Dado um conjunto M, denominamos **conjunto das partes** de M, denotado por $P(M)$, ao conjunto de todos os subconjuntos formados a partir do conjunto M. O conjunto das partes também é chamado **família, conjunto potência** ou ainda **booleano** do conjunto M, sendo representado alternativamente por 2^M (de conjunto potência, sendo apenas uma notação e não o número 2 elevado ao conjunto M) ou ainda $B(M)$ (booleano de M). O conjunto M será chamado de **universal**, **universo** ou **espaço** e será representado por ***1*** (também geralmente denotado por ***U***).

Seja um conjunto finito M de potência $|M|$. Então, o número de elementos de $P(M)$ ($|P(M)|$), pode ser determinado pela soma de todas as combinações de $|M|$ elementos, tomados k a k ($0 \le k \le |M|$), ou seja,

$$\sum_{i=0}^{|M|} |C(|M|, k)| = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} = \sum_{k=0}^{|M|} \binom{|M|}{k} 1^{|M|-k} 1^k = (1+1)^{|M|} = 2^{|M|}$$

Assim, a potência do conjunto das partes de um conjunto finito M será dada por:

$$|P(M)| = 2^{|M|}$$

Podemos observar que $2^{|M|}$ é igual também ao número de listas de tamanho $|M|$ que podem ser formadas a partir de um conjunto de dois elementos (um domínio booleano). Seja L o conjunto formado por estas listas. Então, podemos associar (ou corresponder) a cada elemento de $P(M)$ um único elemento de L e a cada elemento de L um único elemento de $P(M)$. Esta forma de associação (ou correspondência) entre dois conjuntos é chamada de **correspondência biunívoca**.

Exemplo: Seja $\boldsymbol{1} = \{y, x, a\}$. Então, teremos:
$|C(3, 0)| = 1$ subconjunto de tamanho 0: $C(3, 0) = \{\varnothing\}$;
$|C(3, 1)| = 3$ subconjuntos de tamanho 1: $C(3, 1) = \{\{y\}, \{x\}, \{a\}\}$;
$|C(3, 2)| = 3$ subconjuntos de tamanho 2: $C(3, 2) = \{\{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}\}$;
$|C(3, 3)| = 1$ subconjunto de tamanho 3: $C(3, 3) = \{\{y, x, a\}\}$.

Ou seja,
$P(\boldsymbol{1}) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\} \text{ e } \{y, x, a\}\}$. Assim,

$|P(\boldsymbol{1})| = |C(3, 0)| + |C(3, 1)| + |C(3, 2)| + |C(3, 3)| = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^{|\boldsymbol{1}|} = 2^3 = 8$.

A correspondência biunívoca entre $P(\boldsymbol{1})$ e o conjunto de todas as listas de tamanho $|\boldsymbol{1}| = 3$ formadas a partir do conjunto de dois elementos (por exemplo, o conjunto $\{0, 1\}$) é mostrada na Tabela 1.3.1.

Tabela 1.3.1

*P(**1**)*	*Listas*
$\varnothing$	(0, 0, 0)
$\{y\}$	(1, 0, 0)
$\{x\}$	(0, 1, 0)
$\{a\}$	(0, 0, 1)
$\{y, x\}$	(1, 1, 0)
$\{x, a\}$	(0, 1, 1)
$\{y, a\}$	(1, 0, 1)
$\{y, x, a\}$	(1, 1, 1)

O termo booleano de M ($B(M)$) (que aparece apenas em *Gorbátov*, *1988*) para representar o conjunto das partes de M deve-se ao fato de que existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de $P(M)$ e as listas de tamanho $|M|$ que podem ser formadas com um domínio booleano. Esta nomenclatura raramente é utilizada.

Uma das formas de se representar conjuntos é a forma gráfica **chamada de diagramas de *Euler-Venn***. Estes diagramas foram inicialmente introduzidos por *Euler* e posteriormente desenvolvidos pelo matemático inglês *John Venn* (1834 – 1923) no século *XIX*. Nos diagramas de *Euler-Venn*, conjuntos são representados por uma linha circular (círculo de Euler) limitando seus elementos. Uma linha circular que está contida completamente dentro da região interior de outra representa um subconjunto da mesma. O conjunto universo é geralmente representado por um retângulo.

Exemplo: Seja $\mathbf{1} = \{a, b, c, d, e, f\}$ e os conjuntos $M = \{a, b, c, d\}$ e $M' = \{a, b\}$, com $M' \subseteq M$. Então, podemos representar estes conjuntos graficamente utilizando os diagramas de *Euler-Venn*, conforme Fig. 1.3.1. Observa-se que o fato de o círculo que representa o conjunto M' estar "dentro" graficamente do círculo que representa o conjunto M não significa que $M' \in M$, e sim que $M' \subseteq M$. Por outro lado, o fato de que o elemento representado pela letra c estar "dentro" graficamente do círculo que representa o conjunto M não significa que $c \subseteq M$, e sim que $c \in M$.

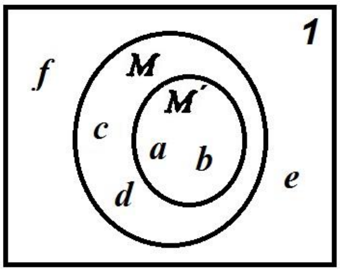

Fig. 1.3.1

Um dos conceitos mais importantes na teoria dos conjuntos é o de produto cartesiano. O conjunto $M = \{(m_i, m_j) \ / \ m_i \in M_a, m_j \in M_b\}$ é denominado **produto cartesiano**, $M_a \times M_b$, dos conjuntos M_a e M_b. O produto cartesiano é o conjunto de todos os pares ordenados, cujo primeiro elemento do par pertence a M_a e o segundo, a M_b. Assim, a potência de um produto cartesiano de dois conjuntos é igual ao produto das potências de cada conjunto, ou seja, $|M_a \times M_b| = |M_a||M_b|$.

Exemplo: Seja $M_a = \{y, x, a\}$ e $M_b = \{1, 2, 3\}$. Então, $M_a \times M_b = \{(y, 1), (y, 2), (y, 3), (x, 1), (x, 2), (x, 3), (a, 1), (a, 2), (a, 3)\}$ e $|M_a \times M_b| = 3 \times 3 = 9$.

Exemplo: Seja $M_a = \{a \ / \ a$ é aluno da Universidade Federal do Ceará (UFC)$\}$ e $M_b = \{c \ / \ c$ é o conjunto de todos os cursos oferecidos pela UFC$\}$. Então, $M_a \times M_b$ representa o conjunto de todos os pares ordenados (a, c) tal que a é aluno da UFC e b é um curso desta universidade. Ou seja, $M_a \times M_b$ representa todas as possibilidades de matrículas de cada aluno da UFC.

Seja F um conjunto de pares ordenados. O conjunto F é chamado de **função** desde que:

$$(x, y_1) \in F \text{ e } (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$$

Ou seja, todo o elemento x está associado (ou faz correspondência) com um único elemento y do par ordenado $(x, y) \in F$. Dizemos que x faz uma **correspondência** (ou **associação**) **unívoca** ou **funcional** com y. O conjunto de todos os elementos x (primeiros elementos dos pares ordenados de F) é chamado de **domínio de definição** da F, $D_d(F)$. O conjunto de todos os elementos y (segundos elementos dos pares ordenados de F) é chamado de **imagem** da F, $I(F)$.

Exemplo: O conjunto de pares ordenados $A = \{(y, 1), (5, \neg), (a, b), (б, \neg)\}$ é uma função cujo com $D_d(F) = \{y, 5, a, б\}$ e $I(F) = \{1, \neg, b\}$. De fato, todo primeiro elemento x está associado com um único y elemento do par ordenado $(x, y) \in A$. Já o conjunto $B = \{(4, 1), (10, 5), (10, 1)\}$ não é uma função, pois $(10, 5) \in B$ e $(10, 1) \in B$ não se configurando em uma correspondência unívoca ou funcional.

Exemplo: O conjunto de pares ordenados $C = \{(x, y) / y = 2x$, com $x, y \in \mathbf{Z}\}$ é uma função com $D_d(C) = \{ x / x \in \mathbf{Z}\}$ e $I(C) = \{ y \in \mathbf{Z} / y = 2x$, com $x, y \in \mathbf{Z} \}$. De fato, sejam dois pares ordenados quaisquer tais que (x, y_1) e $(x, y_2) \in F$. Então, $y_1 = 2x$ e $y_2 = 2x$ e assim, $y_1 = y_2$ (*cqd*).

Exemplo: O conjunto de pares ordenados $D = \{(x, y) / x = |y|$, com $x, y \in \mathbf{Z}\}$ não é uma função, pois, por contra exemplo, os pares ordenados $(2, -2) \in D$ e $(2, 2) \in D$ mas $2 \neq -2$ (*cqd*).

Exemplo: O conjunto de pares ordenados E = {(*Ricardo*, 52 anos), (*Cíntia*, 43 anos), (*Irven*, 43 anos)} que representa as pessoas de uma família com suas respectivas idades é uma função cujo com $D_d(E)$ = {*Ricardo*, *Cíntia*, *Irven*} e $I(E)$ = {52 anos, 43 anos, 8 anos}. De fato, todo primeiro elemento x está associado com um único y elemento do par ordenado $(x, y) \in E$

Exemplo: O conjunto de pares ordenados F = {(*livro*, *libro*), (*livro*, *book*), (*livro*, *livre*), (*livro*, *buch*), (*livro*, *книга*), (*livro*, 書)} que representa a tradução da palavra livro do português para o espanhol, inglês, francês, alemão, russo e chinês não representa uma função, já que a palavra *livro* (em português) forma pares ordenados com suas respectivas traduções em diferentes idiomas.

Seja F um subconjunto de $M_x \times M_y$ (ou seja, $F \subseteq M_x \times M_y$). Então, F é chamado de **função de $M_x \times M_y$** ou mais simplesmente **função de M_x para M_y**, se $\forall(x, y) \in F$, $x \in M_x$ faz uma correspondência (ou associação) unívoca ou funcional com $y \in M_y$, ou seja:

$$(\forall x \in M_x), (\forall y_1 \text{e } \forall y_2 \in M_y), (x, y_1) \in F \text{ e } (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$$

Assim, $\forall x \in M_x$, x está associado (corresponde) à no máximo um $y \in M_y$.

O conjunto M_x é chamado **domínio, origem** ou **conjunto de partida** $D(F)$ da função F e o conjunto M_y, seu **contradomínio, codomínio** ou **conjunto de chegada** $CD(F)$. O domínio e o contradomínio de uma função especificam a que conjuntos x e y pertencem (e não os valores assumidos por x e y).

O conjunto de todos os valores de $x \in M_x$ tal que $(x, y) \in F$ é chamado de **domínio de definição** $D_d(F)$ da função F. O domínio de definição especifica quais elementos x do domínio formam (ou definem) pares ordenados na função F. O domínio de definição de uma função não necessariamente precisa ser igual ao domínio da função, ou seja, $D_d(F) \subseteq D(F) = M_x$.

O conjunto de todos os valores de $y \in M_y$ tal que $(x, y) \in F$ é chamado de **imagem** $I(F)$ da função F. A imagem especifica quais elementos y formam (ou definem) pares ordenados na função F. Assim, $I(F) \subseteq CD(F) = M_y$.

A função F de M_x para M_y será denominada **função total, função completamente definida** (definida em todos os elementos de M_x), **aplicação** ou **mapeamento** de M_x para M_y (denotada por $F: M_x \to M_y$) se $D_d(F) = D(F) = M_x$. Ou seja:

$$(\forall x \in M_x), (\exists y \in M_y) / (x, y) \in F$$

Assim, $\forall x \in M_x$, x está associado (corresponde) à no mínimo e no máximo um $y \in M_y$. Neste caso, costuma-se referir-se ao domínio de definição como simplesmente o domínio da função total.

Se $D_d(F) \neq D(F)$ (ou seja, $D_d(F) \subset D(F) = M_x$), a função será chamada de **função parcial** ou **parcialmente definida**. Ou seja,

$$(\exists x \in M_x)/(\forall y \in M_y), (x, y) \notin F$$

Uma função parcial pode ser transformada em uma função total se seu domínio for redefinido, igualando-o ao seu domínio de definição.

Exemplo: Seja $M_x = \{y, x, a\}$ e $M_y = \{1, 2, 3\}$. Então $A = \{(y, 1), (x, 3)\}$ é uma função de M_x para M_y pois $A \subseteq M_x \times M_y$ e $\forall(x', y') \in A$, $x' \in M_x$ faz uma correspondência unívoca com $y' \in M_y$. Temos que:
- $D(A) = M_x$, $CD(A) = M_y$;
- $D_d(A) = \{y, x\}$, $I(A) = \{1, 3\}$.

