# Cálculo Diferencial e Integral I

**Rui F. Vigelis**

rfvigelis@gmail.com

Universidade Federal do Ceará – UFC

Versão:
2021-01-15 18:22:41

Objetivos:

- Capacitar o aluno a identificar e enfrentar os problemas de Engenharia que possam ser resolvidos com técnicas de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável.

Frequência:

- $\geq 75\%$, que equivale a um máximo de 16 horas em faltas.

Avaliação:

- 3 avaliações progressivas distribuídas durante o semestre.

Critério de aprovação:

- Se $7 \leq$ MAPs, o aluno é aprovado por média.
- Se $4 \leq$ MAPs $< 7$, o aluno faz a prova de avaliação final.
- Se $4 \leq \text{NAF}$ e $5 \leq \text{MAF} = \dfrac{\text{MAPs} + \text{NAF}}{2}$, o aluno é aprovado.
- Caso contrário, o aluno é reprovado.

Bibliografia básica:

- Safier, Fred. **Pré-Cálculo.** 2a. ed. São Paulo: Bookman, 2011.
- Leithold, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1,** 3a. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

Bibliografia complementar:

- Stewart, James. **Cálculo.** Vol. 1, 8a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo. Vol. 1,** 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2018.
- Muniz Neto, Antônio Caminha. **Fundamentos de Cálculo.** 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- Lima, Elon Lages.**Análise Real: Funções de Uma Variável Real. Vol. 1,** 12a. ed. Rio de Janeiro: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017.

Conteúdo:

- Pré-cálculo – Cap. 1 (AP1)
- Limites – Cap. 2 (AP1)
- Derivada – Cap. 3 (AP2)
- Aplicações da derivada – Cap. 4 (AP2)
- Integral – Cap. 5 (AP3)

**Definição**

Se $a, b \in \mathbb{R}$,

(i) $a < b$ se e somente se $b - a$ for positivo;

(ii) $a > b$ se e somente se $a - b$ for positivo.

**Definição**

Se $a, b \in \mathbb{R}$,

(i) $a \leq b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a < b$ ou $a = b$;

(ii) $a \geq b$ se e somente se for válida qualquer uma das duas relações $a > b$ ou $a = b$;

**Teorema**

(i) $a > 0$ *se e somente se* $a$ *for positivo;*

(ii) $a < 0$ *se e somente se* $a$ *for negativo.*

**Teorema**

(i) *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$ *então* $a + b > 0$.

(ii) *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$ *então* $ab > 0$.

**Teorema**

*Se* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *e se* $a < b$ *e* $b < c$ *então* $a < c$.

**Teorema**

*Suponhamos que* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(i) *Se* $a < b$ *então* $a + c < b + c$.

(ii) *Se* $a < b$ *e* $c > 0$ *então* $ac < bc$.

(iii) *Se* $a < b$ *e* $c < 0$ *então* $ac > bc$.

**Teorema**

*Se* $a < b$ *e* $c < d$ *então* $a + c < b + d$.

O conjunto de todos os números $x$ que satisfazem a desigualdade $a < x < b$ é chamado de **intervalo aberto**, sendo denotado por $(a, b)$. Logo

$$\boxed{(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.}$$

O **intervalo fechado** de $a$ até $b$ é o intervalo aberto $(a, b)$ mais os dois pontos extremos $a$ e $b$, sendo denotado por $[a, b]$. Assim

$$\boxed{[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.}$$

O **intervalo semi-aberto à esquerda** é o intervalo aberto $(a, b)$, mais o extremo direito $b$. É denotado por $(a, b]$; assim

$$\boxed{(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.}$$

Definimos o **intervalo semi-aberto à direita** de forma análoga e o denotamos por $[a, b)$. Assim

$$\boxed{[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.}$$

Usando o símbolo $\infty$ (infinito positivo) e o símbolo $-\infty$ (infinito negativo), definimos os intervalos:

$$\boxed{\begin{aligned} (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\ (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\ (-\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

**Exemplo**

Ache o conjunto-solução da desigualdade $2 + 3x < 5x + 8$.

R.: $(-3, \infty)$.

**Exemplo**

Encontre o conjunto-solução da desigualdade $4 < 3x - 2 \leq 10$.

R.: $(2, 4]$.

**Exemplo**

Ache o conjunto-solução da desigualdade $\dfrac{7}{x} > 2$.

R.: $(0, \frac{7}{2})$.

**Exemplo**

Encontre o conjunto-solução da desigualdade $\dfrac{x}{x-3} < 4$.

R.: $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

O **valor absoluto de** $x$, denotado por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0. \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

**Exemplo**

Resolva cada uma das equações para $x$:

(a) $|3x+2| = 5$;

(b) $|2x-1| = |4x+3|$;

(c) $|5x+4| = -3$.

R.: (a) $x = 1$ ou $-\frac{7}{3}$; (b) $x = -2$ ou $-\frac{1}{3}$; (c) $\emptyset$.

**Teorema**

$|x| < a$ *se e somente se* $-a < x < a$, *em que* $a > 0$.

**Corolário**

$|x| \leq a$ *se e somente se* $-a \leq x \leq a$, *em que* $a > 0$.

**Teorema**

$|x| > a$ *se e somente se* $x > a$ *ou* $x < -a$, *em que* $a > 0$.

**Corolário**

$|x| \geq a$ *se e somente se* $x \geq a$ *ou* $x \leq -a$, *em que* $a > 0$.

**Exemplo**

Ache o conjunto-solução da desigualdade $|x - 5| < 4$.

R.: $(1, 9)$.

**Exemplo**

Ache o conjunto solução da desigualdade $|x+2| > 5$.

R.: $(-\infty, -7) \cup (3, \infty)$.

**Teorema**

*Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

**Teorema**

*Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$, *então* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

**Teorema (Desigualdade Triangular)**

*Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então*

$$\boxed{|a+b| \leq |a| + |b|.}$$

**Corolário (Desigualdade Triangular Reversa)**

*Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então*

$$\boxed{|a| - |b| \leq \big|\, |a| - |b| \,\big| \leq |a-b|.}$$

**Teorema**

*A distância entre dois pontos* $P_1(x_1, y_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2)$ *é dada por*

$$\boxed{|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

**Exemplo**

Mostre que o triângulo com vértices em $A(-2,4)$, $B(-5,1)$ e $C(-6,5)$ é isósceles.

R.: $|\overline{BC}| = |\overline{AC}| = \sqrt{17}$.

### Definição

Se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ forem dois pontos distintos sobre a reta $l$, não paralela ao eixo $y$, então a **inclinação** de $l$, denotada por $m$, será dada por

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.}$$

Por **equação de uma reta** nos referimos a uma equação que é satisfeita por todos os pontos sobre a reta (e somente pelos pontos sobre a reta).

- Um ponto $P_1(x_1, y_1)$ e uma inclinação $m$ determinam uma reta de maneira única.
- Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre a reta, diferente de $P_1$.
- Uma vez que a inclinação da reta que passa por $P_1$ e $P$ é $m$, temos da definição de inclinação

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

que reescrevemos como

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1).}$$

- Essa equação é chamada de **forma ponto-inclinação** da equação da reta.

**Exemplo**

Encontre a equação da reta que passa pelos pontos $A(6, -3)$ e $B(-2, 3)$.

R.: $3x + 4y - 6 = 0$.

**Exemplo**

Ache a inclinação da reta cuja equação é $6x + 5y - 7 = 0$

R.: $m = -\frac{6}{5}$.

- Se escolhermos o ponto $(0, b)$ como o ponto $(x_1, y_1)$, teremos

$$y - b = m(x - 0),$$

que resulta em

$$\boxed{y = mx + b.}$$

- O número $b$, que é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo $y$, é chamado de **intercepto** $y$ da reta.
- A equação acima é a chamada de **forma inclinação-intercepto** da equação da reta.

**Teorema**

(i) *Uma equação da reta vertical é*

$$x = a,$$

*em que* $a$ *é a abscissa do ponto onde a reta intercepta o eixo* $x$.

(ii) *Uma equação da reta horizontal é*

$$y = b,$$

*em que* $b$ *é a ordenada do ponto onde a reta intercepta o eixo* $y$.

**Definição**

O gráfico de uma equação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ cujas coordenadas são números que satisfazem a equação.

**Teorema**

*O gráfico da equação*

$$Ax + By + C = 0,$$

*em que $A$, $B$ e $C$ são constantes, e $A$ e $B$ são ambos não nulos, é uma linha reta.*

**Teorema**

*Se $l_1$ e $l_2$ forem duas retas distintas não verticais, tendo inclinações $m_1$ e $m_2$, respectivamente, então $l_1$ e $l_2$ serão paralelas se e somente se $m_1 = m_2$.*

**Teorema**

*Duas retas não verticais $l_1$ e $l_2$, com inclinações $m_1$ e $m_2$, respectivamente, serão perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$.*

**Exemplo**

Seja $l_1$ a reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(3,-6)$, e seja $l_2$ a reta que passa pelos pontos $C(2,-5)$ e $D(-1,7)$. Verifique que as retas $l_1$ e $l_2$ são paralelas.

**Exemplo**

Dada a reta $l$ com equação

$$5x + 4y - 20 = 0,$$

encontre uma equação da reta que passe pelo ponto $(2,-3)$ e (a) seja paralela a $l$ e (b) seja perpendicular a $l$.

R.: (a) $5x + 4y + 2 = 0$. (b) $4x - 5y - 23 = 0$.

**Definição**

Uma função pode ser considerada como uma correspondência de um conjunto $X$ de números reais $x$ a um conjunto $Y$ de números reais $y$, onde o número $y$ é único para um valor específico de $x$.

Usamos símbolos tais como $f$, $g$ e $h$ para denotar uma função. O conjunto $X$ de números reais descritos acima é o **domínio** da função, e o conjunto $Y$ de números reais atribuídos aos valores de $x$ em $X$ é a **imagem** da função.

## Definição

Dadas as duas funções $f$ e $g$:

(i) a sua **soma**, denotada por $f + g$, é a função definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$

(ii) a sua **diferença**, denotada por $f - g$, é a função definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x);$$

(iii) o seu **produto**, denotado por $f \cdot g$, é a função definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$

**Definição**

(iv) o seu **quociente**, denotado por $f/g$, é a função definida por

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x).$$

Em cada caso, o domínio da função resultante consiste naqueles valores de $x$ comuns aos domínios de $f$ e $g$, com a exigencia adicional, no caso (iv), de que os valores de $x$ para os quais $g(x) = 0$ sejam excluídos.

