Álgebra Linear
Aula 3

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Multiplicação de Matrizes

Multiplicação de Matrizes

O produto de duas matrizes $A_{m\times t}$ e $B_{t\times n}$ é uma matriz $P_{m\times n}$ tal que

$$(P)_{ij} = \sum_{s=1}^{t} (A)_{is}(B)_{sj}.$$

Submatriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Fixe conjuntos $V = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_{|V|}\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ e $T = \{t_1 < t_2 < \cdots < t_{|T|}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. A submatriz de A induzida pelos conjuntos V e T é uma matriz A' de tamanho $|V| \times |T|$ tal que

$$(A')_{ij} = (A)_{v_i t_j}.$$

Estendendo o conceito de equação linear:

Combinação Linear

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ objetos quaisquer. Uma combinação linear, quando fizer sentido, desses elementos com coeficientes $c_1, \ldots, c_r$ é escrita da seguinte forma

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r.$$

Traço

O traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

- *Vetor Linha:* Por uma matriz de tamanho $1 \times n$

$$\overrightarrow{v} = [v_1 \cdots v_n].$$

Vetores

Um vetor $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ pode ser representando matricialmente de duas formas:

- *Vetor Linha:* Por uma matriz de tamanho $1 \times n$

$$\overrightarrow{v} = [v_1 \cdots v_n].$$

- *Vetor Coluna:* Por uma matriz de tamanho $n \times 1$

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- Representação por vetores linhas. Denote

$$\overrightarrow{r_i} = [a_{i1} \cdots a_{in}]$$

o i-ésimo vetor linha de A.

Nova representação de matrizes - Vetores Linha

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

- Representação por vetores linhas. Denote

$$\overrightarrow{r_i} = [a_{i1} \cdots a_{in}]$$

o i-ésimo vetor linha de A. Assim,

$$A = \begin{bmatrix} \overrightarrow{r_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{r_m} \end{bmatrix}$$

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

- *Vetores Coluna:* Denotamos por

$$\overrightarrow{c_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

o i-ésimo vetor coluna de A.

Nova representação de matrizes - Vetores Coluna

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

- *Vetores Coluna:* Denotamos por

$$\overrightarrow{c_i} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

o i-ésimo vetor coluna de A. Assim,

$$A = [\overrightarrow{c_1} \cdots \overrightarrow{c_n}].$$

De volta sistemas lineares...

$$Ax = b$$

De volta sistemas lineares...

$$Ax = b$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

De volta sistemas lineares...

$$
\begin{aligned}
& Ax = b \\
\leftrightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow & \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

De volta sistemas lineares...

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{c_i} x_i &= b
\end{aligned}
$$

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$;

Operações com escalares

Sejam A e B matrizes e α e β números reais.

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$;
- $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A$;

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. $\alpha\beta = \beta\alpha$;

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. $\alpha\beta = \beta\alpha$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

Sejam α, β e γ números reais. Temos que

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
3. $\alpha\beta = \beta\alpha$;
4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;
5. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$;

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

1. $A + B = B + A$;

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A(BC) = (AB)C$;

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A(BC) = (AB)C$;
4. $A(B + C) = AB + AC$;

Teorema

Suponha que as matrizes abaixo sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas. Temos,

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A(BC) = (AB)C$;
4. $A(B + C) = AB + AC$;
5. $(B + C)A = BA + CA$;

De volta aos números reais...

De volta aos números reais...

- $0 + \alpha = \alpha$;

De volta aos números reais...

- $0 + \alpha = \alpha$;

Enquanto nas matrizes...

- $0 + A = A$

De volta aos números reais...

De volta aos números reais...

- $1 \cdot \alpha = \alpha$;

De volta aos números reais...

- $1 \cdot \alpha = \alpha$;

Enquanto nas matrizes...

- I A = A

De volta aos números reais...

De volta aos números reais...

- $\beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta$;

De volta aos números reais...

- $\beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta$;

Enquanto nas matrizes...

De volta aos números reais...

- $\beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta$;

Enquanto nas matrizes... Nem sempre é verdade.

Relembrando...

Relembrando...

- A matriz identidade I_n é uma matriz quadrada tal que $(I_n)_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $(I_n)_{ii} = 1$ para todo $i \in [n]$;

Relembrando...

- A matriz identidade I_n é uma matriz quadrada tal que $(I_n)_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $(I_n)_{ii} = 1$ para todo $i \in [n]$;
- A matriz nula 0 de tamanho $m \times n$ é tal que toda entrada de 0 é 0.

Relembrando...

- A matriz identidade I_n é uma matriz quadrada tal que $(I_n)_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $(I_n)_{ii} = 1$ para todo $i \in [n]$;
- A matriz nula 0 de tamanho $m \times n$ é tal que toda entrada de 0 é 0.

Teorema (1.4.3)

Se R é a forma escalonada reduzida de uma matriz A de tamanho $n \times n$ então ou R tem uma linha de zeros ou $R = I_n$.