Iniciado em	quarta-feira, 28 jun. 2023, 20:24
Estado	Finalizada
Concluída em	quarta-feira, 28 jun. 2023, 20:24
Tempo empregado	15 segundos
Notas	0,00/6,00
Avaliar	**0,00** de um máximo de 10,00(**0**%)

Questão **1**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Calcule a integral $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2 dx \ + \dfrac{z^2}{y} \, dy + 2z\ln(y)dz.$

Escolha uma opção:

- a. $12\ln(2)$
- b. $7\ln(2)$
- c. $5\ln(2)$
- d. $9\ln(2)$
- e. $5\ln(2)$

Sua resposta está incorreta.

Resposta:

Aplicando o teste de exatidão:

Fazemos $M = 3x^2$, $N = \frac{z^2}{y}$ e $P = 2z\ln(y)$

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2z}{y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y}$

Essas igualdades nos dizem que $3x^2dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z\ln(y)dz$ é exata, assim

$3x^2dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z\ln(y)dz = df$

para alguma função f e o valor da integral é $f(1,2,3) – (1,1,1)$.

Encontramos f a menos de uma constante integrando as equações

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z^2}{y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\ln(y)$

A partir da primeira equação, obtemos

$f(x, y, z) = x^3 + g(y, z)$.

A segunda nos fornece

$g(y, z) = z^2 \ln(y) + h\,(z)$

Então $f(x, y, z) = x^3 + z^2 \ln(y) + h\,(z)$

A partir da terceira temos que

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\ln(y) + h'\,(z)$

$h'\,(z) = 0$

$h\,(z) = C$

Portanto

$f(x, y, z) = x^3 + z^2 \ln(y) + C$

O valor da integral de linha é independente do caminho tomado de $(1, 1, 1)$ a $(1, 2, 3)$ e é igual a

$f(1, 2, 3) - f(1, 1, 1)$

$= (1 + 9\ln(2) + C) - (1 + 0 + C)$

$= 9\ln(2)$

A resposta correta é: $9\ln(2)$

Questão **2**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Utilize o teorema de Green para encontrar a circulação em sentido anti-horário para o campo $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ e a curva C (o triângulo limitado por $y = 0$, $x = 3$, $y = x$).

Resposta:

Resposta:

Primeiramente devemos definir nosso M e N:

$M = y^2 - x^2$ e $N = x^2 + y^2$

Circulação:

Neste caso podemos usar o Teorema de Green. Aplicaremos os valores na equação $\iint\limits_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA$.

Primeiro, nós calculamos:

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

Agora, podemos calcular a integral:

$\int_0^3 \int_0^x 2x - 2y \, dydx$

$= \int_0^3 \left[2xy - \frac{2y^2}{2}\right]_0^x dx$

$= \int_0^3 2x^2 - x^2 \, dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$

$= \frac{2(3)^3}{3} - \frac{(3)^3}{3} = \frac{2(27)}{3} - \frac{(27)}{3}$

$= 18 - 9 = 9$

A resposta correta é: 9

Questão **3**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Qual a área da porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\sqrt{7}\pi}{2}$
- b. $\frac{\sqrt{5}\pi}{3}$
- c. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$
- d. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$
- e. $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

Sua resposta está incorreta.

Resposta:

Podemos usar a parametrização explicita:

$$z = f(x, y) \qquad z = \frac{2-y}{2}$$

Definindo os parâmetros:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

$$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (rcos\theta)\mathbf{i} + (rsen\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{2 - rsen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Fazendo a Derivada Parcial de r:

$$\vec{\mathbf{r}}_r = (cos\theta)\mathbf{i} + (sen\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{sen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Fazendo a Derivada Parcial de θ:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-rsen\theta)\mathbf{i} + (rcos\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{rcos\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial temos:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ cos\theta & sen\theta & -\frac{sen\theta}{2} \\ - -rsen\theta & rcos\theta & -\frac{rcos\theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-rsen\theta cos\theta}{2} + \frac{sen\theta rcos\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{rsen^2\theta + rcos^2\theta}{2}\right)\mathbf{j} + \left(rcos^2\theta + rsen^2\theta\right)\mathbf{k}$$

Simplificando:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{j} + (r)\mathbf{k}$$

Calculando o diferencial da área de superficie:

$$d\sigma = \|\, \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \,\| \; dr \; d\theta$$

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Calculando a área pela fórmula diferencial para área da superfície $A = \iint\limits_S \, d\sigma$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{5}r}{2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sqrt{5}r^2}{4} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{4} \, d\theta \\ &= \left. \frac{\sqrt{5}\theta}{4} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \end{aligned}$$

A resposta correta é: $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

Questão **4**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\pi a^4}{5}$
- b. $\frac{\pi a^3}{6}$
- c. $\frac{\pi a^2}{6}$
- d. $\frac{\pi a^2}{3}$
- e. $\frac{\pi a^4}{4}$

Sua resposta está incorreta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta) + (a\cos\phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que ϕ e θ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a ϕ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (a\sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a θ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a^2\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a^2\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}.$$

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3\cos^2\phi\sin\phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a\cos\phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada S na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2\phi\sin\phi d\theta d\phi$.

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$

Questão **5**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Utilize a integral de superfície no teorema de Stokes para calcular a circulação do campo $\vec{\mathbf{F}}$ ao redor da curva C na direção indicada.

$\vec{\mathbf{F}} = x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$, onde C é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, no sentido anti-horário quando vista de cima.

- a. 8π
- b. 3π
- c. 4π
- d. -8π
- e. -4π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Primeiro, calculamos o rotacional: $\mathrm{rot}\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 3x^2y^2\mathbf{k}$. Como $\vec{\mathbf{n}} = \frac{2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{4}$,

então $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\frac{3}{4}x^2y^2z$. Dessa forma, $d\sigma = \frac{4}{z}\,dA$. Portanto,

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int\int_R \left(-\frac{3}{4}x^2y^2z\right)\left(\frac{4}{z}\right)\,dA = -3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2\cos^2\theta)(r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = -3\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^2 (\cos\theta\,\sin\theta)^2\,d\theta = -32\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2$$

A resposta correta é:
-8π

Questão **6**

Não respondido

Vale 1,00 ponto(s).

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Esfera $\vec{\mathbf{F}} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$, D: A esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

- a. 31π
- b. 32π
- c. 30π
- d. 29π
- e. 33π

Sua resposta está incorreta.

Solução: Primeiro fazemos a derivada parcial

$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x, \frac{\partial}{\partial y}(xz) = 0,\backslash, \frac{\partial}{\partial z}(3z) = 3$. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = 2x + 3$.

$Flux = \int\int_D \int(2x+3)\, d\vec{\mathbf{V}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2}(2\rho\ \sin\ \phi\ \cos\ \theta + 3)(\rho^2\ \sin\ \phi)\, d\rho\, d\,\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^4}{2}\sin\ \phi\ \cos\ \theta + \rho^3\right]_0^2 \sin\ \phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(8$

A resposta correta é:
32π