Iniciado em	quinta-feira, 18 mai. 2023, 12:53
Estado	Finalizada
Concluída em	quinta-feira, 18 mai. 2023, 13:25
Tempo empregado	32 minutos 2 segundos
Notas	9,00/9,00
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral dupla sobre a região R dada:

$$\iint_R e^{x-y} dA \text{ , } R\text{: } 0 \leq x \leq \ln 2,\ 0 \leq y \leq \ln 2$$

Resposta: 0,5

Parabéns!

SOLUÇÃO:

- Primeiro calculamos a integral em função de x:

= $\int_0^{\ln 2} e^{x-y} dx$

= $\int_0^{\ln 2} e^{-y}\ e^{x} dx$

= $e^{-y} \int_0^{\ln 2} e^{x} dx$

= $e^{-y} [e^{x}]_0^{\ln 2}$

= e^{-y}

- Agora calculamos a integral do resultado em função de y:

= $\int_0^{\ln 2} e^{-y} dy$

= $-\int_0^{\ln 2} -e^{-y} dy$

= $-[e^{-y}]_0^{\ln 2}$

= $-e^{-\ln 2} + e^{0}$

= $0,5$

- A resposta é $0,5$

A resposta correta é: 0,5

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_0^1 \int_0^{y^2} \left(3y^3 e^{xy}\right)\, dxdy$.

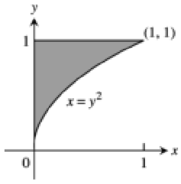
Escolha uma opção:

- a. $2 - e$
- b. $-e - 2$
- c. $\frac{e}{2}$
- d. $e - 2$ ✔
- e. $e + 2$

Sua resposta está correta.

Solução:

Primeiramente, esboce a região.



$\int_0^1 \int_0^{y^2} \left(3y^3 e^{xy}\right)\, dxdy$

$= \int_0^1 3y^2 \left[e^{xy}\right]_0^{y^2} dy$

$= \int_0^1 \left[3y^2 e^{y^3} - 3y^2\right]_0^1 dy$

$= \left[e^{y^3} - y^3\right]_0^1$

$= e - 1 - 1 = e - 2$

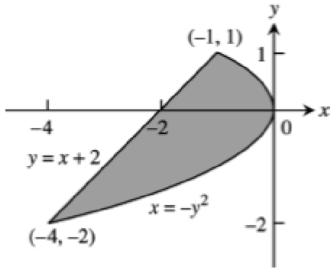
A resposta correta é: $e - 2$

Questão **3**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a área da região abaico através da integral dupla.



A parábola $x = -y^2$ e a reta $y = x + 2$.

Resposta: 4,5

Solução:

$$= \int_{-2}^{1} \int_{y-2}^{-y^2} dx\, dy$$

$$= \int_{-2}^{1} (-y^2 - y + 2)\, dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 2y \right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 6 \right)$$

$$= \frac{9}{2}$$

A resposta correta é: 4,5

Questão **4**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Substitua a integral cartesiana por uma integral equivalente em coordenadas polares. Em seguida, calcule a integral polar.

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}\left(\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right)dydx$$

Qual o valor da integral?

Escolha uma opção:

- a. $-\pi\left(1+\ln(2)\right)$
- b. $\pi\left(1-\ln(2)\right)$ ✔
- c. $\pi\ln(2)$
- d. $-\pi\left(1-\ln(2)\right)$
- e. $\pi\left(1+\ln(2)\right)$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Mudamos o sistema de coordenadas cartesianas para coordenadas polar:

Como $-1 \leq x \leq 0$ e $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0$

Logo os limites de integração será:

$\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ e $0 \leq r \leq 1$

Como: $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$

$x^2+y^2 = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = r^2$

Substituímos $dydx$ por $rdrd\theta$:

Logo:

$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^1\left(\frac{2}{1+\sqrt{r^2}}\right)rdrd\theta$

A integral em relação a r fica:

$= \int_0^1\left(\frac{2}{1+\sqrt{r^2}}\right)rdr$

$= 2\int_0^1\left(\frac{r}{1+r}\right)dr$

Substituindo $u = 1+r$:

$= 2\int_1^2\left(\frac{u-1}{u}\right)du$

$= 2\int_1^2\left(1-\frac{1}{u}\right)du$

$= 2\left(1-\ln(2)\right)$

Logo, a integral em relação a θ**:**

$= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} 2\left(1-\ln(2)\right)d\theta$

$= \left[2\left(1-\ln(2)\right)\theta\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$

$= \pi\left(1-\ln(2)\right)$

A resposta correta é: $\pi\left(1-\ln(2)\right)$

Questão **5**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} \, dzdxdy$.