## Definição

Dadas as duas funções $f$ e $g$, a **função composta**, denotada por $f \circ g$ é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

e o domínio de $f \circ g$ é o conjunto de todos os números $x$ no domínio de $g$, tal que $g(x)$ esteja no domínio de $f$.

**Exemplo**

Dado que $f$ e $g$ estão definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 - 1,$$

determine: (a) $f \circ f$; (b) $g \circ g$; (c) $f \circ g$; (d) $g \circ f$. Encontre também o domínio da função composta em cada item.

R.: (a) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$, $[0, \infty)$. (b) $(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$, $\mathbb{R}$. (c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. (d) $(g \circ f)(x) = x - 1$, $[0, \infty)$.

## Definição

(i) Uma função é **par** se, para todo valor de $x$ no domínio de $f$, $f(-x) = f(x)$.

(ii) Uma função $f$ é denominada **ímpar** se, para todo valor de $x$ no domínio de $f$, $f(-x) = -f(x)$.

Em ambos os casos (i) e (ii), devemos entender que $-x$ está no domínio de $f$, sempre que $x$ estiver lá.

**Exemplo**

Verifique quais das seguintes funções são par ou impar:

(a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$;

(b) $g(x) = 3x^5 - 4x^3 - 9x$;

(c) $h(x) = 2x^4 + 7x^3 - x^2 + 9$.

R.: (a) par. (b) impar. (c) nem par nem impar.

- Uma **função linear** é definida por

$$f(x) = mx,$$

  em que $m$ é uma constante. Seu gráfico é uma reta com inclinação $m$ passando pela origem.

- A função linear definida por

$$f(x) = x$$

  é chamada de **função identidade**.

- Uma **função afim** é definida por

$$f(x) = mx + b,$$

  em que $m$ e $b$ são constantes. Seu gráfico é uma reta com inclinação $m$ e intercepto $y$ igual a $b$.

- Se uma função $f$ for definida por

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais ($a_n \neq 0$) e $n$ for um inteiro não negativo, então $f$ será chamada de **função polinomial** de grau n.
- Uma função linear é uma função polinomial de grau 1.
- Se o grau de uma função polinomial for 2, ela será chamada de **função quadrática**, e se o grau for 3, será chamada de **função cúbica**.
- Se uma função puder ser expressa como o quociente de duas funções polinomiais, ela será chamada de **função racional**.

- Uma **função algébrica** é aquela formada por um número finito de operações algébricas sobre as funções identidade e constante. Essas operações algébricas incluem adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.
- Um exemplo de uma função algébrica é aquele definido por

$$f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 1)^3}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

- Além das funções algébricas, são também consideradas as **funções transcendentais**.
- Exemplos de funções transcendentais são as funções trigonométricas, e as funções exponencial e logarítmica.

**Definição**

Se $f$ for uma função, então o **gráfico** de $f$ será o conjunto dos pontos $(x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ para os quais $y = f(x)$, com $x$ pertencendo ao domínio de $f$.

- O gráfico de uma função $f$ é o mesmo que o gráfico da equação $y = f(x)$.

**Definição**

Seja $AOB$ um ângulo na posição padrão e $|\overline{OA}| = 1$. Se $s$ unidades for o comprimento do arco da circunferência percorrido pelo ponto $A$ quando o lado inicial $OA$ é girado até o lado final $OB$, a **medida em radianos** $t$, do ângulo $AOB$, será dada por

$$t = s, \quad \text{se a rotação for no sentido anti-horário,}$$

e

$$t = -s, \quad \text{se a rotação for no sentido horário.}$$

**Definição**

Suponha que $t$ seja um número real. Coloque na posição padrão um ângulo com $t$ rad de medida e seja $P$ a intersecção do lado final do ângulo com a circunferência do circulo unitário com centro na origem. Se $P$ for o ponto $(x, y)$, então a função **seno** será definida por

$$\operatorname{sen} t = y,$$

e a função **cosseno** será definida por

$$\cos t = x.$$

**Teorema**

*As funções seno e cosseno satisfazem as seguintes relações:*

(i) $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$;

(ii) $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$ *e* $\cos(-t) = \cos t$;

(iii) $\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$ *e* $\cos(t + 2\pi) = \cos t$.

### Definição

Uma função $f$ será **periódica** se existir um número real $p \neq 0$ tal que quando $x$ estiver no domínio de $f$, então $x + p$ estará também no domínio de $f$ e

$$f(x + p) = f(x).$$

O menor número real positivo $p$ é chamado de **período** de $f$.

**Exemplo**

Use a periodicidade das funções seno e cosseno, bem como os valores de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ quando $0 \leq t < 2\pi$ para determinar o valor de: (a) $\operatorname{sen}(\frac{17}{4}\pi)$; (b) $\cos(\frac{7}{3}\pi)$ x; (c) $\operatorname{sen}(\frac{15}{2}\pi)$; (d) $\cos(-\frac{7}{6}\pi)$.

R.: (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (b) $\frac{1}{2}$. (c) $-1$. (d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Definição

- As funções **tangente** e **secante** são definidas por
$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t},$$
para todo número real $t$ para o qual $\cos t \neq 0$.
- As funções **cotangente** e **cossecante** são definidas por
$$\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}, \qquad \operatorname{cosec} t = \frac{1}{\operatorname{sen} t},$$
para todo número real $t$ para o qual $\operatorname{sen} t \neq 0$.

- A funções tangente, cotangente, secante e cossecante são periódicas com período $2\pi$.
- Estão relacionadas pelas igualdades:

$$\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t,$$

e

$$1 + \operatorname{cotg}^2 t = \operatorname{cosec}^2 t.$$

### Definição

O **ângulo de inclinação** de uma reta não paralela ao eixo $x$ é o menor ângulo medido no sentido anti-horário, a partir do sentido positivo do eixo $x$ até a reta. O ângulo de inclinação de uma reta paralela ao eixo $x$ é definido como sendo zero.

**Teorema**

*Se $\alpha$ for o ângulo de inclinação da reta $l$, não paralela ao eixo $y$, então a inclinação $m$ de $l$ é dada por*

$$m = \operatorname{tg}(\alpha).$$

**Teorema**

*Sejam $l_1$ e $l_2$ duas retas não verticais que se interceptam não perpendicularmente, e seja $l_2$ a reta com maior ângulo de inclinação. Se $m_1$ for a inclinação de $l_1$, e $m_2$ for a de $l_2$, e se $\theta$ for a ângulo entre $l_1$ e $l_2$, então*

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

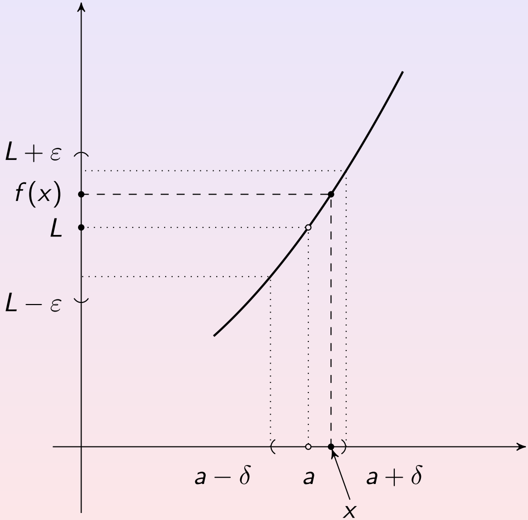
## Definição

Seja $f$ uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo $a$, exceto possivelmente em a. O **limite de** $f(x)$ **com** $x$ **tendendo a** $a$ **é igual a** $L$, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L,}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$


$L+\varepsilon$
$f(x)$
$L$
$L-\varepsilon$
$a-\delta$
$a$
$a+\delta$
$x$

- Para mostrarmos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, podemos usar a seguinte estratégia:
  - Manipulamos a expressão $|f(x) - L|$ de modo a majorá-la por outra expressão $F(|x-a|)$, que é dada em termos de $|x-a|$.
  - A expressão $F(|x-a|)$ é escolhida de modo que $F(|x-a|) < F(\delta)$ se $|x-a| < \delta$.
  - Então escolhemos $\delta > 0$ em temos de $\varepsilon > 0$ tal que $F(\delta) \leq \varepsilon$.
- Com esses passos, obtemos que, se $|x-a| < \delta$, então

$$|f(x) - L| \leq \cdots \leq F(|x-a|) < F(\delta) \leq \cdots \leq \varepsilon.$$

**Exemplo**

Usando a definição de limite, verifique:

(a) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$;

(b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+4)=2$;

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{2x-1}=2$.

**Teorema**

*Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ *e* $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, *então* $L_1 = L_2$.

**Teorema**

*Se $m$ e $b$ forem constantes quaisquer, então*

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b.$$

**Corolário**

*Se $c$ for uma constante, então*

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

**Corolário**

$$\lim_{x \to a} x = a.$$

**Exemplo**

Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to 2} (3x + 5)$;

(b) $\lim_{x \to 5} 7$;

(c) $\lim_{x \to -6} x$.

R.: (a) 11. (b) 7. (c) $-6$.

**Teorema**

*Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$*, então*

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$

(iii) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$*, se* $M \neq 0$*.*

**Exemplo**

Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to 2} x^2$;

(b) $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x + 1)$;

(c) $\lim_{x \to 3} [x(2x + 1)]$;

(d) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x}{-7x + 1}$.

R.: (a) 4. (b) 11. (c) 21. (d) $-\frac{4}{27}$.

**Corolário**

*Se* $\lim_{x\to a} f_1(x) = L_1, \lim_{x\to a} f_2(x) = L_2, \ldots, \lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$*, então*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = L_1 \pm L_2 \pm \cdots \pm L_n,$$

*e*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x)] = L_1 \cdot L_2 \cdots L_n.$$

**Corolário**

*Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $n$ *for um inteiro positivo qualquer, então*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n.$$

**Teorema**

*Se $n$ for um inteiro positivo e* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *então*

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

*com a restrição de que $L > 0$ se $n$ for par.*

## Exemplo

Verifique:

(a) $\lim_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 + 5) = 2$;

(b) $\lim_{x \to -2} (5x + 7)^4 = 81$;

(c) $\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x}{-7x + 1}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$;

(d) $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

**Exemplo**

Encontre $\lim_{x\to 4} f(x)$ dado que

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{se } x \neq 4, \\ 5, & \text{se } x = 4. \end{cases}$$

R.: 1.

