Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

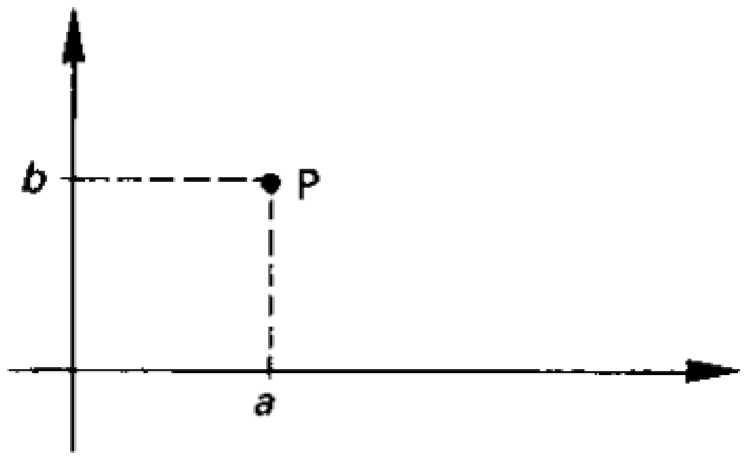
(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 10, 11, 12, 13, 14 e 15

Espaço Vetorial

Vetores no Plano

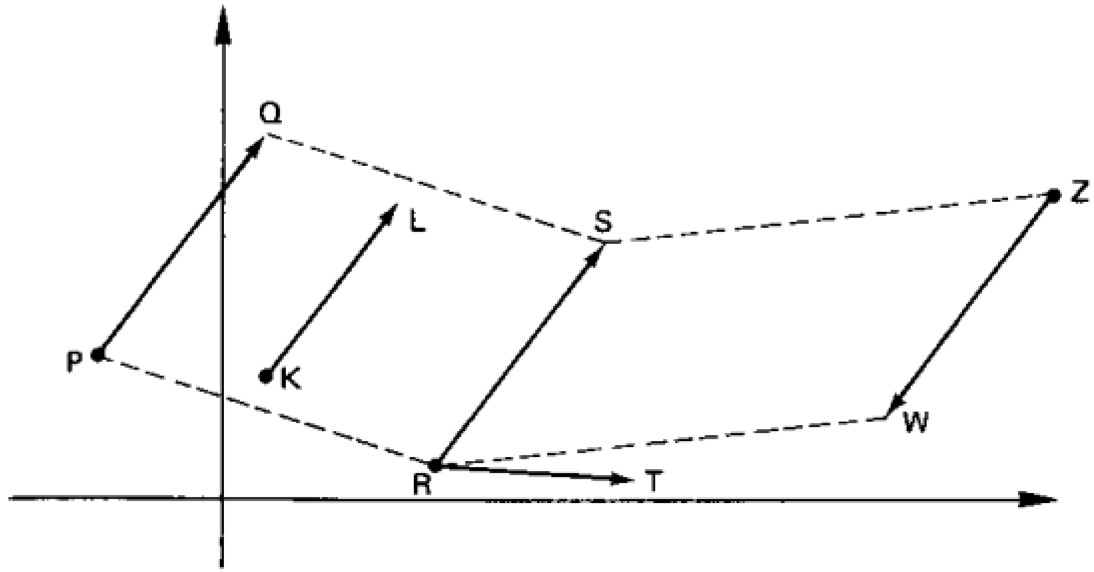
- Considerando um plano cartesiano, fixada uma unidade de comprimento, **um ponto *P* do plano** pode ser identificado por suas **coordenadas** (a, b).