Como $D(A) \neq D_d(A)$ então a função A de M_x para M_y é parcial. Para $B = \{(y, 2), (x, 2), (a, 3)\}$, então B é uma função de M_x para M_y pois $B \subseteq M_x \times M_y$ e $\forall(x', y') \in B$, $x' \in M_x$ faz uma correspondência unívoca com $y' \in M_y$. Temos que:
- $D(B) = M_x$, $CD(B) = M_y$;
- $D_d(B) = M_x$, $I(B) = \{2, 3\}$.

Como $D(A) = D_d(A)$ então a função A de M_x para M_y é total (mapeamento de M_x para M_y) e B pode ser representado como:

$$\{(y, 2), (x, 2), (a, 3)\}: \{y, x, a\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

Entretanto, $C = \{(y, 1), (y, 2), (x, 1), (a, 3)\}$ não é função de M_x para M_y pois $(y, 1)$ e $(y, 2) \in C$.

Exemplo: Seja $A = \{(x, \pm\sqrt{4-x^2}) \,/\, x \in \boldsymbol{R}, -2 \leq x \leq 2\}$. Então A não é uma função de $\boldsymbol{R}$ para $\boldsymbol{R}$ já que x forma par ordenado com dois valores: $\pm\sqrt{4-x^2}$. O conjunto A representa uma circunferência de raio 2 no plano geométrico xy, dada por todos os pares ordenados (x, y) tal que $x^2 + y^2 = 2^2$.

Exemplo: Seja $A = \{(x, y) \,/\, y = x^2, x \in \boldsymbol{Z}\}$. Então A é uma função de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$, pois $A \subseteq \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ e para dois pares ordenados quaisquer tais que (x, y_1) e $(x, y_2) \in A$, $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2$ e assim, $y_1 = y_2$ (*cqd*). Temos que:
- $D(A) = \boldsymbol{Z}$, $CD(A) = \boldsymbol{Z}$;
- $D_d(A) = \boldsymbol{Z}$, $I(A) = \{y \in \boldsymbol{Z} \,/\, y = x^2$, com $x \in \boldsymbol{Z}\}$.

Como $D(A) = D_d(A)$ então a função A de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$ é total (mapeamento de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$) e A pode ser representado como:

$$\{(x, y) \,/\, y = x^2, x \in \boldsymbol{Z}\}: \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$$

Exemplo: Seja, com $A = \{(x, \frac{1}{x}) \,/\, x \in \boldsymbol{R}, x \neq 0\}$. Então A é uma função de $\boldsymbol{R}$ para $\boldsymbol{R}$, pois $A \subseteq \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ e para dois pares ordenados quaisquer tais que (x, y_1) e $(x, y_2) \in A$, $y_1 = \frac{1}{x}$ e $y_2 = \frac{1}{x}$ e assim, $y_1 = y_2$ (*cqd*). Temos que:
- $D(A) = \boldsymbol{R}$, $CD(A) = \boldsymbol{R}$;
- $D_d(F) = \boldsymbol{R}^*$ (conjunto dos números reais sem o número 0), $I(A) = \boldsymbol{R}^*$.

Como $D(A) \neq D_d(A)$ então a função A de M_x para M_y é parcial. Entretanto, se fizermos com que $D(A) = \boldsymbol{R}^*$, então $D(A) = D_d(A)$ e assim a função A de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$ passará a ser total (mapeamento de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$) e A pode ser representado como:

$$\{(x, \tfrac{1}{x}) \,/\, x \in \boldsymbol{R}, x \neq 0\}: \boldsymbol{R}^* \rightarrow \boldsymbol{R}^*$$

Exemplo: Seja $A = \{(x, \sqrt{4-x^2}) \,/\, x \in \boldsymbol{R}, -2 \leq x \leq 2\}$. Então A é uma função de $\boldsymbol{R}$ para $\boldsymbol{R}$ já que $A \subseteq \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ e para dois pares ordenados quaisquer tais que (x, y_1) e $(x, y_2) \in A$, $y_1 = \sqrt{4-x^2}$ e $y_2 = \sqrt{4-x^2}$ e assim, $y_1 = y_2$ (*cqd*). O conjunto A representa uma semicircunferência de raio 2 no plano geométrico xy, na parte positiva do eixo y, dada por todos os pares ordenados (x, y) tal que $y = \sqrt{4-x^2}$. Temos que:
- $D(A) = \boldsymbol{R}$, $CD(A) = \boldsymbol{R}$;
- $D_d(A) = \{x \in \boldsymbol{R} \,/\, -2 \leq x \leq 2\}$ e $I(A) = \{y \in \boldsymbol{R} \,/\, 0 \leq y \leq 2\}$.

Como $D(A) \neq D_d(A)$ então a função A de M_x para M_y é parcial. Entretanto, se fizermos com que $D(A) = \{ x \in \boldsymbol{R} \ / \ -2 \leq x \leq 2\}$, então $D(A) = D_d(A)$ e assim a função A de $\boldsymbol{R}$ para $\boldsymbol{R}$ passará a ser total (mapeamento de $\boldsymbol{R}$ para $\boldsymbol{R}$) e A pode ser representado como:

$$\{(x, \sqrt{4-x^2}) \ / \ x \in \boldsymbol{R}, -2 \leq x \leq 2\}: \{ x \in \boldsymbol{R} \ / \ -2 \leq x \leq 2\} \to \boldsymbol{R}$$

Exemplo: Seja U o conjunto de alunos de uma Universidade e D o conjunto de disciplinas cursadas. O conjunto de pares ordenado cujo primeiro elemento é um aluno e o segundo a disciplina cursada, não é uma função de U para D, pois cada aluno pode estar cursando (e certamente estará) mais de uma disciplina na universidade.

Exemplo: Seja $P = \{p \ / \ p$ é cidadão brasileiro$\}$ e $T = \{t \in \boldsymbol{N} \ / \ t =$ número do título de eleitor$\}$. Então, $V = \{(p, t) \ / \ p$ possui título de eleitor$\}$ é uma função de P para $\boldsymbol{N}$ já que $V \subseteq P \times \boldsymbol{N}$, onde cada par ordenado representa um cidadão brasileiro apto a votar, com seu respectivo número do título de eleitor (cada cidadão apto a votar tem um e somente um número de título de eleitor). Esta função apresenta $D(V) = P$, $CD(V) = \boldsymbol{N}$, $D_d(V) = \{p \ / \ p$ possui título de eleitor$\}$ e $I(V) = T$. Como $D(V) \neq D_d(V)$ então a função V de P para $\boldsymbol{N}$ é parcial.

Exemplo: Seja uma turma de alunos em uma universidade U que fizeram a primeira avaliação do semestre, de certa disciplina. Se $A = \{a \in U \ / \ a$ é aluno que fez a primeira avaliação$\}$ e $NP = \{np \in \boldsymbol{R} \ / \ np =$ nota na primeira avaliação$\}$. Então, $F \subseteq A \times \boldsymbol{R}$, com $F = \{(a, np) \ / \ np$ é a nota obtida pelo aluno $a\}$ é uma função total ou aplicação de A para $\boldsymbol{R}$, pois $F \subseteq A \times \boldsymbol{R}$ e para todo elemento de A (aluno que fez a primeira avaliação) a apenas uma única nota. Logo,

$$\{(a, np) \ / \ np \text{ é a nota obtida pelo aluno } a\}: A \to \boldsymbol{R}$$

com $D(F) = D_d(F) = A$, $CD(F) = \boldsymbol{R}$ e $I(F) = \{np \in \boldsymbol{R} \ / \ 0 \leq np \leq 10\}$. Entretanto, se considerarmos A como o conjunto de todos os alunos da universidade ($A = U$), então a função F será uma função parcial de A para $\boldsymbol{R}$, pois existem alunos do conjunto A que não fizeram a avaliação na disciplina.

Exemplo: Seja $\boldsymbol{\Sigma}$ um alfabeto e $\boldsymbol{\Sigma}^*$ o conjunto de todas as palavras possíveis sobre este alfabeto. Então o conjunto de pares ordenados que associa cada palavra com seu respectivo tamanho (número de caracteres da palavra) é uma função total F, pois $F \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^* \times \boldsymbol{N}$ e toda a palavra de $\boldsymbol{\Sigma}^*$ tem um único tamanho, com $D(F) = \boldsymbol{\Sigma}^*$, $CD(F) = \boldsymbol{N}$, $D_d(F) = \boldsymbol{\Sigma}^*$ e $I(F) = \boldsymbol{N}$ (pois os elementos de $\boldsymbol{\Sigma}^*$ podem ter quaisquer tamanhos dentro do conjunto dos números naturais). Logo,

$$\{(p, t) \ / \ p \in \boldsymbol{\Sigma}^* \text{ e } t = \text{tamanho de } p\}: \boldsymbol{\Sigma}^* \to \boldsymbol{N}$$

O conceito de função pode variar de autor para autor e ainda conforme a área da Matemática (ver *Carnielli, 2009*). Em uma abordam mais geral, o termo função (sem menção aos conjuntos de partida e chegada) pode ser definida como um conjunto de pares ordenados (x, y) ou mais simplesmente como um "emparelhamento", no qual cada x está emparelhado apenas uma vez com cada y (ver *Scheinerman, 2006*). Este tipo de emparelhamento é então chamado de associação ou correspondência funcional. Esta abordagem conceitual de função é mais comum na teoria dos conjuntos. O termo "função F de A para B" é frequentemente restrito ao uso como sinônimo de "função total de A para B", como definido aqui, sendo representado por F: $A \to B$. Assim, neste caso, o termo "domínio de uma função" é utilizado como sinônimo de "domínio de definição da função" (ver *Gallian, 2000*; *Gersting, 2001*; *Menezes, 2005, Scheinerman, 2006* e *Rosen, 2010*). Esta é a forma predominante em áreas como Cálculo e Álgebra, onde o domínio de definição assume uma importância maior que o domínio.

Funções parciais são tão (ou até mais importantes) que funções totais em Ciência da Computação. O termo "função parcial de A para B" é usado também como sinônimo de "função de A para B", como definido aqui (ver *Menezes, 2005*). Conforme este uso, toda a função total (ou simplesmente função) é considerada também parcial (o que pode levar a uma ambiguidade entre os termos "total" e "parcial" na nomenclatura). A definição de função parcial adotada aqui evita esta ambiguidade.

Optou-se por uma definição mais genérica de função de A para B (ver *Gorbátov, 1988*), onde funções parciais e funções totais passam a serem tipos mutuamente excludentes (se for total não é parcial e se for parcial, não é total) de uma mesma entidade matemática. O uso da notação $F: A \rightarrow B$ ficará restrito aqui, a funções totais, como geralmente é utilizada. De qualquer forma, isto não impõe dificuldades já que qualquer função parcial pode ser transformada em uma função total desde que seu domínio seja definido como sendo igual ao seu domínio de definição (sendo chamado simplesmente de domínio).

Teorema: *Sejam dois conjuntos finitos X e Y. Então, o número de funções totais $F: X \rightarrow Y$ que podem ser formadas com estes dois conjuntos é dado por $|Y|^{|X|}$.*

Prova:
Seja $X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_{|X|}\}$, com $x_i \neq x_j$ quando $i \neq j$ para $1 \leq i,j \leq |X|$, $i,j \in \boldsymbol{N}^*$. Desta forma, cada elemento de X está identificado por x_i. Seja Y um conjunto finito. Então, qualquer n-ésima função total $F_n: X \rightarrow Y$ pode ser representada como:

$$F_n = \left\{(x_1, y_{k_1}), (x_2, y_{k_2}), \dots., (x_i, y_{k_i}), \dots, \left(x_{|X|}, y_{k_{|X|}}\right)\right\}$$

onde $y_{k_i} \in Y$ é uma variável que representa os elementos de Y que formam par ordenado com um elemento $x_i \in X$. Então, $|F_n| = |X|$, ou seja, existem $|X|$ pares ordenados em cada F_n. Como existem $|Y|$ possibilidades para cada uma das $|X|$ variáveis y_{k_i}, teremos pelo princípio da multiplicação que:

$$\prod_{i=1}^{|X|} |Y| = |Y|^{|X|}$$

Assim, $1 \leq n \leq |Y|^{|X|}$, ou seja, existem $|Y|^{|X|}$ possibilidades de funções totais de X para Y.

