2ª AP - PROBABILIDADE

ALANNA MARIA MACHADO ALVES PAIVA
421942

01) $f(x) = \begin{cases} 0{,}15\, e^{-0{,}15(x-0{,}5)}, & x \geq 0{,}5 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$

a) Para ser uma f.d.p tem-se que:

1) $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Logo, e^{-x} é positivo, então, $0{,}15\, e^{-0{,}15(x-0{,}5)}$ também será positivo para qualquer valor de x.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0{,}15} 0\,dx + \int_{0{,}5}^{\infty} 0{,}15\, e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\,dx = 0{,}15 \cdot \int_{0{,}15}^{\infty} e^{-0{,}15(x-0{,}5)}\,dx =$$

$$= 0{,}15 \cdot \int -\frac{1}{0{,}15} e^{u}\,du = 0{,}15 \cdot \left(\frac{-1}{0{,}15} \cdot \int e^{u}\,du\right) = 0{,}15 \left(\frac{-1}{0{,}15} \cdot e^{u}\right) =$$

SUBSTITUINDO

$u = -0{,}15(x-0{,}5)$

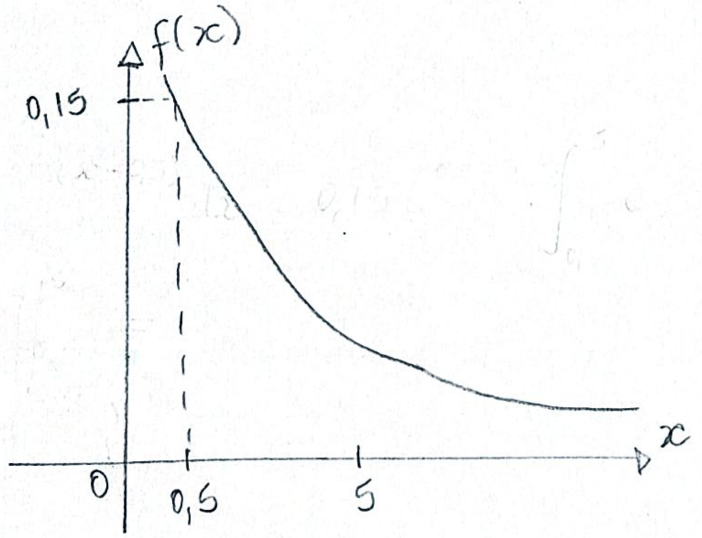
$du = -0{,}15\,dx$

$$= 0{,}15 \cdot \frac{-1}{0{,}15} \cdot e^{-0{,}15(x-0{,}5)} \cong -0{,}999999\, e^{-0{,}16(x-0{,}5)} + C$$

CALCULANDO OS LIMITES: $\lim_{x \to 0{,}5} \left(-0{,}999999\, e^{-0{,}15(0{,}5-0{,}5)}\right) -$

$\lim_{x \to \infty} \left(-0{,}999999\, e^{-0{,}15(\infty-0{,}5)}\right) = 0 - (-0{,}999999) \cong 0{,}999999 \cong 1$

b)



b) $P(X \leq 5)$

$$\int_{-\infty}^{0,5} 0,15\, e^{-0,15(x-0,5)}\, dx = 0,15 e^{0,075} \int_{0,5}^{5} e^{-0,15x}\, dx =$$

$u = -0,15(x-0,5)$

$du = -0,5\, dx$

$x = 0,5 \Rightarrow u = 0$

$x = 5 \Rightarrow u = -0,675$

$$= 0,15 e^{0,075} \int_{0,5}^{5} e^{-0,15x}\, dx = 0,15\, e^{0,075} \cdot \left[-\frac{1}{0,15} e^{-0,15x} \right] \Bigg|_{0,5}^{5} =$$

$$= e^{0,075} \left(-e^{-0,75} + e^{-0,075} \right) = 1,078(-0,472 + 0,928) =$$

$$= 0,491$$

c) $$\int_{0,5}^{x} 0,15\, e^{-0,15(x-0,5)}\, dx = 0,15 \int_{0,5}^{x} e^{-0,15(x-0,5)}\, dx = 0,15 \cdot \left[\frac{-1}{0,15} \int_{0}^{-0,15(x-0,5)} e^{u}\, du \right] =$$