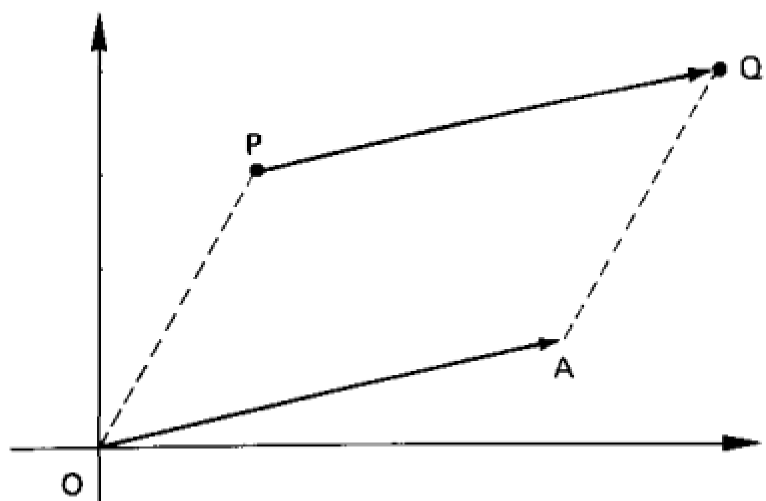


- Dados dois pontos P e Q do plano, podemos considerar dois segmentos de reta orientados:
  - O segmento PQ.
  - O segmento QP.

- Dois segmentos orientados são ditos **equivalentes** se tiverem o **mesmo comprimento, direção e sentido**.

- Para qualquer segmento orientado no plano, existe outro equivalente a este cujo ponto inicial é a **origem**.


Q
L
S
Z
P
K
W
R
T


Q
P
A
O

- Aos segmentos orientados com **ponto inicial na origem** denominamos de *vetores no plano*.

- Vetores no plano são denominados apenas por seu **ponto final**.

- Para cada ponto do plano $P(a, b)$, está associado um único vetor $\mathbf{v} = OP$.
  - Da mesma forma, dado um vetor, associamos a este um único ponto do plano, o seu ponto final.

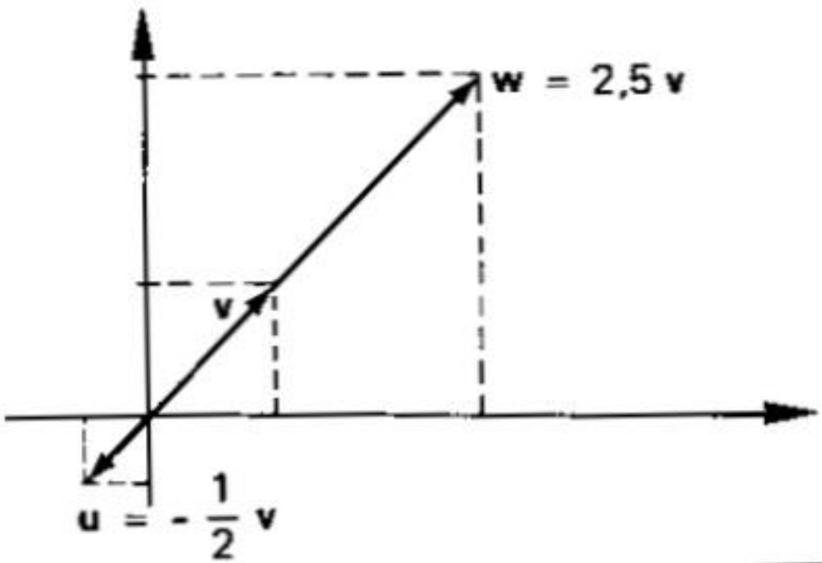
- Podemos então representar um vetor **v** = $\overrightarrow{OP}$ em função de seu ponto final $P(a, b)$ como:
  - **Matriz: linha v** = $|a, b|$ **ou coluna v** = $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$.
  - **Coordenadas: v** = (a, b).

- O ponto inicial associado a cada vetor no plano, a origem, é chamado de **vetor nulo**, representado por (0, 0).

- O oposto de um vetor **v** = $\overrightarrow{OP}$ é o vetor **v** = $\overrightarrow{PO}$, de mesmo comprimento e direção, mas sentidos opostos.
  - Em coordenadas, se **v** = (a, b), então sua oposta é **w** = **-v** = $(-a, -b)$.

