Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

Nome: ____ Matrícula:_______________

Avaliação Parcial 3 (AP3) - 11/07/23

1) Encontre as Transformadas de Laplace dos sinais abaixo e as respectivas regiões de convergência. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) $x(t) = e^{-3t}u(t-4)$

b) $x(t) = e^{3t}\frac{d}{dt}(te^{-2t}u(t))$

Solução:

a)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3t}u(t-4)e^{-st}dt = \int_{4}^{\infty} e^{-(s+3)t}dt = -\frac{1}{s+3}e^{-(s+3)t}|_4^{\infty}$$

Se $\text{Re}\{s\} < -3 \implies \text{Re}\{s+3\} < 0 \implies X(s)$ não existe

Se $\text{Re}\{s\} > -3 \implies \text{Re}\{s+3\} > 0$:

$$X(s) = \frac{1}{s+3}e^{-(s+3)4}, \quad \text{RDC:} \quad \sigma > -3$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

Da tabela:

$$e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+3}, \quad \sigma > -3$$

Usando a propriedade do deslocamento no tempo (olhar Tabela):

$$e^{-3(t-4)}u(t-4) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{-4s}}{s+3}, \quad \sigma > -3$$

Multiplicando dos dois lados por e^{-12}:

$$x(t) = e^{-3t}u(t-4) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{-4s-12}}{s+3} = \frac{1}{s+3}e^{-(s+3)4}, \quad \sigma > -3$$

b)

Da tabela:

$$te^{-2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+2)^2}, \quad \sigma > -2$$

Usando a propriedade da diferenciação no tempo (olhar Tabela):

$$\frac{d}{dt}(te^{-2t}u(t)) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s}{(s+2)^2}, \quad \sigma > -2$$

Usando a propriedade do deslocamento no domínio s (olhar Tabela):

$$x(t) = e^{3t}\frac{d}{dt}(te^{-2t}u(t)) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{s-3}{(s-1)^2}, \quad \sigma > 1$$

2) Um sistema tem entrada e resposta ao impulso dadas respectivamente por: $x(t) = -e^{4t}u(-t)$ e $h(t) = e^{2t}u(t)$. Usando Tranformada de Laplace, determine a saída $y(t)$ no domínio do tempo. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

Solução:

Da tabela:

$$x(t) = -e^{4t}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-4}, \quad \sigma < 4$$

$$h(t) = e^{2t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-2}, \quad \sigma > 2$$

Usando a propriedade da Convolução (olhar Tabela)

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s)H(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-4)(s-2)}, \quad \sigma < 4 \quad \cap \quad \sigma > 2 \quad = \quad 2 < \sigma < 4$$

Usando expansão em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s-4} + \frac{A_2}{s-2}$$

$$A_1 = Y(s)(s-4)|_{s=4} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = Y(s)(s-2)|_{s=2} = -\frac{1}{2}$$

$$Y(s) = \frac{1/2}{s-4} - \frac{1/2}{s-2}, \quad 2 < \sigma < 4$$

Da tabela:

$$y(t) = -1/2e^{4t}u(-t) - 1/2e^{2t}u(t)$$

3) Um sistema linear e invariante no tempo é representado pela seguinte equação diferencial:

$$2\frac{d}{dt}y(t) - \frac{1}{2}y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 5x(t).$$

É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine a Função de Transferência deste sistema.

b) Determine a resposta ao impulso deste sistema sabendo que ele é causal.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula:

$$H(s) = \frac{s+5}{2s - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{s+5}{s-\frac{1}{4}}$$

b)

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{s}{s-\frac{1}{4}} + \frac{5}{2}\frac{1}{s-\frac{1}{4}}$$

Polo: $s = \frac{1}{4}$

Dado que o sistema é causal, a RDC deve do polo para a direita, ou seja, a RDC é $\sigma > \frac{1}{4}$.

