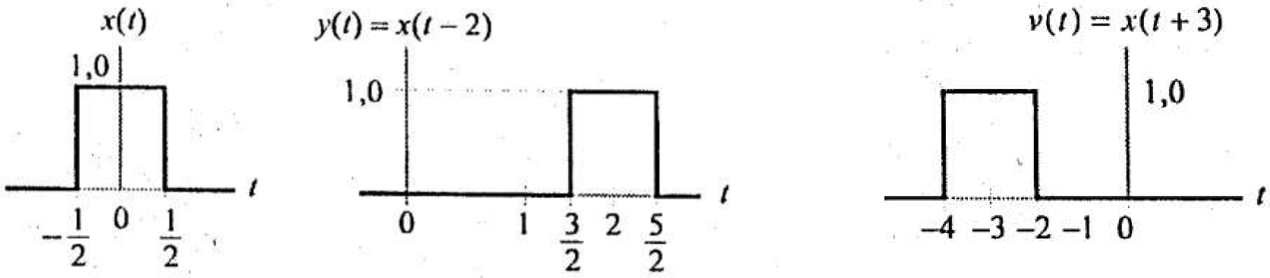


IV. Operações básicas em sinais

- **Operações com a variável independente**
  - Deslocamento no tempo

$$y(t) = x(t - t_0) \qquad\qquad y[n] = x[n - n_d],$$

- Se t_0 ou n_d > 0, sinal atrasado (desloca para direita)
- Se t_0 ou n_d < 0, sinal adiantado (desloca para esquerda)



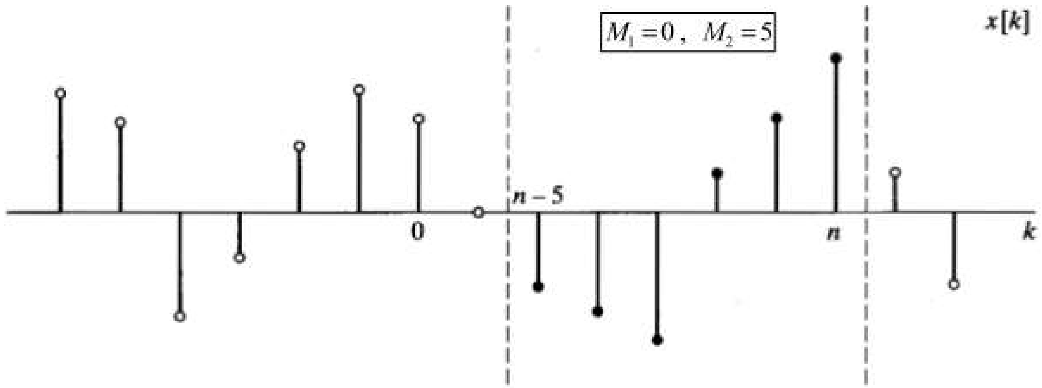
V. Operações básicas em sinais

Exemplo 2 (média móvel):

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \ldots + x[n] + x[n-1] + \ldots + x[n-M_2]\}$$

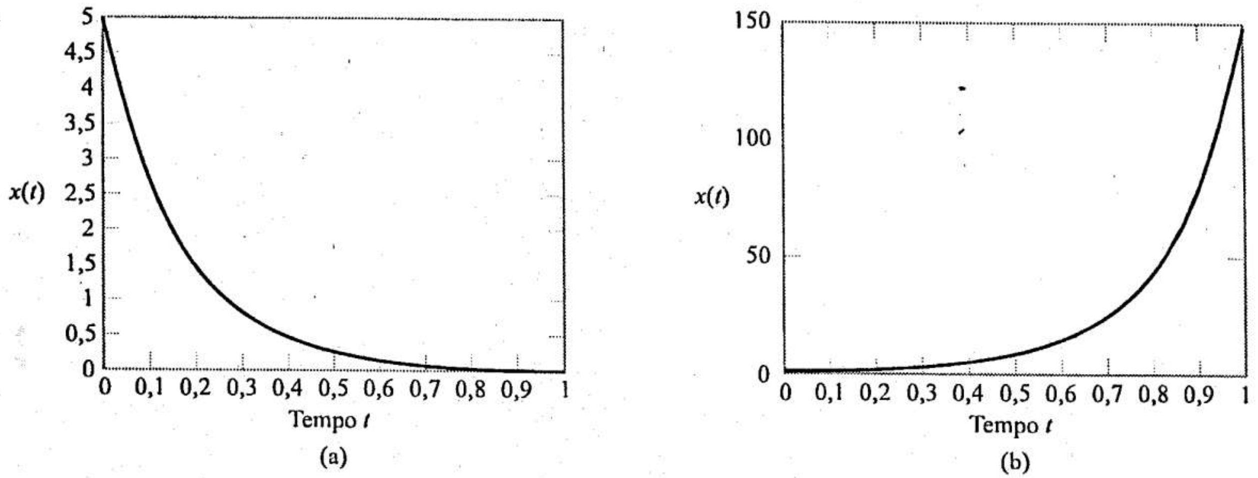
O valor da n-ésima amostra da sequência $y[n]$ é dado pela média de $M_1 + M_2 + 1$ amostras da sequência $x[n]$ em torno de sua n-ésima amostra.



$$y[n] = \frac{1}{6}\Big(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + x[n-5]\Big).$$

V. Sinais Elementares

- **Sinal exponencial real (contínua):** $x(t) = Be^{at}$ ou $x(t) = Bc^{t}$



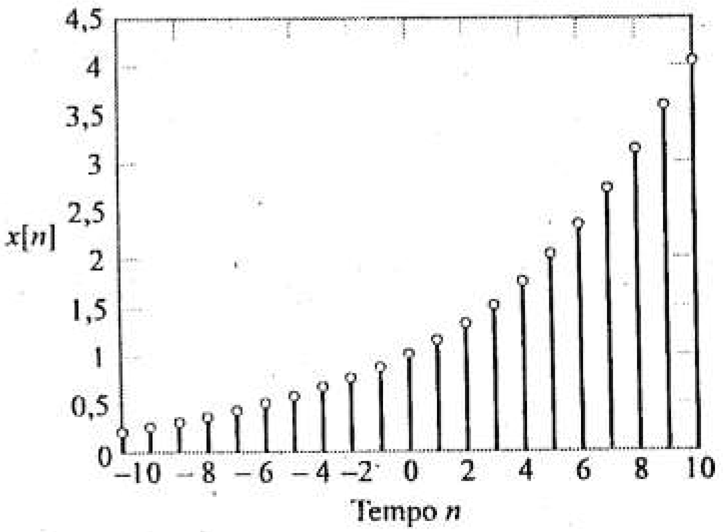
Se B, c ∈ R, então a sequência é real, caso contrário a sequência é complexa.

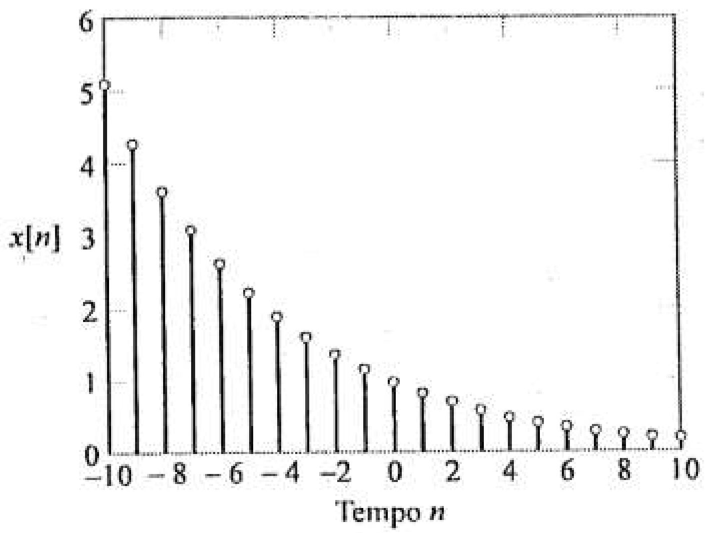
- Se c>1 (ou a>0): sequência crescente em magnitude em função de n
- Se 0 <c<1 (ou a<0): sequência decrescente em magnitude em função de n