**Exemplo**

Encontre o limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

R.: $\frac{1}{4}$.

**Teorema**

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a} [f(x) - L] = 0.$

**Teorema**

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{t\to 0} f(t+a) = L.$

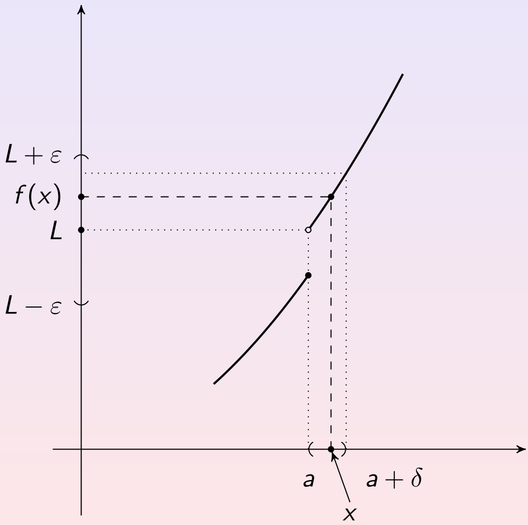
## Definição

Seja $f$ uma função definida em algum intervalo aberto $(a, c)$. O **limite de** $f(x)$ **com** $x$ **tendendo a** $a$ **pela direita é igual a** $L$, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = L,}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x - a < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$



$L+\varepsilon$
$f(x)$
$L$
$L-\varepsilon$
$a$
$a+\delta$
$x$

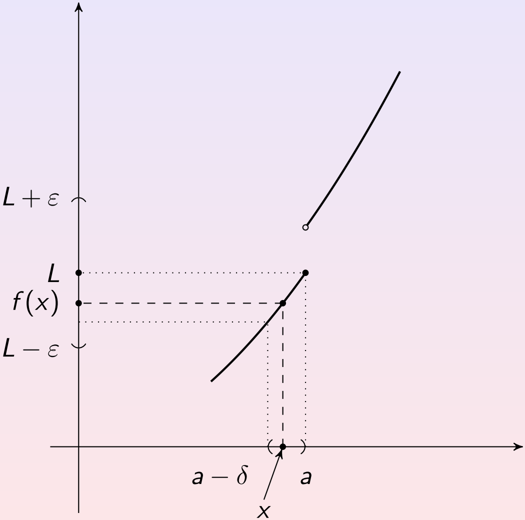
**Definição**

Seja $f$ uma função definida em algum intervalo aberto $(d, a)$. O **limite de** $f(x)$ **com** $x$ **tendendo a** $a$ **pela esquerda é igual a** $L$, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = L,}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < a - x < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$


$L+\varepsilon$
$L$
$f(x)$
$L-\varepsilon$
$a-\delta$
$a$
$x$

**Exemplo**

A **função sinal** é definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ -1, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determine $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x)$ e $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x)$, caso existam.

R.: $1$, $-1$.

**Exemplo**

Seja $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \leq -2, \\ 3-x, & \text{se } x > -2. \end{cases}$$

Determine $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$, caso existam.

R.: 5, 1.

**Teorema**

*$\lim_{x\to a} f(x)$ existe e será igual a $L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ e $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existirem e forem iguais a $L$.*

### Exemplo

Seja $g$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{se } x \neq 0, \\ 2, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ache $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, se existir.

R.: 0.

### Exemplo

Seja $h$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{se } x \leq 1, \\ 2 + x^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Ache os limites $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$, se existirem.

R.: 3, 3, 3.

### Definição

Dizemos que a função $f$ é **contínua no número** $a$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em $a$, a função $f$ será descontínua em $a$.

**Definição**

A função $f$ será **contínua no número** $a$ se $f$ estiver definida em algum intervalo aberto contendo $a$, e se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

### Exemplo

Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} 3+x, & \text{se } x \leq 1, \\ 3-x, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

é contínua ou não em $x = 1$.

### Exemplo

Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} |x-3|, & \text{se } x \neq 3, \\ 2, & \text{se } x = 3, \end{cases}$$

é contínua ou não em $x = 3$.

**Exemplo**

Seja $f$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}, & \text{se } x \neq 9, \\ c, & \text{se } x = 9, \end{cases}$$

em que $c$ é uma constante. Determine um valor para $c$ de modo que $f$ seja contínua em $x = 9$.

**Teorema**

*Se $f$ e $g$ forem funções contínuas em um número $a$, então*

(i) $f + g$ *será contínua em* $a$;

(ii) $f - g$ *será contínua em* $a$;

(iii) $f \cdot g$ *será contínua em* $a$;

(iv) $f/g$ *será contínua em* $a$, *desde que* $g(a) \neq 0$.

**Teorema**

*Uma função polinomial é contínua em qualquer número.*

**Teorema**

*Uma função racional é contínua em todos os números do seu domínio.*

**Teorema**

*Se $n$ for um inteiro positivo e*

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

*então*

(i) *se $n$ for ímpar, $f$ será contínua em qualquer número;*

(ii) *se $n$ for par, $f$ será contínua em todo número positivo.*

**Exemplo**

Determine os números nos quais a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 9}.$$

R.: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

**Exemplo**

Determine os números nos quais a função a seguir é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \leq 1, \\ x^2, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

R.: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**Teorema**

*Se* $\lim_{x\to a} g(x) = b$ *e se a função* $f$ *for contínua em* $b$*, então*

$$\lim_{x\to a} (f\circ g)(x) = f(b),$$

*ou, equivalentemente,*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

**Corolário**

*Se a função* $g$ *for contínua em* $a$ *e a função* $f$ *for contínua em* $g(a)$*, então a função composta* $f\circ g$ *será contínua em* $a$*.*

**Exemplo**

Determine os valores em que a função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua.

R.: $(-2, 2)$.

**Definição**

Dizemos que uma função é **contínua em um intervalo aberto** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.

### Definição

A função $f$ será **contínua à direita em um número a** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

### Definição

A função $f$ será **contínua à esquerda em um número a** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) $f(a)$ existe;

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

**Definição**

(i) Uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$ será **contínua em** $[a, b]$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto $(a, b)$, contínua à direita em $a$ e contínua à esquerda em $b$.

(ii) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $[a, b)$ será **contínua em** $[a, b)$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto $(a, b)$ e contínua à direita em $a$.

(iii) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semi-aberto $(a, b]$ será **contínua em** $(a, b]$ se e somente se ela for contínua no intervalo aberto $(a, b)$ e contínua à esquerda em $b$.

**Exemplo**

Prove que a função $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$.

**Exemplo**

Determine o maior intervalo (ou união de intervalos) em que a função

$$f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$$

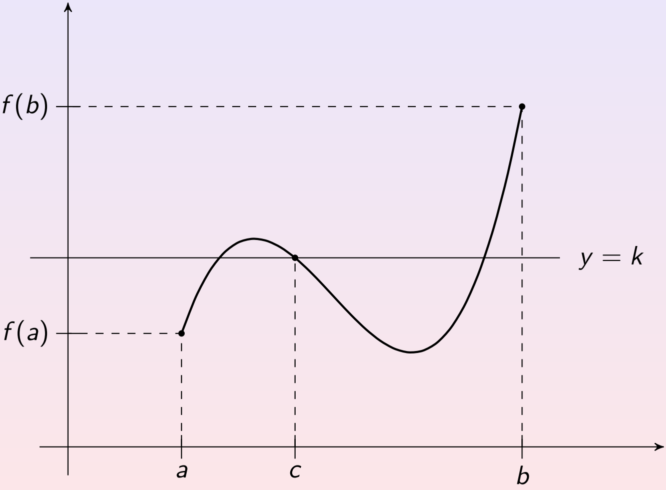
é contínua.

R.: $[-5, 3) \cup (3, 5]$.

**Teorema do Valor Intermediário**

Se a função $f$ for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e se $f(a) \neq f(b)$, então, para todo número $k$ entre $f(a)$ e $f(b)$ existirá um número $c$ entre $a$ e $b$ tal que

$$f(c) = k.$$


$f(b)$
$y = k$
$f(a)$
$a$
$c$
$b$

**Exemplo**

Mostre que o Teorema do Valor Intermediário garante que a equação $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tem raiz entre 1 e 2.

**Exemplo**

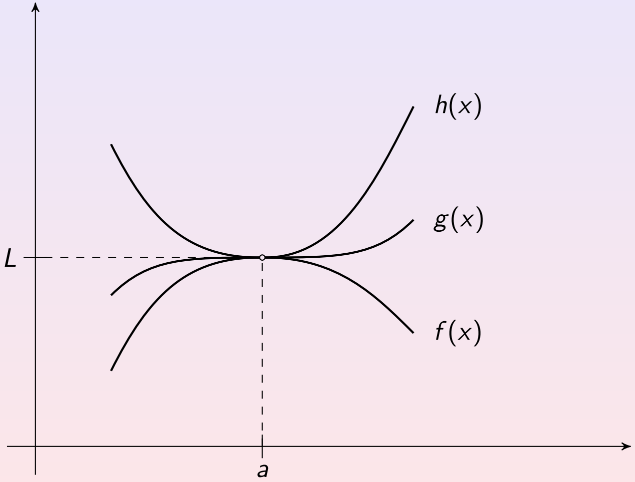
Suponha que $f$ seja uma função para a qual $0 \leq f(x) \leq 1$ se $0 \leq x \leq 1$. Prove que se $f$ for contínua em $[0, 1]$, existirá pelo menos um número $c$ em $[0, 1]$ tal que $f(c) = c$.

## Teorema do Confronto

Suponha que as funções $f$, $g$ e $h$ estejam definidas em algum intervalo aberto $I$ contendo $a$, exceto possivelmente no próprio $a$, e que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

para todo $x$ em $I$, tal que $x \neq a$. Suponha também que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ ambos existam e tenham o mesmo valor $L$. Então $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe e é igual a $L$.


h(x)
g(x)
f(x)
L
a

**Exemplo**

Dado $|g(x) - 2| \leq 3(x-1)^2$ para todo $x$, use o Teorema do Confronto para encontrar $\lim_{x \to 1} g(x)$.

