Capítulo 3

3.1 Suponha que A, B e C conjuntos quaisquer. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Na demonstração deste teorema, usa-se o fato $X \subseteq Y \Leftrightarrow x \in X \Rightarrow x \in Y$. A prova do teorema em questão é uma sequência de implicações partindo da premissa $a \in A$. Como não existe tal elemento, a premissa é F e portanto o condicional é sempre V, independente da conclusão. Logo a implicação é válida para $A = \emptyset$

3.4 a) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

a) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$

— Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então

$x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow x \in \emptyset \cup A$ e assim, $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$

— Seja $x \in \emptyset \cup A$

$x \in \emptyset \cup A \Rightarrow x \in \emptyset \vee x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cup \emptyset$ e assim, $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$

Logo, $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$

b) $A \cup \emptyset = A$

— Seja $x \in A \cup \emptyset$ então,

$x \in A \cup \emptyset \Rightarrow x \in A \vee \underbrace{x \in \emptyset}_{F} \Rightarrow x \in A$ e assim $A \cup \emptyset \subseteq A$

— Seja $x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cup \emptyset$ e assim, $A \subseteq A \cup \emptyset$

Logo $A \cup \emptyset = A$

De $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$ e de $\emptyset \cup A = A$, chegamos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

3.6 c) $A \cap B = B \cap A$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$

assim, $A \cap B = B \cap A$

3.7) a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \Leftrightarrow$

$(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e assim, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2

(3.8) b) $A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$

$$A \cup B = \sim(\underbrace{\sim(A \cup B)}_{\sim A \cap \sim B}) = \sim(\sim A \cap \sim B) \text{ cqd}$$

(3.10) a) $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$

$$(A \cup B) \cap \sim A = \underbrace{(A \cap \sim A)}_{\emptyset} \cup (B \cap \sim A) = \emptyset \cup (B \cap \sim A) = B \cap \sim A \text{ cqd}$$

(3.11) a) $A - B \subseteq A$

Seja $x \in A - B$. Então

$x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A$. Logo, $A - B \subseteq A$

b) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

Prova por absurdo:

($\Rightarrow$) Seja $A - B = A \wedge A \cap B \neq \emptyset$. Seja $x \in A \cap B$. Então

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \underbrace{(x \in A \wedge x \notin B)}_{\text{pois } A = A - B} \wedge x \in B \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{(x \notin B \wedge x \in B)}_{q}$$

$\Rightarrow \underbrace{x \notin B \wedge x \in B}_{\text{pois } p \wedge q \Rightarrow q}$ (absurdo). Logo, $A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

($\Leftarrow$) Seja $A \cap B = \emptyset$ e seja $x \in A$. Então

$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A \subseteq A - B$. E como $A - B \subseteq A$, então $A - B = A$. Logo, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$

Consequentemente: $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ cqd

---

(3.16) a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Seja $\langle y, z \rangle \in A \times (B \cup C) \Leftrightarrow y \in A \wedge z \in B \cup C \Leftrightarrow y \in A \wedge (z \in B \vee z \in C) \Leftrightarrow (y \in A \wedge z \in B) \vee (y \in A \wedge z \in C) \Leftrightarrow \langle y, z \rangle \in A \times B \vee \langle y, z \rangle \in A \times C \Leftrightarrow \langle y, z \rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)$. Logo, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3.17 Se $A \times B = \emptyset$, então $A \neq \emptyset$ ou $B = \emptyset$. Assim, há uma infinidade de possibilidades para A e B, com $A \times B = \emptyset$. Logo a operação é não reversível pois a reversibilidade exige unicidade.

3.18 $A \cup B = B \wedge (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$

Por absurdo, seja $A \cup B = B \wedge (A \cap B) = \emptyset$ e $A \neq \emptyset$. Seja $x \in A$. Então

$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B$ $(p \Rightarrow p \vee q)$

$\Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in B$ (pois por hipótese, $A \cup B = B$)

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$ (pois $x \in A$) $\Rightarrow x \in (A \cap B) \Rightarrow (A \cap B) \neq \emptyset$, pois $A \neq \emptyset$ e $x \in A$

Absurdo! pois por hipótese $A \cap B = \emptyset$