Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 8 e 9

Regra de Cramer e Inversão de Matrizes

REGRA DE CRAMER

Suponhamos que desejássemos resolver o sistema linear de n-equações e n-incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad\;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ou $\quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

Para esta equação suponhamos que det $\mathbf{A} \neq 0$ e portanto, que $\mathbf{A}$ tenha a inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I}_n\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Usando a relação para matriz inversa, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Então $\quad x_1 = \dfrac{b_1\Delta_{11} + \ldots + b_n\Delta_{n1}}{\det \mathbf{A}}$

Mas note que o numerador desta fração é igual ao determinante da matriz que obtemos de **A**, substituindo a primeira coluna pela matriz dos termos independentes

De fato, usando o desenvolvimento de Laplace, obtemos:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\Delta_{11} + \dots + b_n\Delta_{n1}$$

Ou seja $$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Observe que no denominador temos o determinante da matriz dos coeficientes ($\det \mathbf{A} \neq 0$), e no numerador aparece o determinante da matriz obtida de **A**, substituindo a *i*-ésima coluna pela matriz dos termos independentes.

Exemplo

Dado o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7z = 1 \\ x \qquad\quad + 3z = 5 \\ \qquad 2y - \; z = 0 \end{cases}$$

temos

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

Portanto, podemos usar a Regra de Cramer.

Então:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = -49$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-1} = 9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = 18$$

CÁLCULO DO POSTO DE UMA MATRIZ ATRAVÉS DE DETERMINANTES

Teorema: O posto (característica) de uma matriz **A** (quadrada ou não) é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de **A**, com determinantes diferentes de zero.

Exemplo 1:

Dada a matriz 4×5

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 11 & -15 & 19 & 14 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & -2 \\ 7 & -3 & 25 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

podemos verificar que cada submatriz de ordem 4 (há 5) tem determinante 0. Também o determinante de cada submatriz de ordem 3 (há 40) é zero. Mas

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} = 8 \neq 0.$$

Então, o posto é 2.

Matrizes Elementares

- **Definição:** Uma **matriz elementar** é uma matriz obtida a partir da **identidade**, através da aplicação de uma **operação elementar com linhas**.

- **Teorema:** Se **A** é uma matriz, o resultado da aplicação de uma **operação com as linhas** de **A** é o mesmo que o resultado da **multiplicação** da **matriz elementar E** correspondente à operação com linhas **pela matriz A**.

- **Corolário:** Uma matriz elementar $\mathbf{E_1}$ é **inversível** e **sua inversa** é a matriz elementar $\mathbf{E_2}$, que **corresponde à operação com linhas inversa** da operação efetuada por $\mathbf{E_1}$.
  - **Exemplo:** Se $\mathbf{E_1}$ é a matriz elementar cuja operação consiste em multiplicar uma determinada linha por k, a matriz inversa de $\mathbf{E_1}$ será a matriz elementar $\mathbf{E_2}$ que corresponde à operação de multiplicar a mesma linha por $1/k$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1:

Ao multiplicarmos a primeira linha da matriz por 2, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é exatamente o produto

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

Ao trocarmos a primeira e a segunda linha da matriz **A** obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Este resultado é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

Ao somarmos à primeira linha da matriz **A** a segunda linha multiplicada por 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

que é o mesmo que o produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 4:

Se tomarmos a matriz identidade $\mathbf{I}_3$ e trocarmos a primeira e a terceira linha, obteremos a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se multiplicarmos esta matriz pela matriz **A** do exemplo 1, teremos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

cujo resultado é exatamente a troca da primeira e terceira linha da matriz **A**.

INVERSÃO DE MATRIZES

Teorema: Se **A** é uma matriz inversível, sua matriz-linha reduzida à forma escada, **R**, é a identidade. Além disso, **A** é dada por um produto de matrizes elementares.

Suponhamos que, ao reduzir **A** à forma escada linha reduzida, a matriz identidade seja obtida como resultado. Neste caso, como a cada operação com linhas corresponde uma multiplicação por uma matriz elementar, $\mathbf{E}_i$, temos então:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} \\ &= (\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I})\mathbf{A} \end{aligned}$$

Mas isto quer dizer que

$$\mathbf{E}_k \cdot \mathbf{E}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$$

Teorema: Se uma matriz **A** pode ser reduzida à matriz identidade, por uma seqüência de operações elementares com linhas, então **A** é inversível e a matriz inversa de **A** é obtida a partir da matriz identidade, aplicando-se a mesma seqüência de operações com linhas.

Na prática, operamos simultaneamente com as matrizes **A** e **I**, através de operações elementares, até chegarmos à matriz **I** na posição correspondente à matriz **A**. A matriz obtida no lugar correspondente à matriz **I** será a inversa de **A**.

$$(\mathbf{A} \vdots \mathbf{I}) \longrightarrow (\mathbf{I} \vdots \mathbf{A}^{-1})$$

Exemplo 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como a forma escada não é a identidade, a matriz **A** não tem inversa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 92-94, exercícios 15, 16, 17, 19 e 23.

1ª AP – 10/04/19

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.