V. Sinais Elementares

- **Sinal exponencial real (discreta):**

$$x[n] = Be^{an} \quad \text{ou} \quad x[n] = Br^n$$

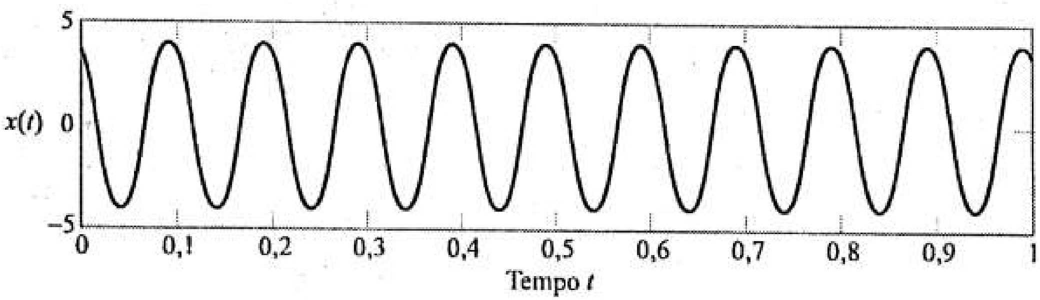




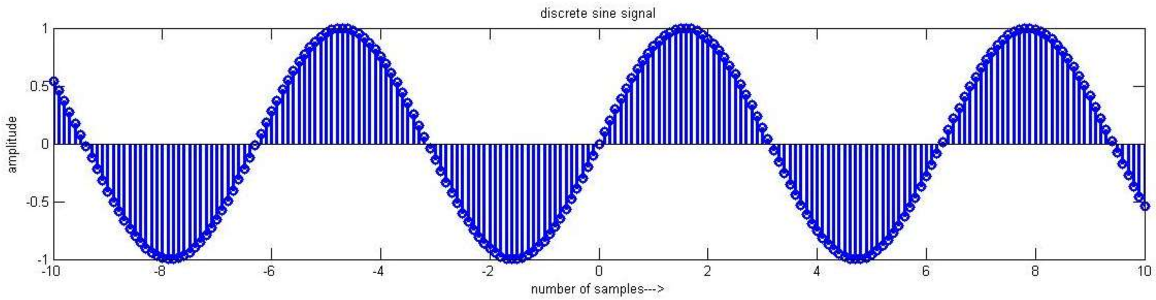
V. Sinais Elementares

- **Sinais Senoidais:**

$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi) = A\sin(\omega t + \varphi)$$



$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad A \in \mathbb{R}$$



V. Sinais Elementares

- **Sequência exponencial complexa:**

$x(t) = Be^{\alpha t}$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad$ $x[n] = A\alpha^n$, com $\alpha \in \mathbb{C}$

- Composição de duas senoides ponderadas (parte real e imaginária).

- Se $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}, A = |A|e^{j\phi}$, usando o Teorema de Euler, temos:

$$x[n] = A\alpha^n = |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n+\phi)} = |A||\alpha|^n \big(\cos(\omega_0 n + \phi) + j\sin(\omega_0 n + \phi)\big)$$

- O caso contínuo é análogo.

V. Sinais Elementares

- **Sequência exponencial complexa unitária:**

$$x[n] = |A|e^{j(\omega_0 n+\phi)} = |A|[\cos(\omega_0 n + \phi) + j\sin(\omega_0 n + \phi)]$$

em que:
ω_0: freqüência (radianos/amostras);
ϕ: fase (radianos)

Obs: Seqüências exponenciais complexas com freqüências $\omega_0 + 2\pi r$, $r \in \mathbb{Z}$ são idênticas:

$$x[n] = Ae^{j(\omega_0+2\pi)n} = Ae^{j\omega_0 n}\underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = Ae^{j\omega_0 n}.$$

O mesmo vale para sequências senoidais:

$$x[n] = A\cos\left((\omega_0 + 2\pi r)n + \phi\right) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$$

V. Sinais Elementares

- **Sequência exponencial complexa unitária:**

Conclusão

Necessita-se considerar apenas freqüências em um intervalo de comprimento 2π (Ex: $-\pi < \omega_0 < \pi$ ou $0 \leq \omega_0 < 2\pi$).

Frequências baixas: ω_0 em torno de $2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.
Frequências altas: ω_0 em torno de $\pi + 2\pi k,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

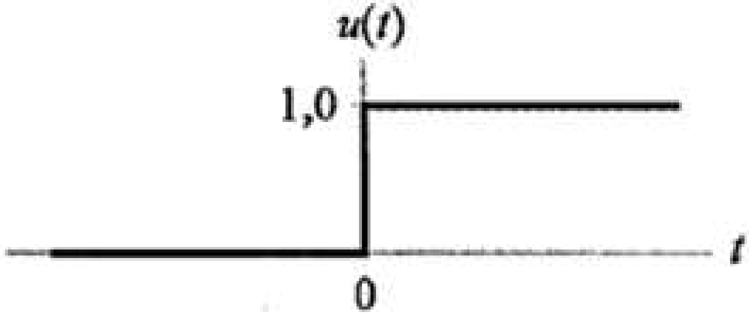
- Esta propriedade vale apenas para o caso discreto no tempo.

V. Sinais Elementares

- **Função Degrau (ou Degrau unitário):**

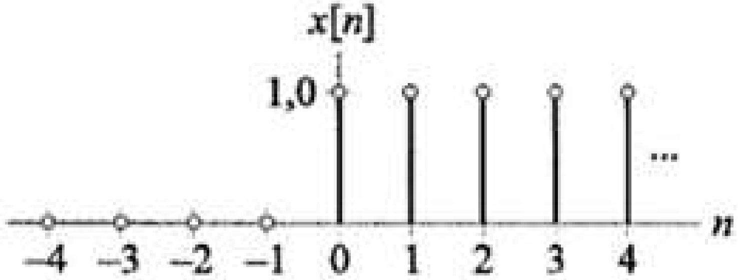
Caso contínuo:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



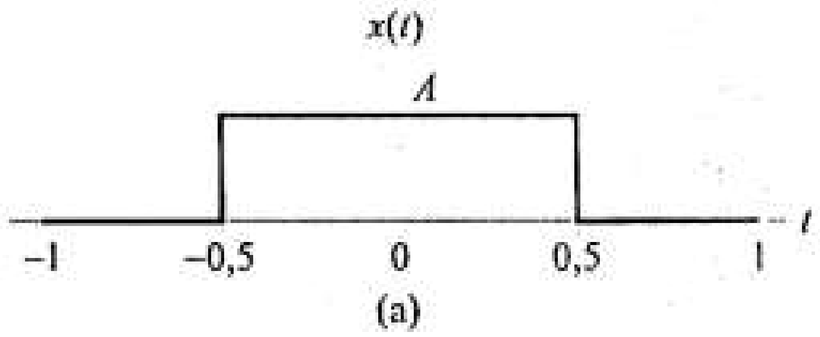
Caso discreto:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$



V. Sinais Elementares

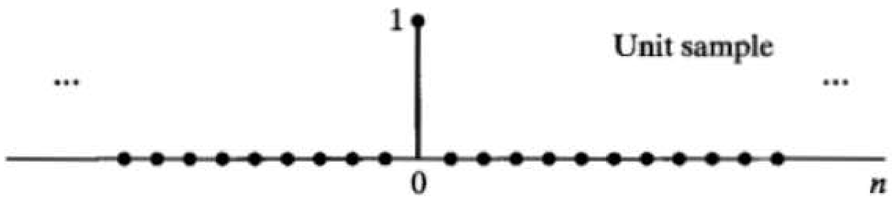
- **Função Pulso Retangular**



V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Kronecker):**

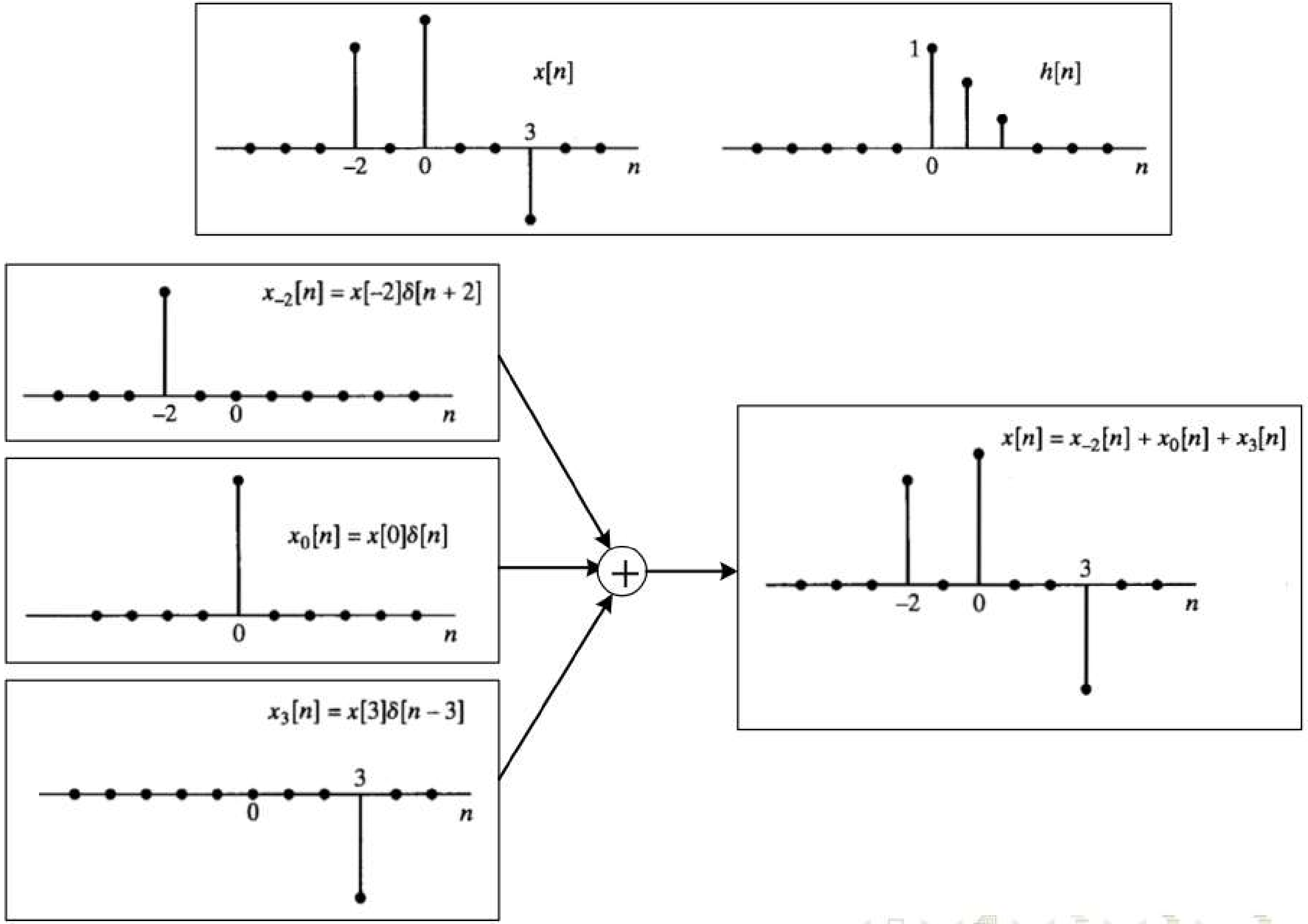
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