Exemplo: Sejam $M_x = \{▲, ▶\}$ e $M_y = \{0, 1\}$. Então o número de funções totais de M_x para M_x que podem ser formadas será $|M_y|^{|M_x|} = 2^2 = 4$. As funções $F_n: M_x \rightarrow M_y$ possíveis são:

$F_1 = \{(▲, 0), (▶, 0)\}: \{▲, ▶\} \rightarrow \{0, 1\}$;
$F_2 = \{(▲, 0), (▶, 1)\}: \{▲, ▶\} \rightarrow \{0, 1\}$;
$F_3 = \{(▲, 1), (▶, 1)\}: \{▲, ▶\} \rightarrow \{0, 1\}$;
$F_4 = \{(▲, 1), (▶, 0)\}: \{▲, ▶\} \rightarrow \{0, 1\}$.

Exemplo: Sejam $M_x = \{a, b, c\}$ e $M_y = \{1, 2, 3, 4\}$. Então o número de funções totais de M_x para M_x que podem ser formadas será $|M_y|^{|M_x|} = 4^3 = 64$

Uma função F de M_x para M_y é chamada de **injetora** (também denominada de **função um para um**), se $\forall(x, y) \in F$, $y \in M_y$ forma um par ordenado com um único $x \in M_x$, ou seja:

$$\left(\forall y \in M_y\right), (\forall x_1 \text{e } \forall x_2 \in M_x), (x_1, y) \in F \text{ e } (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2$$

Dizemos também que $\forall(x, y) \in F$, $y \in M_y$ é correspondente de um único $x \in M_x$ ou ainda que $\forall y \in M_y$, y é correspondente de no máximo um $x \in M_x$.

Uma função F de M_x para M_y é chamada de **sobrejetora**, se o contradomínio for igual à imagem da função ($CD(F) = I(F)$), ou seja:

$$\left(\forall y \in M_y\right), (\exists x \in M_x), (x, y) \in F$$

Em uma função sobrejetora, $\forall y \in M_y$, y é correspondente de no mínimo um $x \in M_x$. Uma função que não é sobrejetora pode ser transformada em uma função sobrejetora se seu contradomínio for redefinido, igualando-o a sua imagem (o que significa redefinir a função). Uma função não necessariamente precisa ser injetora ou sobrejetora.

Se a função F de M_x para M_y for injetora e sobrejetora então é chamada de **bijetora.** Se uma função é total e bijetora então é chamada de **biunívoca** (também chamada de **correspondência biunívoca**). Ou seja, a todo $x \in M_x$ corresponde um e somente um $y \in M_y$ e todo $y \in M_y$ é correspondente de um e somente um $x \in M_x$.

Dizemos que existe uma **correspondência biunívoca entre os conjuntos** M_x e M_y se existe uma função biunívoca F de M_x para M_y. Os conjuntos M_x e M_y são denominados também **equipotentes** (este conceito também é válido se ambos os conjuntos forem infinitos). Se dois conjuntos finitos M_x e M_y são equipotentes, então $|M_x| = |M_y|$.

Exemplo: Seja $M_x = \{y, x, a, b\}$ e $M_y = \{1, 2, 3\}$. Então:
a) $A = \{(y, 2), (x, 3)\}$ é uma função parcial de M_x para M_y injetora, não sobretora, pois:
- (Função) Cada elemento $x´$ de $(x´, y´) \in A$ tem uma correspondência unívoca com $y´ \in M_y$;
- (Parcial) $D_d = \{y, x\} \neq D = M_x$;
- (Injetora) Cada elemento de M_y é imagem de no máximo um elemento de M_x;
- (Não é sobrejetora) $I(A) = \{2, 3\} \neq CD(A) = M_y$.

b) $B = \{(y, 2), (x, 1), (a, 3), (b, 3)\}$ é uma função total M_x para M_y sobrejetora, não injetora, pois:
- (Função) Cada elemento $x´$ de $(x´, y´) \in B$ tem uma correspondência unívoca com $y´ \in M_y$;
- (Total) $D_d = \{y, x, a, b\} = D = M_x$
- (Sobrejetora) $I(B) = \{1, 2, 3\} = CD(B) = M_y$;
- (Não injetora) $(a, 3)$ e $(b, 3) \in B$.

c) $C = \{(y, 3), (x, 1), (a, 2)\}$ é uma função parcial M_x para M_y bijetora, pois:
- (Função) Cada elemento $x´$ de $(x´, y´) \in C$ tem uma correspondência unívoca com $y´ \in M_y$;
- (Parcial) $D_d = \{y, x, \mathrm{a}\} \neq D = M_x$;
- (Injetora) Cada elemento de M_y é imagem de no máximo um elemento de M_x;
- (Sobrejetora) $I(C) = \{1, 2, 3\} = CD(C) = M_y$.

d) $D = \{(y, 3), (x, 1), (a, 1)\}$ é uma função parcial M_x para M_y que não é nem sobrejetora e nem injetora, pois:
- (Função) Cada elemento $x´$ de $(x´, y´) \in D$ tem uma correspondência unívoca com $y´ \in M_y$;
- (Parcial) $D_d = \{y, x, \mathrm{a}\} \neq D = M_x$;
- (Não é injetora) $(x, 1)$ e $(a, 1) \in D$;
- (Não é sobrejetora) $I(D) = \{1, 3\} \neq CD(D) = M_y$.

Exemplo: $F = \{(z, 3z + 4) / z \in \boldsymbol{Z}\}$ é uma função total de $\boldsymbol{Z}$ para $\boldsymbol{Z}$ (ou seja, F: $\boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{Z}$), injetora e não sobrejetora, pois:
- (Função) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $(z´, z_1)$ e $(z´, z_2) \in F$. Então $z_1 = 3z´ + 4$ e $z_2 = 3z´ + 4$ e assim, $z_1 = z_2$;
- (Total) $D_d = \boldsymbol{Z} = D = \boldsymbol{Z}$);
- (Injetora) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $(z_1, z´)$ e $(z_2, z´) \in F$. Como $z´ = 3z_1 + 4y_1$ e também $z´ = 3z_2 + 4$, então, $3z_1 + 4 = 3z_2 + 4 \Leftrightarrow 3z_1 = 3z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$;
- (Não é sobrejetora) $I(F) = \{3z + 4 / z \in \boldsymbol{Z}\ \} \neq CD(F) = \boldsymbol{Z}$. De fato, seja $3x + 4 = 2$. Então, $3x = 2 - 4 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Z}$. Logo, $(x, 2) \notin F \Rightarrow 2 \notin I(F)$, mas $2 \in CD(F) = \boldsymbol{Z}$.

Exemplo: Seja F a função $\{(x, \frac{1}{x}) / x \in \boldsymbol{R}^*\}$: $\boldsymbol{R}^* \rightarrow \boldsymbol{R}$. A função F não é sobrejetora, pois $0 \notin I(\mathrm{F})$ mas $0 \in CD(F) = \boldsymbol{R}$ e assim, $I(\mathrm{F}) \neq CD(F)$. A função F é injetora, pois dados dois pares ordenados quaisquer tais que $(x_1, x´)$ e $(x_2, x´) \in F$, então $x´ = \frac{1}{x_1}$ e também $x´ = \frac{1}{x_2}$. Assim, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (injetora).

Exemplo: A aplicação F de $\boldsymbol{R}'$ = {$x \in \boldsymbol{R}$ / -2 ≤ x ≤ 2} em $\boldsymbol{R}$ com $F = \{(x, \sqrt{4-x^2}) \ / \ x \in \boldsymbol{R}'\}$ não é sobrejetora, pois $I(F) = \{\sqrt{4-x^2} \ / \ x \in \boldsymbol{R}'\} = [0, 2] \neq CD(F) = \boldsymbol{R}$. Também não é injetora. De fato, sejam dois pares ordenados quaisquer tais que (r'_1, r) e $(r'_2, r) \in F$. Logo, $r = \sqrt{4 - {r'_1}^2}$ e também $r = \sqrt{4 - {r'_2}^2}$. Assim,

$$\sqrt{4 - {r'_1}^2} = \sqrt{4 - {r'_2}^2} \Leftrightarrow 4 - {r'_1}^2 = 4 - {r'_2}^2 \Leftrightarrow 4 - {r'_1}^2 = 4 - {r'_2}^2 \Leftrightarrow {r'_1}^2 = {r'_2}^2$$

$$\Leftrightarrow {r'_1}^2 - {r'_2}^2 = 0 \Leftrightarrow (r'_1 + r'_2)(r'_1 - r'_2) = 0 \Rightarrow r'_1 = r'_2 \text{ ou } r'_1 = -r'_2$$

Este resultado não satisfaz a condição de função injetora (teríamos que ter sempre $r'_1 = r'_2$).

Exemplo: Seja $M_x = \boldsymbol{N}$ e M_y = {0, 2, 4, 6, 8,...}. Existe uma correspondência biunívoca entre M_x (conjunto dos naturais) e M_y (conjunto dos pares) por meio da função $F = \{(n, 2n) \ / \ n \in \boldsymbol{N}\}$ de M_x para M_y. O conjunto dos naturais e o conjunto dos pares são equipotentes. De fato, F é total, pois $D_d = D = M_x$. A função F é sobrejetora, pois $I(F) = \{2n \ / \ n \in \boldsymbol{N}\} = M_y$. Também é injetora, pois dados dois pares ordenados quaisquer tais que (n_1, n') e $(n_2, n') \in F$, então $n' = 2n_1$ e $n' = 2n_2$. Logo, $2n_1 = 2n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Consequentemente é total e bijetora.

Exemplo: Seja $M_x = \boldsymbol{N}$ e M_y = {1, 3, 5, 7, 9,...}. Existe uma correspondência biunívoca entre M_x (conjunto dos naturais) e M_y (conjunto dos ímpares) por meio da função $F = \{(n, 2n + 1) \ / \ n \in \boldsymbol{N}\}$. O conjunto dos naturais e o conjunto dos ímpares são equipotentes. De fato, F é total, pois $D_d = D = M_x$. A função F é sobrejetora, pois $I(F) = \{2n + 1 \ / \ n \in \boldsymbol{N}\} = M_y$. Também é injetora, pois dados dois pares ordenados quaisquer tais que (n_1, n') e $(n_2, n') \in F$, então $n' = 2n_1 + 1$ e $n' = 2n_2 + 1$. Logo, $2n_1 + 1 = 2n_2 + 1 \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Consequentemente é total e bijetora e assim, biunívoca.

Exemplo: Seja $M_x = \boldsymbol{C}$ (conjunto dos números complexos) e $M_y = \boldsymbol{R}^2$ (conjunto dos pares ordenado de um plano). Então M_x e M_y são equipotentes, pois existe uma correspondência biunívoca entre M_x e M_y por meio da função $F = \{(a + b\boldsymbol{i}, (a, b)) \ / \ a, b \in \boldsymbol{R}\}$ de M_x para M_y. O conjunto dos números complexos e o conjunto $\boldsymbol{R}^2$ são equipotentes. De fato, F é total, pois $D_d = D = M_x$. A função F é sobrejetora, pois $I(F) = \{(a, b) \ / \ a, b \in \boldsymbol{R}\} = M_y$. Também é injetora, pois dados dois pares ordenados quaisquer tais que $(a_1 + b_1\boldsymbol{i}, (a', b'))$ e $(a_2 + b_2\boldsymbol{i}, (a', b')) \in F$, então $a' = a_1$ e $a' = a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$. Também temos que $b' = b_1$ e $b' = b_2 \Rightarrow b_1 = b_2$. Assim, $a_1 + b_1\boldsymbol{i} = a_2 + b_2\boldsymbol{i}$. Consequentemente é total e bijetora e assim, biunívoca.

Exemplo: Sejam H o conjunto de todos os cidadãos brasileiros (domínio), C o conjunto de todos os CPF´s cadastrados (contradomínio) e F uma função de H para C, que associa cada pessoa a seu CPF. Esta função não é total, pois nem todos os cidadãos tem CPF (por exemplo, as crianças). Também é injetora, pois duas pessoas não podem ter o mesmo número de CPF. Entretanto, é sobrejetora, pois cada CPF´s correspondente a um único cidadão brasileiro. Se o contradomínio for $\boldsymbol{N}$, então esta função não será sobrejetora, pois o conjunto C é finito (o conjunto de CPF´s é finito pois a população brasileira é finita) enquanto que $\boldsymbol{N}$ é infinito.

Exemplo: Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os brasileiros que possuem título de leitor e o conjunto formado pelos títulos de eleitor, pois para cada pessoa existe um e somente um número de título de eleitor e para cada título existe uma e somente uma pessoa.

