Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 6 e 7

Determinantes e Matriz Inversa

CONCEITOS PRELIMINARES

Consideremos o sistema $ax = b$ com $a \neq 0$.

A solução deste sistema é $x = \dfrac{b}{a}$.

Observe que o denominador está associado à matriz dos coeficientes do sistema, $[a]$.

Num sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

resolvendo, encontramos

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Observe que os denominadores são iguais e estão associados à matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Num sistema 3 × 3

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

ao procurarmos os valores de x_1, x_2 e x_3,
vemos que eles têm o mesmo denominador

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

que também está associado à matriz dos coeficientes do sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE

Quando nos referirmos ao determinante, isto é, ao número associado a uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, escreveremos:

$$\det \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{ou} \quad \det [a_{ij}]$$

Então

$$\det [a] = a$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ & + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31} \end{aligned}$$

Permutação	*Número de inversões*
(1 2 3)	0
(1 3 2)	1
(2 1 3)	1
(2 3 1)	2
(3 1 2)	2
(3 2 1)	3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Observe que aparecem todos as permutações de 1, 2 e 3.

Além disso, vemos que o sinal do termo é negativo, se a permutação tiver um número ímpar de inversões.

- Dada uma **matriz quadrada** de ordem *n*, no cálculo de seu determinante:
  1. O número de termos é dado por *n*!;
  2. A quantidade de fatores multiplicativos é *n*;
  3. Todo fator $\boldsymbol{a_{ij}}$, de cada linha/coluna, aparece em algum termo;
  4. O sinal de cada termo depende da quantidade de permutação necessárias;
     - Positivo: para um número par de permutações;
     - Negativo: para um número ímpar de permutações;

Propriedades

1. Se todos os elementos de uma linha/coluna de uma matriz **A** são nulos, det **A** = 0;

2. det **A** = det **A’**;

3. Se multiplicarmos uma linha por uma constante *k*, det **A** = *k* • det **A;**

4. Se trocarmos a posição de suas linhas, o determinante troca de sinal;

Propriedades

5. O determinante de uma matriz com duas linhas/colunas iguais é zero;

6. De modo geral, det (**A** + **B**) ≠ det **A** + det **B**;

7. det (**A** • **B**) = det **A** • det **B;**

8. O determinante não se altera se substituirmos uma linha por alguma combinação linear desta com outras.

DESENVOLVIMENTO DE LAPLACE

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Mas, podemos escrever esta soma como:

$$|\mathbf{A}| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ou ainda:

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observe que o determinante da matriz inicial 3×3 pode ser expresso em função dos determinantes de submatrizes 2×2,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}|\mathbf{A}_{11}| - a_{12}|\mathbf{A}_{12}| + a_{13}|\mathbf{A}_{13}|$$

onde $\mathbf{A}_{ij}$ é a submatriz da inicial, de onde a i-ésima linha e a j-ésima coluna foram retiradas.

Além disso, se chamarmos

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}|$$

obtemos a expressão

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

e assim

$$\det \mathbf{A}_{n\times n} = a_{i1}\Delta_{i1} + \ldots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$$

onde Δ_{ij} é o *cofator do elemento* a_{ij} (que é o determinante afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$ da submatriz $\mathbf{A}_{ij}$, obtida de **A** retirando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna)

O desenvolvimento de Laplace é uma fórmula de recorrência que permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, a partir dos determinantes das submatrizes quadradas de ordem $n - 1$.

Exemplo 1:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\Delta_{12} + 1\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32}$$

onde

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

Portanto

$$|\mathbf{A}| = (-2)(-2) + 1 \cdot 8 + (-1)7 = 5$$

Exemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 + 4) = 5$$

MATRIZ ADJUNTA – MATRIZ INVERSA

Dada uma matriz **A**, podemos formar uma nova matriz **A**, denominada *matriz dos cofatores* de **A**.

$$\bar{\mathbf{A}} = [\Delta_{ij}]$$

Exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \ldots \text{ etc.}$$

$$\text{Então, } \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Dada uma matriz quadrada **A**, chamaremos de *matriz adjunta* de **A** à transposta da matriz dos cofatores de **A**.

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}'$$

No exemplo anterior

$$\text{adj}\,\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos efetuar, neste exemplo, $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}'$.

$$\begin{bmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -19 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -19\,\mathbf{I}_3$$

Além disto, podemos verificar que det A = – 19.

Então $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_3$.

Teorema: $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{A}}' = \mathbf{A} \cdot (\text{adj}\,\mathbf{A}) = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}_n$

Matriz Inversa

- **Definição:** Dada uma matriz quadrada **A** de ordem n, chamamos de inversa de **A** a uma matriz **B** tal que $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \mathbf{B} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade de ordem n. Escrevemos $\mathbf{A}^{-1}$ para a inversa de **A**.

Exemplo 2:

$$\text{Seja } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

Procuremos sua inversa, isto é,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tal que } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 \text{ e } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_2$$

Impondo a primeira condição,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_2}$$

$$\begin{bmatrix} 6a + 2c & 6b + 2d \\ 11a + 4c & 11b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 6a + 2c = 1 \\ 11a + 4c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 6b + 2d = 0 \\ 11b + 4d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, temos

$$a = 2 \qquad\qquad b = -1$$

$$c = -\frac{11}{2} \qquad\qquad d = 3$$

Teremos então,

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$. Também

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ e, portanto,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

é a inversa da matriz **A**. ($\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$).

Propriedades

1. Se **A** e **B** são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis (existem $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$), então $\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ é inversível e $(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \bullet \mathbf{A}^{-1}$.

2. Se **A** é uma matriz quadrada e existe uma matriz **B** tal que $\mathbf{B} \bullet \mathbf{A} = \mathbf{I}$, então **A** é inversível ($\mathbf{A}^{-1}$ existe) e $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

3. Nem toda matriz tem inversa.

Suponhamos agora que $\mathbf{A}_{n \times n}$ tenha inversa, isto é, existe $\mathbf{A}^{-1}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$.

Usando o determinante temos

$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1}$ e $\det \mathbf{I}_n = 1$

Então:

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = 1$$

Desse produto concluímos que se $\mathbf{A}$ tem inversa,

i) $\det \mathbf{A} \neq 0$

ii) $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$

Teorema:

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ admite uma inversa se, e somente se $\det \mathbf{A} \neq 0$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\operatorname{adj} \mathbf{A})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 24 - 22 = 2 \neq 0$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \operatorname{adj} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

Então

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\operatorname{adj} \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 90-92, exercícios 1, 3, 5, 6, 7, 8ab, 9ac, 10, 12.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.