Iniciado em	Wednesday, 2 Nov 2022, 16:25
Estado	Finalizada
Concluída em	Wednesday, 2 Nov 2022, 16:32
Tempo empregado	7 minutos 35 segundos
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização de uma faixa esférica, considerando a porção da esfera $x^2+y^2+z^2=3$ entre os planos $z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z=\frac{-\sqrt{3}}{2}$?

Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ ✔
- b. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}-(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$
- c. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}-(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$
- d. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq\pi$
- e. $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}-(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

Sua resposta está correta.

SOLUÇÃO:

- Em coordenadas esférica:

$x=\rho\sin(\phi)\cos(\theta)$

$y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta)$

- Sabendo que

$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- Então,

$\rho^2=3$

$=\sqrt{3}$

- Logo,

$z=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Para a esfera.

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Fazendo a manipulação de valores, teremos:

$\phi=\frac{\pi}{3}$

- Fazendo com o outro z, teremos

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\cos(\phi)$

- Fazendo a manipulação de valores, teremos:

$\phi=\frac{2\pi}{3}$

- Assim, a parametrização para a superfície dada é:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{i}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin(\phi)\cos(\theta))\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin(\phi)\sin(\theta))\mathbf{j}+(\sqrt{3}\cos(\phi))\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{3}\leq\phi\leq\frac{2\pi}{3}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$

.

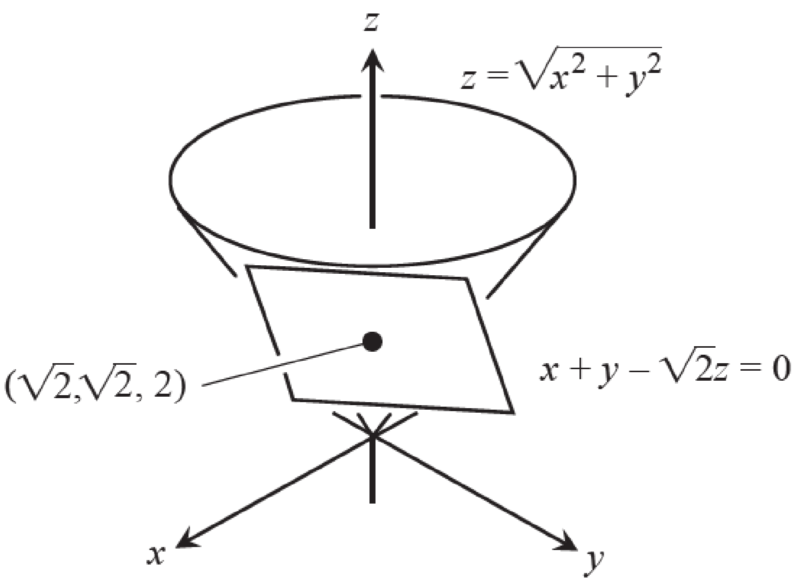
Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o plano tangente ao cone $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\theta) = (r\cos(\theta))\,\mathbf{i} \;+\; (r\sin(\theta))\,\mathbf{j} \;+\; r\mathbf{k},\; r \geq 0,$ onde $0\; \leq \theta \leq 2\pi$, no ponto $P_0\left(\sqrt{2},\; \sqrt{2},\; 2\right)$ que corresponde a $(r,\theta) \;=\; \left(2,\frac{\pi}{4}\right)$.

Veja uma ilustração abaixo:



Q.16.5.27

Escolha uma opção:

- a. $-x - y - \sqrt{2}z = 0$
- b. $x + y - \sqrt{2}z = 0$ ✔
- c. $x + y + \sqrt{2}z = 0$
- d. $x - y - \sqrt{2}z = 0$
- e. $-x + y - \sqrt{2}z = 0$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Temos que:

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{k} - \sqrt{2}\mathbf{i} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Plano tangente:

$-\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right)\left(y - \sqrt{2}\right) + 2\,(z - 2) = 0$

$-\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2}y + 2 + 2z - 4 = 0$

$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z = 0$

$x + y - \sqrt{2}z = 0$

A resposta correta é: $x + y - \sqrt{2}z = 0$

.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.

Escolha uma opção:

- a. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$
- b. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$ ✔ $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$
- c. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$
- d. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} - 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$
- e. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} - 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$

Sua resposta está correta.

Solução:

Temos que $r = \sqrt{9} = 3$. Assim, temos que $y = 3\cos\theta$ e $z = 3\sin\theta$, pois $y^2 = 9\cos^2\theta$ e $z^2 = 9\sin^2\theta$ e assim, $9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$. Então, tomando $u = \theta$ e $v = x$ temos que a parametrização da superfície é dada por:

$r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$

A resposta correta é: $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $\ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 3$

.