Resposta: 5,33

Resposta:

$\int_0^{2x+y} \, dz$

$= 2x + y$

$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x+y) \, dxdy$

Aplicando a regra da soma $\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

Temos que:

$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x+y) \, dxdy$

$= \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx + \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (y) \, dx$

Resolvendo as integrais:

$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (y) \, dx = 2y\sqrt{4-y^2}$

$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx = 0$

Pois, se $f(x)$ é uma função ímpar e contínua em: $[-a, a]$ então $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$

Paridade de $2x$: ímpar

Logo, $\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx = 0$

Somando, temos:

$= 2y\sqrt{4-y^2} + 0$

$= 2y\sqrt{-y^2+4}$

Por fim, integrando em relação a dy:

$\int_0^2 (2y\sqrt{-y^2+4}) \, dy$

$= 2\int_0^2 (y\sqrt{-y^2+4}) \, dy$

Aplicando integração por substituição: $u = -y^2 + 4$

$= 2\int_4^0 \left(-\frac{\sqrt{u}}{2}\right) \, du$

Temos que, $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a \, dx, a < b$

$= 2\left(-\int_0^4 -\frac{\sqrt{u}}{2} du\right)$

$= 2\left(-\left(-\frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{u} \, du\right)\right)$

Aplicando a regra da potência:

$= 2\left(-\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4\right)\right)$

Simplificando, temos:

$= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

Por último, calculamos os limites:

$= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \frac{16}{3}$

A resposta correta é: 5,33333

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral iterada $\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} r\ z\ dz\ dr\ d\theta$?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{7}{5}\pi$
- b. $\frac{37}{15}\pi$ ✔
- c. $\frac{39}{23}\pi$
- d. $\frac{36}{13}\pi$
- e. $\frac{38}{17}\pi$

Sua resposta está correta.

Resposta:

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r \frac{z^2}{2}\Big|_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(\frac{9(4-r^2)}{2} - \frac{(4-r^2)}{2}\right)\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(\frac{8(4-r^2)}{2}\right)\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{8}{2} \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(4-r^2\right)\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4 \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} 4r - r^3\ dr\ d\theta$$

Aplicando a regra da soma para integrais:

$$= \int_0^{\pi} 4\left(\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} 4r\ dr - \int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r^3\ dr\right)\ d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\theta}{\pi}} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\left(\frac{2\theta^2}{\pi^2} - \frac{\theta^4}{4\pi^4}\right) d\theta$$

Aplicando novamente a regra da soma:

$$= \int_0^{\pi} \frac{8\theta^2}{\pi^2}\ d\theta - \int_0^{\pi} \frac{\theta^4}{\pi^4}\ d\theta$$

$$= \frac{8\theta^3}{3\pi^2}\Big|_0^\pi - \frac{\theta^5}{5\pi^4}\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{37}{15}\pi$$

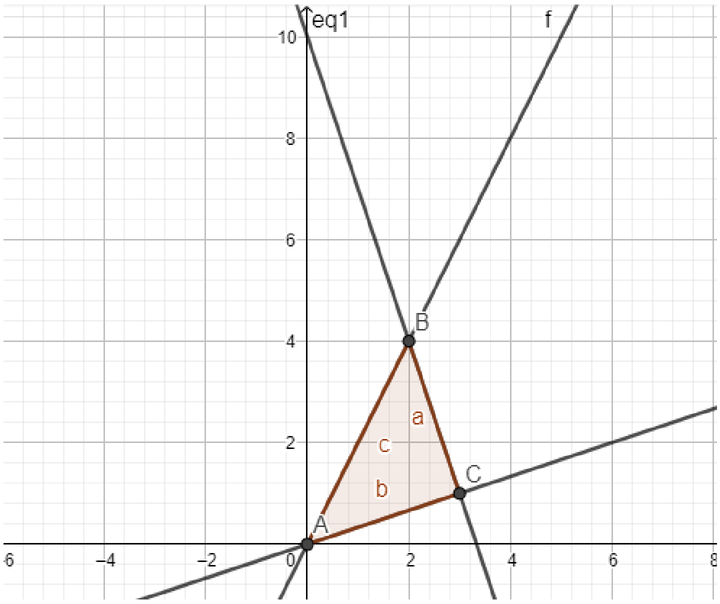
A resposta correta é: $\frac{37}{15}\pi$

Questão **7**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a imagem pela transformação $u = 3x + 2y, y = x + 4y$ da região triangular no plano xy delimitada pelo eixo x, eixo y e a reta $x + y = 1$. Depois compare com a figura abaixo.