SUBSTITUIÇÃO

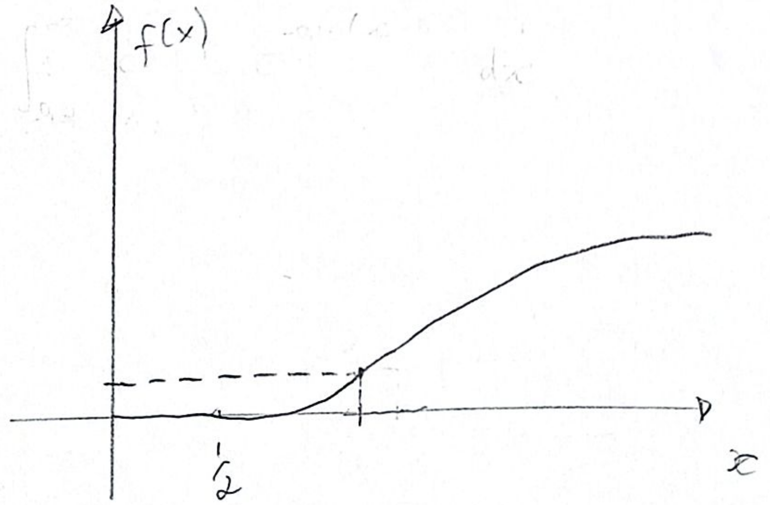
$u = -0,15(x-0,5)$

$dx = \dfrac{du}{0,15}$

$$= -\left[e^{u} \right]^{-0,15(x-0,5)} = -e^{-0,15(x-0,5)} + 1 .$$

Logo, a f.d.a é:

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-0,15(x-0,5)} & , \text{ se } x \geq 0,5 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$



d) Por ser uma distribuição exponencial, temos:

$E(X) = \beta$ e $Var(X) = \beta^2$

$\beta \Rightarrow 0,15 = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{3}{20} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow 3\beta = 20 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{20}{3}}$

$E(X) = 20/3$

$Var(X) = \beta^2 = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{400}{9}}$

02) media = 1,25 , desvio = 0,46

a) $P(1 \leq X \leq 1{,}75) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{1-1{,}25}{0{,}46} \leq Z \leq \frac{1{,}75-1{,}25}{0{,}46}\right)$

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$= P(-0{,}54 \leq Z \leq 1{,}09) = \underbrace{0{,}861 - 0{,}2946}_{\text{dados da tabela}} = 0{,}5675$

b)

$P(X>2) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{2-1{,}25}{0{,}46}\right) = P(Z > 1{,}63) = 1 - P(1{,}63) = 0{,}0516$

dado da tabela

03)

a) Para provar que a moeda é honesta, precisamos refutar essa teoria, ou seja, supondo que a moeda não favorece nem cara e nem coroa, isto é, $p = 1/2$, com isso, atribuimos ao modelo binomial com $P(X \geq 36)$, e a partir do teste de hipotese , será rejeitado ou não.

Sendo H_0: moeda honesta e H_1: moeda viciada

$X \sim$ binomial $(50, p)$, em 50 lançamentos, 36 foram caras

Tipos de Erro:

1 - Rejeitar H_0 quando H_0 é verdadeiro.

2 - Não rejeitar H_0 quando H_0 é falso.

$P(\text{Erro tipo 1}) = P(\bar{X} \in RC \mid H_0 \text{ é falso}) = \beta$

$P(\text{Erro tipo 2}) = P(\bar{X} \in RC \mid H_0 \text{ é verdadeiro}) = \alpha$

Se $RC = 36$ caras, a moeda é desonesta

$\alpha = P(X = 36 \mid p = 0{,}5) = 0{,}0013$

Como a probabilidade de se obterem 36 ou mais caras é de 1 por 1000, ou seja, pouco provável, logo, a moeda é honesta e H_0 não será rejeitado.