Em matemática, o termo **cardinalidade** de um conjunto, está associado à noção de números de elementos deste conjunto. Dois conjuntos tem a mesma cardinalidade se existe uma correspondência biunívoca entre eles. Desta forma, a cardinalidade de um conjunto finito M pode ser definida como seu número de elementos ($|M|$), sendo sempre um número natural ($|M| \in$

N). Entretanto, para conjuntos infinitos, esta definição não faria sentido já que não existe um número natural que caracterize o número de elementos de M ($\nexists |M| \in \boldsymbol{N}$).

A cardinalidade de um conjunto M pode ser avaliada, de forma mais geral, por meio da existência de uma correspondência ou associação entre os elementos de M com os elementos do conjunto dos números naturais ***N***.

Um conjunto M (finito ou infinito) é dito **contável** se existe uma função total e injetora F: $M \to \boldsymbol{N}$; ou, alternativamente, se existe uma função total e bijetora F: $M \to N'$, com $N' \subseteq \boldsymbol{N}$. Caso contrário, o conjunto M é dito **não contável** (ou **incontável**). Estes termos foram criados por *Georg Cantor*.

Se M for finito, então $M = \{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_{|M|}\}$ de forma que podemos definir uma função total e injetora F: $M \to N$, como

$$F = \{(x_i, i) \mid 1 \le i \le |M|, \text{ com } i \in \boldsymbol{N}\},$$

tal que a imagem $I(F) = \{1, 2,..., |M|\} \subseteq \boldsymbol{N}$ é finita. Assim, a cardinalidade é definida como sendo igual a $|I(F)| = |M|$, ou seja, a potência (ou o número de elementos) de M. Logo, todo o conjunto finito M é contável (chamado também de **finitamente contável)** e apresenta cardinalidade igual a $|M|$.

Exemplo: Seja $M = \{a, b, c, d\}$. Então M é um conjunto contável, pois existe uma função total e injetora F: $M \to \boldsymbol{N}$, como por exemplo, $F = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$. A cardinalidade de M é igual a $|M| = 4$. Existe uma correspondência biunívoca entre o M e $N' = \{0, 1, 2, 3\} \subseteq \boldsymbol{N}$.

Se M for um conjunto infinito e existir uma correspondência biunívoca entre M e ***N*** (ou seja, existe uma função total e bijetora F: $M \to \boldsymbol{N}$), então M é um conjunto contável comumente denominado **enumerável** ou **infinitamente contável**. Assim, M e ***N*** são equipotentes. Como M e ***N*** são conjuntos infinitos, então a correspondência biunívoca entre eles permite-nos dizer que são infinitos equipotentes ou, de forma pouco formal, que são infinitos com a mesma "quantidade" de elementos. O conceito de cardinalidade possibilita então, a comparação entre conjuntos infinitos.

Utiliza-se a primeira letra do alfabeto hebraico $\aleph$ ("*alef*") seguida do número zero subscrito, ou seja, $\aleph_0$ ("*alef zero*") para indicar a cardinalidade de ***N***. Assim, um conjunto que é enumerável apresenta cardinalidade igual a $\aleph_0$. Se um conjunto infinito M não for enumerável, então é denominado **não enumerável** (não existe uma correspondência biunívoca entre M e ***N***).

Exemplo: O conjunto ***N**** (o conjunto dos números naturais sem o número zero) tem cardinalidade igual a $\aleph_0$. De fato, podemos determinar uma função biunívoca F: $\boldsymbol{N^*} \to \boldsymbol{N}$ tal que:

$$F = \{(n, n - 1) \mid n \in \boldsymbol{N^*}\}$$

Exemplo: A cardinalidade do conjunto dos números pares e dos números ímpares é $\aleph_0$, pois em ambos existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pares e dos ímpares com o conjunto dos números naturais.

Exemplo: O conjunto ***Z*** é enumerável. De fato, podemos determinar uma função biunívoca F: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}$ tal que:

$$F = \{(x, y) \mid x = z \text{ e } y = 2z \text{ se } z \ge 0 \text{ e } y = -2z\text{-}1 \text{ se } z < 0, \text{ com } z \in \boldsymbol{Z}\}$$

Assim, os números inteiros positivos e o número zero estão em correspondência biunívoca com os números naturais pares. Por outro lado, os inteiros negativos estão em correspondência biunívoca com os números naturais ímpares. Consequentemente o conjunto ***Z*** está em correspondência biunívoca com ***N*** e a cardinalidade de ***Z*** é igual a $\aleph_0$.

Seja uma função injetora F de M_x para M_y, com $x \in M_x$ e $y \in M_y$. Chamamos **função inversa** F^{-1} de M_y para M_x da função F o subconjunto $F^{-1} \subseteq M_y \times M_x$ tal que $F^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in F\}$. Ou seja, a função inversa de uma função injetora é obtida pela troca de posição dos elementos do par ordenado ("x por y" e "y por x"). A função F^{-1} é uma função de M_y para M_x.

Salienta-se que a exigência da injeção se deve ao fato de que, se existir algum elemento $y \in M_y$ que seja imagem de mais de um elemento do domínio de definição da função F (a função não é injetora), ou seja, (x_1, y) e $(x_2, y) \in F$ então, quando trocarmos de lugar os elementos dos pares ordenados, obtendo o conjunto F', os pares ordenados $(y, x_1,)$ e $(y, x_2,)$ pertencerão F'. Assim, F' não será uma função.

Para que a inversa de uma função injetora seja total, ela deve ser bijetora. Em particular, se a função for biunívoca (total e bijetora), sua inversa também será.

Exemplo: Seja $M_x = \{y, x, a, b\}$ e $M_y = \{1, 2, 3, 4\}$. Então a função inversa da função injetora $A = \{(y, 2), (x, 3), (a, 4)\}$ de M_x para M_y é $A^{-1} = \{(2, y), (3, x), (4, a)\}$ de M_y para M_x. Agora, seja a função não injetora $B = \{(y, 2), (x, 3), (a, 3)\}$ de M_x para M_y. Então, o conjunto de pares ordenados $B' = \{(2, y), (3, x), (3, a)\}$ não é uma função de M_y para M_x, pois os pares ordenados $(3, x)$ e $(3, a)$ pertencem a B'.

Exemplo: Seja $M_x = \boldsymbol{N}$, $M_y = \{0, 2, 4, 6, 8,...\}$. A função $F = \{(n, 2n) / n \in \boldsymbol{N}\}$ de M_x para M_y tem como inversa $F^{-1} = \{(2n, n) / n \in \boldsymbol{N}\}$ de M_y para M_x.

Seja F uma função de M_x para M_y com $x \in M_x$ e $y \in M_y$. Frequentemente se utiliza, ao invés de $(x, y) \in F$, a notação $y = F(x)$. Esta notação é definida sempre que existe um par ordenado $(x, y) \in F$ / $y = F(x)$, ou seja, $(x, F(x)) \in F$. Assim, dizemos que y é uma função de x e escrevemos $y = F(x)$, pois existe uma correspondência funcional entre x e y. A notação simbólica $y = F(x)$ indica que é necessário aplicar certas "regras" (ou operações) a $x \in M_x$, definidas pela expressão $F(x)$, para obter o valor correspondente de $y \in M_y$. Deste ponto de vista, uma função é vista não só como um emparelhamento entre x e y, mas como uma regra que associa a entrada x um único valor de saída y. Nesta notação, x (primeiro elemento do par ordenado) é chamado de **argumento** ou **variáve**l e y (segundo elemento do par ordenado) de **valor da função** em x. A função F de M_x para M_y, $y = F(x)$ é denominada **função de uma variável** (um argumento x). Se F de M_x para M_y, $y = F(x)$ for uma aplicação (função total), então a função pode ser representada como:

$$\begin{aligned} F&:M_x \to M_y \\ x &\longmapsto F(x) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} F&:M_x \to M_y \\ x &\longmapsto y = F(x) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad F: M_x \to M_y, y = F(x)$$

onde $F(x)$ é a "regra" que associa x com y. A notação "$\longmapsto$" significa que para cada x a um único correspondente y dado por $y = F(x)$. Se F for injetora, a função inversa F^{-1} de M_y para M_x, com $x \in M_x$ e $y \in M_y$ será representada na notação "$y = F(x)$" por $x = F^{-1}(y)$. Consequentemente, $F^{-1}(F(x)) = F^{-1}(y) = x$. No caso de F bijetora, então a inversa também será uma função total e assim:

$$\begin{aligned} F^{-1}&:M_y \to M_x \\ y &\longmapsto F^{-1}(y) \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} F^{-1}&:M_y \to M_x \\ y &\longmapsto x = F^{-1}(y) \end{aligned} \quad \text{ou} \quad F^{-1}: M_y \to M_x, x = F^{-1}(y)$$

Exemplo: A aplicação F de $\boldsymbol{R}' = \{x \in \boldsymbol{R} / -2 \leq x \leq 2\}$ em $\boldsymbol{R}$ com $F = \{(x, \sqrt{4 - x^2}) / x \in \boldsymbol{R}'\}$ pode ser representada nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} F&: R' \to \boldsymbol{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{4 - x^2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F&: R' \to \boldsymbol{R} \\ x &\longmapsto F(x) = \sqrt{4 - x^2} \end{aligned} \qquad F: R' \to \boldsymbol{R}, F(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Como F não é injetora, não admite inversa.

Exemplo: A aplicação biunívoca F de $\boldsymbol{N}$ em P (conjunto dos pares), com $F = \{(n, 2n) / n \in \boldsymbol{N}\}$, pode ser representada nas seguintes formas:

$$F: \boldsymbol{N} \to P \quad , \quad F: \boldsymbol{N} \to P \quad \text{ou} \quad F: \boldsymbol{N} \to P, F(n) = 2n$$
$$n \longmapsto 2n \qquad n \longmapsto F(n) = 2n$$

Logo, sua inversa será uma aplicação biunívoca F^{-1} de $\boldsymbol{P}$ em $\boldsymbol{N}$, com $F = \{(2n, n) / n \in \boldsymbol{N}\} = \{(n, n/2) / n \in \boldsymbol{P}\}$, podendo ser representada da seguinte forma:

$$F^{-1}: P \to \boldsymbol{N} \quad , \quad F^{-1}: P \to \boldsymbol{N} \quad \text{ou} \quad F^{-1}: \boldsymbol{N} \to P, F^{-1}(n) = n/2$$
$$n \longmapsto n/2 \qquad n \longmapsto F^{-1}(n/2)$$

O produto cartesiano de dois conjuntos pode ser representado como uma grade retangular, cujos nodos (representados por circunferências) correspondem, de forma biunívoca, a cada um dos elementos do produto cartesiano. Nesta representação, um subconjunto F do produto cartesiano é associado a nodos preenchidos.

Exemplo: Sejam os conjuntos $M_x = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $M_y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. O produto cartesiano $M_x \times M_y$ é representado pela grade (Fig. 1.3.2), onde o subconjunto $F \subseteq M_x \times M_y$ (representado por nodos preenchidos com "×") em (a) não é uma função: $F = \{(x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_2, y_4), (x_3, y_1)\}$; em (b) é uma função totalmente definida: $F = \{(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_4)\}$; e em (c) F é uma função parcialmente definida: $F = \{(x_1, y_2), (x_2, y_4)\}$.

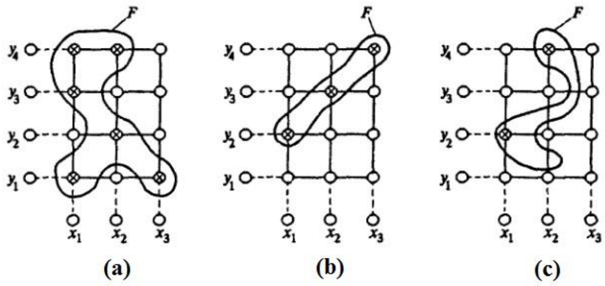

Fig. 1.3.2 (Fonte: Горбатов, В. А.)

Uma função F de M_x para M_y também pode ser representada também utilizando-se um diagrama do tipo *Euler-Venn*, onde o argumento x e a sua respectiva imagem y, com $(x, y) \in F$ são ligados por uma seta, com origem no domínio e destino no contradomínio. O domínio e o contradomínio são representados por círculos de *Euler*.

Exemplo: Representação (Fig. 1.3.3) de diferentes funções $y = F(\mathrm{x})$ com domínio M_x e contradomínio M_y por meio de diagramas de *Euler-Venn*.