R.: 2.

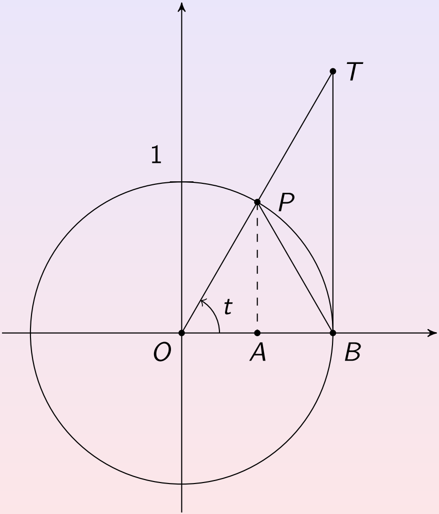
**Exemplo**

Use o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \left| x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| = 0.$$

## Teorema

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1.}$$


T
1
P
t
O
A
B

**Exemplo**

Ache o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(5x)},$$

se existir.

R.: $\frac{3}{5}$.

**Teorema**

*A função seno é contínua em* 0.

**Teorema**

*A função cosseno é contínua em* 0.

**Teorema**

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0.}$$

**Exemplo**

Ache o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)},$$

se existir.

R.: 0.

**Exemplo**

Ache o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg}^2(x)}{x^2},$$

se existir.

R.: 2.

**Teorema**

*As funções seno e cosseno são contínuas em todos os números reais.*

**Teorema**

*As funções tangente, cotangente, secante e cossecante são contínuas em seus respectivos domínios.*

**Exemplo**

Ache a inclinação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(2, 4)$.

R.: 4.

**Exemplo**

Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por $y = x^3 - 3x + 4$ no ponto $(x_1, y_1)$.

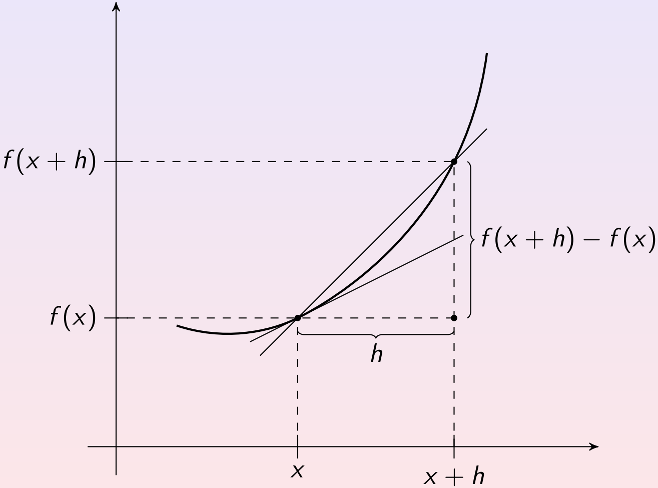
R.: $3x_1^2 - 3$.

### Definição

Seja $f$ uma função definida num intervalo aberto contendo o número $x$. Se o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existir, diremos que a função $f$ é **derivável em** $x$, e $f'(x)$ denota a **derivada de** $f$ **em** $x$.


$f(x+h)$
$f(x+h) - f(x)$
$f(x)$
$h$
$x$
$x+h$

**Exemplo**

Ache a derivada de $f$ se:

(a) $f(x) = 3x^2 + 12$;

(b) $f(x) = \sqrt{x - 3}$;

(c) $f(x) = \dfrac{2 + x}{3 - x}$.

R.: (a) $6x$; (b) $\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$; (c) $\frac{5}{(3-x)^2}$.

**Teorema**

*Se uma função $f$ for derivável em $x$, então $f$ será contínua em $x$.*

### Definição

Se a função $f$ for definida em $x$, então a **derivada à direita de $f$ em $x$**, denotada por $f'_+(x)$, será definida por

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

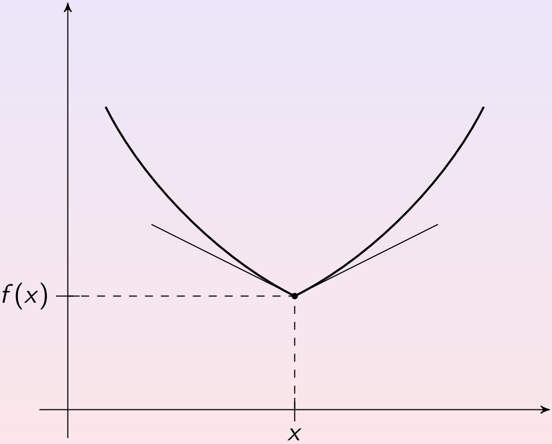
se esse limite existir.

### Definição

Se a função $f$ for definida em $x$, então a **derivada à esquerda de $f$ em $x$**, denotada por $f'_-(x)$, será definida por

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

se esse limite existir.


$f(x)$
$x$

**Exemplo**

Seja $f$ definida por $f(x) = |1 - x^2|$. (a) Prove que $f$ é contínua em 1. (b) Determine se $f$ é derivável em 1.

R.: (b) não.

**Exemplo**

Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{se } 0 < x < b, \\ 1 - \frac{1}{4}x, & \text{se } b \leq x. \end{cases}$$

(a) Determine um valor de $b$ de tal forma que $f$ seja contínua em $b$. (b) $f$ é derivável no valor de $b$ encontrado no item anterior?

R.: (a) 2; (b) sim.

**Teorema**

*Se $c$ for uma constante e se $f(x) = c$ para todo $x$, então*

$$\boxed{f'(x) = 0.}$$

**Teorema**

*Se $n$ for um inteiro positivo e se $f(x) = x^n$, então*

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}.}$$

### Teorema

*Se $f$ for uma função, $c$ uma constante e $g$ a função definida por*

$$g(x) = cf(x),$$

*então, se $f'(x)$ existir,*

$$\boxed{g'(x) = cf'(x).}$$

### Teorema

*Se $f$ e $g$ forem funções e se $h$ for a função definida por*

$$h(x) = f(x) + g(x),$$

*então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,*

$$\boxed{h'(x) = f'(x) + g'(x).}$$

**Teorema**

*Se $f$ e $g$ forem funções e se $h$ for a função definida por*

$$h(x) = f(x)g(x),$$

*então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,*

$$\boxed{h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).}$$

## Teorema

*Se $f$ e $g$ forem funções e se $h$ for a função definida por*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{em que } g(x) \neq 0,$$

*então, se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,*

$$\boxed{h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.}$$

**Teorema**

*Se* $f(x) = x^{-n}$ *onde* $-n$ *é um inteiro negativo e* $x \neq 0$*, então*

$$\boxed{f'(x) = -nx^{-n-1}.}$$

**Exemplo**

Encontre $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$;

(b) $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$;

(c) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}$;

(d) $f(x) = \dfrac{3}{x^5}$.

R.: (a) $28x^3 - 6x^2 + 8$; (b) $48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3$; (c) $\frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$; (d) $-\frac{15}{x^6}$.

**Teorema**

(i) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) = \cos(x);$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\cos(x) = -\operatorname{sen}(x).$

**Teorema**

(i) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}(x) = \sec^2(x)$;

(ii) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotg}(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$.

**Teorema**

(i) $\dfrac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x);$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{cosec}(x) = -\,\mathrm{cosec}(x)\,\mathrm{cotg}(x).$

**Exemplo**

Encontre $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x)$;

(b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1 - 2\cos(x)}$;

(c) $f(x) = \operatorname{tg}(x)\sec(x)$.

R.: (a) $x^2\cos(x) + 2x\operatorname{sen}(x)$; (b) $\frac{\cos(x)-2}{[1-2\cos(x)]^2}$; (c) $\sec(x)\operatorname{tg}^2(x) + \sec^3(x)$.

## Regra da Cadeia

Se a função $g$ for derivável em $x$ e a função $f$ for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em $x$, e

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

## Exemplo

Encontre $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = (2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$;

(b) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 3)$;

(c) $f(x) = \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^5$;

(d) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$;

(e) $f(x) = \operatorname{tg}(3x^2 + 2x)$;

(f) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x))$;

(g) $f(x) = \sec^4(2x^2)$.

R.: (a) $10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)$; (b) $2x\cos(x^2 + 3)$; (c) $-\frac{160}{(x-1)^6}$; (d) $-\frac{20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$; (e) $2(3x+1)\sec^2(3x^2 + 2x)$; (f) $-\operatorname{sen}(x)\cos(\cos(x))$; (g) $16x\sec^4(2x^2)\operatorname{tg}(2x^2)$.

## Teorema

*Se $f$ for a função potência definida por $f(x) = x^r$, onde $r$ é qualquer número racional, então $f$ será derivável e*

$$\boxed{f'(x) = rx^{r-1}.}$$

*Para que essa fórmula tenha validade para $f'(0)$, $r$ deve ser tal que $x^{r-1}$ esteja definida em algum intervalo aberto contendo $0$.*

### Exemplo

Encontre $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$;

(b) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x + 5}$;

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x^2 - 1}}$;

(d) $f(x) = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(x) + 9\cos^2(x)}$.

R.: (a) $\frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$; (b) $\frac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x+5}}$; (c) $\frac{x^2(7x^2-3)}{(3x^2-1)^{4/3}}$; (d) $-\frac{5\,\mathrm{sen}(x)\cos(x)}{\sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(x)+9\cos^2(x)}}$.

- Se tivermos a equação

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2, \tag{1}$$

não poderemos resolver $y$ em termos de $x$.

- Além disso, podem existir uma ou mais funções $f$, para as quais se $y = f(x)$, a equação (1) estará satisfeita.
- Nesse caso, a funçao $f$ está definida *implicitamente* pela equação dada.
- Com a hipótese de que (1) define $y$ como uma função derivável de $x$, a derivada de $y$ em relação a $x$ pode ser encontrada por **derivação implícita**.

**Exemplo**

Encontre $\dfrac{dy}{dx}$ dada a equação:

(a) $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$;

(b) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$;

(c) $x\cos(y) + y\cos(x) = 1$.

R.: (a) $\frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$; (b) $\frac{x^3 - y}{x - y^3}$; (c) $\frac{y\,\mathrm{sen}(x) - \cos(y)}{\cos(x) - x\,\mathrm{sen}(y)}$.