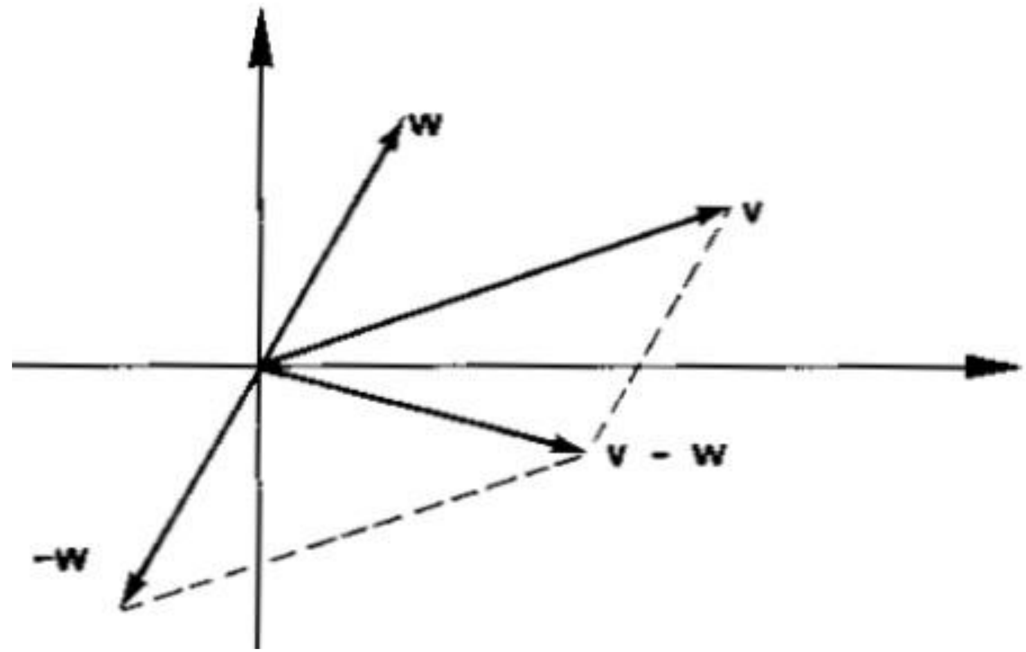
Operações com Vetores no Plano

1. **Multiplicação por um escalar:**
   - Para $k > 0$, multiplicar um vetor **v** por k resulta num novo vetor $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, de **mesma direção** e **mesmo sentido** de **v**.
   - Para $k < 0$, multiplicar um vetor **v** por k resulta num novo vetor $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$, de **mesma direção** e **sentido oposto** de **v**.
   - Para $k = 0$, multiplicar um vetor **v** por k resulta no **vetor nulo**.
   - Em coordenadas, consiste em **multiplicar a matriz linha (ou coluna) por *k***. Assim, se $\mathbf{v} = |a, b|$, então $\mathbf{w} = k\mathbf{v} = |ka, kb|$.


w = 2,5 v
v
u = - 1/2 v

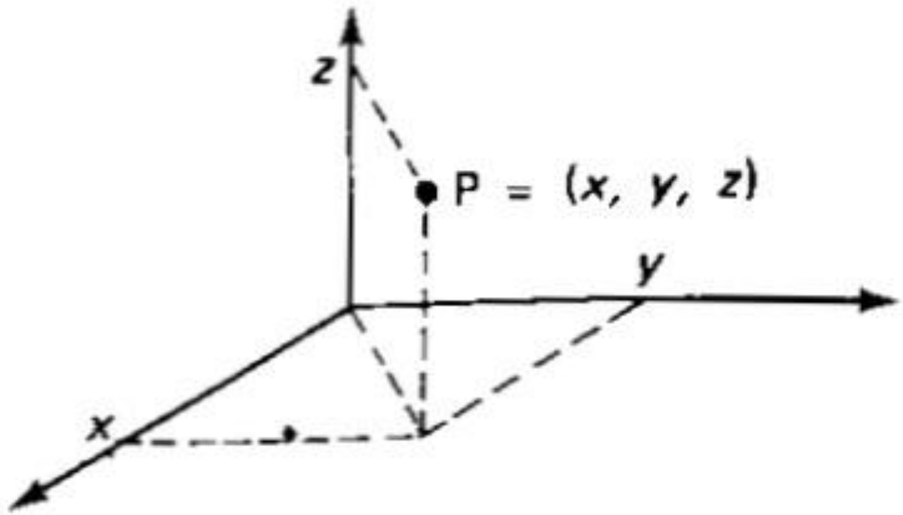
2. Adição de dois (ou mais) vetores:

- Dados dois vetores **v** = *OP* e **w** = *OQ*, o vetor resultante da adição de **v** e **w** será um novo vetor **x** = *OS*, de **direção** e **sentido** intermediários a **v** e **w**.
- Em coordenadas, se **v** = $|a, b|$ e **w** = $|c, d|$, então o vetor-soma, será **x** = **v** + **w** = $|a + c, b + d|$.
- A subtração entre dois vetores **v** = $|a, b|$ e **w** = $|c, d|$ corresponde à soma de **v** e **–w** (oposto de **w, w** = $|-c, -d|$), e seria dada por **z** = **v** - **w** = **v** + (- **w**) = $|a - c, b - d|$.
- A soma de um vetor com o seu oposto é o vetor nulo.

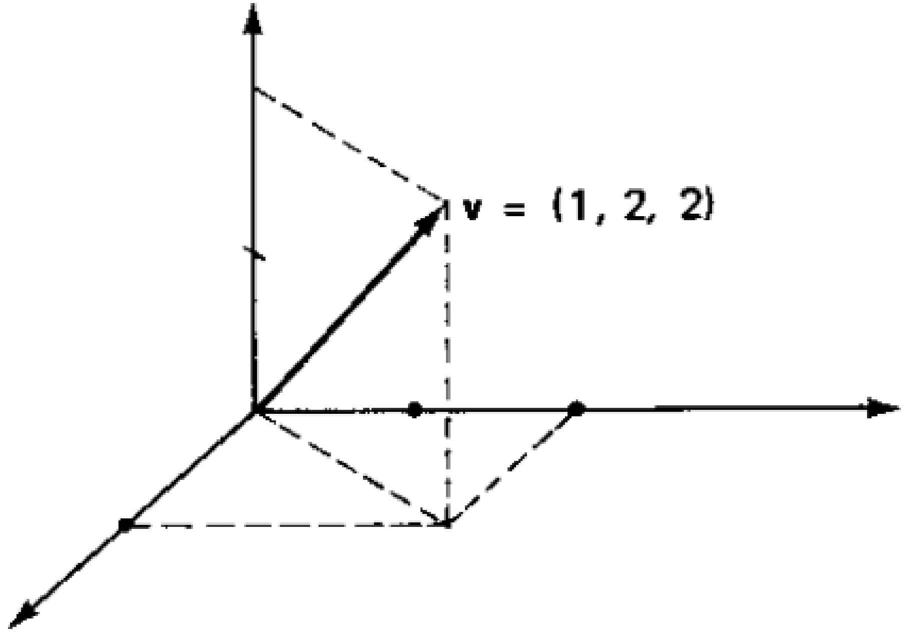

w
v
v - w
-w

Vetores no Espaço

- Assim como no plano, podemos considerar *vetores no espaço*.



- Aqui, como antes, os vetores são dados por segmentos orientados, com **ponto inicial na origem** e **associação única entre** cada **vetor** *OP* e seu **ponto final** $P(a, b, c)$.
  - Onde podemos representar o vetor $\mathbf{v} = OP$ em função de seu ponto final $P(a, b, c)$ como $\mathbf{v} = |a, b, c|$.



Propriedades

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$;
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = \mathbf{0}$;
5. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$;
6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;
7. $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$;
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;

Espaço Vetorial

- **Definição:** Um *espaço vetorial real* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: **soma** e **multiplicação por escalar**, tais que, para quaisquer **u**, **v**, **w** $\in V$ e a, $b \in \mathbb{R}$, as propriedades 1 a 8 sejam satisfeitas.

- Um elemento de um espaço vetorial é referido como *vetor*.
  - **Exemplo:** Num espaço vetorial $V = M(2, 2)$, os *vetores* são matrizes 2x2.