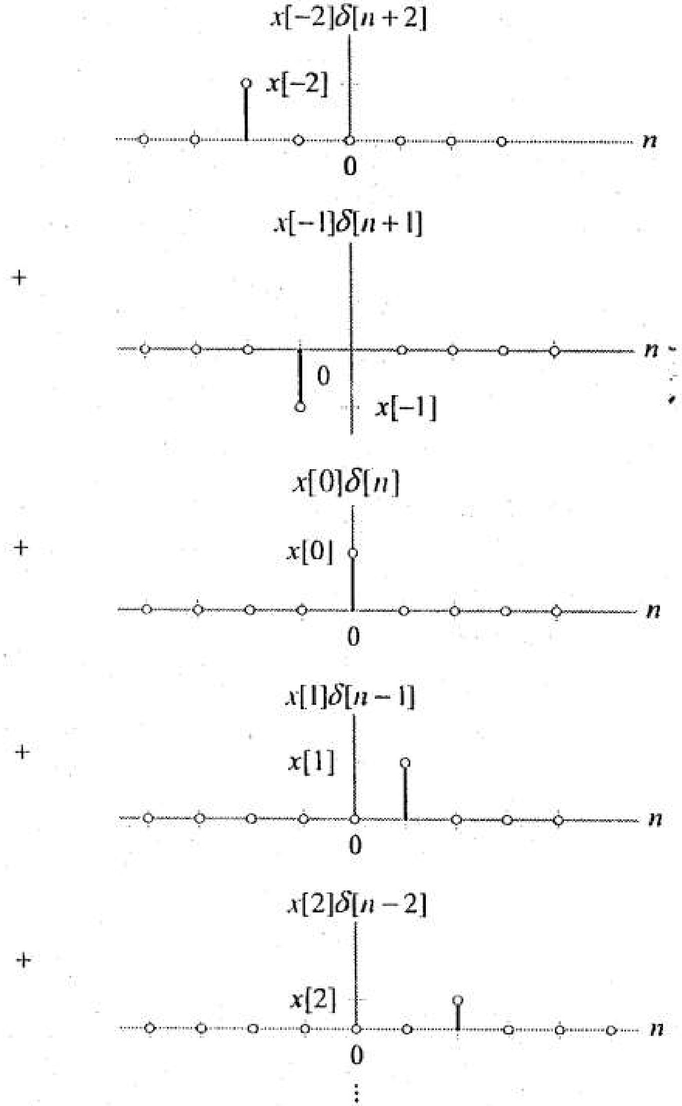
- **Propriedade:** Qualquer sequência pode ser expressa como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo.

V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Kronecker):**

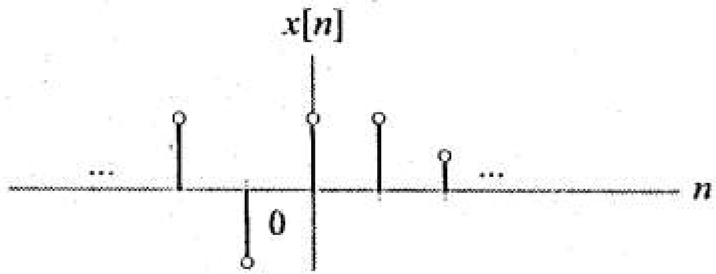


V. Sinais Elementares



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

=



V. Sinais Elementares

- Qualquer sequência pode ser expressa como uma soma ponderada de impulsos deslocados no tempo:

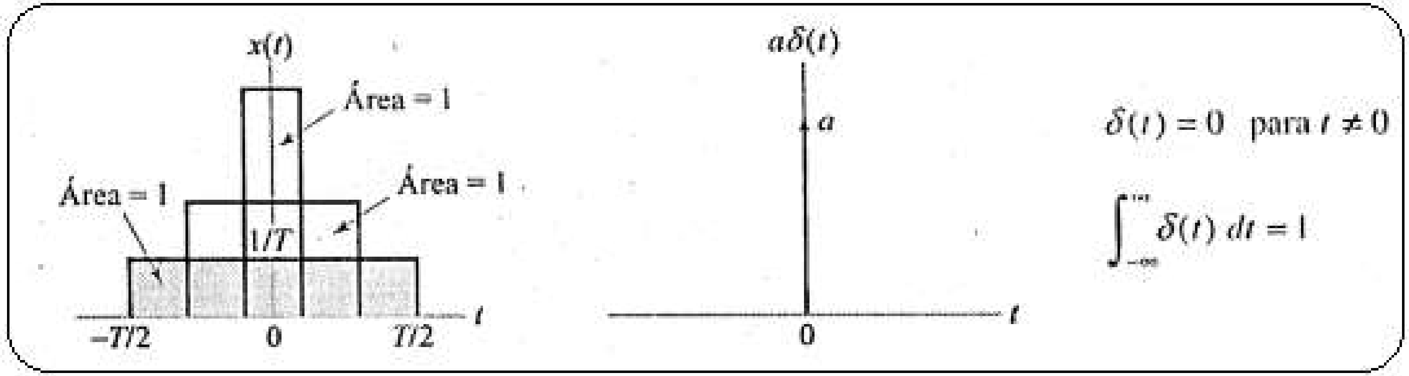
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots$$

- x[n] = sinal (depende do tempo)
- x[k] = valor do sinal no instante k (não depende do tempo)
- delta[n-k] = resposta ao impulso deslocada (depende do tempo)

V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Dirac):**



$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}[u(t+\epsilon) - u(t-\epsilon)] = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon} & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(t)$$

V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Dirac):**

  - A função impulso contínua não existe na prática (pois tem amplitide infinita)

  - Ela é usada como um artifício matemático para auxiliar em desenvolvimentos matemáticos.

  - **Propriedade 1:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) f(t) dt = f(a).$$

V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Dirac):**

  - De forma similar ao caso discreto, qualquer sinal contínuo pode ser expresso como uma soma ponderada (no caso, integral), de funções impulso deslocadas no tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

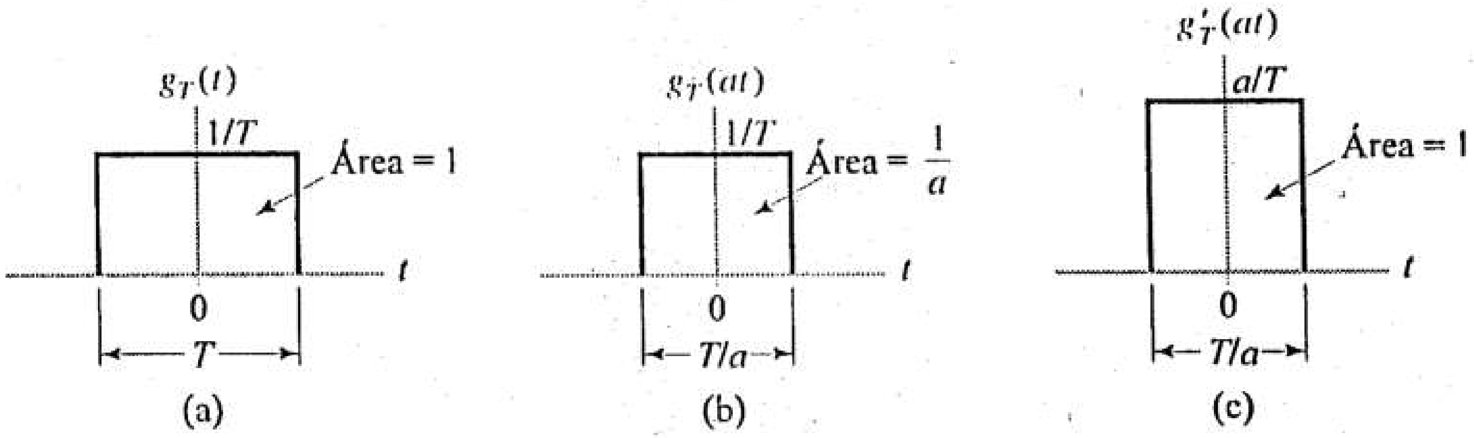
  - A eq. acima similar à eq. do slide anterior, em que usamos: $\delta(-t) = \delta(t)$