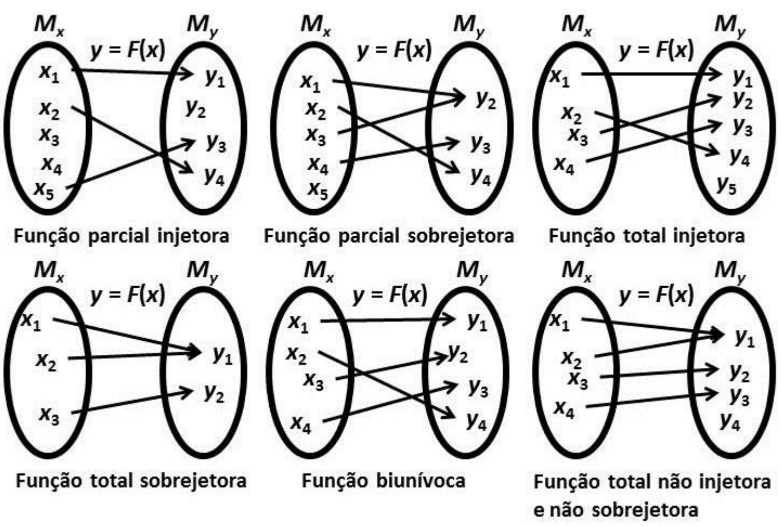

Fig. 1.3.3

Exemplo: Representação (Fig. 1.3.4) de um subconjunto de pares ordenados (x, y) de $M_x \times M_y$ que não é função, por meio de diagramas de *Euler*-*Venn*.

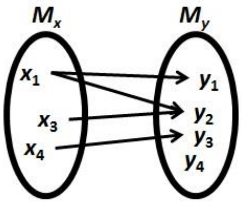

Fig. 1.3.4

Exemplo: Representação (Fig. 1.3.5), por meio de diagramas de *Euler*-*Venn*, de (a) uma função e sua inversa e de (b) uma função que não apresenta inversa.

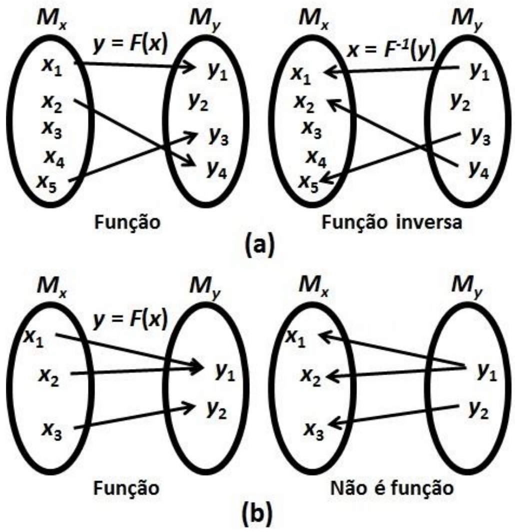

Fig. 1.3.5

Por analogia com o conceito de produto cartesiano de dois conjuntos, podemos definir o produto cartesiano de n conjuntos. Chama-se produto cartesiano,

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \prod_{i=1}^{n} M_i \ \ , n \in N^*$$

dos conjuntos M_1, M_2,...,M_n ao conjunto

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_n})/m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \ldots, m_{i_n} \in M_n, \text{com } i \text{ e } n \in N^*\}$$

Assim, os elementos do produto cartesiano M são listas de tamanho n, formadas a partir dos conjuntos M_1, M_2,...,M_n. Em particular, se os conjuntos M_i são iguais a M, denotamos o produto cartesiano por M^n.

Exemplo: Seja $M_a = \{y, x\}$, $M_b = \{1, 2\}$ e $M_c = \{a, b\}$. Então, $M_a \times M_b \times M_c = \{(y, 1,a), (y, 2, a), (y, 1,b), (y, 2, b), (x, 1,a), (x, 2, a), (x, 1,b), (x, 2, b)\}$. $|M_a \times M_b \times M_c| = |M_a| \times |M_b| \times |M_c| = 2 \times 2 \times 2 = 8$

Exemplo: Seja $\boldsymbol{R}$ o conjunto dos números reais. Então $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2$ que representa o plano numérico. Já $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3$ representa o espaço numérico.

O produto cartesiano de n conjuntos permite generalizar o conceito de funções de uma variável para funções de várias variáveis. Sejam os conjuntos $M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}, M_y$ e $M_x = M_{x_1} \times M_{x_2} \times \ldots \times M_{x_n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in M_{x_i}\}$. O subconjunto $F \subseteq$

$M_x \times M_y$ é chamado de **função de *n* variáveis** de M_x para M_y, se $\forall((x_1, x_{1, \dots,}\, x_n), y) \in F$, $(x_1, x_{1, \dots,}\, x_n) \in M_x$ forma um par ordenado com um único $y \in M_y$ (faz **correspondência unívoca** ou **funcional**), ou seja:

$$\forall (x_1, x_2 \dots x_n) \in M_x, \forall y_1 \text{e } \forall y_2 \in M_y, \big((x_1, x_2 \dots x_n), y_1\big) \in F \text{ e } \big((x_1, x_2 \dots x_n), y_2\big) \in F \Rightarrow y_1 = y_2$$

Assim, o domínio $D(F)$ da função F é $M_x = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)/x_i \in M_{x_i}\}$; o domínio de definição $D_d(F) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M_x \;/\; \big((x_1, x_2 \dots x_n), y\big) \in F\}$; o contradomínio $CD(F) = M_y$ e a imagem $I(F) = \{y \in M_y \;/\; \big((x_1, x_2 \dots x_n), y\big) \in F\}$. Desta forma, temos a função $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com n argumentos e $y \in M_y$.

Os conceitos de função total (aplicação ou mapeamento), parcial, injetora, sobrejetora, bijetora e biunívoca para função de uma variável são aplicados da mesma forma para funções com mais de uma variável. Assim, temos uma generalização destes conceitos para funções de n variáveis.

O domínio de cada argumento x_i será M_{x_i}. O número de argumentos de uma função F determina sua **aridade**. Uma função com apenas um argumento, $y = F(x)$, é chamada de **unária** sendo representada por (x, y). Uma função $y = F(x_1, x_2)$ é chamada **binária** sendo representada por $((x_1, x_2), y)$ e ternária se $y = F(x_1, x_2, x_3)$, sendo representada por $((x_1, x_2, x_3), y)$. De uma forma geral, uma função $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é chamada ***n*-ária** sendo representada por $((x_1, x_2, \dots, x_n), y)$. Para $n = 1$, a função é chamada de **função de uma variável**. Para $n > 1$, a função é comumente chamada de **função de diversas (ou várias) variáveis**. A Fig. 1.3.6 mostra a representação geral, por meio de diagramas de *Euler-Venn*, de uma função de diversas variáveis.

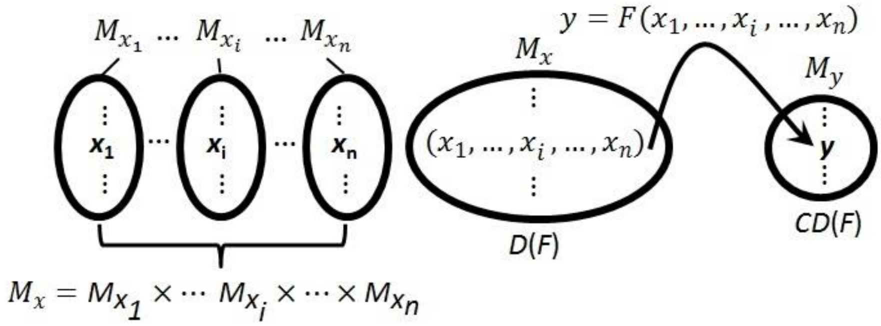

Fig. 1.3.6

Se a função n-ária $y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de M_x para M_y for total, então pode ser representada como:

$$\begin{array}{lccc} F: & M_x & \rightarrow & M_y \\ & (x_1, x_2 \dots x_n) & \longmapsto & F(x_1, x_2 \dots x_n) \end{array}, \quad \begin{array}{lccc} F: & M_x & \rightarrow & M_y \\ & (x_1, x_2 \dots x_n) & \longmapsto & y = F(x_1, x_2 \dots x_n) \end{array} \quad \text{ou}$$

$$F: M_x \rightarrow M_y, y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$$

Exemplo: Sejam $M_a = \{y, x\}$, $M_b = \{1, 2\}$, $M_x = M_a \times M_b = \{(y, 1), (y, 2), (x, 1), (x, 2)\}$ e $M_y = \{a, b\}$. A função $y = F(x_1, x_2)$, com $(x_1, x_2) \in M_x$ e $y \in M_y$ tal que $F = \{((y, 1), a), ((y, 2), b), ((x, 1), b)\}$ tem aridade 2 (Fig. 1.3.7). Esta função é parcial, sobrejetora, mas não injetora, com $D(F) = M_x$, $D_d(F) = \{(y, 1), (y, 2), (x, 1)$, e $I(F) = CD(F) = M_y$ e $I(F) = \{a, b\}$.

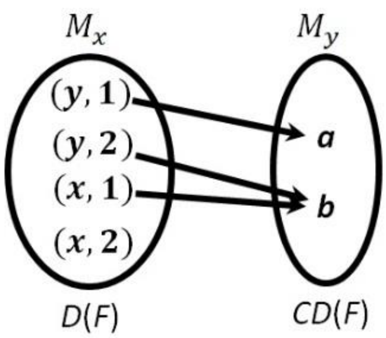

Fig. 1.3.7

Exemplo: Seja $A \subseteq \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$, com $A = \{((x, y), z)$ / x, y, z $\in \boldsymbol{R}$, $x^2 + y^2 \leq 2^2$ e $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$. Então A não é uma função já que (x, y) forma par ordenado com dois valores de z (positivo e negativo). O conjunto A representa uma casca esférica de raio 2 no espaço geométrico xyz, dada por todos as ternas ordenadas (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$.

Exemplo: Seja $F \subseteq \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$, com $F = \{((x, y), z) / x, y, z \in \boldsymbol{R}, x^2 + y^2 \leq 2^2$ e $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$. Então F é uma função parcial binária de $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}$, não sobrejetora e não injetora, pois:
Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $((x, y), z_1)$ e $((x, y), z_2) \in F$. Então $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $z_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e assim, $z_1 = z_2$ (função);
$D_d = \{(x, y) / x, y \in \boldsymbol{R}, x^2 + y^2 \leq 2^2\} \neq D = \boldsymbol{R}^2$ (parcial);
Não é sobrejetora, pois $I(F) = \{ z \in \boldsymbol{R} / 0 \leq z \leq 2\} = [0, 2] \neq CD(F) = \boldsymbol{R}$;
Não injetora. De fato, seja $(x_1, y_1) \in D_d$. Então, $(-x_1, -y_1) \in D_d$ pois $x_1^2 + y_1^2 = (-x_1)^2 + (-y_1)^2$. Agora, sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $((x_1, y_1), z_1)$ e $((-x_1, -y_1), z_2) \in F$. Logo, $z_1 = \sqrt{4 - x_1^2 - y_1^2}$ e $z_2 = \sqrt{4 - (-x_1)^2 - (-y_1)^2} = \sqrt{4 - x_1^2 - y_1^2}$. Assim, $z_1 = z_2 = z$. Ou seja, um mesmo elemento $z \in I(F)$ é correspondente de dois elementos (x_1, y_1) e $(-x_1, -y_1) \in D_f(F)$.

Esta função representa uma semiesfera no espaço xyz, com z positivo. Se $D(A) = D_d(A) = \boldsymbol{R}'^2 = \{(x, y) / x, y \in \boldsymbol{R}, x^2 + y^2 \leq 2^2\}$, então A passa a ser uma função total (uma aplicação) de $\boldsymbol{R}'^2$ para $\boldsymbol{R}$, podendo ser representada por:

$$\begin{aligned} A\colon\ & \mathbf{R}'^2 \to \mathbf{R} \\ & (x, y) \mapsto z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Dizemos que uma função n-ária $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ é **fechada em um conjunto *M*** (apresenta a **propriedade de fechamento em *M***) se o domínio dos argumentos (M_{x_n}) e o contradomínio (M_y) da função F são iguais, ou seja, $M_{x_1}, M_{x_2}, \dots, M_{x_n} = M_y = M$. Assim, uma função possui a propriedade de fechamento se seu domínio for M^n e o seu contradomínio for M (Fig. 1.3.8), ou seja, F de M^n para $M, y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$

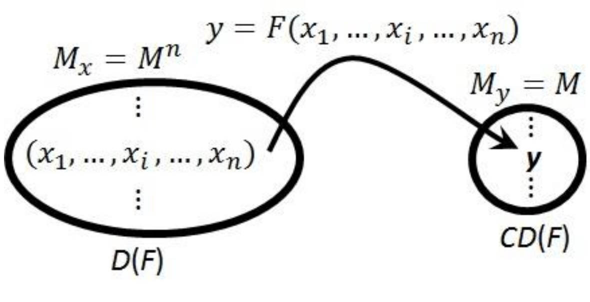

Fig. 1.3.8

Uma função n-ária $y = F(x_1, x_2,...,x_n)$ fechada em M é também chamada de **operação n-ária** O_n, em M. Assim uma operação com elementos (argumentos) pertencente a um conjunto M resulta em um elemento (imagem) também pertencente a M:

$$\forall(x_1, x_2 \dots x_n) \in M^n, \forall y_1 \mathrm{e} \forall y_2 \in M, \big((x_1, x_2 \dots x_n), y_1\big) \in O_n \text{ e } \big((x_1, x_2 \dots x_n), y_1\big) \in O_n \Rightarrow y_1 = y_2$$

O índice n pode ser omitido quando a aridade da operação é conhecida.