03)

b) $n = 50$

$p = 0{,}5$

$E(X) = p$

$Var(X) = \dfrac{p(1-p)}{50}$

Representando $X \sim b(50, p)$ como X de Bernoulli, temos:

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{36}{50}\right) \Rightarrow P(\bar{X} \geq 0{,}72)$$

Transformando em Normal: $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$$\frac{0{,}72 - 0{,}5}{\sqrt{\dfrac{1/4}{50}}} = \frac{0{,}22}{\dfrac{1}{\sqrt{200}}} = 3{,}11$$

$$P(Z \geq 3{,}11) = 1 - P(Z \leq 3{,}11) = 1 - 0{,}99906 = \boxed{0{,}00094}$$

Para a distribuição binomial, temos que:

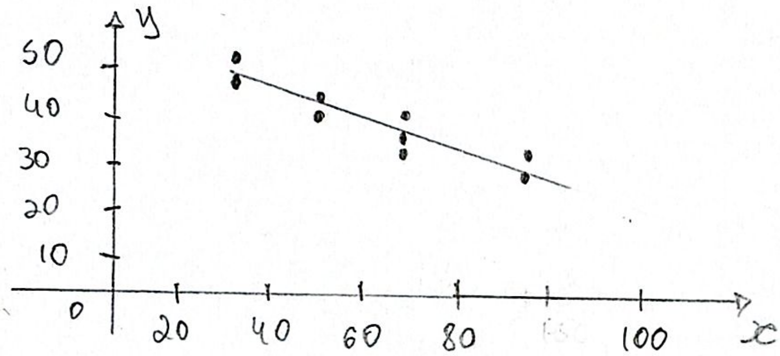
$q = 1 - p = 0{,}5$

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$$

$$P(X \geq 36 \mid n = 50, p = 0{,}5) = 0{,}0013 = \boxed{0{,}13\,\%}$$

04)

a) Como $x = \{30, 30, 50, 50, 50, 70, 70, 70, 90, 90\}$ e $y = \{38, 43, 32, 26, 33, 19, 27, 23, 14, 21\}$, o gráfico fica:



600
255

b)

$\beta = \bar{y} - \alpha \bar{x}$

$$\alpha = \frac{n \cdot \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2} =$$

$\sum x_i = 600$; $\hat{x} = \dfrac{\sum x_i}{10} = \dfrac{600}{10} = 60$

$\sum y_i = 276$; $\bar{y} = \dfrac{\sum y_i}{10} = \dfrac{276}{10} = 27{,}6$

$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 3600$; $\sum y_i^2 \cong 761{,}76$

$\sum_{1}^{10} x_i y_i = 14960$

Logo, $\dfrac{10 \cdot 14960 - (600 \cdot 276)}{10 \cdot 40200 - 360000} = \dfrac{-1600}{42000} = \boxed{-0,38095}$

$\beta = \bar{y} - \alpha \bar{x} \Rightarrow \beta = 27,6 - (-0,38095) \cdot 60 = \boxed{50,457}$

$$\boxed{\hat{y} = 50,457 - 0,38095x}$$

e) Com os dados obtidos, é possível observar que o modelo segue uma linearidade em que y depende x.

d)

Assumindo $\hat{y} = 0$, temos que:

$$50,457 - 0,38095x = 0 \Rightarrow x = 132,43°$$

05)

a) Assumindo $x = 20$, y será:

$$\mu_{y|20} = 65 - 1,20 \cdot (20) = 41$$

Se $x = 20$, então $N(21, 64)$, logo, $P(y > 50 | x = 20) = P\left(Z > \frac{50-41}{8}\right)$

$= 1 - \Phi(1,13) \doteq \boxed{0,1292}$

↳ dado da tabela

b)

$$\mu_{y|25} = 65 - 1,20 \cdot (25) = 35$$

$$P(y > 50 | x = 25) = P\left(Z > \frac{50-35}{8}\right) = 1 - \Phi(1,88) = \boxed{0,0301}$$

↓ dado da tabela

e) $x = 24$

$y_1 - y_2 = (25(-1,2) + 65) - 24(-1,2) + 65) = 35 - 36,2 = -1,2$

$E(y_1 - y_2) = \beta_0 + \beta_1(25) - \beta_0 + \beta_1(24) = \beta_1 = \boxed{-1,2}$

$Var(y_1 - y_2) = \sigma^2 + \sigma^2 = 8^2 + 8^2 = 64 + 64 = \boxed{128}$

$DP(y_1 - y_2) = \sqrt{Var(y_1 - y_2)} = \sqrt{128} \doteq \boxed{11,314}$

d) $P(Y_1 - Y_2 > 0) = P\left(Z > \frac{0-(-1,2)}{11,314}\right) = P(Z > 0,11) = 0,4562$

$\mu = -1,2$

$\sigma = \sqrt{128}$

0,01