V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Dirac):**

  - **Propriedade 2:** Mudança na escala de tempo

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$



V. Sinais Elementares

- **Função Impulso (Delta de Dirac):**

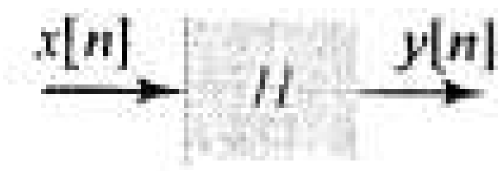
  - **Propriedade 3:** Impulso como derivada do degrau Degrau

$$\frac{du(t)}{dx} = \delta(t)$$

VI. Propriedades de Sistemas

- Notação para sistemas com entrada x(t) (ou x[n]) e saída y(t) (ou y[n]):

$$y(t) = H\{x(t)\} \qquad y[n] = H\{x[n]\}$$



VI. Propriedades de Sistemas

- **Linearidade:**

Sistema linear: Classe de sistemas definida pelo princípio da superposição. Seja $y_1[n]$ e $y_2[n]$ respostas do sistema às entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$, respectivamente. O sistema é linear se e somente se:

1. $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$ (aditividade)
2. $T\{ax[n]\} = a\mathrm{T}\{x[n]\} = ay[n]$ (homogeneidade)
   em que a é uma constante.

- De maneira geral, temos:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \qquad y(t) = H\{x(t)\} = H\left\{\sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)\right\}$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t)$$

em que $y_i(t) = H\{x_i(t)\}$

VI. Propriedades de Sistemas

- **Invariância no tempo**

Sistema invariante no tempo:
Classe de sistemas em que um deslocamento da sequência de entrada implica no mesmo deslocamento da sequência de saída. Matematicamente, temos:

$$x_1[n - n_0] \Rightarrow y_1[n - n_0], \quad \forall n_0$$

- Características (parâmetros) de um Sistema invariante não se modificam com o passar do tempo

VI. Propriedades de Sistemas

- **Invariância no tempo**

Pergunta: O sistema acumulador do Exemplo 3 é invariante no tempo?
Defina $x_1[n] = x[n - n_0]$. Precisamos mostrar que
$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = y[n - n_0]$:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - n_0].$$

Fazendo $k_1 = k - n_0$, temos:

$$y_1[n] = \sum_{k_1=-\infty}^{n-n_0} x[k_1] = y[n - n_0]$$

Portanto, o acumulador é um sistema invariante no tempo.

VI. Propriedades de Sistemas

- **Estabilidade**

Um sistema é estável no sentido BIBO (*bouded input bounded output*) se e somente se, para toda sequência de entrada limitada a saída também será uma sequência limitada. Matematicamente, temos:

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n \;\Rightarrow\; |y[n]| \leq B_y < \infty \quad \forall n,$$

$$\left|x(t)\right| \leq M_x < \infty \quad \text{para todos } t \quad \Rightarrow \quad \left|y(t)\right| \leq M_y < \infty \quad \text{para todos } t$$

- O conceito de estabilidade de um sistema independe do tipo de entrada
- Um dado sistema pode produzir uma saída limitada apenas para um número restrito de entradas limitadas. Nesse caso, o sistema *não é estável*.
- Sistemas estáveis produzem saídas limitadas para *todo* tipo de entrada limitada.

VI. Propriedades de Sistemas

- **Causalidade**

Um sistema é causal se, para todo n_0, o valor da saída em $n = n_0$ depende somente dos valores da entrada em $n \leq n_0$. Matematicamente, temos:

$x_1[n] = x_2[n]$, para $n \leq n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n]$, para $n \leq n_0$.

Sistemas diferença

1. Sistema diferença para frente:
   $y[n] = x[n+1] - x[n] \qquad \text{(não causal)}$
2. Sistema diferença para trás:
   $y[n] = x[n] - x[n-1] \qquad \text{(causal)}$

- Sistemas causais são sistemas "não antecipativos"

VI. Propriedades de Sistemas

- **Exemplos:**
  - Média móvel
  - Acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Indutor (integral):

$$y(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

VI. Propriedades de Sistemas

- **Exemplos:**
  - Termistor:

$$y(t) = \frac{x(t)}{R(t)}$$

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

1. Utilizando a representação por soma de impulsos deslocados:

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\Big\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \Big\}$$

2. Pelo princípio da superposição, obtemos:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\}.$$

3. Invariância no tempo : $T\{\delta[n]\} = h[n] \Rightarrow T\{\delta[n-k]\} = h[n-k]$.
Portanto, temos:

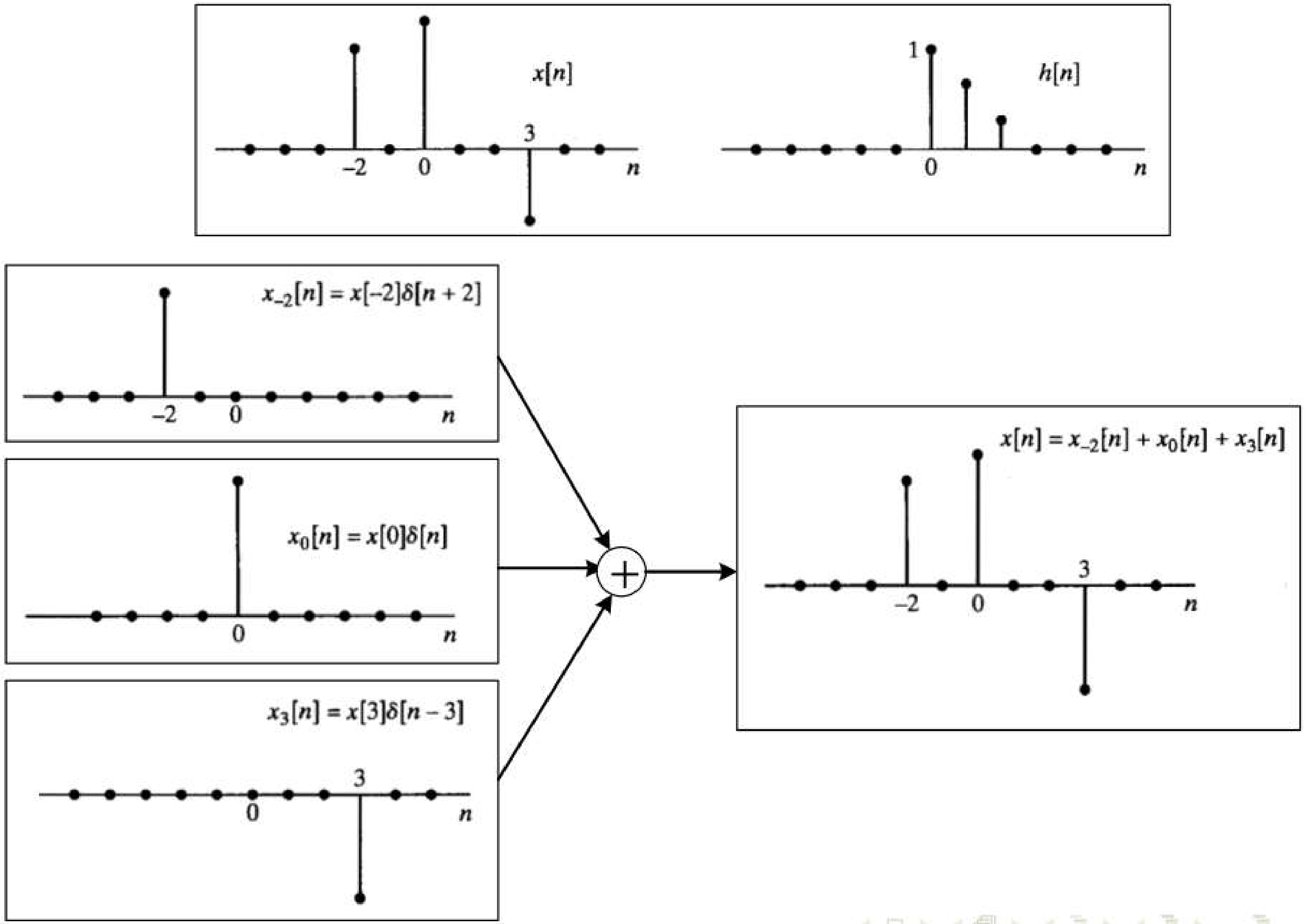
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad \textbf{(soma de convolução)}$$