Propriedades

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$;
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$;
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = \mathbf{0}$;
5. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$;
6. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$;
7. $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$;
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$;

Testes

- Resumindo, sempre realizaremos 3 testes:

1. O vetor nulo está presente no espaço? VN $\in V$?;

2. Dados dois elementos quaisquer do espaço, a soma destes está presente no espaço? Para $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, $(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \in V$?;

3. Dado um elemento qualquer do espaço, a multiplicação deste por um escalar qualquer está presente no espaço? Para $\mathbf{u} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, $a\mathbf{u} \in V$?;

Exemplos

- São espaços vetoriais:
  1. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}\}$;
  2. $V =$ M(2, 2) $= \{|a\ b;\ c\ d|,\ a, b, c$ e $d \in \mathbb{R}\}$;

- **Não** são espaços vetoriais:
  1. $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_i \geq 0\}$;
  2. V = Meses do ano = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12};

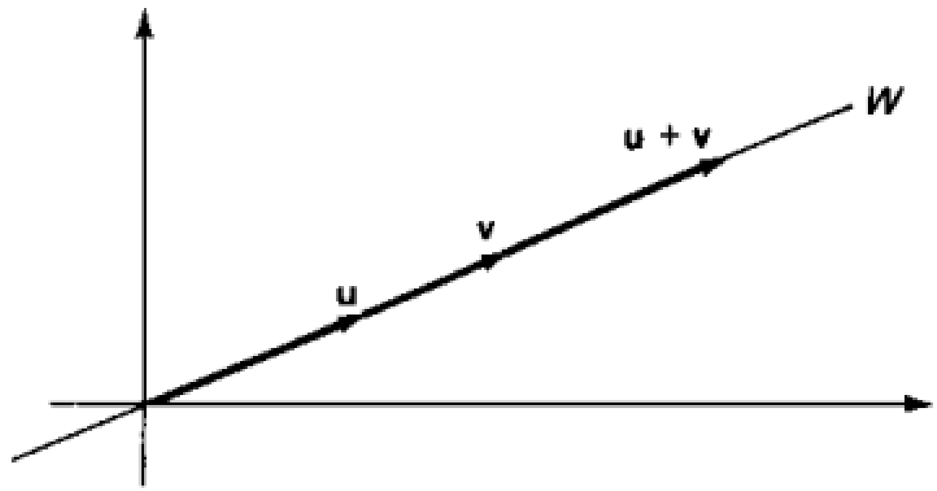
Sub-espaços Vetoriais

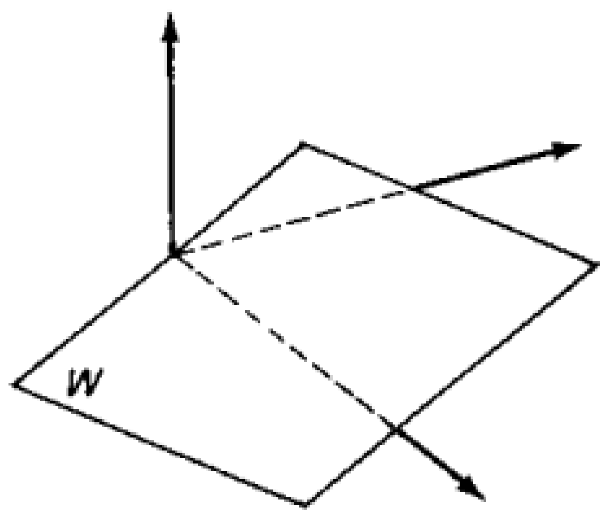
- **Definição:** Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um *sub-espaço vetorial* de V se:
  - Para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$ tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
  - Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in W$ tivermos $a\mathbf{u} \in W$.

- ✓ W é por si só um espaço vetorial e as propriedades 1 a 8 se aplicam;
- ✓ W deve sempre conter o vetor nulo;
- ✓ Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o vetor nulo e ele mesmo (sub-espaços triviais).

