Iniciado em	sábado, 10 jun. 2023, 11:31
Estado	Finalizada
Concluída em	sábado, 10 jun. 2023, 11:37
Tempo empregado	6 minutos 1 segundo
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a parametrização da porção do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre os planos $x = 0$ e $x = 3$.

Escolha uma opção:

a. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$ ✔ $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

b. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

c. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

d. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} - 6\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

e. $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} - 6\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

Sua resposta está correta.

Solução:

Temos que $r = \sqrt{9} = 3$. Assim, temos que $y = 3\cos\theta$ e $z = 3\sin\theta$, pois $y^2 = 9\cos^2\theta$ e $z^2 = 9\sin^2\theta$ e assim, $9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta = 9(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 9$. Então, tomando $u = \theta$ e $v = x$ temos que a parametrização da superfície é dada por:

$r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

A resposta correta é: $r(u,v) = v\vec{\mathbf{i}} + 3\cos u\vec{\mathbf{j}} + 3\sin u\vec{\mathbf{k}}$, onde $0 \leq u \leq 2\pi$ e $0 \leq v \leq 3$

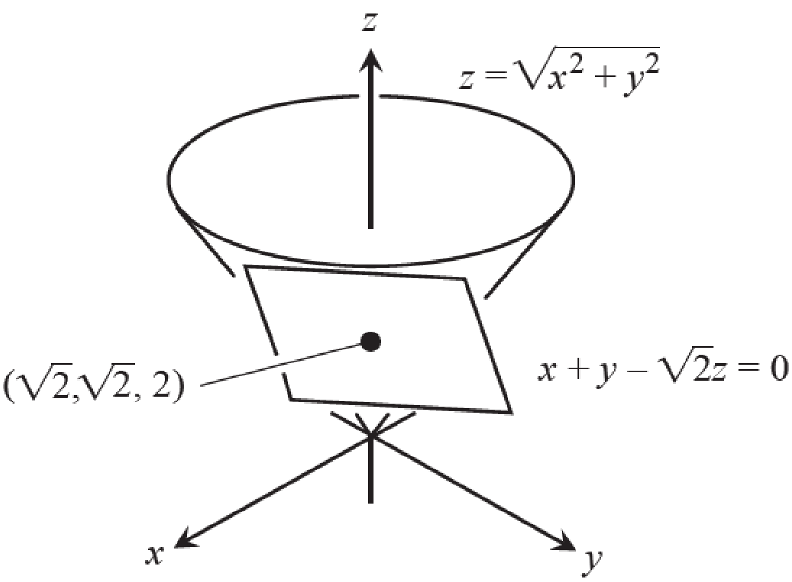
Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o plano tangente ao cone $\vec{\mathbf{r}}\,(r,\theta) = (r\cos(\theta))\,\mathbf{i} \;+\; (r\sin(\theta))\,\mathbf{j} \;+\; r\mathbf{k},\; r \geq 0,$ onde $0\; \leq \theta \leq 2\pi$, no ponto $P_0\,\left(\sqrt{2},\,\sqrt{2},\,2\right)$ que corresponde a $(r,\theta) \;=\; \left(2,\,\frac{\pi}{4}\right)$.

Veja uma ilustração abaixo:



Q.16.5.27

Escolha uma opção:

- a. $-x - y - \sqrt{2}z = 0$
- b. $-x + y - \sqrt{2}z = 0$
- c. $x + y - \sqrt{2}z = 0$ ✔
- d. $x - y - \sqrt{2}z = 0$
- e. $x + y + \sqrt{2}z = 0$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Temos que:

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial r} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\mathbf{i} + r\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\mathbf{j} + \mathbf{k} + \mathbf{k} - \sqrt{2}\mathbf{i} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Plano tangente:

$-\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}\right)\left(y - \sqrt{2}\right) + 2\,(z - 2) = 0$

