Álgebra Linear
Aula 14

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 10

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m_2 & m_3 + 10 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$b = \begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 30 \\ m_1 \\ m_1 + 3 \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Crammer, resolva o sistema $Ax = b$.

Gabarito

$\left(m_1, \frac{-2m_2}{-m_2+m_3+10}, \frac{-m_2+3m_3+30}{-m_2+m_3+10}\right).$

Motivação

Quais informações são necessárias para representar os itens a seguir?

- A grandeza física Força;
- O movimento de um objeto;
- Movimento retilíneo de um ponto em um plano;

Vetores

Vetores são grandezas que possuem direção, sentido e magnitude/comprimento.

Vetores

Vetores são grandezas que possuem direção, sentido e magnitude/comprimento.

Notações

Usualmente denotaremos por uma letra minúscula com uma seta em cima para representar vetores ($\overrightarrow{v}$) e por letras gregas $\alpha, \beta, \ldots$ para representar escalares.

Exemplo

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exemplo

Sejam $A = (2,2)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Exemplo

Sejam $A = (2,2)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final.

Exemplo

Sejam $A = (2,2)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

- A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ também é chamada de n-upla de $\mathbb{R}^n$;

Exemplo

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

- A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ também é chamada de n-upla de $\mathbb{R}^n$;
- Também podemos representar vetores por matrizes colunas ou matrizes linhas.

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$;

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$;
2. $\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{z}$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos que $\alpha\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção de $\overrightarrow{v}$, comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\overrightarrow{v}$ e, se $\alpha > 0$ então possui mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$, se $\alpha < 0$ então possui sentido inverso. Caso $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\alpha = 0$ definimos $\alpha\overrightarrow{v} = 0$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos que $\alpha\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção de $\overrightarrow{v}$, comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\overrightarrow{v}$ e, se $\alpha > 0$ então possui mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$, se $\alpha < 0$ então possui sentido inverso. Caso $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\alpha = 0$ definimos $\alpha\overrightarrow{v} = 0$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos

$$\alpha\overrightarrow{v} = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n).$$

Teorema (3.1.1)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ e α e β escalares, então:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;
4. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
5. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$;
6. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$;
7. $\alpha(\beta\overrightarrow{v}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{v}$;
8. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
9. $0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
10. $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
11. $-1\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}$

Exemplo 2

Descubra qual o vetor $\overrightarrow{x}$ abaixo para que a igualdade seja verdade

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}.$$

Exemplo 3

É possível escrever o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ em função dos vetores $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$?

Exemplo 3

É possível escrever o vetor $\overrightarrow{v} = (1,2)$ em função dos vetores $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$?

Combinação Linear

Um vetor $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_r$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tais que

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r.$$

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$.

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$.

Norma de um vetor

A norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é definida como

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3,4)$.

Norma de um vetor

A norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é definida como

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Teorema (3.2.1)

Se $\overrightarrow{v}$ for um vetor em $\mathbb{R}^n$ e α um escalar então

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$;
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0$ se e somente se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
3. $\|\alpha\overrightarrow{v}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{v}\|$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetor unitário

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é unitário se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetor unitário

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é unitário se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetores canônicos

Para um $n > 0$ fixo. Denotamos por $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ os vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$ no qual o vetor e_i é igual ao vetor linha da i-ésima linha da matriz identidade I_n.