Iniciado em	quarta-feira, 31 mai. 2023, 21:48
Estado	Finalizada
Concluída em	quarta-feira, 31 mai. 2023, 21:54
Tempo empregado	6 minutos 49 segundos
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Encontre uma função potencial f para o campo $\vec{\mathbf{F}} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$.

Escolha uma opção:

- a. $f(x, y, z) = 3xe^{y+2z} + C$
- b. $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$ ✔
- c. $f(x, y, z) = 2xe^{y+2z} + C$
- d. $f(x, y, z) = 2xe^{y+3z} + C$
- e. $f(x, y, z) = xe^{y+3z} + C$

Sua resposta está correta.

Solução:

A definição de função potencial é:

$$\vec{\mathbf{F}} = \nabla f(x, y, z)$$

Sendo que ∇ é:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Então, a questão quer que achemos a função f de forma:

$$\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y+2z} \rightarrow f(x, y, z) = xe^{y+2z} + g(y, z) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y+2z} + \frac{\partial g}{\partial y} = xe^{y+2z} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow f(x, y, z) = xe^{y+2z} + h(z) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 2xe^{y+2z} + h'(z) = 2xe^{y+2z}$$
$$\rightarrow h'(z) = 0 \rightarrow h(z) = c \rightarrow f(x, y, z) = xe^{y+2z} + c$$

Resposta: Concluímos que $\vec{\mathbf{F}}$ é um campo vetorial conservativo e que sua função potencial é $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + c$.

A resposta correta é: $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Calcule a integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right)\, dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\, dy - \left(\frac{y}{z^2}\right)\, dz.$$

Resposta: 0

Resolução:

$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right)\, dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\, dy - \left(\frac{y}{z^2}\right)\, dz$

A partir da integral dada teremos que:

$M = \frac{1}{y}$

$N = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$

$P = \left(-\frac{y}{z^2}\right)$

Como :

$\frac{\partial}{\partial y}(M) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial x}(N) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}(P) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial}{\partial z}(N) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{z^2}$

$\frac{\partial}{\partial z}(M) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(P) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{z^2}\right) = 0$

A função na forma diferencial é exata.

Como $\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\partial}{\partial x}(M)$, teremos:

$\int \frac{\partial}{\partial x}(f) = \int (M)\, dx = \int \frac{1}{y}\, dx = \frac{x}{y} + g(y,z)$

Derivando $f(x,y,z)$ em relação à y:

$\frac{\partial}{\partial y}(f) = -\frac{x}{y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(g)$

Como $\frac{\partial}{\partial y}(f) = N$ teremos:

$-\frac{x}{y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(g) = \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y}(g) = \frac{1}{z}$

$\int \frac{\partial}{\partial y}(g) = \int \frac{1}{z}\, dy$

$g(x,y) = \frac{y}{z} + h(z)$

Logo:

$f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + h(z)$

Derivando $f(x, y, z)$ em relação à z:

$\frac{\partial}{\partial z}(f) = -\frac{y}{z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(h)$

Como $\frac{\partial}{\partial z}(f) = P$ teremos:

$-\frac{y}{z^2} + \frac{\partial}{\partial z}(h) = -\frac{y}{z^2}$

$\frac{\partial}{\partial z}(h) = 0$

Integrando $\frac{\partial}{\partial z}(h)$, teremos $h(z) = C$, em que C é uma constante.

Assim $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + C$

Resolvendo a Integral:

$\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(\frac{1}{y}\right) \, dx + \left(\frac{1}{z}\right) - \left(\frac{x}{y^2}\right) \, dy - \left(\frac{y}{z^2}\right) \, dz$

$= f(2, 2, 2) - f(1, 1, 1)$

$= \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2} + C\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + C\right) = 0$

A resposta correta é: 0

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Utilize a fórmula da área do teorema de Green $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ para encontrar a área do astroide $\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(\cos^3 t\right)\mathbf{i} + \left(\sin^3 t\right)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Escolha uma opção:

- a. $\frac{3\pi}{8}$ ✔
- b. $\frac{3\pi}{2}$
- c. $\frac{7\pi}{2}$
- d. $\frac{5\pi}{2}$
- e. $\frac{5\pi}{8}$

Sua resposta está correta.

Solução:

i) Derivando x e y temos:

$$M = x = \cos^3 t \to dx = -3\cos^2 t\ \sin t$$

$$N = y = \sin^3 t \to dy = 3\sin^2 t \cos t$$

ii) De acordo com o Teorema de Green faz-se necessário respeitar o seguinte formato:

$$Mdy - Ndx$$

Realizando a substituição, obtemos:

$\cos^3 t\,(3\sin^2 t\cos t) - \sin^3 t\,(-3\sin^2 t\ \sin t)$.

iii) Simplificando:

$3\sin^2 t\ \cos^4 t + 3\cos^2 t\ \sin^4 t = 3\sin^2 t\ \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 3\sin^2 t\ \cos^2 t$

iv) Dado que a área da região R é $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$, temos que após as devidas substituições a integral é:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\left[3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{8}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{8}\left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi}\cos(4t)dt\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{8}(t+\sin(4t))\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Resposta = $\frac{3\pi}{8}$

A resposta correta é: $\frac{3\pi}{8}$

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Use o terema de Green para resolver a integral $\oint_C 6y + xdx + (y + 2x)dy$ sobre a circunferência $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

Escolha uma opção:

- a. -16π ✔
- b. -8π
- c. -6π
- d. -11π
- e. -12π

Sua resposta está correta.

Resposta:

Logo $r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

Passo 1: Transforma a integral de linha em integral dupla

$$\int_C (6y + x)dx + (y + 2x)dy = \iint_C \left(\frac{\rho N}{\rho x}\right) - \left(\frac{\rho M}{\rho y}\right) dx\, dy$$

$$\frac{\rho N}{\rho x} = \frac{\rho y + 2x}{\rho x} = 2$$

$$\frac{\rho M}{\rho y} = \frac{\rho 6y + x}{\rho y} = 6$$

$$\oint_C M(8y + x)dx + N(y + 2x)dy \iint_R (2-6)\, dx\, dy \Rightarrow \iint_R -4dxdy$$

Usando a área do círculo para concluir a integral temos:

$$\iint_R -4dxdy = -4\pi r^2 = -4\pi(2)^2 = -16\pi$$

A resposta correta é: -16π

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Aplique o teorema de Green para calcular a integral $\oint_C y^2dx + x^2dy$ sobre o triângulo delimitado pelas retas $x = 0, x + y = 1$ e $y = 0$.

Resposta: 0

Resposta:

Para iniciar, sabendo que como M multiplica dx e N multiplica dy, temos:
$M = y^2$ e $N = x^2$.

Para podermos usar o teorema de Green, temos que ter os valores das derivadas de M em função de y e N em função de x, logo:
$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$.

A seguir, para utilizar o teorema de Green, temos que fazer a integral das derivadas encontrada, então temos:
$\iint_R (2x - 2y)dydx$.

Para concluir, vamos lembrar que o triângulo é limitado por $x = 0$, $x + y = 1$ e $y = 0$, logo temos que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (2x - 2y)dydx = \int_0^1 (-3x^2 + 4x - 1)dx$$
$$= \left[-x^3 + 2x^2 - x\right]\Big|_0^1$$
$$= -1 + 2 - 1$$
$$= 0.$$

A resposta correta é: 0