**Exemplo**

Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto $(1, 2)$.

R.: $x + 4y - 9 = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ f'''(x) &= (f'')'(x) \\ f^{(4)}(x) &= (f''')'(x) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= (f^{(n-1)})'(x) \\ &\vdots \end{aligned}}$$

**Exemplo**

Ache todas as derivadas da função $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$.

R.: $f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$, $f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$, $f'''(x) = 192x + 30$, $f^{(4)}(x) = 192$, $f^{(n)}(x) = 0$ para $n \geq 5$.

**Exemplo**

Calcule $\dfrac{d^3}{dx^3}(2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) - x^3)$.

R.: $-2\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x) - 6$.

**Exemplo**

Dada $4x^2 + 9y^2 = 36$ ache $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ por derivação implícita.

R.: $-\frac{16}{9y^3}$.

**Definição**

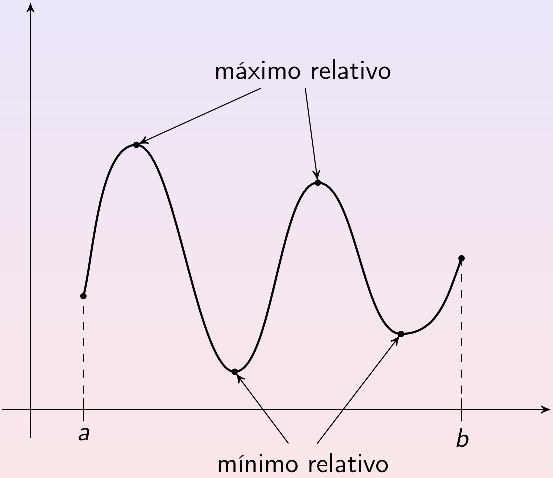
A função $f$ terá um **valor máximo relativo** (ou **valor máximo local**) em $c$ se existir um intervalo aberto contendo $c$, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ nesse intervalo.

**Definição**

A função $f$ terá um **valor mínimo relativo** (ou **valor mínimo local**) em $c$ se existir um intervalo aberto contendo $c$, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ nesse intervalo.

**Definição**

Um **valor extremo relativo** (ou **valor extremo local**) é um valor máximo relativo ou um valor mínimo relativo.


máximo relativo
a
b
mínimo relativo

**Teorema**

*Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de $x$ no intervalo aberto $(a, b)$ e se $f$ tiver um extremo relativo em $c$, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.*

### Definição

Se $c$ for um número no domínio da função $f$ e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então $c$ será chamado de **número crítico** de $f$.

**Exemplo**

Ache os números críticos da função $f$ definida por

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}.$$

R.: $-1$ e $0$.

**Exemplo**

Ache os números críticos da função $g$ definida por

$$g(x) = \operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

R.: $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

### Definição

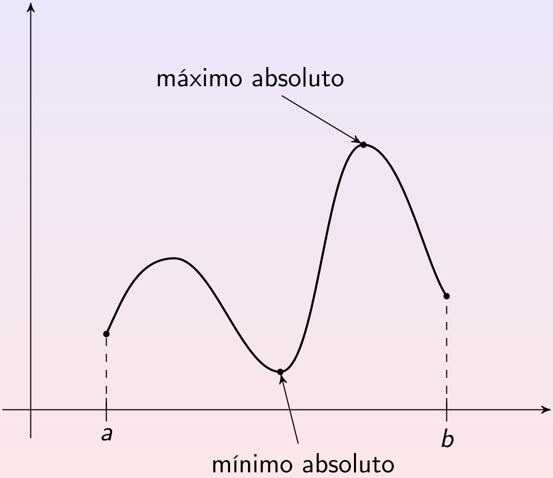
$f(c)$ será o **valor máximo absoluto** (ou **valor máximo global**) da função $f$ se $c$ estiver no domínio de $f$ e se $f(c) \geq f(x)$ para todos os valores de $x$ no domínio de $f$.

### Definição

$f(c)$ será o **valor mínimo absoluto** (ou **valor mínimo global**) da função $f$ se $c$ estiver no domínio de $f$ e se $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de $x$ no domínio de $f$.

### Definição

Um **valor extremo absoluto** (ou **valor extremo global**) é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto.


máximo absoluto
a
b
mínimo absoluto

### Teorema do Valor Extremo

Se a função $f$ for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então $f$ terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a, b]$.

O valor máximo absoluto e o valor mínimo absoluto de uma função contínua $f$ num intervalo fechado $[a, b]$ podem ser determinados pelo seguinte procedimento:

(1) Ache os valores da função nos números críticos de $f$ em $(a, b)$.

(2) Ache os valores de $f(a)$ e $f(b)$.

(3) O maior dentre os valores das etapas (1) e (2) será o valor máximo absoluto e o menor será o valor mínimo absoluto.

**Exemplo**

Ache os valores extremos absolutos de $f$ em $[-2, \frac{1}{2}]$, se

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$$

R.: Valor máximo absoluto: $2 = f(-1)$. Valor mínimo absoluto: $-1 = f(-2)$.

**Exemplo**

Ache os valores extremos absolutos de $f$ em $[1, 5]$ se

$$f(x) = (x-2)^{2/3}.$$

R.: Valor máximo absoluto: $\sqrt[3]{9} = f(5)$. Valor mínimo absoluto: $0 = f(2)$.

**Exemplo**

Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão com 12 cm de lado cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível.

R.: $128\,\mathrm{cm}^3$.

**Exemplo**

Os pontos $A$ e $B$ estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto $C$ está na mesma margem que $B$, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de $A$ até $C$. Se o custo por quilômetro do cabo é 25 % maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja o menor para a companhia?

R.: $\frac{5}{4}k\sqrt{13}$.

**Exemplo**

Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de \$12 por metro linear no lado paralelo ao rio e de \$8 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com \$3600 de material.

R.: $16.875\,\mathrm{m}^2 = 150\,\mathrm{m} \times 112{,}5\,\mathrm{m}$.

**Exemplo**

Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com um raio de 5 cm e 12 cm de altura.

R.: $r = \frac{10}{3}\,\text{cm}, \; h = 4\,\text{cm}.$

**Teorema de Rolle**

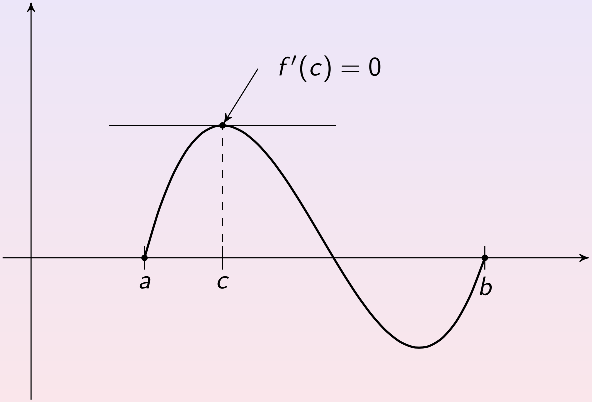
Seja $f$ uma função, tal que

(i) ela seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;

(ii) ela seja derivável no intervalo aberto $(a, b)$;

(ii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

Então existe um número $c$ no intervalo aberto $(a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.


$f'(c) = 0$
$a$
$c$
$b$

**Exemplo**

Dada
$$f(x) = 4x^3 - 9x,$$
comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas em cada um dos seguintes intervalos: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Ache então um valor de $c$ em cada um desses intervalos para os quais $f'(c) = 0$.

R.: $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

### Teorema do Valor Médio

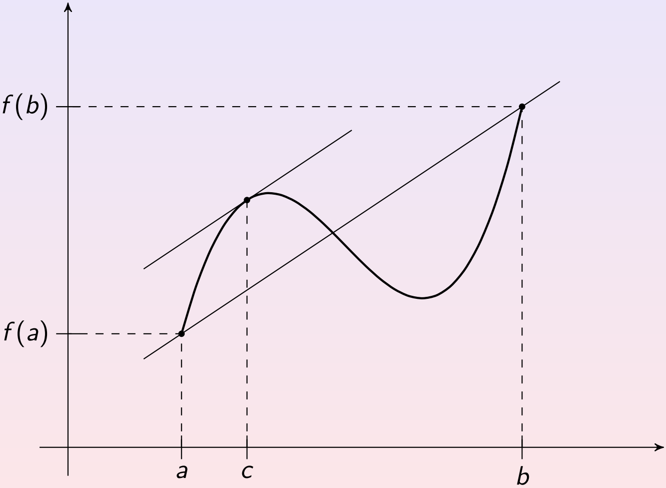
Seja $f$ uma função, tal que

(i) ela seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;

(ii) ela seja derivável no intervalo aberto $(a, b)$.

Então existe um número $c$ no intervalo aberto $(a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$


$f(b)$
$f(a)$
$a$
$c$
$b$

**Teorema**

*Se $f$ for uma função tal que $f'(x) = 0$ para todos os valores de $x$ num intervalo $I$, então $f$ será constante em $I$.*

**Exemplo**

Dada

$$f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x,$$

comprove que as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas para $a = 1$ e $b = 3$. Então, encontre todos os números $c$ no intervalo aberto $(1, 3)$, tais que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}.$$

R.: $\frac{7}{3}$.

**Exemplo**

Dada

$$f(x) = x^{2/3},$$

mostre que não existe nenhum número $c$ no intervalo aberto $(-2, 2)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}.$$

Que condição dentre as hipóteses do Teorema do Valor Médio não está satisfeita para $f$ quando $a = -2$ e $b = 2$?

### Definição

Uma função $f$ definida num intervalo será **crescente** naquele intervalo, se e somente se

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2,$$

onde $x_1$ e $x_2$ são quaisquer números no intervalo.

