UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

Iniciado em	quarta, 30 Set 2020, 11:53
Estado	Finalizada
Concluída em	quarta, 30 Set 2020, 12:10
Tempo empregado	17 minutos 1 segundo
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização do plano $x + y + z = 1$ inclinado dentro de um cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

Escolha uma:

a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} - (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} - (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 + r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

✓

e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} - (r\sin\,\theta)\mathbf{j} - (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

Sua resposta está correta.

Solução:

$x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$.

Usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\,\theta$ e $y = r\sin\,\theta$, substituindo em z, temos $z = 1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta$.

Substituindo x, y e z na função de superfície, temos:

$\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\,\theta)\mathbf{i} + (r\sin\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\,\theta - r\sin\,\theta)\mathbf{k}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 3$.

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização de uma faixa esférica, considerando a porção da esfera $x^2+y^2+z^2=3$ entre os planos $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z=\frac{-\sqrt{3}}{2}$?

Escolha uma:

a. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\le\ \phi\ \le\ \frac{2\pi}{3}$, $0\le\ \theta\ \le\ 2\pi$ ✓

b. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}-(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\le\ \phi\ \le\ \frac{2\pi}{3}$, $0\le\ \theta\ \le\ 2\pi$

c. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}-(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\le\ \phi\ \le\ \frac{2\pi}{3}$, $0\le\ \theta\ \le\ 2\pi$

d. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\le\ \phi\ \le\ \frac{2\pi}{3}$, $0\le\ \theta\ \le\ \pi$

e. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\le\ \phi\ \le\ \frac{2\pi}{3}$, $0\le\ \theta\ \le\ 2\pi$

Sua resposta está correta.

SOLUÇÃO:

- Em coordenadas esférica:

$x=\rho\sin(\phi)\cos(\theta)$

$y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta)$

- Sabendo que

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- Então,

$\rho^2=3$

$=\sqrt{3}$

- Logo,

$z=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Para a esfera.

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Fazendo a manipulação de valores, teremos:

$\phi=\frac{\pi}{3}$

- Fazendo com o outro z, teremos

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Fazendo a manipulação de valores, teremos:

$\phi=\frac{2\pi}{3}$

- Assim, a parametrização para a superfície dada é:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta) = (\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i} + (\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j} + (\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$,
$\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

A resposta correta é:
$\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta) = (\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i} + (\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j} + (\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$,
$\frac{\pi}{3} \leq \phi \leq \frac{2\pi}{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o plano tangente ao cilindro circular $\vec{\mathbf{r}}(\theta,z) = (3\ \sin\ 2\theta)\mathbf{i} + (6\ \sin^2\ \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde $0 \leq \theta \leq \pi$, no ponto $P_0(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ que corresponde a $(\theta, z) = (\frac{\pi}{3}, 0)$?

Escolha uma:

- a. $\sqrt{3}x + y = 3$
- b. $-\sqrt{3}x + y = 9$
- c. $\sqrt{3}x + y = 9$ ✓
- d. $\sqrt{3}x - y = 3$
- e. $-\sqrt{3}x - y = 3$

Sua resposta está correta.

Parametrização: $\vec{\mathbf{r}}(\theta,z) = (3\ \sin\ 2\theta)\mathbf{i} + (6\ \sin^2\ \theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ em
$P_0 = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0) \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{3}$ e $z = 0$

Então:

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (6\ \cos 2\theta)\mathbf{i} + (12\sin\theta\cos\theta)\mathbf{j}$

$= -3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\mathbf{j}$ e $\vec{\mathbf{r}}_z = \mathbf{k}$ em P_0

$$\Rightarrow \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\sqrt{3}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

O plano tangente é:

$$(3\sqrt{3}i + 3\mathbf{j}) \cdot \left[\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(y - \frac{9}{2}\right)\mathbf{j} + (z-0)\mathbf{k}\right] = 0$$

$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 9.$

A resposta correta é: $\sqrt{3}x + y = 9$

.

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma:

- a. $\frac{\pi a^2}{6}$
- b. $\frac{\pi a^3}{6}$ ✓
- c. $\frac{\pi a^2}{3}$
- d. $\frac{\pi a^4}{5}$
- e. $\frac{\pi a^4}{4}$

Sua resposta está correta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta) + (a \cos\phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que ϕ e θ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a ϕ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a θ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\mathbf{k}$.

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a \cos \phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada S na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi.$$

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$

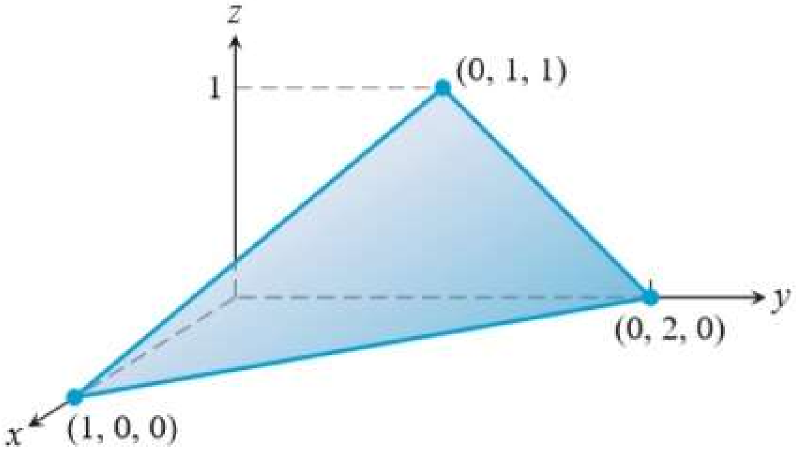
.

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 1, 1)$.



Escolha uma:

- a. $\frac{7}{5\sqrt{6}}$
- b. $\frac{2}{\sqrt{6}}$
- c. $\frac{7}{3\sqrt{6}}$
- d. $\frac{1}{5\sqrt{6}}$ ✓
- e. $\frac{5}{\sqrt{6}}$

Sua resposta está correta.

Solução:

Para uma superfície S fornecida implicitamente por $F(x, y, z) = c$, onde F é uma função continuamente derivável, com S acima de sua região fechada e limitada R no plano coordenado abaixo dela, a integral de superfície da função contínua G sobre S é fornecida pela integral dupla sobre R:

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}}|}\; dA,$$

onde $\vec{\mathbf{p}}$ é um vetor unitário normal a R e $\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}} \neq 0$

Assim, temos:

$F(x, y, z) = 2x + y + z = 2$, $p = k$

E calculando o gradiente de F, temos:

$\nabla F = 2i + j + k$, onde $|\nabla F| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

e

$|\nabla F \cdot p| = 1$, assim como $d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot p|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6} dydx$.

Assim, substituindo os valores na integral mostrada anteriormente e calculando esta, obtemos:

$$\Rightarrow \iint\limits_S G d\sigma = \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} xy\,(2-2x-y)\,\sqrt{6}dydx = \sqrt{6}\int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} \left(2xy - 2x^2y - xy^2\right) dydx$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4\right) dx = \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{15}\right) = \sqrt{6}\frac{1}{30} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

A resposta correta é: $\frac{1}{5\sqrt{6}}$

.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

O universal pelo regional.

Mais informações

UFC - Sobral

EE- Engenharia Elétrica

EC - Engenharia da Computação

PPGEEC- Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica e Computação

Contato

Rua Coronel Estanislau Frota, s/n – CEP 62.010-560 – Sobral, Ceará
Telefone: (88) 3613-2603
E-mail:

Social