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

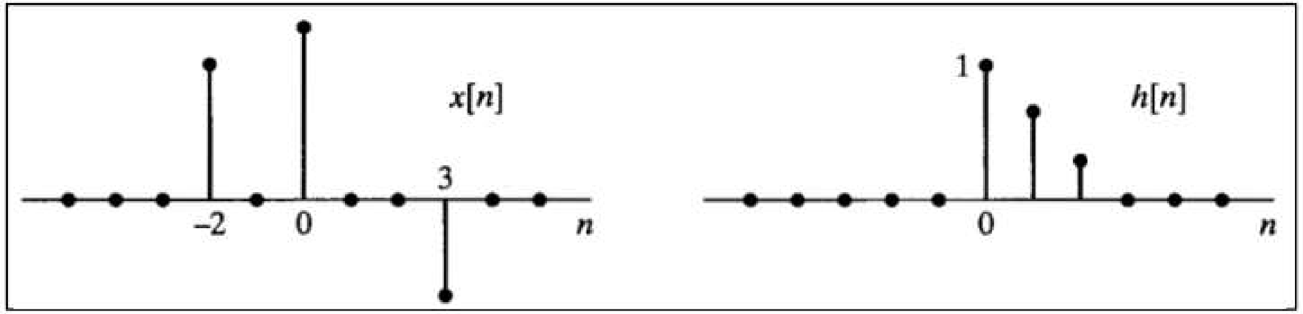
Resposta ao impulso (RI):

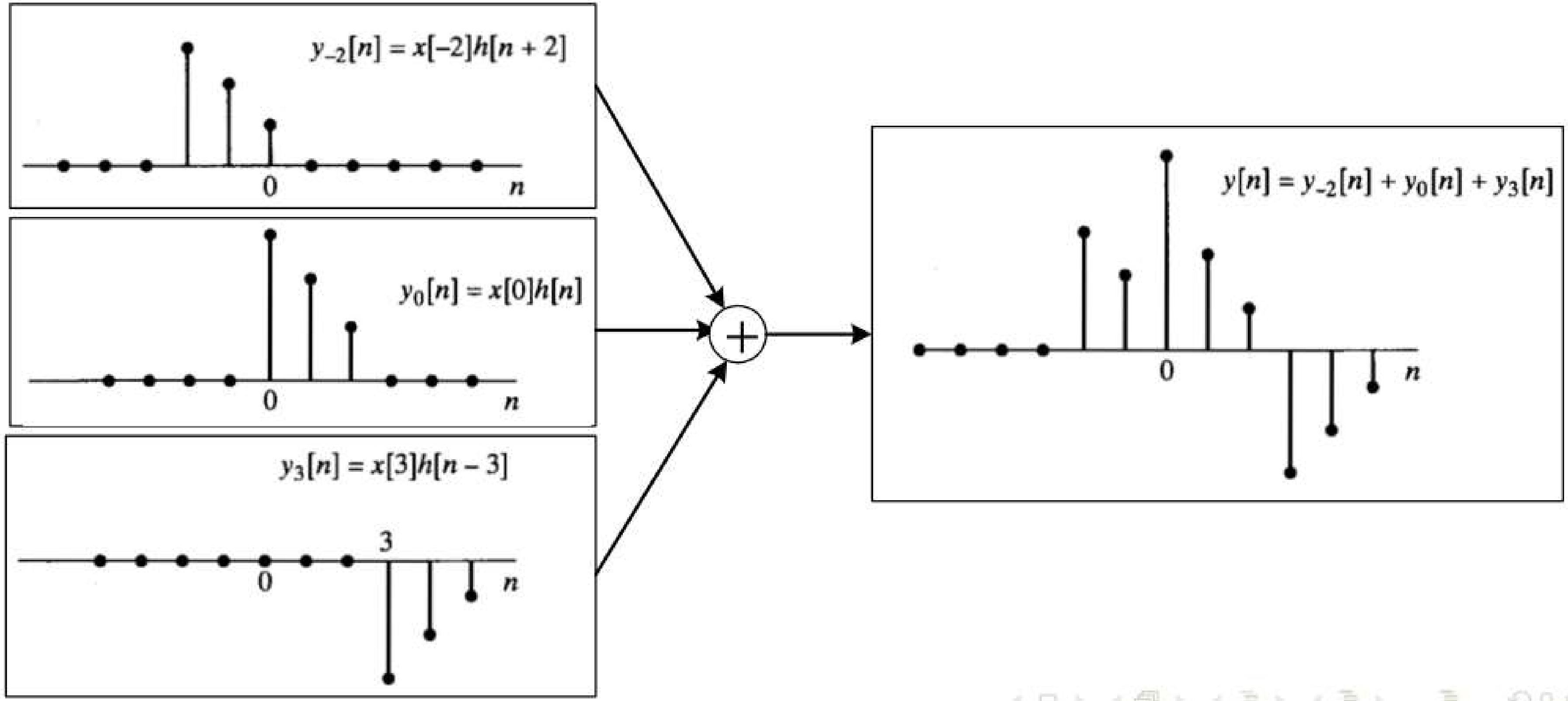
- Caracteriza de maneira completa o comportamento de qualquer SLTI.
- Saída depende unicamente da entrada e da resposta ao impulso
- Propriedade básica de todos SLTI.
- Entrada = soma ponderada de impulso deslocados no tempo.
- Saída = soma ponderada de respostas ao impulso deslocadas no tempo.