$-\sqrt{2}x + 2 - \sqrt{2}y + 2 + 2z - 4 = 0$

$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2z = 0$

$x + y - \sqrt{2}z = 0$

A resposta correta é: $x + y - \sqrt{2}z = 0$

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual a área da porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\sqrt{7}\pi}{2}$
- b. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$
- c. $\frac{\sqrt{5}\pi}{3}$
- d. $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ ✔
- e. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Podemos usar a parametrização explicita:

$$z = f(x, y) \qquad z = \frac{2 - y}{2}$$

Definindo os parâmetros:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

$$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (rcos\theta)\mathbf{i} + (rsen\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{2 - rsen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Fazendo a Derivada Parcial de r:

$$\vec{\mathbf{r}}_r = (cos\theta)\mathbf{i} + (sen\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{sen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Fazendo a Derivada Parcial de θ:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-rsen\theta)\mathbf{i} + (rcos\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{rcos\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial temos:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ cos\theta & sen\theta & -\frac{sen\theta}{2} \\ --rsen\theta & rcos\theta & -\frac{rcos\theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-rsen\theta cos\theta}{2} + \frac{sen\theta rcos\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{rsen^2\theta + rcos^2\theta}{2}\right)\mathbf{j} + \left(rcos^2\theta + rsen^2\theta\right)\mathbf{k}$$

Simplificando:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{j} + (r)\mathbf{k}$$

Calculando o diferencial da área de superficie:

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| \; dr \, d\theta$$

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Calculando a área pela fórmula diferencial para área da superfície $A = \iint\limits_S \; d\sigma$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{5}r}{2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sqrt{5}r^2}{4} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{4} \, d\theta \\ &= \left. \frac{\sqrt{5}\theta}{4} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \end{aligned}$$

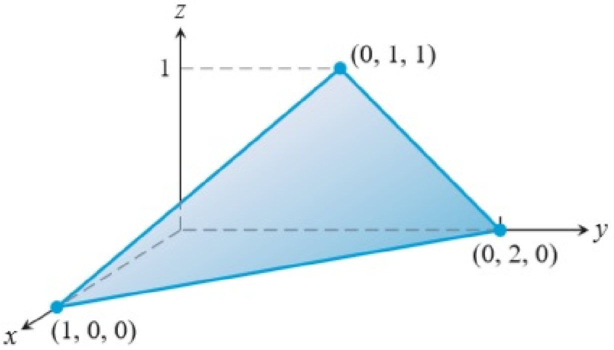
A resposta correta é: $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

Questão **4**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre a superfície triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 1, 1)$.



Escolha uma opção:

- a. $\frac{5}{\sqrt{6}}$
- b. $\frac{7}{3\sqrt{6}}$
- c. $\frac{1}{5\sqrt{6}}$ ✔
- d. $\frac{2}{\sqrt{6}}$
- e. $\frac{7}{5\sqrt{6}}$

Sua resposta está correta.

Solução:

Para uma superfície S fornecida implicitamente por $F(x, y, z) = c$, onde F é uma função continuamente derivável, com S acima de sua região fechada e limitada R no plano coordenado abaixo dela, a integral de superfície da função contínua G sobre S é fornecida pela integral dupla sobre R:

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(x, y, z) \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}}|}\ dA,$$

onde $\vec{\mathbf{p}}$ é um vetor unitário normal a R e $\nabla F \cdot \vec{\mathbf{p}} \neq 0$

Assim, temos:

$F(x, y, z) = 2x + y + z = 2$, $\qquad p = k$

E calculando o gradiente de F, temos:

$\nabla F = 2i + j + k$, onde $|\nabla F| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

e

$|\nabla F \cdot p| = 1$, assim como $d\sigma = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot p|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6} dydx.$

Assim, substituindo os valores na integral mostrada anteriormente e calculando esta, obtemos:

$$\Rightarrow \iint_S G d\sigma = \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} xy(2 - 2x - y)\sqrt{6} dydx = \sqrt{6} \int_0^1 \int_{1-x}^{2-2x} \left(2xy - 2x^2y - xy^2\right) dydx$$

$$= \sqrt{6} \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{2}{3}x^4\right) dx = \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{15}\right) = \sqrt{6}\frac{1}{30} = \frac{1}{5\sqrt{6}}$$

A resposta correta é: $\frac{1}{5\sqrt{6}}$

Questão **5**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\pi a^4}{5}$
- b. $\frac{\pi a^2}{6}$
- c. $\frac{\pi a^3}{6}$ ✔
- d. $\frac{\pi a^2}{3}$
- e. $\frac{\pi a^4}{4}$

Sua resposta está correta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta) + (a \cos\phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que ϕ e θ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a ϕ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a θ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi \\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\mathbf{k}$.

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3 \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a \cos\phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada S na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi.$$

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$