Da tabela:

$$\frac{1}{s - \frac{1}{4}} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{\frac{1}{4}t}u(t)$$

Propriedade da diferenciação no tempo (olhar Tabela):

$$\frac{s}{s - \frac{1}{4}} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{4}t}u(t))$$

Logo:

$$h(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e^{\frac{1}{4}t}u(t)) + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}t}u(t) \qquad \text{(Podia parar aqui)}$$

$$h(t) = \frac{1}{8}e^{\frac{1}{4}t}u(t) + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}t}\delta(t) + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{4}t}u(t) \qquad \text{(Opcional)}$$

$$h(t) = \frac{21}{8}e^{\frac{1}{4}t}u(t) + \frac{1}{2}\delta(t) \qquad \text{(Opcional)}$$

4) Um sistema linear e invariante no tempo possui a seguinte Função de Transferência:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+3)}.$$

É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine uma equação diferencial que respresente este sistema.

b) Trace o diagrama de polos e zeros deste sistema.

c) Determine a região de convergência deste sistema supondo que ele que ele é estável.

d) Determine a região de convergência deste sistema supondo que ele que ele é causal.

e) Este sistema pode ser estável e causal? Justifique sua resposta.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+3)} = \frac{s-1}{s^2+s-6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 6y(t) = \frac{d}{dt}x(t) - x(t).$$

b)

Zeros: $s = 1$

Polos: $s = 2$ e $s = -3$

Não vou desenhar, mas você deveria desenhar o diagrama de polos e zeros de acordo com os polos e zeros acima indicados.

c) Se o sistema é estável, então a RDC deve conter a circunferência de raio unitário, ou seja, $-3 < \sigma < 2$.

d) Se o sistema é causal, então a RDC deve ser do polo de maior parte real para a direita, ou seja, $\sigma > 2$.

e) O sistema não pode ser estável e causal ao mesmo tempo pois possui um polo no semiplano direito (polo com parte real positiva).

5) Um sistema causal linear e invariante no tempo é representado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t).$$

Sabendo que a entrada deste sistema é dada por: $x(t) = e^{-2t}u(t)$, responda às questões abaixo. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine a Função de Transferência $H(s)$ deste sistema e sua RDC.

b) Determine a Transformda de Laplace $X(s)$ da entrada e sua RDC.

c) Determine a Transformda de Laplace $Y(s)$ da saída e sua RDC.

d) Determine o sinal de saída $y(t)$.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula (sistema causal):

$$H(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

b) Da tabela:

$$X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2$$

c) Usando a propriedade da convolução:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s+1}\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+1}$$

A RDC de $Y(s)$ seria igual à interceção das RDC de $X(s)$ e $H(s)$ caso não tivesse havido cancelamento de polos. No entanto o polo em $s = -2$ de $X(s)$ foi cancelado com o zero em $s = -2$ de $H(s)$.

Se não tivesse ocorrido o cancelamento do polo de $X(s)$, a RDC de $Y(s)$ seria $RDC_Y = RDC_X \cap RDC_H = \{\sigma > -2\} \cap \{\sigma > -1\} = \{\sigma > -1\}$.

Entretanto, como houve o cancelamento de polos em $s = -1$, nós devemos desconsiderar este polo para o cálculo da RDC. Assim, temos: $RDC_y = \{\sigma > -1\}$.

d) Da tabela:

$y(t) = e^{-t}u(t)$

Tabelas auxiliares

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{A_k}{s - d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) > d_k$$

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A_k}{s - d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) < d_k$$

Sinal	*Transformada*	*RDC*
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\delta(t-\tau), \quad \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	para todos s
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[\text{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\dfrac{\omega_1}{s^3+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at}\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at}\,\text{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\dfrac{\omega_1}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

D.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Sinal	*Transformada Unilateral*	*Transformada Bilateral*	*RDC*
$x(t)$	$X(s)$	$X(s)$	R_x
$y(t)$	$Y(s)$	$Y(s)$	R_y
$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$	$aX(s)+bY(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$ se $x(t-\tau)u(t)=x(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R_x
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s-s_o)$	$X(s-s_o)$	$R_x - \mathrm{Re}\{s_o\}$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{\lvert a\rvert}$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$X(s)Y(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)-x(0^+)$	$sX(s)$	No mínimo R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^+} x(\tau)\,d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	No mínimo $R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$