

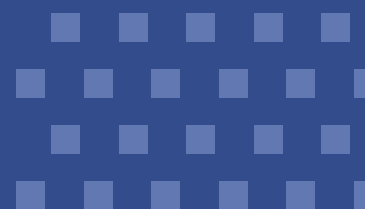
CÁLCULO

# DERIVADAS

*meSalva!*



ENGENHARIA



COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



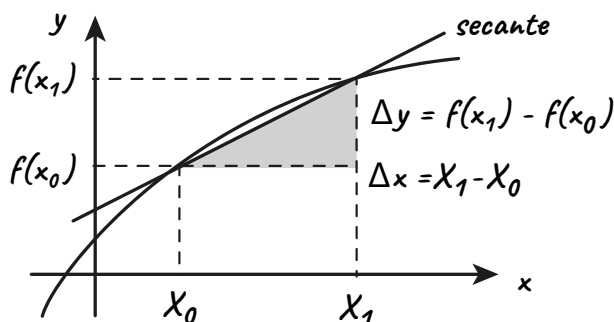
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 1 DEFINIÇÃO DE DERIVADAS

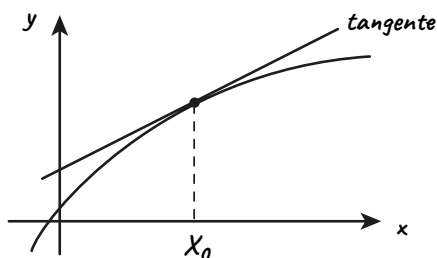
Graficamente, podemos definir a derivada de um ponto como a inclinação da reta tangente  $y=f'(x)$  ou a taxa de variação instantânea de  $y$  em relação a  $x$ .

Suponha que temos uma função  $f(x)$  e queremos saber a taxa de variação da nossa função em um ponto inicial  $x_0$ , associado a  $y_0 = f(x_0)$ , em relação a um ponto mais para frente,  $x_1$ , com  $y_1 = f(x_1)$ .

Vamos ligar os dois pontos por uma reta que cruza a função, chamada de reta secante. Podemos determinar a variação entre esses dois pontos medindo a variação  $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$  e a variação  $\Delta x = x_1 - x_0 = h$ , sendo a taxa de variação o coeficiente angular da reta  $a$ , calculado através de  $a = \Delta y / \Delta x$ .



Se quisermos uma taxa instantânea de variação, precisamos aproximar ao máximo os pontos  $x_0$  e  $x_1$ , como se  $x_1$  caminhasse em direção a  $x_0$ , com uma variação mínima de  $\Delta y$  e  $\Delta x$ . Ou seja, queremos uma distância desprezível entre  $x_0$  e  $x_1$ , fazendo  $h$  tender a zero. Assim, obtemos uma reta tangente ao ponto  $x_0$  e, utilizando limites, definimos:



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

## 2 DIFERENCIABILIDADE

Para que a função  $f(x)$  seja diferenciável, isto é, derivável, em  $x_0$  deverá existir o limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

LEMBRETE! Não esqueça que os limites laterais também devem existir e devem ser iguais!

Podemos ter casos em que a função  $f(x)$  é contínua em  $x_0$ , porém não é derivável em  $x_0$ . Os dois casos mais comuns que temos são apresentados abaixo.

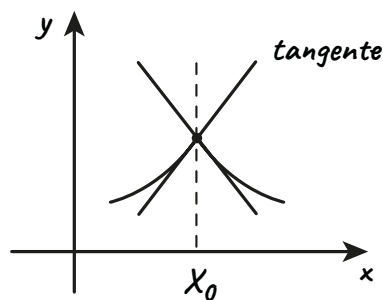
COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



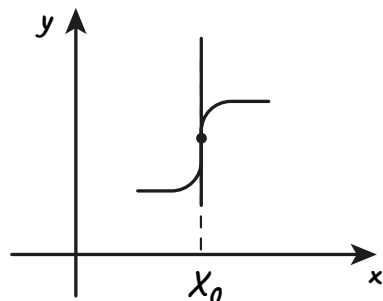
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

PONTO DE BICO:



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

PONTO DE TANGÊNCIA VERTICAL:



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

### 3 TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO

Para o nosso estudo ficar mais fácil, temos uma tabela resumo com as derivadas mais importantes!

$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \operatorname{tg} x$
$\frac{d}{dx} (C) = 0$	$\frac{d}{dx} (\cotg x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx} (a^x) = (\ln a)a^x$	$\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} x) = -\cotg x \operatorname{cosec} x$
$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} (\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx} (\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \cotg x = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \sec x = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = -\frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 4 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Podemos fazer o cálculo de derivadas pela definição de derivada (vimos lá em cima), ou usando regrinhas que facilitam muito mais a nossa vida! Então vamos lá dar uma olhada nas propriedades e regras básicas de derivação!