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x,y,z) = x\,y\,z$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = a$, $y = b$, $z = c$.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{2}$
- b. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{5}$
- c. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{6}$
- d. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$
- e. $\frac{abc(ab+ac+bc)}{3}$

Sua resposta está correta.

Solução:

Como o sólido esta no primeiro octante então a superfície é uma caixa com face em :

$x = a$,$y = b$ e $z = c$

$x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$

Para as faces que estão em zero a função $G(x,y,z)$ é igual a zero por isso não precisa calcular, para as outras a integral será:

Para $x = a$:

$G(a,y,z) = ayz$

$$\iint\limits_S G d\sigma = \iint\limits_S ayz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\, dydz = \frac{ab^2c^2}{4}$$

Para $y = b$:

$G(a,y,z) = xbz$

$$\iint\limits_S G d\sigma = \iint\limits_S xbz\, d\sigma = \int_0^c \int_0^a xbz\, dxdz = \frac{a^2bc^2}{4}$$

Para $z = c$:

$G(a,y,z) = xyc$

$$\iint\limits_S G d\sigma = \iint\limits_S xyc\, d\sigma = \int_0^b \int_0^a xyc\, dxdy = \frac{a^2b^2c}{4}$$

Logo:

$$\iint\limits_S G d\sigma = \int_0^c \int_0^b ayz\, dydz + \int_0^c \int_0^a xbz\, dxdz + \int_0^b \int_0^a xyc\, dxdy$$

$$\iint\limits_S G(x,y,z) d\sigma = \frac{abc(ab+ac+bc)}{4}.$$

A resposta correta é: $\frac{abc(ab+ac+bc)}{4}$

.

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ através do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1.$

Obs: o campo está para fora (normal no sentido oposto ao eixo z) atravessando o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1.$

Escolha uma opção:

- a. $\frac{3\pi}{2}$
- b. $\frac{4\pi}{3}$
- c. $\frac{2\pi}{3}$ ✔
- d. $\frac{2\pi}{5}$
- e. $\frac{5\pi}{3}$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Utilizamos a parametrização $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\ \theta) = r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Temos que:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

Agora calculamos o determinante dessas derivadas:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos(\theta)\mathbf{i} - r\sin^2(\theta)\mathbf{k} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\cos^2(\theta)\mathbf{k}$$

$$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$$

Sabendo que o fluxo atravéz da superficie é:

$$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} \|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|\, d\theta dr$$

Que:

$$\frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} = \vec{\mathbf{n}}$$

E que o campo vetorial é:

$$\vec{\mathbf{F}} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k} = \left(r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\right)\mathbf{i} - r\mathbf{k}$$

Calculamos:

$$\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\| = \sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2 + (-r)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) + r^2}$$

$$= r\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r}{\|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\|} \|\,\vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r\,\| =$$

$= \left(\frac{r\cos(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{r\sin(\theta)}{r\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{r}{r\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)(r\sqrt{2})$

$= r\cos(\theta)\mathbf{i} + r\sin(\theta)\mathbf{j} - r\mathbf{k}$

Sendo assim, calculamos o produto escalar $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, \| \vec{\mathbf{r}}_\theta \times \vec{\mathbf{r}}_r \|$

$= (r^2\cos(\theta)\sin(\theta),\ 0,\ -r) \cdot (r\cos(\theta),\ r\sin(\theta),\ -r)$

$= r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2$

Agora calculamos a integral:

$\int_0^{2\pi}\int_0^1\ r^3\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\ drd\theta$

$= \cos^2(\theta)\sin(\theta)\int_0^1\ r^3dr + \int_0^1 r^2dr$

$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 + \cos^2(\theta)\sin(\theta)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}$

$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ + \frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\ d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$

Para $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{4}\ d\theta$ precisaremos utilizar uma substituição:

Chamaremos $u = \cos(\theta)\ \Rightarrow\ du = -\sin(\theta)\ d\theta$

$= -\frac{1}{4}\int u^2\ du$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{u^3}{3}\right] = -\frac{\cos^3(\theta)}{12} + C$

Retomando:

$= \left[\frac{1}{3}\theta\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3(\theta)}{12}\right]_0^{2\pi}$

$= \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{12}\right) - \left(0 - \frac{1}{12}\right)$

$= \frac{2\pi}{3}$

A resposta correta é: \(\frac{2\pi }{3}\)

.

Resumo de retenção de dados