Álgebra Linear
Aula 18

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Exemplo

Mostre que dado um vetor não nulo $\overrightarrow{t}$ do $\mathbb{R}^2$ o conjunto $W = \{\alpha \overrightarrow{t} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o "menor" subespaço de $\mathbb{R}^2$ que contém $\overrightarrow{t}$.

Exemplo

Mostre que dado vetores não nulos $\overrightarrow{t}$ e $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$ o conjunto

$$W = \{\alpha \overrightarrow{t} + \beta \overrightarrow{u} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

é o “menor” subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém $\overrightarrow{t}$ e $\overrightarrow{u}$.

Teorema 4.2.3

Seja $S = \{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_r\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

1. O conjunto W de todas as combinações lineares possíveis dos vetores em S é um subespaço de V.
2. O conjunto W acima é o "menor" subespaço de V que contém todos os vetores de S.

Exemplo

Qual é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém os vetores $(1, 1, 0), (1, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$?

Conjunto gerador

Um espaço vetorial que é gerado por todas as combinações lineares dos vetores em um conjunto não vazio de vetores S é *gerado* por S. Em particular dizemos que os vetores em S *geram* esse espaço vetorial. Denotamos por $\mathrm{ger}\{S\}$ o espaço gerado por S.

Exemplo

Mostre que os conjuntos $S_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $S_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ geram o mesmo espaço vetorial.

Teorema 4.2.5

Sejam $S_1 = \{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_r\}$ e $S_2 = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k\}$ conjuntos não vazios de um espaço vetorial V, então

$$\mathrm{ger}\{S_1\} = \mathrm{ger}\{S_2\}$$

se, e só se, cada vetor em S_1 é uma combinação linear dos vetores em S_2, e cada vetor em S_2 é uma combinação linear dos vetores em S_1.

Exemplo

Mostre que o conjunto $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,0)\}$ não gera o $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

Mostre que $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

Mostre que $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Pergunta

Por que $S \setminus \{(0,0,1)\}$ não gera $\mathbb{R}^3$?

Independência/Dependência linear

Seja $S = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r\}$ um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V. Se a equação vetorial

$$k_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + k_r\overrightarrow{u}_r = 0$$

possuir infinitas soluções então dizemos que S é um *conjunto linearmente dependente (L.D.)*. Caso contrário, se possuir apenas a solução trivial $k_1 = \cdots = k_r = 0$ dizemos que S é um *conjunto linearmente independente (L.I.)*.

Exemplo

Mostre que os vetores canônicos do $\mathbb{R}^3$ são L.I.

Exemplo

Mostre que os polinômios

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$$

formam um conjunto linearmente independente em P_n.

Exemplo

Mostre que $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(2,1,0),(0,0,1)\}$ é L.D.

Teorema 4.3.1

Um conjunto S de dois ou mais vetores é

1. L.D. se, e só se, pelo menos um dos vetores de S pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores em S;
2. L.I se, e só se, nenhum vetor de S pode ser expresso como uma combinação linear dos demais vetores em S.

Exemplo

Decida se os conjuntos de vetores, de um espaço vetorial V, abaixo são L.I. ou L.D..

Exemplo

Decida se os conjuntos de vetores, de um espaço vetorial V, abaixo são L.I. ou L.D..

1. $S_1 = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{t}_1, \ldots, \overrightarrow{t}_r\}$;

Exemplo

Decida se os conjuntos de vetores, de um espaço vetorial V, abaixo são L.I. ou L.D..

1. $S_1 = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{t}_1, \ldots, \overrightarrow{t}_r\}$;
2. $S_2 = \{\overrightarrow{t}\}$;

Exemplo

Decida se os conjuntos de vetores, de um espaço vetorial V, abaixo são L.I. ou L.D..

1. $S_1 = \{\overrightarrow{0}, \overrightarrow{t}_1, \ldots, \overrightarrow{t}_r\}$;
2. $S_2 = \{\overrightarrow{t}\}$;
3. $S_3 = \{\overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2\}$;

Teorema 4.3.2

1. Um conjunto finito que contenha $\overrightarrow{0}$ é L.D..
2. Um conjunto de exatamente um vetor é L.I. se, e só se, esse vetor não é $\overrightarrow{0}$.
3. Um conjunto de exatamente dois vetores é L.I. se, e só se, nenhum dos dois vetores é múltiplo do outro.

Exemplo

Mostre que $S = \{(1,0,0),(1,1,1),(2,1,0),\overrightarrow{t}\}$ é L.D.

Exemplo

Mostre que $S = \{(1,0,0), (1,1,1), (2,1,0), \overrightarrow{t}\}$ é L.D.

Teorema 4.3.3

Seja $S = \{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_r\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$ então S é L.D..

Exemplo

As funções $f_1 = x$ e $f_2 = \operatorname{sen} x$ são L.I..

Exemplo

As funções $f_1 = x$ e $f_2 = \operatorname{sen} x$ são L.I..