### SOMAS E SUBTRAÇÕES

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \pm \frac{d}{dx} [g(x)]$$

### REGRA DO PRODUTO

$$\frac{d}{dx} [f(x)g(x)] = f(x) \frac{d}{dx} [g(x)] + g(x) \frac{d}{dx} [f(x)]$$

### REGRA DO QUOCIENTE

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx} [f(x)] - f(x) \frac{d}{dx} [g(x)]}{[g(x)]^2}$$

### REGRA DA CADEIA

Usamos essa regra quando queremos derivar uma função composta por duas funções.

$$\frac{d}{dx} [f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Exemplo:

Derive a seguinte função:

$$h(x) = \text{sen}(x^2 + 2)$$

Temos

$$f = \text{sen } x \rightarrow f' = \cos x$$

$$g = x^2 + 2 \rightarrow g' = 2x + 0$$

Substituindo na equação:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x$$

Outra maneira de fazermos a regra da cadeia é a seguinte:

1. Identifique quantas funções existem na composição.
2. Derive de fora para dentro.

Exemplo:

Derive a seguinte função:

$$h(x) = \text{sen}(x^2 + 2)$$

Nossa função "de fora" é *sen* e a "de dentro" é  $x^2 + 2$ .

Primeiro, vamos derivar *sen* e então multiplicar pela derivada de  $x^2 + 2$ :

$$h'(x) = \cos(x^2 + 2) \cdot 2x$$

E assim já chegamos rapidinho na resposta!

## COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 5 DERIVADA IMPLÍCITA

Usamos a derivação implícita quando não conseguimos isolar as variáveis da função.

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}$$

O que vamos fazer aqui é fixar embaixo uma das variáveis que queremos encontrar ( $dx$ ) e em cima deixaremos a variável que está sendo derivada ( $du$ ). Nós vamos derivar as funções em relação às variáveis e depois isolar  $du/dx$ , para obtermos a derivada.

Exemplo:

Calcule  $dy/dx$ :

$$x^2 + y^3 = \cos x + \ln y$$

Vamos calcular as derivadas dos dois lados da equação:

$$2x \cdot \frac{dx}{dx} + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Iremos deixar todas variáveis que multiplicam  $dy/dx$  de um mesmo lado da equação (lembre-se  $dx/dx=1$ ):

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\sin x - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} (3y^2 - \frac{1}{y}) = -\sin x - 2x$$

Agora vamos isolar  $dy/dx$  para obtermos a resposta final:

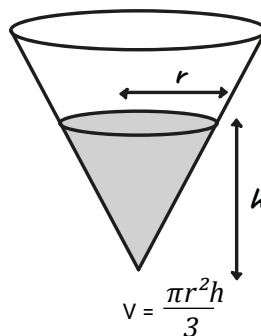
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x + 2x) \cdot y}{3y^3 - 1}$$

## 6 TAXAS RELACIONADAS

Sabe quando temos muitas coisas variando e dependendo umas das outras. Parece um caos né?

Bom, chamamos de Taxas Relacionadas quando temos quantidades que estão variando em relação a outras, as quais nós conhecemos as taxas de variação. E, geralmente, temos duas ou mais grandezas variáveis relacionadas entre si por uma equação.

Um exemplo clássico é o escoamento de um reservatório em formato de um cone invertido, como na figura abaixo, onde o volume, a altura e o raio dependem do tempo e podem ser relacionadas pela equação do volume de um cone.



Podemos resolver problemas com taxas relacionadas seguindo os seguintes passos:

1. Identifique cada quantidade que varia com o tempo e outras que possam ser relevantes para a resolução do problema.

## COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

- Indique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Analise cada taxa como uma derivada.
- Encontre uma relação entre essas variáveis e equacione-as. Geralmente usamos geometria para isso.
- Derive, através da derivação implícita, ambos os lados da equação em relação ao tempo. Assim obtemos uma relação entre as taxas conhecidas e a taxa desconhecida.
- Substitua os valores conhecidos das taxas e das variáveis e resolva a equação encontrada para a taxa de variação desconhecida.

## 7 DERIVADA PRIMEIRA E SEGUNDA

Vamos usar um esqueminha para a interpretação gráfica das derivadas primeira e segunda!