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

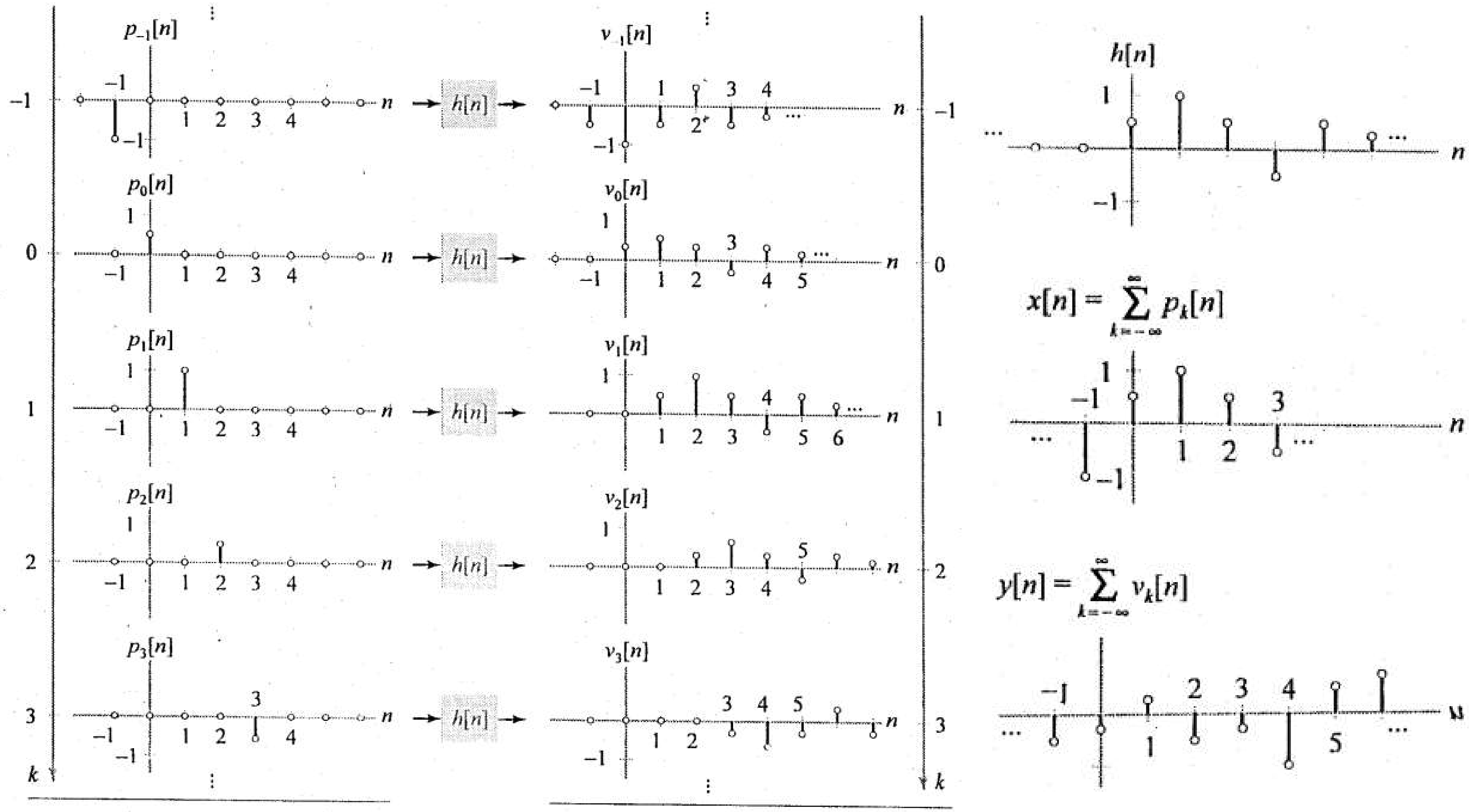


VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI





VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI



VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

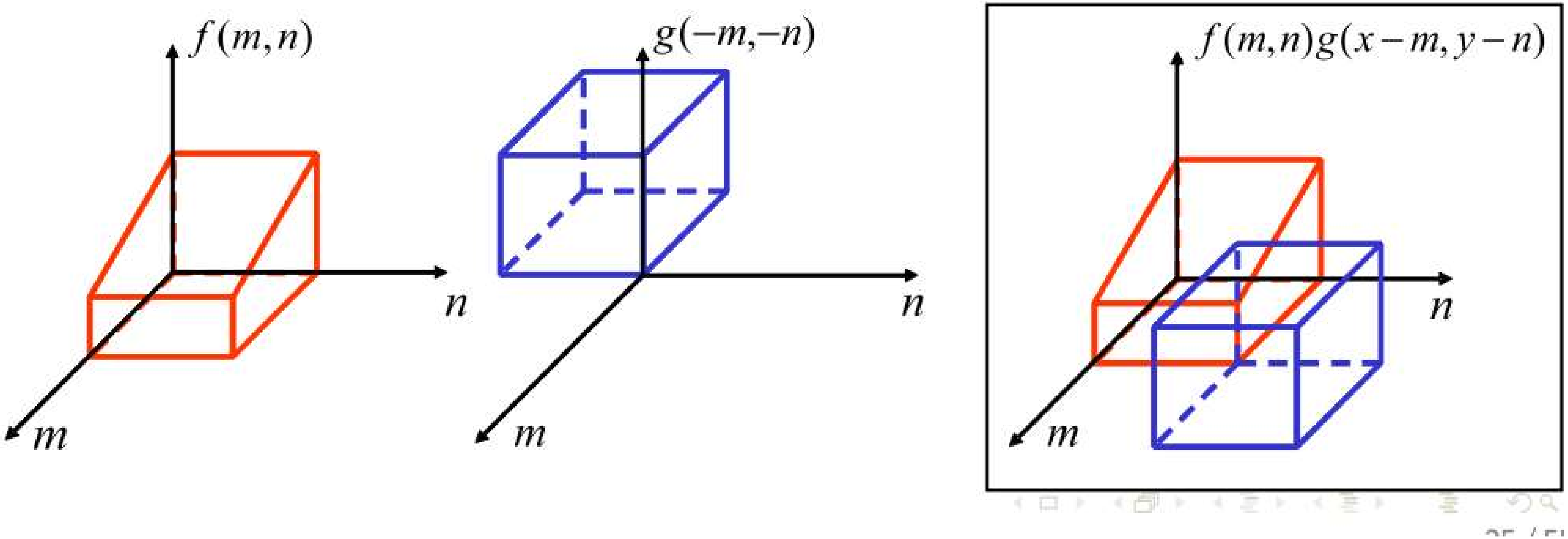
Soma de Convolução - sequência de passos:

1) Traçar gráfico de x[k] e h[n-k] (ou h[k] e x[n-k]) em função de k
2) Iniciar deslocamento de h[n-k] (ou x[n-k]) com *n* grande e negativo
3) Escrever a fórmula de x[k].h[n-k] (ou h[k].x[n-k]). Somar x[k].h[n-k] para todos o *k* e obter o valor de y[n].
4) Aumentar *n* até que fórmula se modifique
5) Repetir passos 3 e 4

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

Exemplo 1:

$$x[n] = a^n u[n], \quad h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 < n < N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

Exemplo 2:

By direct evaluation of the convolution sum, determine the step response of a linear time-invariant system whose impulse response is

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \qquad 0 < a < 1.$$

Exemplo 3:

Exemplo 2.3 Um sistema LTI tem a resposta ao impulso dada por

$$h[n] = u[n] - u[n-10]$$

e descrita na Figura 2.4(a). Determine a saída deste sistema quando a entrada for o pulso retangular definido como

$$x[n] = u[n-2] - u[n-7]$$

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

- Caso contínuo: abordagem e resultados análogos ao caso de tempo discreto

- Como visto anteriormente, qualquer sinal é uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

- Resposta do sistema a x(t):

$$y(t) = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

- Definindo a resposta ao impulso (RI) contínua:

$$h(t) = H\{\delta(t)\}$$

- Se o sistema é LTI, então temos:

$$y(t) = H\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau\right\}$$

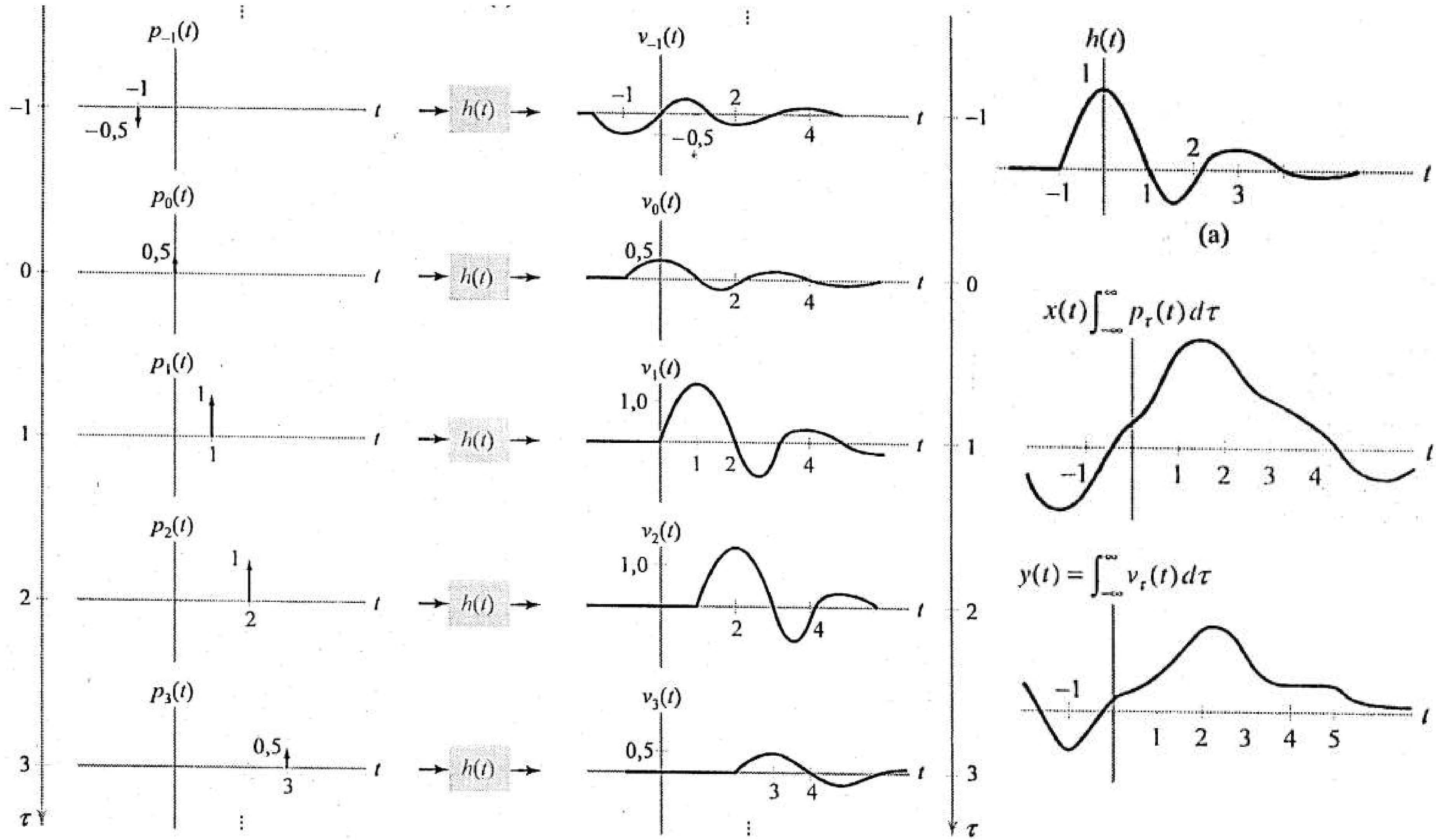
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H\{\delta(t-\tau)\}\, d\tau$$

em que $H\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau).$

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

- Logo: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$
- Integral de convolução: $$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$
- Saída determinada unicamente a partir da entrada e da resposta ao impulso (RI)
- RI define completamente o sistema.
- Saída é dada por soma (integral) ponderada de RIs deslocadas no tempo.

VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI



VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

Integral de Convolução – Passos:

1) Traçar gráfico de $x(\tau)$ e $h(t-\tau)$ em função de tau.
2) Iniciar deslocamento de $h(t-\tau)$ com *t* grande e negativo
3) Escreva a fórmula de $x(\tau)\,h(t-\tau)$. Integre $x(\tau)\,h(t-\tau)$ para todo o tau e obtenha o valor de y(t).
4) Aumentar *t* até que fórmula se modifique
5) Repetir passos 3 e 4

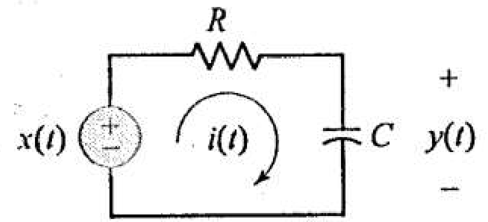
VII. Resposta ao Impulso e Convolução em SLTI

Exemplo 1:

Exemplo 2.7 Considere o circuito RC apresentado na Figura 2.10 e suponha que a constante de tempo do circuito seja $RC = 1$s. Determine a tensão no capacitor, $y(t)$, resultante de uma tensão de entrada $x(t) = e^{-3t}\{u(t) - u(t-2)\}$.

Solução: O circuito é linear e invariante no tempo, de forma que a saída é a convolução da entrada e da resposta ao impulso. Ou seja, $y(t) = x(t) * h(t)$. A resposta ao impulso deste circuito é

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

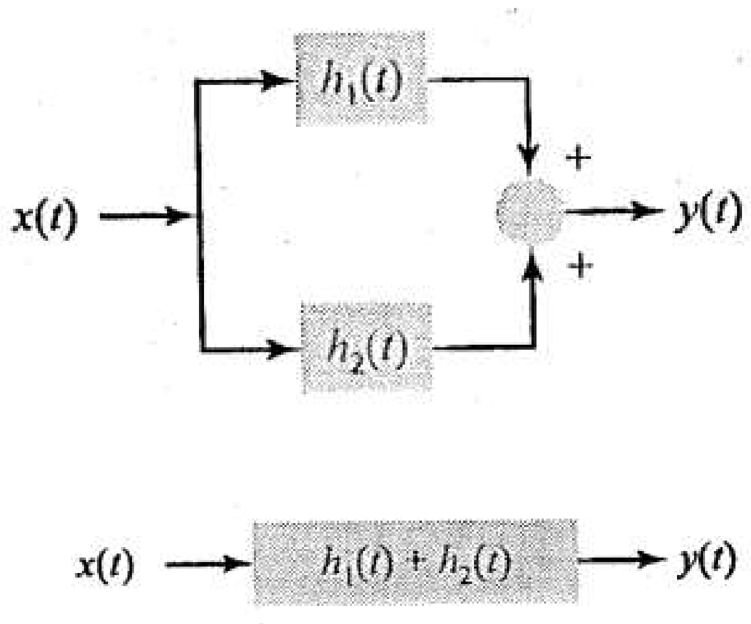


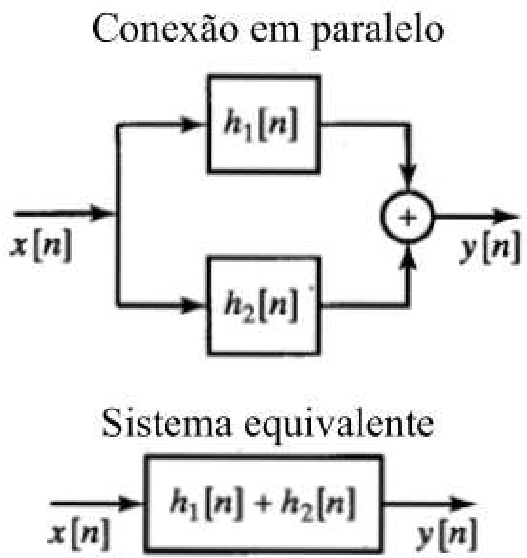
Exemplo 2:

▶ **Exercício 2.4** Digamos que a resposta ao impulso de um sistema LTI seja $h(t) = e^{-2(t+1)}u(t+1)$. Encontre a saída $y(t)$ se a entrada for $x(t) = e^{-|t|}$.

VIII. Propriedades da RI

- Conexão Paralela de Sistemas LTI:
  - Saída da desta conexão é a soma das saídas de cada sistema
  - RI do sistema equivalente é a soma das RIs





VIII. Propriedades da RI

- Conexão Paralela de Sistemas LTI:
  - Demonstração (caso contínuo no tempo):

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_1(t-\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)\}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

  - Caso discreto é similar: $h[n] = h_1[n] + h_2[n]$

VIII. Propriedades da RI

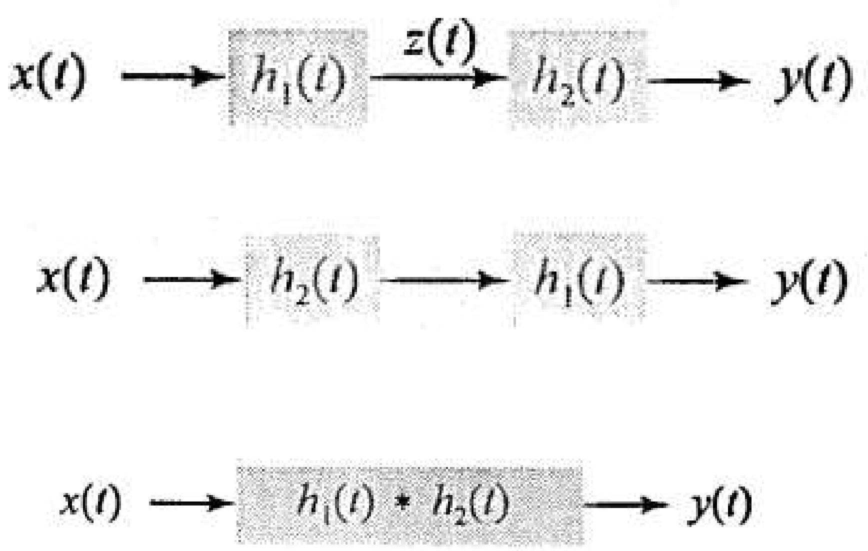
- **Consequência**: convolução possui a propriedade distributiva

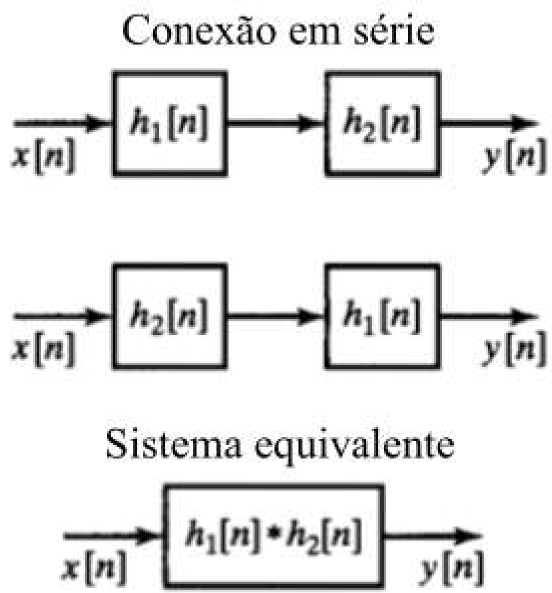
$$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\}$$

$$x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\}$$

VIII. Propriedades da RI

- Conexão em cascata (ou em série) de sistemas LTI
  - A saída do primeiro sistema é a entrada do segundo sistema
  - RI do sistema equivalente é a convolução das RIs





VIII. Propriedades da RI

- Conexão em cascata (ou em série) de sistemas LTI
  - Demonstração:

$$y(t) = z(t) * h_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) h_2(t-\tau)\, d\tau$$

$$z(\tau) = x(\tau) * h_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) h_1(\tau - v)\, dv$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(v) h_1(\tau - v) h_2(t-\tau)\, dv\, d\tau$$

  - Permuta-se as integrais e realiza mudança de variável($\eta = \tau - \upsilon$).

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta) h_2(t - v - \eta)\, d\eta \right] dv$$

VIII. Propriedades da RI

- Conexão em cascata (ou em série) de sistemas LTI
  - Demonstração (cont.):
    - Considerando $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta) h_2(t - \nu - \eta)\, d\eta = h(t - \nu)$$

    - Substituindo a eq. acima em $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta) h_2(t - \nu - \eta)\, d\eta \right] d\nu$ temos:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu) h(t - \nu)\, d\nu \\ &= x(t) * h(t) \end{aligned}$$

- Caso discreto é similar: $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$

VIII. Propriedades da RI

- **Consequência**: convolução possui a propriedade associativa

$$\{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t) = x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\}$$

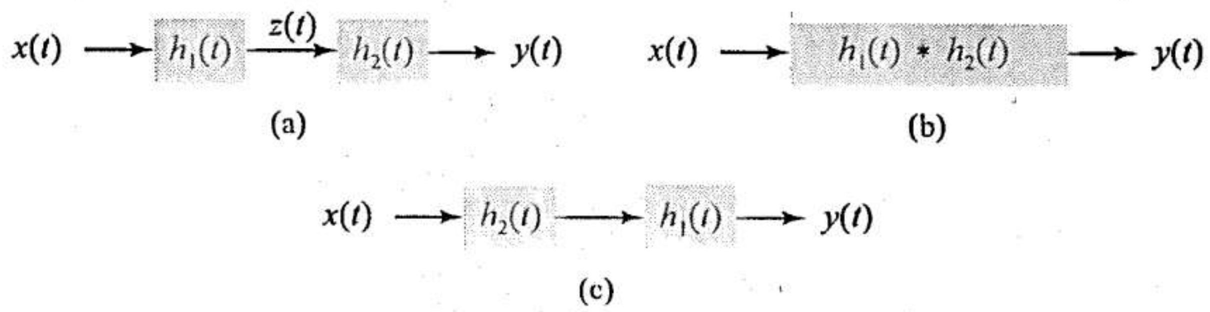
$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$