Se O_n em M for uma função total (o domínio e o domínio de definição são iguais a M^n), então O_n é denominada **operação total** ou totalmente definida em M, ou seja:

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M^n,\ \ y = O_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$$

Uma operação total será representada pela notação f_n, onde o índice n pode ser omitido quando a aridade é conhecida. Se O_n em M for uma função parcial (o domínio e o domínio de definição não são iguais), então O_n é denominada **operação parcial** ou parcialmente definida em M.

A definição de operação pode variar conforme a importância que funções parciais e totais tem nesta definição. Por exemplo, *Gallian (1994)* e *Gersting (2001)* definem operação binária em M (um caso particular de operação com aridade igual a 2) como uma função total que assinala a cada par (x_1, x_2) de elementos de M^2, um elemento de y de M (ou seja é fechada). Em *Scheinerman (2006)*, uma operação binária em M é definida como uma função total cujo domínio contém M^2 (é um par de elementos de M), podendo ou não ter a propriedade de fechamento em M. Já em *Menezes (2005)*, o termo operação é utilizado de forma mais genérica como sinônimo de função (total ou parcial) sem apresentar necessariamente a propriedade de fechamento. Neste contexto, uma operação é chamada de **interna** a um conjunto M quanto seu domínio for igual a M^n e o seu contradomínio for igual a M (interna é utilizada como sinônimo de fechada); e a operação será **fechada** se a função for total (fechada é utilizada como sinônimo de total). Por definição, o conceito de operação n-ária adotado aqui, implica que é uma função (total ou parcial) com a propriedade do fechamento em M (ver *Gorbátov*, *1988*).

Exemplo: Sejam $M_a = \{a, b, c\}$. A função F de M_a em M_a tal que $F = \{(a, b), (b, c)\}$ tem aridade 1 e apresenta a propriedade de fechamento, pois o domínio dos argumentos M_a é igual ao contradomínio. Assim, F é uma operação binária O_2 em M_a. Entretanto, F é uma operação parcial, pois $D(F) = M_a \neq D_d(F) = \{a, b\}$.

Exemplo: A função unária $y = F(x)$, com $y, x \in \boldsymbol{R}$ tal que $y = x^2$ apresenta a propriedade de fechamento, pois o domínio e o contradomínio são iguais a $\boldsymbol{R}$. Assim, F é uma operação unária O_1 em $\boldsymbol{R}$. Além disto, $D(F) = D_d(F)$ Assim é uma operação total, ou seja, f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x^2$

Exemplo: A função unária $y = F(x)$, com $y, x \in \boldsymbol{R}$ tal que $y = \sqrt[2]{x}$ apresenta a propriedade de fechamento, pois o domínio e o contradomínio são iguais a $\boldsymbol{R}$. Assim, F é uma operação unária O_1 em $\boldsymbol{R}$. Entretanto, F não é uma operação total, pois o $D_d(F) = \{x \in \boldsymbol{R} \mid x \geq 0\} \neq D(F) = \boldsymbol{R}$.

Exemplo: Sejam $M_a = \{1, 2\}$ e $M_x = M_a \times M_a = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. A função de $y = F(x_1, x_2)$, com $(x_1, x_2) \in M_x$ e $y \in M_y$ tal que $F = \{((1, 1), 1), ((1, 2), 1), ((2, 2),2)\}$ com aridade 2 apresenta a propriedade de fechamento, pois o domínio dos argumentos M_a é igual ao contradomínio. Assim, F é uma operação binária O_2 em M_a. Também F uma operação parcial, pois $D_d(F)= \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\} \neq D(F) = M_x$

Exemplo: A função binária $y = F(z_1, z_2)$, com $y, x_1, x_2 \in \boldsymbol{Z}$ tal que $y = z_1 + z_2$, é uma operação (denominada de soma nos inteiros) da álgebra elementar. De fato, o domínio das variáveis y, z_1, z_2 é $\boldsymbol{Z}$, sendo assim, a função é fechada (com $D(F) = \boldsymbol{Z}^2$ e $CD(F) = \boldsymbol{Z}$) e desta forma, uma operação binária O_2 em $\boldsymbol{Z}$. É uma operação total, pois $D(F) = D_d(F)$. Logo, teremos f: $\boldsymbol{Z}^2 \to \boldsymbol{Z}$, $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2$

Exemplo: A função binária $y = F(x_1, x_2)$, com $y, x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ tal que $y = \frac{x_1}{x_2}$ com $x_2 \neq 0$ é uma operação (denominada de divisão nos reais) da álgebra elementar. De fato, o domínio das variáveis y, x_1, x_2 é $\boldsymbol{R}$, sendo assim, a função é fechada (com $D(F) = \boldsymbol{R}^2$ e $CD(F) = \boldsymbol{R}$) e desta forma, uma operação binária O_2 em $\boldsymbol{R}$. Entretanto, $D_d = \{(x_1, x_2) / x_1 \in \boldsymbol{R} \text{ e } x_2 \in \boldsymbol{R}^*\} = \{(x_1, x_2) / x_1, x_2 \in \boldsymbol{R} \text{ e } x_2 \neq 0\}$, assim, não é uma operação total e sim parcial.

Exemplo: Sejam os conjuntos $M_a = \{a, b\}$ e $M_b = \{c, d\}$ o domínio e contradomínio, respectivamente, da função F de M_x para M_y, tal que $F = \{(a, c), (b, d)\}$. Esta função unária não é fechada e consequentemente, não é uma operação. O domínio dos argumentos M_a e o contradomínio M_b são diferentes.

Exemplo: Seja $M = \{x, y, z, k\}$. Então, $f_1 = \{(x, x), (y, x), (z, k), (k, z)\}$ é uma operação total unária. Já $O_1 = \{(x, x), (y, x), (z, k)\}$ é uma operação parcial unária. Entretanto o conjunto de pares ordenados $A = \{(x, x), (x, y), (z, k), (k, z)\}$ não é uma operação (pois não é uma função).

Exemplo: A função binária F de $\boldsymbol{N}^2$ para $\boldsymbol{Z}$, com $n_1, n_2 \in \boldsymbol{N}$ e $z \in \boldsymbol{Z}$ tal que $z = F(n_1, n_2) = n_1 - n_2$ não é uma operação, pois o domínio dos argumentos ($\boldsymbol{N}$) e o contradomínio ($\boldsymbol{Z}$) são conjuntos diferentes. Esta função resulta em elementos z que não pertencem a $\boldsymbol{N}$ (números negativos).

Exemplo: Sejam o conjunto $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) / x \in \boldsymbol{R} \text{ e } y \in \boldsymbol{R}\}$ e o conjunto dos números complexos $\boldsymbol{C} = \{a + b\boldsymbol{i} / a \in \boldsymbol{R} \text{ e } b \in \boldsymbol{R}\}$. Então, a função binária F de $\boldsymbol{R}^2$ para $\boldsymbol{C}$, com $x, y \in \boldsymbol{R}$ e $c \in \boldsymbol{C}$ tal que $c = F(x, y) = x + y\boldsymbol{i}$ não é uma operação, pois o domínio dos argumentos ($\boldsymbol{R}$) e o contradomínio ($\boldsymbol{C}$) são conjuntos diferentes.

Exemplo: Sejam X e Y conjuntos não vazios. Podemos definir duas funções totais, chamadas funções projeções e representadas por *Proj*X e *Proj*Y, de forma que:

$$ProjX: X \times Y \to X \quad (x, y) \longmapsto ProjX(x, y) = x \qquad \text{e} \qquad ProjY: X \times Y \to Y \quad (x, y) \longmapsto ProjY(x, y) = y$$

Estas funções recuperam os valores de x e y do par ordenado (x, y). As funções projeção são sempre sobrejetoras. Por exemplo, se X = {0, 1} e Y = $\{a, b\}$, então, X × Y = $\{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$. Logo, *Proj*X(0, a) = 0, *Proj*X(0, b) = 0¸ *Proj*X(1, a) = 1, *Proj*X(1, b) = 1; *Proj*Y(0, a) = a, *Proj*Y(0, b) = b, *Proj*Y(1, a) = a e *Proj*Y(1, b) = b.

Exemplo: Sejam Σ um alfabeto e Σ^* o conjunto de todas as palavras de Σ. Então, podemos definir uma operação total em Σ^*, chamada de concatenação (*CONC*), como:

$$CONC: \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^* \quad (a, b) \longmapsto CONC(a, b) = ab$$

Por exemplo, se Σ = {0, 1} então, *CONC* (1011,1100) = 10111100. Se Σ = conjunto das letras do alfabeto da língua portuguesa, então *CONC* (ca, sca) = casca.

Exemplo: Em programação de computadores, uma **estrutura de dados** é conjunto de variáveis relacionadas que podem ser acessadas individualmente ou como um todo. Um **arranjo** (em inglês "**array"**) é uma estrutura de dados que armazena uma coleção de elementos de tal forma que cada um dos elementos possa ser identificado por, pelo menos, um índice ou uma chave. Os arranjos mantêm uma série de elementos de dados, geralmente do mesmo tipo. Um **vetor** (ou **arranjo unidimensional**) é um arranjo no qual cada elemento (variável) é identificado por um único índice. O tamanho do vetor é o número de elementos que ele possui. Um vetor X de tamanho n, pode ser representado como:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}\}$$

ou, em uma notação mais utilizada na área da programação

$$X = \{x[0], x[1], \ldots, x[i], \ldots, x[n-1]\}$$

com i, $n \in \boldsymbol{N}$, $0 \leq i \leq n$ e x_i (ou $x[i]$) representa uma variável que armazena dados em geral de um mesmo tipo. Em diversas linguagens modernas de programação como C, C++ e Java, i começa em 0. Por exemplo, para um vetor X com $n = 4$, em que cada elemento armazena as 4 primeiras letras maiúsculas do alfabeto da língua portuguesa, teremos:

$$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}, \text{ com } x_0 = \text{A}, x_1 = \text{B}, x_2 = \text{C}, x_3 = \text{D}$$

Sejam X um vetor de tamanho n e $\boldsymbol{I} = \{0, 1, \ldots, n - 1\} \subset \boldsymbol{N}$. Podemos definir uma função biunívoca F tal que:

$$\begin{aligned} F\colon & I \to X \\ & i \longmapsto F(i) = x_i \end{aligned}$$

e como admite inversa,

$$\begin{aligned} F^{-1}\colon & X \to I \\ & x_i \longmapsto F^{-1}(x_i) = i \end{aligned}$$

De fato, a função F é total, injetora e bijetora, pois para todo $i \in I$, existe um e somente um $x_i \in I$ e para todo, $x_i \in I$ existe um e somente um $i \in I$. O conjunto X é denominado de **conjunto indexado pelo conjunto *I***.

Exemplo: O **Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação** (ASCII - American Standard Code for Information Interchange) é um código binário formado por cadeias de 7 bits (0s e 1s) que codifica um conjunto de símbolos formado por 128 sinais: 95 sinais gráficos (letras do alfabeto latino, sinais de pontuação e sinais matemáticos) e 33 sinais de controle. É representado por meio de uma tabela que associa cada um dos 128 sinais, com cada uma das 2^7 (= 128) possibilidades de cadeias 7 bits (listas de tamanho 7 formada a partir de um conjunto de dois elementos). Por conveniência, as cadeias binárias na tabela ASCII são apresentadas com comprimento de um byte (8 bits), ficando assim, um bit não utilizado que pode ser aproveitado de diversas formas. A codificação ASCII é usada para representar textos em computadores, equipamentos de comunicação, entre outros dispositivos que trabalham com texto. Desenvolvida a partir de 1960, grande parte das codificações de caracteres modernas a herdaram como base. O código ASCII é muito utilizado para conversão de código binário (sequência de 0´s e 1´s) para Letras do alfabeto Maiúsculas ou minúsculas e vice versa. Na Tabela 1.3.2 é apresentada uma parte da tabela ASCII para alguns sinais gráficos e de controle.