	+	-	0	$\neq$
$f(x)$	Acima do eixo x	Abaixo do eixo x	Sobre o eixo x Raízes	Fora do domínio
$f'(x)$	Crescente	Decrescente	Ponto crítico Máximos/mínimos	Não diferenciável Bico/Ponto de tangência vertical
$f''(x)$	Concavidade positiva	Concavidade negativa	Suspeito de ser um ponto de inflexão	Suspeito de ser um ponto de inflexão

DERIVADA PRIMEIRA	DERIVADA SEGUNDA	FUNÇÃO		GRÁFICO
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$	crescente	concavidade $\uparrow$	
	$f''(x) = 0$		inflexão	
	$f''(x) < 0$		concavidade $\downarrow$	
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$	decrescente	concavidade $\uparrow$	
	$f''(x) = 0$		inflexão	
	$f''(x) < 0$		concavidade $\downarrow$	
$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$	mínimo		
	$f''(x) = 0$	inflexão		
	$f''(x) < 0$	máximo		

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Nota:

$f(x) = \pm \infty$  fora do domínio

$f'(x) = \pm \infty$  não diferenciável ou bico/ponto de tangência vertical

$f''(x) = \pm \infty$  suspeito de ser um ponto de inflexão

Obs.: O ponto de inflexão ocorre quando a derivada segunda muda de sinal!

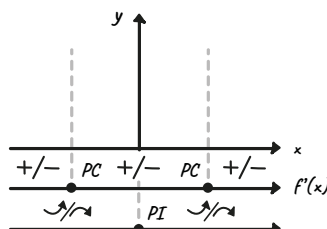
## 8 ESBOÇO DE GRÁFICOS

Acompanhe o passo a passo abaixo para fazer o esboço de gráficos utilizando conceitos de limites e derivadas.

1. Encontrar pontos de interesse de  $f(x)$ , se possível, como o valor da função quando  $x=0$  e as raízes da função. Podem ser difíceis de encontrar, mas vamos para o passo 2!
2. Encontrar as assíntotas horizontais. Lembrando que para achar as assíntotas horizontais, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = K \text{ (constante)}$$

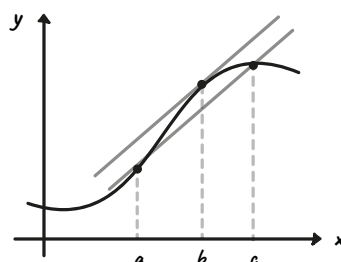
3. Procurar as assíntotas verticais. Encontramos as nossas assíntotas verticais quando nossa função não existe, como no caso de divisão por zero ou raízes de números negativos.
4. Buscar pelos máximos e mínimos. Para isso, derivamos a  $f(x)$ , igualamos a zero, encontramos os pontos críticos e analisamos o sinal.
5. Analisar a concavidade. Para isto, derivamos duas vezes e encontramos a derivada segunda  $f''(x)$ , igualando-a a zero para obtermos os suspeitos de inflexão e então analisamos o sinal.
6. Traçar o esboço. Para facilitar o trabalho, desenhemos, abaixo do eixo  $x$ , duas linhas, uma para  $f'(x)$  e outra para  $f''(x)$ , colocando, respectivamente, os pontos críticos e pontos de inflexão, juntamente com as análises de sinais. Vamos dar uma olhada no desenho abaixo!



## 9 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O teorema diz que, entre dois pontos  $[a, b]$  de uma função diferenciável  $f$ , há um ponto  $c$  no qual a derivada  $f'(c)$  é a inclinação da reta tangente paralela à reta secante que passa pelos pontos  $[a, b]$ .

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 10 REGRA DE L'HÔPITAL

Aplicamos a regra de L'Hôpital quando o  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  resultar em uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ . A definição da regra é a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ela nos diz que o limite de funções racionais é igual ao limite da derivada do numerador sobre a derivada do denominador com  $x \rightarrow a$ . Ou seja, temos que derivar a função do numerador  $f(x)$  e a função do denominador  $g(x)$  e tentar encontrar o limite. Caso ainda resulte em uma indeterminação, devemos continuar derivando.

Exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} = ?$$

Note que temos uma indeterminação do tipo  $\frac{0}{0}$ , então vamos usar a regra de L'Hôpital para resolver esse limite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x + 2} \\ \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 2} &= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

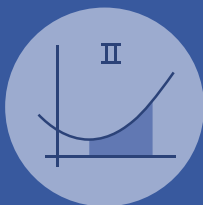




# CONHEÇA A NOVA ENGENHARIA

Com os cursos do Me Salva! você fica mais perto do seu diploma, descubra qual o curso ideal para você:

**Cálculo Diferencial  
e Integral**



A partir de  
**R\$ 36,00**

**A solução completa  
para o seu semestre**



A partir de  
**22,90**

**A solução completa  
para o seu ano**



A partir de  
**19,90**

**CONHECER CURSOS**