Exemplos

- Sub-espaços de $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R}\}$:
  1. $V = \{0, 0\}$;
  2. $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R}\}$;
  3. Quaisquer retas que passem pela origem:
     - $V = \{(x, ax), a, x \in \mathbb{R}\}$;
- Sub-espaços de $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}\}$:
  1. $V = \{0, 0, 0\}$;
  2. $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3), x_i \in \mathbb{R}\}$;
  3. Quaisquer planos que passem pela origem;


W
u + v
v
u


W

Exemplos

- Verifique se é um sub-espaço vetorial:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R} \;/\; x_2 = 7x_1\}$; Sim.
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R} \;/\; x_2 = 8 - 3x_1\}$; Não.
3. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x_1, x_2), x_i \in \mathbb{R} \;/\; x_2 = |\, x_1 \,|\}$; Não.
4. $V = \mathbb{R}^3$ e $W = \{(x_1, x_2, 0), x_i \in \mathbb{R}\}$; Sim.
5. $V = M(2, 2) = \{|a\ b;\ c\ d|,\ a, b, c$ e $d \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{|a\ 0;\ c\ 0|,\ a$ e $c \in \mathbb{R}\}$; Sim.
6. $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), x_i \in \mathbb{R} \;/\; x_1 - x_2 = 0, x_3 - x_4 = 0\}$; Sim.

Teoremas

- **Teorema:** Dados W_1 e W_2, sub-espaços de um espaço vetorial V, a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é um sub-espaço de V.

- **Teorema:** Sejam W_1 e W_2, sub-espaços de um espaço vetorial V. Então, o conjunto $W_1 + W_2$ é sub-espaço de V.

- Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado *soma direta* de W_1 e W_2.

Combinação Linear

- **Definição:** Seja V espaço vetorial, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_{\boldsymbol{n}} \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots + a_n\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}$$

é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}$.

Sub-espaço Gerado - SG

- Uma vez fixados vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear desses é um sub-espaço vetorial, chamado *sub-espaço gerado*, de notação:
  - $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]$, ou
  - $W = SG\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$.

Exemplos

- Determine o sub-espaço gerado por:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} = |1, 2|$;
   - $\mathrm{SG} = a\mathbf{v} = a|1, 2| = |a, 2a|$.
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |0, 2|$ e $\mathbf{v}_2 = |4, 0|$;
   - $\mathrm{SG} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = a|0, 2| + b|4, 0| = |4b, 2a| = \mathbb{R}^2$.
3. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq 0$;
   - $SG = \{a\mathbf{v}, a \in \mathbb{R}\}$.
4. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$;
   - $SG = \{a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Dependência e Independência Linear

- **Definição:** Seja V espaço vetorial e $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LI, se a equação

$$a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

implica que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$.

- No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ são LD.

Exemplos

- Determine se os vetores são LD ou LI:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 1|$; LI
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |1, -1|$ e $\mathbf{v}_2 = |3, -3|$; LD
3. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 1|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 1|$; LI
4. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0, 0|$, $\mathbf{v}_2 = |0, 1, 0|$ e $\mathbf{v}_3 = |0, 0, 1|$; LI
5. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |1, -1|$, $\mathbf{v}_2 = |1, 0|$ e $\mathbf{v}_3 = |1, 1|$; LD
6. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = |2, 1, -1|$, $\mathbf{v}_2 = |1, -1, 0|$ e $\mathbf{v}_3 = |1, 2, -1|$; LD

Base de um Espaço Vetorial

- **Definição:** Um conjunto $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_n\}$ de vetores será uma base de V se:

a) $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_n\}$ é LI;

b) $SG\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_n\} = V$.

- Queremos determinar os “alicerces” de nosso espaço, ou seja, um conjunto finito de vetores tais que qualquer outro vetor de V seja uma combinação linear destes.

Ou Seja:

- Queremos encontrar o menor número de vetores *linearmente independentes* cujo sub-espaço gerado seja V.
  a) $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n} = 0$, apenas para $a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$;
  b) $V = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n}$;

- Encontrados esses vetores, **todo e qualquer outro vetor do EV** pode ser escrito como uma *combinação linear* dos vetores da base.