VIII. Propriedades da RI

- Além das propriedades acima, a convolução possui a propriedade comutativa

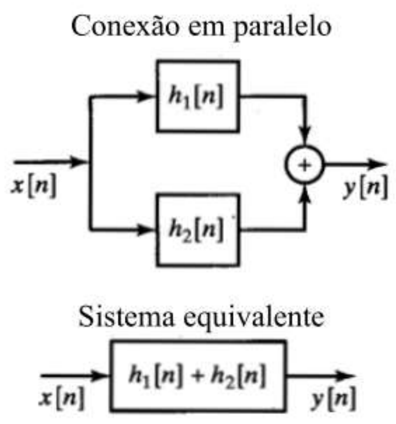
$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

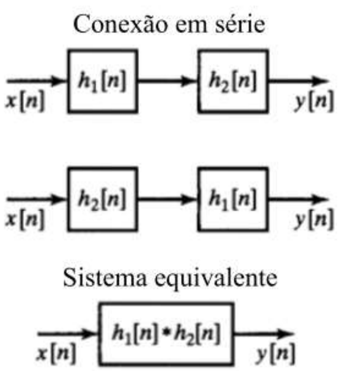
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$



VIII. Propriedades da RI

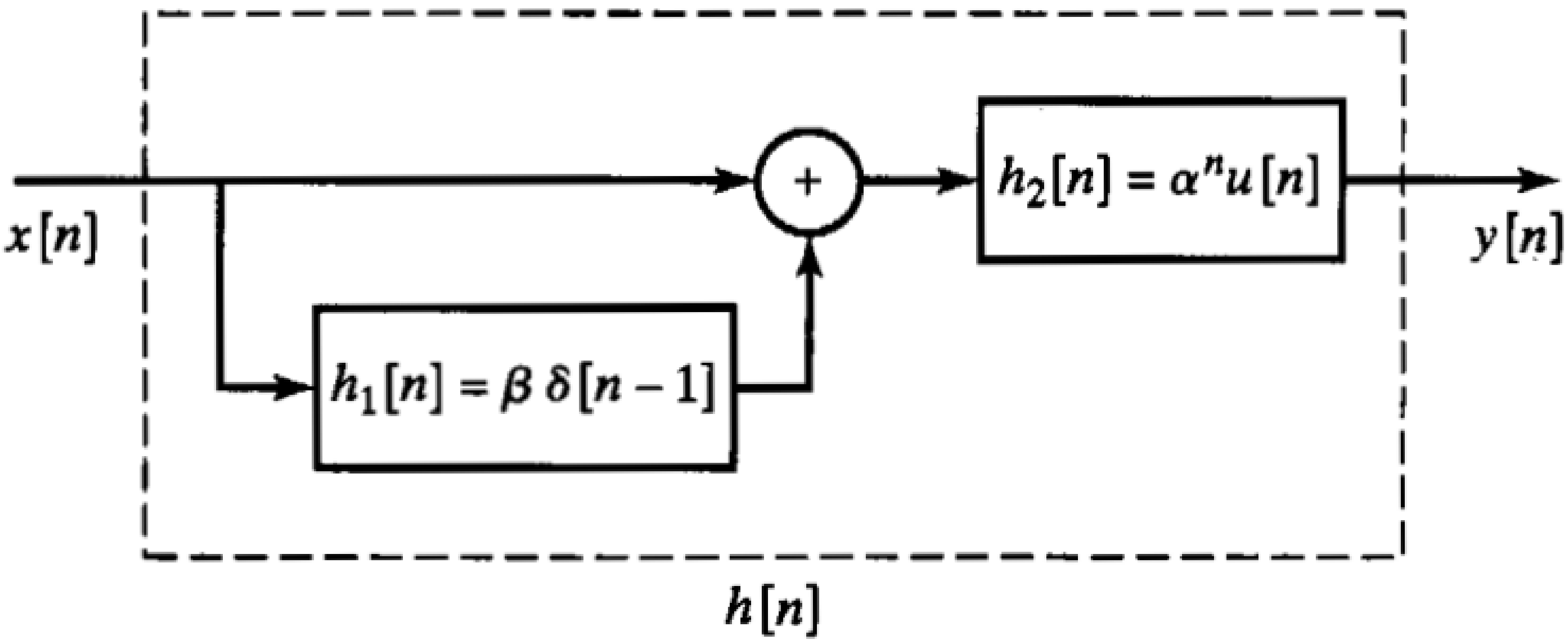
- Resumo de propriedades da convolução:
  - Distributividade: $$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$
  - Associatividade: $$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$$
  - Comutatividade $$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$





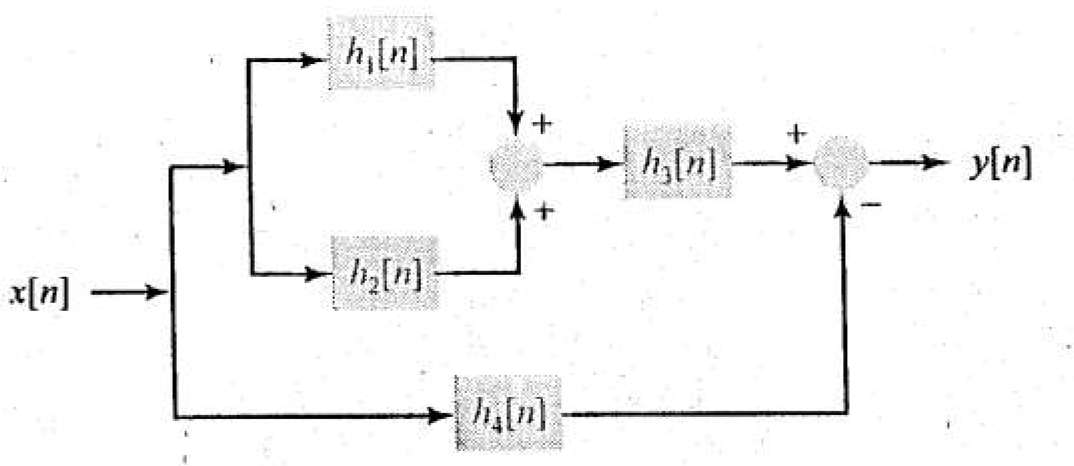
VIII. Propriedades da RI

- **Exemplo:** Qual é a RI do sistema abaixo?



VIII. Propriedades da RI

- **Exemplo:** Qual é a RI do sistema abaixo?



$$h_1[n] = u[n]$$
$$h_2[n] = u[n+2] - u[n]$$
$$h_3[n] = \delta[n-2]$$
$$h_4[n] = \alpha^n u[n]$$

VIII. Propriedades da RI

- **Sistemas Causais**
  - Dependem apenas de valores passados ou presentes de entrada.
  - Para sistemas LTI discretos, temos que ter **h[n] = 0, para n < 0**:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \qquad\qquad y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Para sistemas LTI discretos, temos que ter **h(t) = 0, para t < 0:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau \qquad\qquad y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

VIII. Propriedades da RI

- **Sistemas Estáveis**
  - Sistema é BIBO estável se, para entrada limitada, tem-se saída limitada.
  - Sistema LTI discreto:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| \cdot |h[n-k]|$$

Como $|x[n]| \leq B_x \Rightarrow |y[n]| \leq B_x \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$

Conclusão: Para $y[n]$ ser limitado é suficiente que $h[n]$ seja absolutamente somável.

VIII. Propriedades da RI

- **Sistemas Estáveis**
  - Caso contínuo: para que o sistema seja estável, RI tem que ser absolutamente integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \, d\tau < \infty$$

VIII. Propriedades da RI

- Exemplos:

  - Atraso ideal
    $h[n] = \delta[n - n_d], \quad n_d$ inteiro positivo
  - Média móvel
    $$h[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] = \begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
  - Acumulador
    $$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$
  - Diferença para frente
    $h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$
  - Diferença para trás
    $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

VIII. Propriedades da RI

- Duas classes de sistemas LTI:
  - FIR (*finite impulse response*) ⇒ RI de duração finita;
  - IIR (*infinite impulse response*) ⇒ RI de duração infinita.

- Sistemas FIR são sempre estáveis (RI sempre é absolutamente somável ou integrável).

- Nem todo sistema IIR é estável:
  - Exemplo: $h(t) = a^t u(t)$

VIII. Propriedades da RI

- Consequência da propriedade de comutatividade da convolução:

  - Transforma um sistema não-causal em causal

$$h[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] = \delta[n-1] * (\delta[n+1] - \delta[n])$$
$$= \delta[n] - \delta[n-1]$$