### Definição

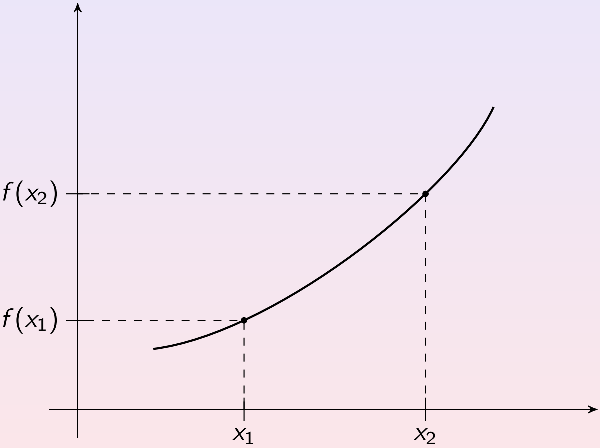
Uma função $f$ definida num intervalo será **decrescente** naquele intervalo, se e somente se

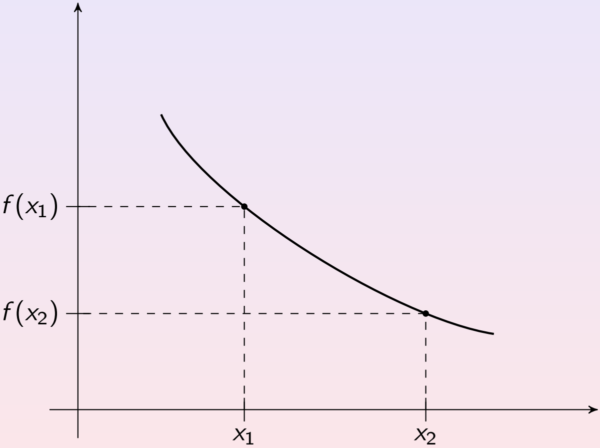
$$f(x_1) > f(x_2), \quad \text{sempre que} \quad x_1 < x_2,$$

onde $x_1$ e $x_2$ são quaisquer números no intervalo.

**Definição**

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então dizemos que ela é **monótona** no intervalo.


$f(x_2)$
$f(x_1)$
$x_1$
$x_2$


$f(x_1)$
$f(x_2)$
$x_1$
$x_2$

**Teorema**

*Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto $(a, b)$:*

(i) *se $f'(x) > 0$ para todo $x$ em $(a, b)$, então $f$ será crescente em $[a, b]$;*

(ii) *se $f'(x) < 0$ para todo $x$ em $(a, b)$, então $f$ será decrescente em $[a, b]$.*

**Teorema (Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos)**

*Seja $f$ uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto $(a, b)$ contendo o número $c$ e suponha que $f'$ exista em todos os pontos de $(a, b)$, exceto possivelmente em $c$:*

(i) *se $f'(x) > 0$ para todos os valores de $x$ em algum intervalo aberto tendo $c$ como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de $x$ em algum intervalo aberto tendo $c$ como extremo esquerdo, então $f$ terá um valor máximo relativo em $c$;*

(ii) *se $f'(x) < 0$ para todos os valores de $x$ em algum intervalo aberto, tendo $c$ como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de $x$ em algum intervalo aberto, tendo $c$ como extremo esquerdo, então $f$ terá um valor mínimo relativo em $c$.*

Para determinar os extremos relativos de $f$:

(1) Ache $f'(x)$.

(2) Ache os números críticos de $f$, isto é, os valores de $x$ para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não existe.

(3) Aplique o Teste da Derivada Primeira.

**Exemplo**

Dada

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1,$$

ache os extremos relativos de $f$, aplicando o Teste da Derivada Primeira. Determine os valores de $x$ nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais $f$ é crescente e aqueles onde $f$ é decrescente.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|
| $x < 1$ | | $> 0$ | $f$ é crescente |
| $x = 1$ | $= 5$ | $= 0$ | $f$ tem um valor máximo relativo |
| $1 < x < 3$ | | $< 0$ | $f$ é decrescente |
| $x = 3$ | $= 1$ | $= 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo |
| $3 < x$ | | $> 0$ | $f$ é crescente |

## Exemplo

Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x < 3, \\ 8 - x, & \text{se } x \geq 3, \end{cases}$$

ache os extremos relativos de $f$, aplicando o Teste da Derivada Primeira. Determine os valores de $x$ nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais $f$ é crescente e aqueles onde $f$ é decrescente.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|
| $x < 0$ | | $< 0$ | $f$ é decrescente |
| $x = 0$ | $= -4$ | $= 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo |
| $0 < x < 3$ | | $> 0$ | $f$ é crescente |
| $x = 3$ | $= 5$ | não existe | $f$ tem um valor máximo relativo |
| $3 < x$ | | $< 0$ | $f$ é decrescente |

## Exemplo

Dada
$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3},$$
ache os extremos relativos de $f$, aplicando o Teste da Derivada Primeira. Determine os valores de $x$ nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais $f$ é crescente e aqueles onde $f$ é decrescente.

R.:

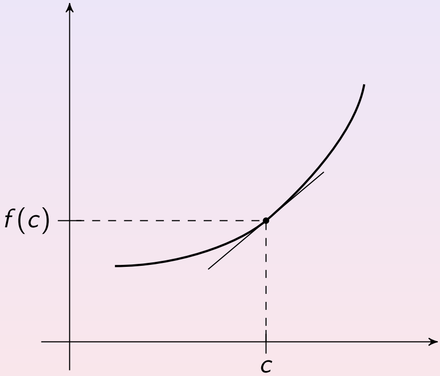
| | $f(x)$ | $f'(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|
| $x < -1$ | | $< 0$ | $f$ é decrescente |
| $x = -1$ | $= -3$ | $= 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo |
| $-1 < x < 0$ | | $> 0$ | $f$ é crescente |
| $x = 0$ | $= 0$ | não existe | $f$ não tem extremo relativo |
| $0 < x$ | | $> 0$ | $f$ é crescente |

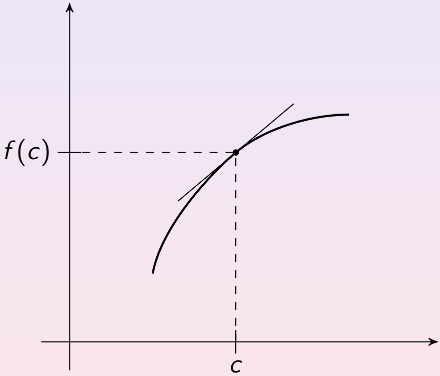
**Definição**

O gráfico de uma função $f$ será **convexo** (ou **côncavo para cima**) no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto $I$ contendo $c$, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em $I$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

**Definição**

O gráfico de uma função $f$ será **côncavo** (ou **côncavo para baixo**) no ponto $(c, f(c))$, se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto $I$ contendo $c$, tal que para todos os valores de $x \neq c$ em $I$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.


$f(c)$
$c$



$f(c)$
$c$

**Teorema**

*Seja $f$ uma função derivável em algum intervalo aberto contendo $c$. Então,*

(i) *se $f''(c) > 0$, o gráfico de $f$ é convexo em $(c, f(c))$,*

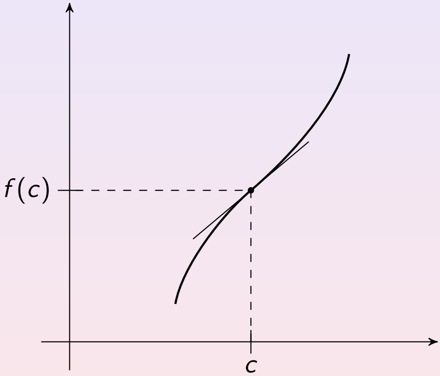
(ii) *se $f''(c) < 0$, o gráfico de $f$ é côncavo em $(c, f(c))$.*

## Definição

O ponto $(c, f(c))$ será um **ponto de inflexão** do gráfico da função $f$ se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto $I$ contendo $c$, tal que se $x$ estiver em $I$, então

(i) $f''(x) < 0$ se $x < c$, e $f''(x) > 0$ se $x > c$, ou

(ii) $f''(x) > 0$ se $x < c$, e $f''(x) < 0$ se $x > c$.


$f(c)$
$c$

**Teorema**

*Se a função $f$ for derivável em algum intervalo aberto contendo $c$ e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de $f$, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.*

**Exemplo**

Dada
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1,$$
ache o ponto de inflexão do gráfico de $f$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|---|
| $x < 2$ | | | $< 0$ | o gráfico é côncavo para baixo |
| $x = 2$ | $= 3$ | $= -3$ | $= 0$ | o gráfico tem um ponto de inflexão |
| $2 < x$ | | | $> 0$ | o gráfico é côncavo para cima |

## Exemplo

Dada
$$f(x) = x^{1/3},$$
ache o ponto de inflexão do gráfico de $f$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|---|
| $x < 0$ | | $> 0$ | $> 0$ | $f$ é crescente; o gráfico é côncavo para cima |
| $x = 0$ | $= 0$ | não existe | não existe | o gráfico tem um ponto de inflexão |
| $0 < x$ | | $> 0$ | $< 0$ | $f$ é crescente; o gráfico é côncavo para baixo |

### Exemplo

Dada

$$f(x) = (1 - 2x)^3,$$

ache o ponto de inflexão do gráfico de $f$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|---|
| $x < \frac{1}{2}$ | | | $> 0$ | o gráfico é côncavo para cima |
| $x = \frac{1}{2}$ | $= 0$ | $= 0$ | $= 0$ | o gráfico tem um ponto de inflexão |
| $\frac{1}{2} < x$ | | | $< 0$ | o gráfico é côncavo para baixo |

**Teorema (Teste da Derivada Segunda para Extremos Relativos)**

*Seja $c$ um número crítico de uma função $f$, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que $f'$ exista para todos os valores de $x$ em algum intervalo aberto contendo $c$. Se $f''(c)$ existe e*

(i) *se $f''(c) < 0$, então $f$ tem um valor máximo relativo em $c$;*

(ii) *se $f''(c) > 0$, então $f$ tem um valor mínimo relativo em $c$.*

## Exemplo

Dada
$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2,$$
ache os máximos e mínimos relativos de $f$, aplicando o Teste da Derivada Segunda.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|---|
| $x = -2$ | $= -\frac{32}{3}$ | $= 0$ | $> 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo |
| $x = 0$ | $= 0$ | $= 0$ | $< 0$ | $f$ tem um valor máximo relativo |
| $x = 1$ | $= -\frac{5}{3}$ | $= 0$ | $> 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo |

### Exemplo

Dada
$$f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3},$$
ache os extremos relativos de $f$, aplicando o teste da derivada segunda, quando possível. Use a derivada segunda para encontrar os pontos de inflexão do gráfico de $f$ e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.