Exemplo

- Verifique se $\mathbf{v}_1 = |0, 1|$ e $\mathbf{v}_2 = |1, 1|$ são bases de $V = \mathbb{R}^2$.
  - $|x_1, x_2| = a|0, 1| + b|1, 1| = |b, a + b|$;
  - $|b, a + b| = |x_1, x_2|$;
  - $b = x_1$, $a = x_2 - x_1$;
  - $|x_1, x_2| = |x_1, x_2 - x_1 + x_1| = |x_1, x_2|$;

Exemplos

- Determine se os vetores são bases de V:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 1|$; Sim
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v}_1 = |0, -1|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 5|$; Não
3. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0, 0|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 1, 0|$; Não
4. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0, 0|$, $\mathbf{v}_2 = |0, 1, 0|$ e $\mathbf{v}_3 = |0, 0, 1|$; Sim
5. $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v}_1 = |1, 0, 0|$, $\mathbf{v}_2 = |3, 2, 0|$, $\mathbf{v}_3 = |0, 0, 1|$ e $\mathbf{v}_4 = |-2, 0, 0|$; Não
6. $V = M(2, 2)$ e $\mathbf{v}_1 = |1\ 0;\ 0\ 0|$, $\mathbf{v}_2 = |0\ 1;\ 0\ 0|$, $\mathbf{v}_3 = |0\ 0;\ 1\ 0|$ e $\mathbf{v}_4 = |0\ 0;\ 0\ 1|$; Sim

Teoremas

- **Teorema:** Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.

- **Teorema:** Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).

- **Corolário:** Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, denotado *dim V*.

Teoremas

- **Teorema:** Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.

- **Corolário:** Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

- **Teorema:** Se U e W são sub-espaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$. Além disso, $dim\ U + W = dim\ U + dim\ W - dim\ (U \cap W)$.

Teoremas

- **Teorema:** Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Pesos/Coordenadas

- **Definição:** Seja $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_n\}$ uma base de V e $\mathbf{v} \in V$, onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v}_n$. Chamamos estes números a_1, a_2, ... , a_n de pesos (ou coordenadas) de V em relação à base β.

- **Exemplo**: Seja $V = \mathbb{R}^2$, e $\beta = \{|1, 0|, |0, 1|\}$. Para v = |2, 5|, temos:
  - $|2, 5| = a{*}|1, 0| + b{*}|0, 1|$;
  - $a = 2$ e $b = 5$.

Exemplos

- Determine os pesos para:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{|1, 1|, |0, 1|\}$;
   - $|x, y| = a|1, 1| + b|0, 1|$; $a = x$, $b = y - x$.
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $\beta = \{|0, 1|, |1, 0|\}$;
   - $|x, y| = a|0, 1| + b|1, 0|$; $a = y$, $b = x$.
3. $V = \mathbb{R}^3$ e $\beta = \{|1, 0, 0|, |0, 1, 0|, |0, 0, 1|\}$;
   - $|x, y, z| = a|1, 0, 0| + b|0, 1, 0| + c|0, 0, 1|$; $a = x$, $b = y$ e $c = z$.
4. $V = M(2, 2)$ e $\beta = \{|1\ 0;\ 0\ 0|, |0\ 1;\ 0\ 0|, |0\ 0;\ 1\ 0|, |0\ 0;\ 0\ 1|\}$;
   - $|x\ y;\ z\ w| = a|1\ 0;\ 0\ 0| + b|0\ 1;\ 0\ 0| + c|0\ 0;\ 1\ 0| + d|0\ 0;\ 0\ 1|$; $a = x$, $b = y$, $c = z$ e $d = w$.
5. $V = M(2, 2)$ e $\beta = \{|0\ -3;\ 0\ 0|, |1/2\ 0;\ 0\ 0|, |0\ 0;\ 7\ 0|, |0\ 0;\ 0\ -1/7|\}$;
   - $|x\ y;\ z\ w| = a|0\ -3;\ 0\ 0| + b|1/2\ 0;\ 0\ 0| + c|0\ 0;\ 7\ 0| + d|0\ 0;\ 0\ -1/7|$; $a = -y/3$, $b = 2x$, $c = z/7$ e $d = -7w$.