Tabela 1.3.2

Sinais de controle			*Sinais gráficos*	
Cadeia binária	*Abreviatura*	*Nome*	*Cadeia binária*	*Sinal*
0000 0000	NUL	Nulo	0110 0000	`
0000 0001	SOH	Início de cabeçalho	0110 0001	a
0000 0010	STX	Início de texto	0110 0010	b
0000 0011	ETX	Fim de texto	0110 0011	c
0000 0100	EOT	Fim de transmissão	0110 0100	d
0000 0101	ENQ	Consulta; inquirição	0100 0000	@

Sejam S = conjunto de 128 sinais da tabela ASCII e CB = cadeias binárias de tamanho 7 formadas por elementos do domínio booleano {0, 1}. Então podemos definir uma função total não fechada (pois $S \neq CB$), biunívoca, $cb = ASCII(s)$ que associa cada elemento $s \in S$ com cada elemento $cb \in CB$ conforme tabela ASCII:

$$\begin{aligned} ASCII\colon & S \to CB \\ & s \longmapsto cb = ASCII(s) \end{aligned}$$

A função $ASCII(s)$ é inversível (pois é biunívoca), e assim,

$$\begin{aligned} ASCII^{-1}\colon & CB \to S \\ & cb \longmapsto s = ASCII^{-1}(cb) \end{aligned}$$

Por exemplo, $cb = ASCII$(nul) = 0000 0000; enquanto que $cb = ASCII$(b) = 0110 0010. Já $s = ASCII^{-1}$(0000 0100) = EOT; enquanto que $s = ASCII^{-1}$(0100 0000) = @.

No caso de operações em $\boldsymbol{R}$, uma representação conveniente de seus pares ordenados é por meio de gráficos no plano ou no espaço geométrico, por meio de coordenadas cartesianas. É uma forma de representação por grade retangular, sendo esta contínua (nos números reais). Para operações O_1 em $\boldsymbol{R}$, cada par ordenado (x, y), com $y = O_1(x)$, é representado como um ponto em uma curva no plano geométrico xy. Para operações O_2 em $\boldsymbol{R}$, cada par ordenado $((x, y), z)$, com $z = O_2(x, y)$, é representado como um ponto em uma superfície no espaço geométrico xyz.

Exemplo: Operações totais representadas como gráficos no plano geométrico (Fig. 1.3.9a) e no espaço geométrico (Fig. 1.3.9b).

$$f_1\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \qquad\qquad f_2\colon \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$$
$$x \longmapsto y = x^2 \qquad\qquad (x, y) \longmapsto z = x^2 + y^2$$

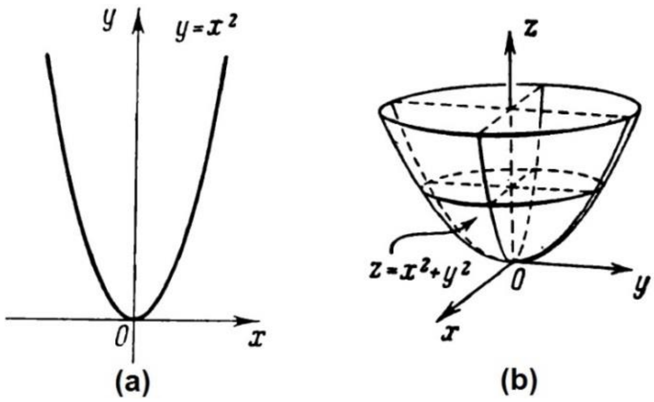

Fig. 1.3.9

Seja o conjunto universo $\boldsymbol{1}$ e o conjunto das partes de $\boldsymbol{1}$, $P(\boldsymbol{1})$. Podemos definir quatro operações sobre $P(\boldsymbol{1})$: união, intersecção, diferença e complemento.

Sejam M_a e $M_b \in P(\boldsymbol{1})$ e $m_i \in \boldsymbol{1}$. A **união** dos conjuntos M_a e M_b, denotada por $M_a \cup M_b$, é o conjunto M composto pelos elementos que pertencem ao conjunto M_a ou ao conjunto M_b (ou a ambos), isto é:

$$M = M_a \cup M_b = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\}$$

onde o símbolo "$\vee$"significa "ou/e". A união de conjuntos vazios é vazio. A união é uma função binária total e fechada sobre $P(\boldsymbol{1})$, ou seja, uma operação binária total sobre $P(\boldsymbol{1})$, de forma que $M = f_2(M_a, M_b) = \cup(M_a, M_b)$, com $\cup(M_a, M_b) = M_a \cup M_b = \{m_i/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\}$. Também é sobrejetora, mas não injetora se $\boldsymbol{1} \neq \varnothing$ e injetora se $\boldsymbol{1} = \varnothing$ (e assim biunívoca se $\boldsymbol{1} = \varnothing$). Ou seja:

$$\cup\colon\ P(\boldsymbol{1})^2 \to P(\boldsymbol{1})$$
$$(M_a, M_b) \longmapsto M = M_a \cup M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\}$$

De fato, para M_a, M_b, M_1 e $M_2 \in P(\boldsymbol{1})$ e m_i e $m_j \in \boldsymbol{1}$:

- (Funcão) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $((M_a, M_b), M_1)$ e $((M_a, M_b), M_2) \in \cup$. Então,
$M_1 = M_a \cup M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\}$ e $M_2 = M_a \cup M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\} \Rightarrow M_1 = M_2$;
- (Binária) Tem dois argumentos, M_a, M_b;
- (Total) $D_d(\cup) = D(\cup) = \mathrm{P}(\boldsymbol{1})^2$, pois $\cup$ sempre está definida $\forall M_a, M_b$;

- (Fechada) $M_a \cup M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in M_a \vee m_i \in M_b\} \subseteq \mathbf{\mathit{1}} \Rightarrow M_a \cup M_b \in P(\mathbf{\mathit{1}})$;
- (Sobrejetora) Seja $M_a = \varnothing$. Então, $\forall M_b$, $M_a \cup M_b = \varnothing \cup M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in \varnothing \vee m_i \in M_b\} = M_b$. Desta forma, $((\varnothing, M_b), M_b) \in \cup$. Logo, $I(\cup) = CD(\cup) = P(\mathbf{\mathit{1}})$;
- (Não injetora se $\mathbf{\mathit{1}} \neq \varnothing$) Por contraexemplo, como $\varnothing \cup \{m_j\} = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in \varnothing \vee m_i \in \{m_j\}\} = \{m_j\}$ e $\{m_j\} \cup \{m_j\} = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in \{m_j\} \vee m_i \in \{m_j\}\} = \{m_j\}$, então $((\varnothing,\{m_j\}), \{m_j\})$ e $((\{m_j\},\{m_j\}), \{m_i\}) \in \cup$.
- (Injetora se $\mathbf{\mathit{1}} = \varnothing$) $I(\cup) = CD(\cup)$.

Exemplo: Representação da operação $\cup$: $P(\mathbf{\mathit{1}})^2 \rightarrow P(\mathbf{\mathit{1}})$, $M = M_a \cup M_b$ para $\mathbf{\mathit{1}} = \{a\}$ (Fig. 1.3.10).

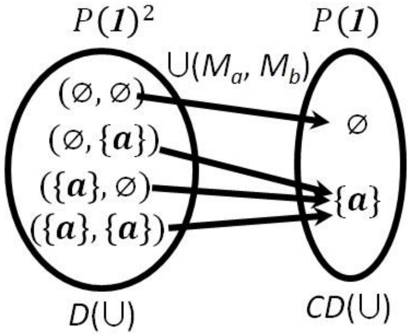

Fig. 1.3.10

Sejam M_a e $M_b \in P(\mathbf{\mathit{1}})$ e $m_i \in \mathbf{\mathit{1}}$. A **intersecção** dos conjuntos M_a e M_b, denotada por $M_a \cap M_b$, é o conjunto M composto pelos elementos que pertencem tanto ao conjunto M_a como ao conjunto M_b (deve pertencer necessariamente aos dois):

$$M = M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\}$$

onde o símbolo "$\wedge$" significa "e". A intersecção entre dois conjuntos que não tem elementos em comum é sempre igual a $\varnothing$. A intersecção é uma função binária total e fechada sobre $P(\mathbf{\mathit{1}})$, ou seja, uma operação binária total sobre $P(\mathbf{\mathit{1}})$, de forma que $M = f_2(M_a, M_b) = \cap(M_a, M_b)$, com $\cap(M_a, M_b) = M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\}$. Também é sobrejetora, mas não injetora. Ou seja:

$$\begin{aligned} \cup:\ & \boldsymbol{P(1)^2} \rightarrow \boldsymbol{P(1)} \\ & (M_a, M_b) \mapsto M = M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\} \end{aligned}$$

De fato, para M_a, M_b, M_1 e $M_2 \in P(\mathbf{\mathit{1}})$ e m_i e $m_j \in \mathbf{\mathit{1}}$:
- (Função) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $((M_a, M_b), M_1)$ e $((M_a, M_b), M_2) \in \cap$. Então,
$M_1 = M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\}$ e $M_2 = M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\} \Rightarrow M_1 = M_2$;
- (Binária) Tem dois argumentos, M_a, M_b;
- (Total) $D_d(\cap) = D(\cap) = P(\mathbf{\mathit{1}})^2$, pois $\cap$ sempre está definida $\forall M_a, M_b$;
- (Fechada) $M_a \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in M_a \wedge m_i \in M_b\} \subseteq \mathbf{\mathit{1}} \Rightarrow M_a \cap M_b \in P(\mathbf{\mathit{1}})$;
- (Sobrejetora) Seja $M_a = \mathbf{\mathit{1}}$. Então, $\forall M_b$, $M_a \cap M_b = \mathbf{\mathit{1}} \cap M_b = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in \mathbf{\mathit{1}} \wedge m_i \in M_b\} = M_b$. Desta forma, $((\mathbf{\mathit{1}}, M_b), M_b) \in \cap$. Logo, $I(\cap) = CD(\cap) = P(\mathbf{\mathit{1}})$;
- (Não injetora) Por contraexemplo, como $\mathbf{\mathit{1}} \cap \{m_j\} = \{m_i \in \mathbf{\mathit{1}}/m_i \in \mathbf{\mathit{1}} \wedge m_i \in \{m_j\}\} = \{m_j\}$ e $\{m_j\} \cap \{m_j\} = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in \{m_j\} \wedge m_i \in \{m_j\}\} = \{m_j\}$, então $((\mathbf{\mathit{1}}, \{m_j\}), \{m_j\})$ e $((\{m_j\},\{m_j\}), \{m_j\}) \in \cap$.

Exemplo: Representação da operação $\cap$: $P(\mathbf{\mathit{1}})^2 \rightarrow P(\mathbf{\mathit{1}})$, $M = M_a \cap M_b$ para $\mathbf{\mathit{1}} = \{a\}$ (Fig. 1.3.11).