R.:

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | $f''(x)$ | *Conclusão* |
|---|---|---|---|---|
| $x < 0$ | | $< 0$ | $< 0$ | $f$ é decrescente; o gráfico é côncavo para baixo |
| $x = 0$ | $= 0$ | não existe | não existe | $f$ não tem extremo relativo; o gráfico tem um ponto de inflexão |
| $0 < x < 1$ | | $< 0$ | $> 0$ | $f$ é decrescente; o gráfico é côncavo para cima |
| $x = 1$ | $= -1$ | $= 0$ | $> 0$ | $f$ tem um valor mínimo relativo; o gráfico é côncavo para cima |
| $1 < x < 8$ | | $> 0$ | $> 0$ | $f$ é crescente; o gráfico é côncavo para cima |
| $x = 8$ | $= 0$ | $= \frac{1}{6}$ | $= 0$ | $f$ é crescente; o gráfico tem um ponto de inflexão |
| $8 < x$ | | $> 0$ | $< 0$ | $f$ é crescente; o gráfico é côncavo para baixo |

**Definição**

Uma função $F$ será chamada de **primitiva** (ou **antiderivada**) de uma função $f$ num intervalo $I$ se $F'(x) = f(x)$ para todo x em $I$.

- Uma função quando possui uma primitiva, ela não é única.
- Por exemplo, as funções $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$ e $G(x) = 4x^3 + x^2 + 17$ são primitivas de $f(x) = g(x) = 12x^2 + 2x$.

**Teorema**

*Se $f$ e $g$ forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x$ no intervalo $I$, então haverá uma constante $K \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = g(x) + K$ para todo $x$ em $I$.*

**Corolário**

*Se $F$ for uma primitiva particular de $f$ em um intervalo $I$, então toda primitiva de $f$ em $I$ será dada*

$$F(x) + C \tag{2}$$

*onde $C$ é uma constante arbitrária e todas as primitivas de $f$ em $I$ poderão ser obtidas (2), atribuindo-se certos valores a $C$.*

- O símbolo $\int$ denota a operação de antidiferenciação e escrevemos

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

em que $F'(x) = f(x)$.

**Teorema**

$$\int dx = x + C.$$

**Teorema**

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, *em que* $a$ *é uma constante.*

**Teorema**

*Se $f_1$ e $f_2$ estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

**Teorema**

*Se $f_1, \dots, f_n$, estão definidas no mesmo intervalo, então*

$$\int [c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + \cdots + c_n \int f_n(x)dx,$$

*em que $c_1, \dots, c_n$ são constantes.*

**Teorema**

*Se n for um número racional,*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \textit{para } n \neq -1.$$

**Exemplo**

Encontre as primitivas:

(a) $\int x^2 dx$;
(b) $\int x^3 dx$;
(c) $\int \frac{1}{x^2} dx$;
(d) $\int \sqrt[3]{x} dx$.

R.: (a) $\frac{x^3}{3} + C$; (b) $\frac{x^4}{4} + C$ (c) $-\frac{1}{x} + C$ (d) $\frac{3}{4}x^{4/3} + C$.

**Exemplo**

Encontre as primitivas:

(a) $\int (3x+5)dx$;

(b) $\int (5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7)dx$;

(c) $\int \sqrt{x}(x + \frac{1}{x})dx$;

(d) $\int \frac{5t^2+7}{t^{4/3}} dt$.

R.: (a) $\frac{3}{2}x^2 + 5x + C$; (b) $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + C$;
(c) $\frac{2}{5}x^{5/2} + 2x^{1/2} + C$; (d) $3t^{5/3} - \frac{21}{t^{1/3}} + C$.

**Teorema**

(a) $\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$;
(b) $\int \cos(x)dx = \operatorname{sen}(x) + C$;
(c) $\int \sec^2(x)dx = \operatorname{tg}(x) + C$;
(d) $\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$;
(e) $\int \sec(x)\operatorname{tg}(x)dx = \sec(x) + C$;
(f) $\int \operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)dx = -\operatorname{cosec}(x) + C$.

**Exemplo**

Encontre as primitivas:

(a) $\int (3\sec x \operatorname{tg} x - 5\operatorname{cosec}^2 x)dx$;

(b) $\int \frac{2\operatorname{cotg} x - 3\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}dx$;

(c) $\int (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x + 4)dx$.

R.: (a) $3\sec x + 5\operatorname{cotg} x + C$; (b) $-2\operatorname{cosec} x + 3\cos x + C$; (c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + 2x + C$.

**Exemplo**

Em qualquer ponto $(x, y)$ de uma determinada curva, a reta tangente tem uma inclinação igual a $4x - 5$. Se a curva contém o ponto $(3, 7)$, ache sua equação.

R.: $y = 2x^2 - 5x + 4$.

**Teorema (Regra da Cadeia para Primitivas)**

*Seja $g$ uma função diferenciável e seja o intervalo $I$ a imagem de $g$. Suponha que $f$ seja uma função definida em $I$ e que $F$ seja uma primitiva de $f$ em $I$. Então,*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C.$$

**Corolário**

*Se $g$ for uma função diferenciável e se $n$ for um número racional*

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad \text{para } n \neq -1.$$

**Exemplo**

Encontre as primitivas:

(a) $\int \sqrt{3x+4}dx$;
(b) $\int x^2(5+2x^3)^8 dx$;
(c) $\int x\cos(x^2)dx$;
(d) $\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4} dx$.

R.: (a) $\frac{2}{9}(3x+4)^{3/2}+C$; (b) $\frac{1}{54}(5+2x^3)^9+C$; (c) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2)+C$; (d) $\frac{1}{18(1-8x^3)^3}+C$.

### Exemplo

Encontre as primitivas:

(a) $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$;

(b) $\int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$;

(c) $\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}\,dx$.

R.: (a) $\frac{2}{7}(1+x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1+x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$; (b) $-2\cos(\sqrt{x}) + C$; (c) $\frac{2}{3}[1-\cos(x)]^{3/2} + C$.

### Exemplo

Calcule $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx$ por dois métodos: (a) usando a substituição $u = \operatorname{tg} x$; (b) usando a substituição $v = \sec x$; (c) Explique a diferença nas respostas de (a) e de (b).

R.: (a) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + C$; (b) $\frac{1}{2}\sec^2 x + C$.

**Definição**

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = F(m) + F(m+1) + \cdots + F(n),$$

onde $m$ e $n$ são inteiros, com $m \leq n$.

**Teorema**

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn, \text{ onde } c \text{ é qualquer constante.}$$

**Teorema**

$$\sum_{i=1}^{n} cF(i) = c\sum_{i=1}^{n} F(i), \text{ onde } c \text{ é qualquer constante.}$$

**Teorema**

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) + G(i)] = \sum_{i=1}^{n} F(i) + \sum_{i=1}^{n} G(i).$$

### Teorema

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = \sum_{i=m+k}^{n+k} F(i-k), \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

### Teorema

$$\sum_{i=1}^{n} [F(i) - F(i-1)] = F(n) - F(0).$$

**Exemplo**

Calcule
$$\sum_{i=1}^{n}(4^i - 4^{i-1}).$$

R.: $4^n - 1$.

**Exemplo**

Calcule
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}.$$

R.: $\frac{n}{n+1}$.

### Teorema

*Se n for um inteiro positivo, então*

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

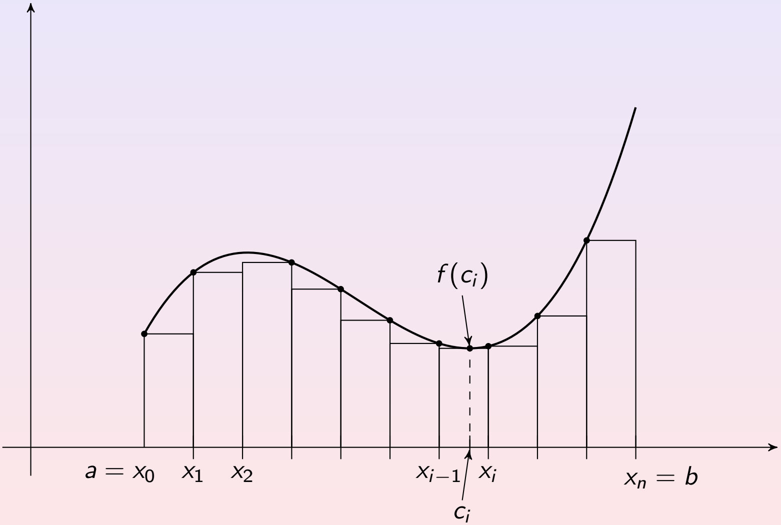
(iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$.

**Exemplo**

Calcule

$$\sum_{i=1}^{n} i(3i-2).$$

R.: $(2n^3+n^2-n)/2.$


$f(c_i)$
$a = x_0$
$x_1$
$x_2$
$x_{i-1}$
$x_i$
$x_n = b$
$c_i$

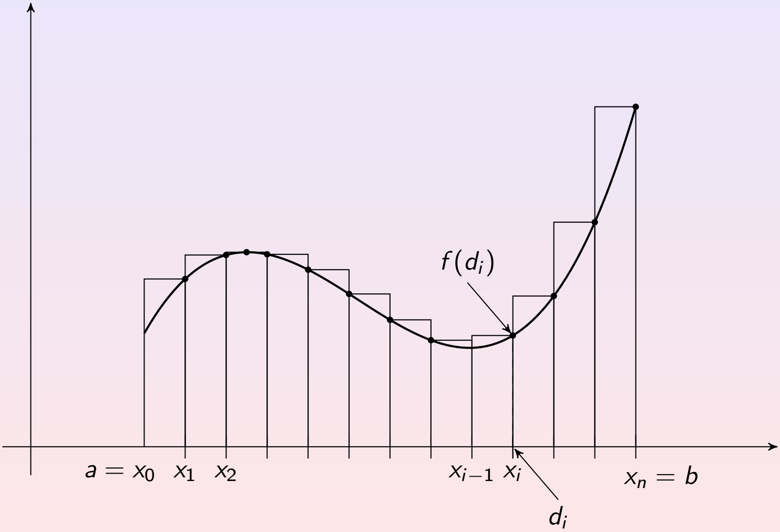
## Definição

Suponha que a função $f$ seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo $x$ em $[a, b]$, e seja $R$ a região limitada pela curva $y = f(x)$, o eixo $x$ e as retas $x = a$ e $x = b$. Vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos, cada um com comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e vamos denotar o $i$-ésimo subintervalo por $[x_{i-1}, x_i]$. Então, se $f(c_i)$ for o valor mínimo absoluto de $f$ no $i$-ésimo subintervalo, a medida da área da região $R$ será dada por

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x.$$

A igualdade acima significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $N > 0$ tal que se $n > N$ então

$$\left| A - \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x \right| < \varepsilon.$$


$f(d_i)$
$a = x_0$
$x_1$
$x_2$
$x_{i-1}$
$x_i$
$x_n = b$
$d_i$

- Poderíamos ter considerado retângulos circunscritos ao invés de retângulos inscritos.
- Nesse caso, tomamos como medida das alturas dos retângulos o valor máximo absoluto de $f$ em cada subintervalo.
- A existência desse valor máximo absoluto de $f$ em cada subintervalo é garantida pelo Teorema do Valor Extremo.
- Assim sendo, poderíamos definir a medida da área da região $R$ por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\Delta x,$$

em que $f(d_i)$ é o valor máximo absoluto de $f$ em $[x_{i-1}, x_i]$.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pela curva $y = x^2$, o eixo $x$ e a reta $x = 3$, tomando retângulos inscritos.