Exemplo

As funções $g_1 = \operatorname{sen} 2x$ e $g_2 = \operatorname{sen} x \cos x$ são L.D..

Exemplo

Mostre que $f_1(x) = 6, f_2(x) = 3\,\mathrm{sen}^2\,x$ e $f_3(x) = 2\cos^2 x$ são L.D..

Pergunta

Como se joga batalha naval?

Pergunta

Como se joga batalha naval?

Pergunta

Como representamos um ponto no plano/espaço?

Exemplo

Considere o conjunto $S_1 = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ e $S_2 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Escreva o vetor $(1,2,3)$ como combinação linear dos vetores em cada conjunto.

Definição: Base (finita)

Seja V um espaço vetorial e $B \subseteq V$ um conjunto finito de vetores. Dizemos que B é uma base de V se

Definição: Base (finita)

Seja V um espaço vetorial e $B \subseteq V$ um conjunto finito de vetores. Dizemos que B é uma base de V se

1. B é L.I..

Definição: Base (finita)

Seja V um espaço vetorial e $B \subseteq V$ um conjunto finito de vetores. Dizemos que B é uma base de V se

1. B é L.I..
2. B gera V.

Exemplo

O conjunto formado por vetores $e_i \in \mathbb{R}^n$ no qual somente a i-ésima entrada do vetor é igual a 1 e todas as demais iguais a 0 é chamado base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Os vetores $1, x, \ldots, x^n$ são a base canônica do P_n.

Exemplo

O conjunto matrizes $m \times n$

$$B = \{M_{ij}\}_{i \in [m]; j \in [n]},$$

no qual apenas $(M_{ij})_{ij} = 1$ e todas as demais posições são nulas é a base canônica do espaço vetorial das matrizes $m \times n$.

Exemplo

Qual a base do espaço vetorial $\{\overrightarrow{0}\}$?

Exemplo

O espaço P_∞ tem uma base finita?

Exemplo

Suponha que $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$. De quantas formas distintas podemos escrever um vetor v como combinação linear dos vetores em B?

Teorema 4.4.1

Se $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ uma base de um espaço vetorial V então para cada $v \in V$ existe um único $c \in \mathbb{R}^r$ tal que

$$v = c_1 b_1 + \cdots + c_r b_r.$$

Teorema 4.4.1

Se $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ uma base de um espaço vetorial V então para cada $v \in V$ existe um único $c \in \mathbb{R}^r$ tal que

$$v = c_1 b_1 + \cdots + c_r b_r.$$

Definição: Coordenadas

Dado uma base $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ de um espaço vetorial V. Para um vetor $v \in V$, dizemos que o vetor $c \in \mathbb{R}^r$ como descrito acima, é a coordenada do vetor v em V com relação a base B.

$$(v)_B = c.$$

Observação

- Apesar de B ser um conjunto, em geral pensamos nos elementos de B sempre de forma ordenada, assim não temos ambiguidade quanto a notação $(v)_B$.

Pergunta

O que os conjuntos de vetores abaixo tem em comum?

- $\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$;
- $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$;
- $\{(0,1,2),(0,2,1),(0,1,1)\}$;
- $\{(0,3,2),(0,3,3),(1,1,1),(1,0,0)\}$;
- $\{(0,2,2),(17,3,0)\}$;
- $\{(1,2,1),(5,3,0),(0,0,1)\}$;

Pergunta

O que os conjuntos de vetores abaixo tem em comum?

- $\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$;
- $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$;

- $\{(0,2,2),(17,3,0)\}$;
- $\{(1,2,1),(5,3,0),(0,0,1)\}$;

Problema

É possível obter 4 vetores LI em $\mathbb{R}^3$?

Problema

É possível obter 2 vetores em $\mathbb{R}^3$ que gere o $\mathbb{R}^3$?

Teorema 4.5.2

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{v_i\}_{i \in [n]}$ uma base qualquer de V.

1. Um conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente;
2. Um conjunto com menos de n vetores não gera V.

Teorema 4.5.1

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita tem o mesmo número de vetores.

Teorema 4.5.1

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita tem o mesmo número de vetores.

Dimensão

A dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V, denotado por $\dim(V)$ é definida como o número de vetores em uma base de V. Caso $V = \{\overrightarrow{0}\}$ então $\dim(V) = 0$.

Exemplos

Calcule a dimensão dos espaços abaixo.

1. $\mathbb{R}^3$;
2. $\mathbb{R}^n$;
3. M_{mn};
4. P_n;
5. O conjunto $\operatorname{ger}(S)$, onde S é LI;
6. O conjunto das soluções do sistema composto pelas equações $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1 + x_3 = 5$;

Exemplos

Calcule a dimensão dos espaços abaixo.

1. $\mathbb{R}^3$;
2. $\mathbb{R}^n$;
3. M_{mn};
4. P_n;
5. O conjunto $\text{ger}(S)$, onde S é LI;
6. O conjunto das soluções do sistema composto pelas equações $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1 + x_3 = 0$;