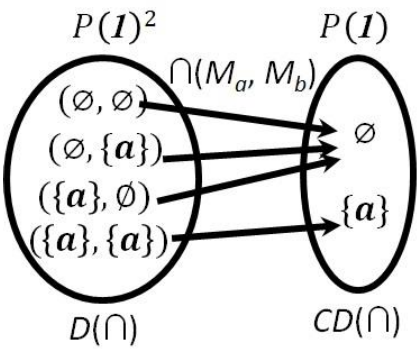

Fig. 1.3.11

Sejam M_a e $M_b \in P(\boldsymbol{1})$ e $m_i \in \boldsymbol{1}$. A **diferença** dos conjuntos M_a e M_b, denotada por $M_a \setminus M_b$ (ou $M_a - M_b$) é o conjunto M composto pelos elementos que pertencem ao conjunto M_a e não pertencem a M_b:

$$M = M_a \setminus M_b = \{m_i \in \mathbf{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\}$$

A diferença entre dois conjuntos iguais é $\varnothing$. Além disto, $\varnothing \setminus M_a = \varnothing$, $M_a \setminus \varnothing = M_a$. A diferença é uma função binária total e fechada sobre $P(\boldsymbol{1})$, ou seja, uma operação binária total sobre $P(\boldsymbol{1})$, de forma que $M = f_2(M_a, M_b) = \setminus(M_a, M_b)$, com $\setminus(M_a, M_b) = M_a \setminus M_b = \{m_i/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\}$. Também é sobrejetora, mas não injetora. Ou seja:

$$\begin{aligned} \setminus:\ & \boldsymbol{P(1)^2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{P(1)} \\ & (M_a, M_b) \mapsto M = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\} \end{aligned}$$

De fato, para M_a, M_b, M_1 e $M_2 \in P(\boldsymbol{1})$ e m_i e $m_j \in \boldsymbol{1}$:
- (Função) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que $((M_a, M_b), M_1)$ e $((M_a, M_b), M_2) \in /$. Então
$M_1 = M_a \setminus M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\}$ e $M_2 = M_a \cap M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\} \Rightarrow M_1 = M_2$;
- (Binária) Tem dois argumentos, M_a, M_b;
- (Total) $D_d(\setminus) = D(\setminus) = P(\boldsymbol{1})^2$, pois $\setminus$ sempre está definida $\forall M_a, M_b$;
- (Fechada) $M_a \setminus M_b = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin M_b\} \subseteq \boldsymbol{1} \Rightarrow M_a \setminus M_b \in P(\boldsymbol{1})$;
- (Sobrejetora) Seja $M_b = \varnothing$. Então, $\forall M_a \in P(\boldsymbol{1})$, $M_a \setminus M_b = M_a \setminus \varnothing = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in M_a \wedge m_i \notin \varnothing\} = M_a$. Desta forma, $((M_a, \varnothing), M_a) \in \setminus$. Logo, $I(\setminus) = CD(\setminus) = P(\boldsymbol{1})$;
- (Não injetora) Por contraexemplo, como $\varnothing \setminus \varnothing = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in \varnothing \wedge m_i \notin \varnothing\} = \varnothing$ e $\varnothing \setminus \{m_j\} = \{m_i \in \boldsymbol{1}/m_i \in \varnothing \wedge m_i \notin \{m_j\}\} = \varnothing$, então $((\varnothing, \varnothing), \varnothing)$ e $((\varnothing, \{m_i\}), \varnothing) \in \setminus$.

Exemplo: Representação da operação $\setminus: P(\boldsymbol{1})^2 \rightarrow P(\boldsymbol{1})$, $M = M_a \setminus M_b$ para $\boldsymbol{1} = \{a\}$ (Fig. 1.3.12).

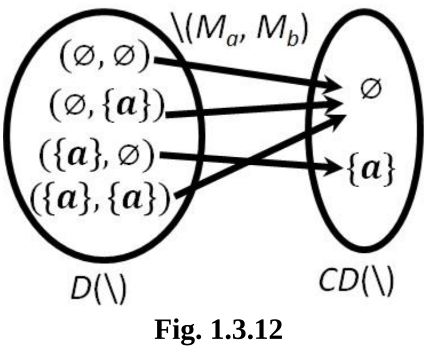

Fig. 1.3.12

Sejam $M_a \in P(\boldsymbol{1})$ e $m_i \in \boldsymbol{1}$. O **complemento** do conjunto M_a denotado por $\overline{M_a}$ é um conjunto M composto pelos elementos que pertencem ao conjunto universo $\boldsymbol{1}$, mas não pertencem a M_a:

$$\overline{M_a} = \{m_i \in \boldsymbol{1} / m_i \notin M_a\}$$

Como $\overline{M_a} = \{m_i \in \boldsymbol{1} / m_i \notin M_a\} = \{m_i \in \boldsymbol{1} / m_i \in \boldsymbol{1} \wedge m_i \notin M_a\} = \boldsymbol{1} \setminus M_a$ então $\overline{M_a} = \boldsymbol{1} \setminus M_a$. O complemento é uma função unária total e fechada sobre $P(\boldsymbol{1})$, ou seja, é uma operação unária total sobre $P(\boldsymbol{1})$, de forma que $M = f_1(M_a) = \overline{\ }(M_a)$, com $\overline{\ }(M_a) = \overline{M_a} = \{m_i \in \boldsymbol{1} / m_i \notin M_a\}$. Também é sobrejetora e injetora e assim, biunívoca. Ou seja:

$$\begin{aligned} \overline{\ }: \boldsymbol{P}(\mathbf{1}) &\to \boldsymbol{P}(\mathbf{1}) \\ M_a &\longmapsto M = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_a\} \end{aligned}$$

De fato, para M_a, M_b, M_1 e $M_2 \in P(\boldsymbol{1})$ e $m_i \in \boldsymbol{1}$:

- (Funcão) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que (M_a, M_1) e $(M_a, M_2) \in \overline{\ }$. Então,
$M_1 = \overline{M_a} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_a\}$ e $M_2 = \overline{M_a} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_a\} \Rightarrow M_1 = M_2$;
- (Unária) Tem um argumento, M_a;
- (Total) $D_d(\overline{\ }) = D(\overline{\ }) = \mathrm{P}(\boldsymbol{1})$, pois $\overline{\ }$ sempre está definida $\forall M_a$;
- (Sobrejetora) $I(\overline{\ }) = CD(\overline{\ }) = \mathrm{P}(\boldsymbol{1})$. De fato, seja $M_a = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_b\}$. Então, $\overline{M_a} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_b\}\} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \in M_b\} = M_b$. Assim, se $M_a = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_b\}$, então, $\forall M_b$, $\exists M_a$ $(M_a = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_b\}) / \overline{M_a} = M_b$;
- (Injetora) Sejam dois pares ordenados quaisquer tais que (M_1, M_a) e $(M_2, M_a) \in \overline{\ }$. Então,
$M_a = \overline{M_1} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_1\}$ e $M_a = \overline{M_2} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_2\}$. Assim,

$$\{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_1\} = \{m_i \in \mathbf{1} / m_i \notin M_2\}\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

Exemplo: Representação da operação $\overline{\ }: P(\boldsymbol{1}) \to P(\boldsymbol{1})$, $M = \overline{M_a}$ para $\boldsymbol{1} = \{a, b\}$ (Fig. 1.3.13).

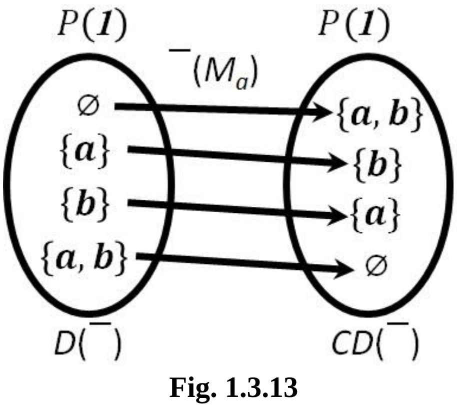

Fig. 1.3.13

Exemplo: Sejam $\boldsymbol{1} = \{a, e, i, o, u\}$, $M_a = \{a, e, i\}$ e $M_b = \{a, i, o\}$. Então:

$$M_a \cup M_b = \{a, e, i, o\};\ M_a \cap M_b = \{a, i\};\ M_a \setminus M_b = \{e\};\ \overline{M_a} = \{o, u\}$$

Exemplo: O conjunto dos números reais $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$. O conjunto dos inteiros positivos $\boldsymbol{Z}^+ = \boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N} \setminus \{0\} = \boldsymbol{N} - \{0\}$. O conjunto dos inteiros negativos $Z^- = \boldsymbol{Z} - \boldsymbol{N}$.

As operações com conjuntos podem ser representadas graficamente por meio de regiões hachuradas nos digramas de *Euler-Venn* (Fig. 1.3.14).

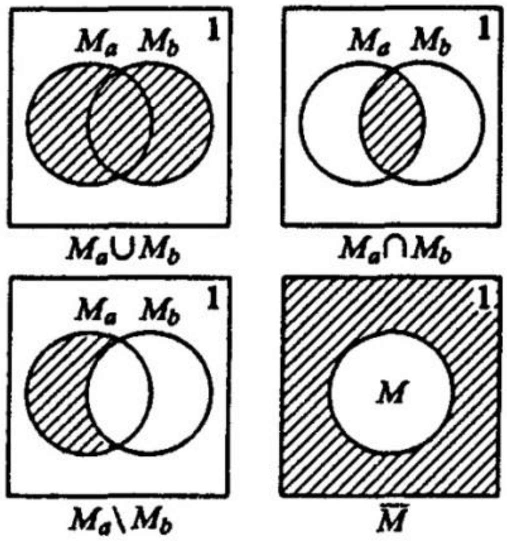

Fig. 1.3.14 (Fonte: Горбатов, В. А.)

Outros conjuntos podem ser formados empregando-se as operações de união, intersecção, diferença e complemento. Estas operações obedecem a uma ordem de procedência: primeiro executa-se o complemento, seguido da intersecção, união e por fim, a diferença. Para alterar esta ordem, empregam-se parênteses. Assim, um conjunto pode ser especificado por uma expressão que tem identificadores de conjuntos, operações e eventualmente, parênteses. Esta forma de especificação de um conjunto chama-se **forma analítica**.

Exemplo: Seja a operação do complemento de um conjunto que é o resultados da operação de interseção dos conjuntos M_a e M_b. Utilizando-se diagramas de Euler-Venn (Fig 1.3.15), podemos observar que esta operação é equivalente a união dos complementos dos conjuntos M_a e M_b, isto é:

$$M = \overline{M_a \cap M_b} = \overline{M_a} \cup \overline{M_b}$$

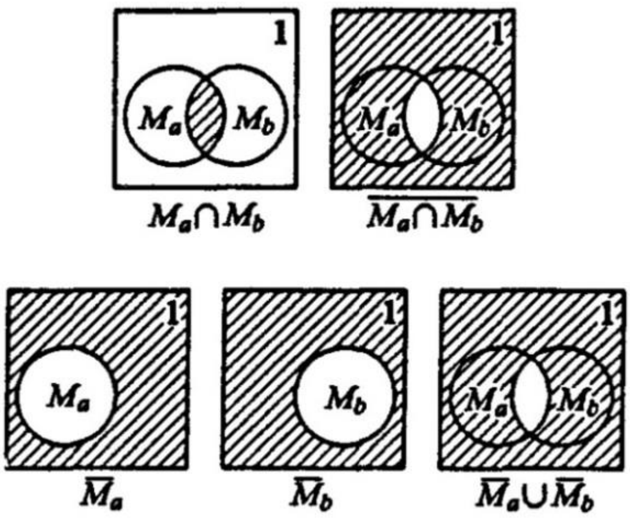

Fig. 1.3.15 (Fonte: Горбатов, В. А.)

Exemplo: Em $M_a \cap M_b \cup M_c$, seguindo a regra de precedência, primeiro opera-se $M_a \cap M_b = A$ e após, $A \cup M_c$; entretanto, em $M_a \cap (M_b \cup M_c)$, seguindo a prevalência dos parênteses, opera-se $M_b \cup M_c = B$ e após, $M_a \cap B$.

O conceito de função é muito importante dentro da ciência da computação. A grande maioria das linguagens de programação (***LP***´s) permite definir, utilizar e manipular funções de forma similar às funções definidas matematicamente. O conceito de função também está associado a uma das abordagens para resolver problemas em ***LP***´s: o **paradigma de programação funcional**. **Paradigma de programação** é um meio de se classificar ***LP***´s conforme o estilo ou a forma que um programa é construído. Basicamente, os paradigmas de programação podem ser classificados em quatro tipos: procedural, orientado a objetos, declarativo e funcional. No **paradigma procedural** (ou **imperativo**), utilizado em muitas linguagens conhecidas (Fortran, Cobol, Basic, C, Pascal e Ada), um programa é visto como uma sequência de comandos para a realização de determinada tarefa. Neste, um programa é um agente ativo que utiliza objetos passivos (dados ou itens de dados). O **paradigma orientado a objetos** (presente nas linguagens Smalltack, C++, Visual Basic, C# e Java) trabalha com objetos ativos (e não passivos). As ações realizadas pelo objeto são definidas no próprio objeto. No **paradigma declarativo ou lógico**, princípios do raciocínio lógico são utilizados na construção de programas. Prolog é uma das mais importantes linguagens declarativas. Já o **paradigma funcional** é um paradigma de programação que trata a computação como uma avaliação de funções matemáticas e que evitam estados ou dados mutáveis (que podem ser alterados). Assim, uma vez atribuídos os valores de uma variável, estes não podem ser alterados. Ela enfatiza a aplicação de funções, que devem devolver valores independentes dos valores devolvidos por elas anteriormente (funções sem estado). Na programação funcional, um programa é visto como uma função válida e não como um conjunto de instruções (como no paradigma procedural). Desta forma, uma ***LP*** funcional é uma linguagem feita para suportar e encorajar este tipo de paradigma. Exemplos de ***LP***´s funcionais: Haskell, LISP e Scheme.