Agora, resolva o sistema $u = 3x + 2y, y = x + 4y$ para$x$ e y em termos de u e v. Em seguida, encontre o valor do jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

Resposta: 0,1

Resposta correta. Parabéns!

$$\begin{Bmatrix} 3x+2y = u \times (-2) \\ x+4y = v \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -6x-4y = -2u \\ x+4y = v \end{Bmatrix} \Rightarrow -5x = -2u + v \Rightarrow x = \frac{1}{5}(2u - v)$$

$3x + 2y = u \Rightarrow 2y = u - 3x \Rightarrow y = \frac{1}{2}(u - 3x)$

Desenvolvendo y:

$$y = \frac{1}{2}(u - 3x) \Rightarrow y = \frac{u}{2} - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = \frac{u}{2} - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{5}(2u - v)\right] \Rightarrow y = \frac{u}{2} - \frac{3}{10}(2u - v) \Rightarrow$$

$$y = \frac{u}{2} - \frac{6u + 3v}{10} \Rightarrow y = \frac{5u}{10} - \frac{6u + 3v}{10} \Rightarrow y = \frac{-u + 3v}{10} \Rightarrow y = \frac{1}{10}(-u + 3v)$$

Jacobiano:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-1}{10} & \frac{3}{10} \end{vmatrix} = \frac{6}{50} - \frac{1}{50} = \frac{1}{10}$$

A resposta correta é: 0,1

Questão **8**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a integral de linha de $f(x,\ y,\ z) = x + y + z$ sobre o segmento de reta de $(1, 2, 3)$ a $(0, -1, 1)$.

Escolha uma opção:

a. $2\sqrt{15}$

b. $4\sqrt{14}$

c. $3\sqrt{14}$ ✔

d. $2\sqrt{14}$

e. $3\sqrt{15}$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Para iniciarmos, temos que definir os segmentos de reta como $\vec{\mathbf{r}}_0$ e $\vec{\mathbf{r}}_1$ para ser feita a parametrização, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_0 = (0, -1, 1)\,;\, \vec{\mathbf{r}}_1 = (1, 2, 3).$

Com $\vec{\mathbf{r}}_0$ e $\vec{\mathbf{r}}_1$ definidos, podemos então parametrizar eles para descobrir os valores de x, y e z.

$\vec{\mathbf{r}}(t) = (1-t)\,\vec{\mathbf{r}}_0 + t\vec{\mathbf{r}}_1$

$\langle x, y, z\rangle = (1-t)\langle 0, -1, 1\rangle + t\langle 1, 2, 3\rangle$

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, -1+t, 1-t\rangle + \langle t, 2t, 3t\rangle$

$\langle x, y, z\rangle = \langle t, -1+3t, 1+2t\rangle.$

Com isso, obtemos os valores de x, y e z:

$x \ = \ t,$

$y \ = \ -1 + 3t,$

$z \ = \ 1 + 2t.$

Essa é a integral que vamos utilizar para encontrar a integral de linha utilizada para resolver a questão:

$\int_a^b \ f(x(t), y(t), z(t))\, \|\vec{\mathbf{v}}\|\, dt.$

Agora com a integral definida, vamos começar calculando o módulo do vetor velocidade, que é definido por:

$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

Partindo para a resolução, primeiro obtemos os valores de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{dz}{dt}$.

$\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 3$ e $\frac{dz}{dt} = 2$

Com os valores em mãos, podemos substitui-los e encontrar o valor do módulo do vetor velocidade.

$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2}$

$= \sqrt{14}.$

Concluindo, com o módulo do vetor velocidade definido podemos fazer a integral para solucionar a questão.

$\int_0^1 (t + (-1 + 3t) + (1 + 2t))\sqrt{14}dt$

$\int_0^1 6t\sqrt{14}dt$

$3t^2\sqrt{14}|_0^1$

$= 3\sqrt{14}.$

A resposta correta é: $3\sqrt{14}$

Questão **9**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ao redor da elipse $\vec{\mathbf{r}}(t) = (cos(t))\mathbf{i} + (4sen(t))\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 2\pi.$

Escolha uma opção:

- a. 3π
- b. 8π ✔
- c. 7π
- d. 2π
- e. 5π

Sua resposta está correta.

Solução:

Primeiro, nós calculamos a velocidade:

$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}.$

Agora podemos calcular a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}_2$:

$\int_0^{2\pi} \left(\vec{\mathbf{F}}_2 \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)\, dt = \int_0^{2\pi} (-4\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}) \cdot (-\sin(t)\mathbf{i} + 4\sin(t)\mathbf{j})\, dt$

$= \int_0^{2\pi} (4\sin(t)^2 + 4\cos(t)^2)\, dt = \left([4t]_0^{2\pi}\right) = (8\pi)$

A resposta correta é: 8π