Exemplos

❖ Determine o sub-espaço gerado por:

1. $\mathbf{v_1} = |1, 2|$ e $\mathbf{v}_2 = |2, 4|$;
   - SG = $\{|x, 2x|, x \in \mathbb{R}\}$.
2. $\mathbf{v}_1 = |0, 2|$ e $\mathbf{v}_2 = |4, 0|$, $\mathbf{v}_3 = |-1, 2|$;
   - SG = $\{|x, y|, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
3. $\mathbf{v}_1 = |0, 0, -1|$ e $\mathbf{v}_2 = |4, 1, 0|$ e $\mathbf{v}_3 = |-1, 0, -2|$;
   - SG = $\{|x, y, z|, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3$.
4. $\mathbf{v}_1 = |0, 0, -1|$ e $\mathbf{v}_2 = |0, 1, 0|$, $\mathbf{v}_3 = |0, 0, -2|$ e $\mathbf{v}_4 = |-1, 1, -1|$;
5. $\mathbf{v}_1 = |1\ 1;\ 0\ 0|$, $\mathbf{v}_2 = |0\ 1;\ 0\ 0|$, $\mathbf{v}_3 = |0\ 0;\ 1\ 1|$, $\mathbf{v}_4 = |0\ 0;\ 0\ 1|\}$;

Exemplos

- Determine a base a partir do sub-espaço dado:

1. $W = \mathbb{R}^2$:
   - $\beta = \{|1, 0|, |0, 1|\}$.
2. $W = \mathbb{R}^3$:
   - $\beta = \{|1, 0, 0|, |0, 1, 0|, |0, 0, 1|\}$.
3. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$:
   - $\beta = \{|1, 0, 1|, |0, 1, 1|\}$.
4. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$:
   - $\beta = \{|1, 1, 0|, |0, 0, 1|\}$.
5. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0\}$:
   - $\beta = \{|-2, 1, 0|, |3, 0, 1|\}$.
6. $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + 2z = 0 \text{ e } t - 2z = 0\}$:
   - $\beta = \{|-2, 1, 0, 0|, |-2, 0, 1, 2|\}$.

Exemplos

- Determine outras bases a partir da base dada:
  1. $V = \mathbb{R}^2$, $\beta = \{|1, 0|, |0, 1|\}$.
  2. $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{|1, 0, 0|, |0, 1, 0|, |0, 0, 1|\}$.
  3. $V = M(2, 2)$, $\beta = \{|1\ 0; 0\ 0|, |0\ 1; 0\ 0|, |0\ 0; 1\ 0|, |0\ 0; 0\ 1|\}$

Mudança de Base

- **Definição:** Sejam $\beta_1 = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u}_{\boldsymbol{n}}\}$ e $\beta_2 = \{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, ..., \mathbf{w}_{\boldsymbol{n}}\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + ... + x_n\mathbf{u}_{\boldsymbol{n}}$$
$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + y_2\mathbf{w_2} + ... + y_n\mathbf{w}_{\boldsymbol{n}}$$

- Onde podemos relacionar as coordenadas de **v** em relação à base β_1 com as de **v** em relação à base β_2.

Já que $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores $\mathbf{w}_i$ como combinação linear dos $\mathbf{u}_j$, isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= y_1\mathbf{w}_1 + \ldots + y_n\mathbf{w}_n \\ &= y_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}_n) + \ldots + y_n(a_{1n}\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}_n) \\ &= (a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)\mathbf{u}_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

- Assim:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\
&\ldots \\
x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

- Onde a matriz dos coeficientes (A) desse sistema é chamada de *matriz de mudança de base* de $\boldsymbol{\beta_2}$ **para** $\boldsymbol{\beta_1}$.
- A matriz inversa (A^{-1}) é então a *matriz de mudança de base* de $\boldsymbol{\beta_1}$ **para** $\boldsymbol{\beta_2}$.

Exemplos

- Determine as matrizes de mudança de base para:
  1. $\beta_1 = \{|2, -1|, |3, 4|\}$ e $\beta_2 = \{|1, 0|, |0, 1|\}$.
     - |4/11 1/11; -3/11 2/11|.
     - |2 3; -1 4|.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 129 a 130, exercícios 2 a 11, 15, 18, 19, 29, 30 e 33.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.