R.: 9.

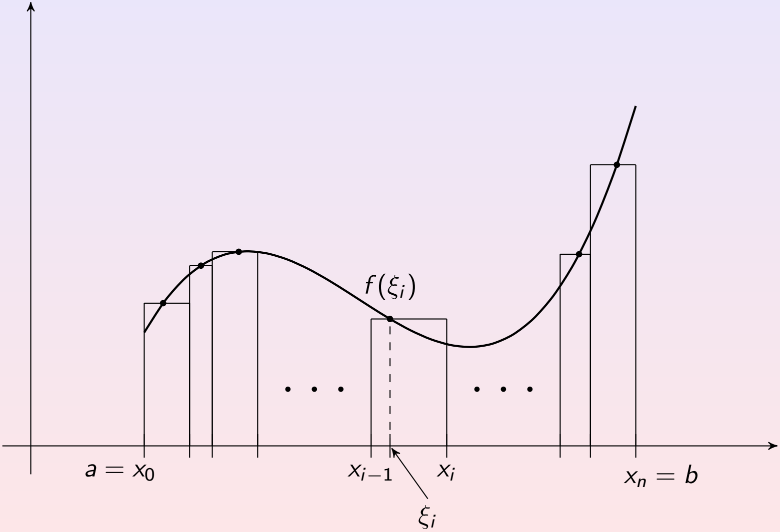
**Exemplo**

Ache a área da região no exemplo anterior, tomando retângulos circunscritos.

**Exemplo**

Ache a área do trapézio limitado pelas retas $x = 1$ e $x = 3$, pelo eixo $x$ e pela reta $2x + y = 8$. Tome retângulos inscritos.

R.: 8.


$f(\xi_i)$
$a = x_0$
$x_{i-1}$
$x_i$
$x_n = b$
$\xi_i$

- Seja $f$ uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$.
- Vamos dividir esse intervalo em $n$ subintervalos, escolhendo qualquer dos $(n-1)$ pontos intermediários entre $a$ e $b$.
- Um conjunto de pontos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ satisfazendo

  $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

  é chamado de **partição** do intervalo $[a, b]$.
- Denotemos por $P$ tal partição.
- A partição $P$ dá origem a $n$ subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$.

- O maior comprimento dos subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ é dito ser a **norma** da partição, que é denotada por $||P||$.
- Em outras palavras,

$$||P|| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

- Em cada subintervalo, escolhemos $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- A soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

  é denominada de **soma de Riemann**.
- A integral de $f$ de $a$ a $b$ é definida como sendo o limite dessa soma com $||P|| \to 0$.

## Definição

Seja $f$ uma função cujo domínio inclui o intervalo fechado $[a, b]$. Então, $f$ será **integrável** em $[a, b]$ se existir um número $L$ satisfazendo a seguinte condição: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda partição $P$ de $[a, b]$ com $||P|| < \delta$, e para quaisquer $\xi_i$ no intervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$, tenhamos

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - L \right| < \varepsilon.$$

Nessas condições, escrevemos

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = L.$$

### Definição

Se $f$ for uma função definida no intervalo fechado $[a, b]$, então a integral definida de $f$ de $a$ a $b$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, será dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

se o limite existir.

- Na notação de integral definida $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamado de **integrando**, $a$ de **limite inferior** e $b$ de **limite superior**.
- O símbolo $\int$ é chamado de **sinal de integração**.

**Teorema**

*Se uma função for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, então ela será integrável em $[a, b]$.*

## Definição

Seja $f$ uma função contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x$ em $[a, b]$. Seja $R$ a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$. Então, a **área** $A$ da região $R$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

## Exemplo

Ache o valor exato da integral definida $\int_1^3 x^2 dx$.

R.: $\frac{26}{3}$.

**Definição**

Se $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

**Definição**

Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

se a integral $\int_b^a f(x)dx$ existir.

### Exemplo

Seja $f$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Seja $[a, b]$ qualquer intervalo para o qual $a < 0 < b$. Mostre que $f$ é descontínua em $[a, b]$ e, ainda assim, integrável em $[a, b]$.

**Lema**

*Se* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ *for qualquer partição do intervalo fechado* $[a, b]$, *então*

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

**Lema**

*Se $f$ for definida no intervalo fechado $[a, b]$, e se o limite*

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

*existe, em que $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ é qualquer partição de $[a, b]$, então, se $k$ for uma constante qualquer,*

$$\lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = k \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

**Teorema**

*Se $k$ for uma constante qualquer, então*

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

**Exemplo**

Calcule

$$\int_{-3}^{5} 4dx.$$

R.: 32.

**Teorema**

*Se a função $f$ for integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se $k$ for uma constante qualquer, então*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

**Teorema**

*Se as funções $f$ e $g$ forem integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ será integrável em $[a, b]$ e*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- O teorema acima pode ser estendido a qualquer número de funções. Isto é, se as funções $f_1, \ldots, f_n$ forem todas integráveis em $[a, b]$, então $f_1 + \cdots + f_n$ será integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

## Exemplo

Use o fato de que $\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$ e $\int_1^3 x dx = 4$ para calcular a integral

$$\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2) dx.$$

R.: 10.

### Teorema

*Se a função $f$ for integrável nos intervalos fechados $[a, b]$, $[a, c]$ e $[c, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

*em que $a < c < b$.*

### Teorema

*Se $f$ for integrável num intervalo fechado contendo os números $a$, $b$ e $c$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

*não importando a ordem de $a$, $b$ e $c$.*

**Teorema**

*Se as funções $f$ e $g$ forem integráveis no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(x) \geq g(x)$ para todo $x$ em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

**Teorema**

*Vamos supor que a função $f$ seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Se $m$ e $M$ forem, respectivamente, os valores mínimo e máximo absolutos de $f$ em $[a, b]$, ou seja*

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad \text{para } a \leq x \leq b,$$

*então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

### Exemplo

Encontre um intervalo fechado contendo o valor de

$$\int_{1/2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx.$$

R.: $[\frac{7}{2}, \frac{35}{2}]$.

### Exemplo

Encontre um intervalo fechado contendo o valor de

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{\operatorname{sen}(x)}dx.$$

R.: $[\frac{\pi}{2^{5/4}}, \frac{\pi}{2}]$.

**Teorema do Valor Médio para integrais**

Se a função $f$ for contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existe um número $\chi$ em $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a).$$

**Exemplo**

Ache o valor de $\chi$ tal que $\int_1^3 f(x)dx = f(\chi)(3-1)$ se $f(x) = x^2$.

R.: $\frac{1}{3}\sqrt{39}$.

### Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e seja $x$ qualquer número em $[a, b]$. Se $F$ for a função definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

então

$$F'(x) = f(x). \tag{3}$$

(Se $x = a$, a derivada em (3) pode ser a derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (3) pode ser a derivada à esquerda.)

**Exemplo**

Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt$;

(b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos(t)}\,dt$.

R.: (a) $\frac{1}{x^3+1}$; (b) $2x\sqrt{\cos(x^2)}$.

## Segundo Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e seja $F$ uma função tal que

$$F'(x) = f(x), \tag{4}$$

para todo $x$ em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(Se $x = a$, a derivada em (4) pode ser uma derivada à direita, e se $x = b$, a derivada em (4) pode ser uma derivada à esquerda.)

- Quando aplicarmos o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, usaremos a notação

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

- Pela Regra da Cadeia para Primitivas,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big|_{g(a)}^{g(b)} .\end{aligned}$$

- Assim,

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.}$$

**Exemplo**

Calcule:

(a) $\int_1^3 x^2 dx$;

(b) $\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx$;

(c) $\int_{-1}^1 (x^{4/3} + 4x^{1/3}) dx$;

(d) $\int_0^2 2x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$;

(e) $\int_0^3 x\sqrt{1 + x} dx$;

(f) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(x) \cos(x) dx$;

(g) $\int_{-3}^4 |x + 2| dx$.

R.: (a) $\frac{26}{3}$; (b) $\frac{679}{64}$; (c) $\frac{6}{7}$; (d) $\frac{104}{9}$; (e) $\frac{116}{15}$; (f) $\frac{1}{4}$; (g) $\frac{37}{2}$.

**Exemplo**

Ache a área da região no primeiro quadrante limitada pela curva

$$y = x\sqrt{x^2+5},$$

pelo eixo $x$ e pela reta $x = 2$.

R.: $\frac{1}{3}(27 - 5\sqrt{5})$.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^2 - 4x,$$

pelo eixo $x$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.

R.: $\frac{22}{3}$.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pela curva

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6,$$

pelo eixo $x$ e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

R.: $\frac{157}{12}$.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

R.: $\frac{8}{3}$.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pela parábola $y^2 = 2x - 2$ e pela reta $y = x - 5$.

R.: 18.

**Exemplo**

Ache a área da região do exemplo anterior, tomando elementos de área retangulares horizontais.

**Exemplo**

Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$.

R.: $\frac{71}{6}$.