Álgebra Linear
Aula 6

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 05

1. Quantos tipos de matrizes elementares existem? Quais são esses tipos?
2. Para cada tipo de matriz elementar, escreva uma matriz 3×3 representante.
3. Se A, B e C são matrizes invertíveis, podemos afirmar que ABC é invertível? Se sim, qual a sua inversa?

Atividade 05 - Gabarito

1. Existem 3 tipos de matrizes elementares. Cada operação elementar em linhas possui um tipo de matriz elementar associada.
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: Multiplicar a segunda linha por uma constante.

   $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$: Trocar a primeira linha com a terceira.

   $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$: Somar a primeira linha na segunda.
3. Sim, podemos concluir que o produto é invertível. Temos $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;
3. A forma escalonada reduzida de A é I_n;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;
3. A forma escalonada reduzida de A é I_n;
4. A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Algoritmo para encontrar a inversa de A

Encontre a sequência de matrizes elementares que levam A até I então execute a mesma sequência em I.

Teorema (1.6.1)

Um sistema linear de equações tem zero, uma ou infinitas soluções.

Exemplo

Analise o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Analise o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema (1.6.2)

Se A é uma matriz invertível de tamanho $n \times n$, então para cada vetor b de tamanho $n \times 1$ o sistema $Ax = b$ tem uma única solução. A saber

$$x = A^{-1}b.$$

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;
2. Mostrar que $AB = I$.

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;
2. Mostrar que $AB = I$.

Teorema 1.6.3

Seja A é uma matriz quadrada.

1. Se B é tal $AB = I$ então $A^{-1} = B$;
2. Se B é tal $BA = I$ então $A^{-1} = B$;

Teorema 1.6.4

Seja A uma matriz quadrada. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível;
2. $Ax = b$ tem exatamente uma solução para cada matriz b;
3. $Ax = b$ é consistente para toda cada matriz b;

Exemplo

Sejam A e B as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre as inversas de A, B e AB.

Exemplo

Sejam A e B as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre as inversas de A, B e AB.

Teorema 1.6.5

Sejam A e B matrizes quadradas. Se AB for invertível então A e B também serão invertíveis.

Problema Fundamental

Encontre uma relação para os elementos de $b^T = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ tal que o sistema $Ax = b$ seja consistente, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal

Uma matriz D é dita diagonal se $(D)_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$.

Proposição

Uma matriz diagonal é inversível se e só se todas as entradas da sua diagonal principal são diferentes de zero. Em particular, para

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k \end{bmatrix}$$

temos

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_k \end{bmatrix}$$

Exemplo

Para a matriz A abaixo, calcule A^2 e A^3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

Uma matriz A é dita *triangular superior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i > j$, i.e., se todas as entradas abaixo da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular Inferior

Uma matriz A é dita *triangular inferior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i < j$, i.e., se todas as entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular Inferior

Uma matriz A é dita *triangular inferior* se $(A)_{ij} = 0$ para todo $i < j$, i.e., se todas as entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular

Uma matriz A é dita triangular se ela for ou triangular superior ou triangular inferior.

Teorema 1.7.1

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);
3. Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas da diagonal principal são todas não nulas;

Teorema 1.7.1

1. A transposta de uma matriz triangular inferior (superior) é uma matriz triangular superior (inferior);
2. O produto de matrizes triangulares inferiores (superior) é uma matriz triangular inferior (superior);
3. Uma matriz triangular é invertível se e somente se suas entradas da diagonal principal são todas não nulas;
4. A inversa de uma matriz triangular inferior (superior) invertível é uma matriz triangular inferior (superior).