* Prova por indução

— Teorema (princípio da indução matemática): Seja uma afirmação sobre um subconjunto IN' do conjunto dos números naturais IN. Então:

a) Supomos que para $A \subset IN'$, a afirmação seja verdadeira;

b) Seja $n \in IN'$, o primeiro elemento de IN';

c) Se $n \in A$ (também for o primeiro elemento de A) e

$\forall k \in A \Rightarrow k+1 \in A$

Então $A = IN'$ e a afirmação é verdadeira $\forall k \in IN'$

— Exemplo: Seja n um nº natural. Então $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$

S: Proposição: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)}{6}$, $\forall n \in IN$ → queremos provar

a) Seja $A \subset IN$ / $\forall k \in A$, $\sum_{i=0}^{k} i^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6}$

b) Seja $n = 0$ $\quad \sum_{i=0}^{k=n} i^2 = \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 = \frac{(2\,0+1)(0+1)\cdot 0}{6} = 0 \Rightarrow n=0 \in A$

c) $n=0 \in A$?

d) $\forall k \in A \Rightarrow k+1 \in A \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \frac{[2(k+1)+1][(k+1)+1](k+1)}{6}$?

$$\sum_{i=0}^{k+1} i^2 = \sum_{i=0}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k}{6} + (k+1)^2 = \frac{(2k+1)(k+1)k + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(2k+1)\overbrace{(k+1)k}^{k^2+k} + \overbrace{6(k^2+2k+1)}^{6k^2+12k+6}}{6} = \frac{2k^3+2k^2+k^2+k+6k^2+12k+6}{6} =$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$$

Como $\frac{[2(k+1)+1][(k+1)+1](k+1)}{6} = \frac{(2k+3)(k+2)(k+1)}{6} =$

$$= \frac{(2k+3)(k^2+k+2k+2)}{6} = \frac{(2k+3)(k^2+3k+2)}{6} = \frac{2k^3+6k^2+4k+3k^2+9k+6}{6} =$$

$\frac{2k^3+9k^2+9k+6}{6} = \sum_{i=0}^{k+1} i^2$ então $\forall k \in A \Rightarrow k+1 \in A$ e assim $A = IN$

e a proposição é verdadeira. cqd

— Exemplo: Seja n um inteiro positivo $(1, 2, 3, \ldots)$. Então,

$$1+4+7+\ldots+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

S. Proposição: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$

a) Seja $A \subset \mathbb{N}^+ / \forall k \in A, \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(3i-2) = \frac{k(3k-1)}{2}$

b) Seja $n = 1 \in \mathbb{N}^+$

c) $n = 1 \in A$? $\displaystyle\sum_{i=1}^{k=n}(3i-2) = \sum_{i=1}^{1}(3i-2) = 1 = \frac{1(3\cdot 1-1)}{2} = 1 \Rightarrow n = 1 \in A$

d) $\forall k \in A \Rightarrow k+1 \in A \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}$?

$$\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2) = \sum_{i=1}^{k}(3i-2) + [3(k+1)-2] = \frac{k(3k-1)}{2} + (3k+1) = \frac{3k^2-k}{2} + (3k+1) =$$

$$= \frac{3k^2-k+6k+2}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2}$$

Como $\dfrac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2} = \dfrac{(k+1)(3k+2)}{2} = \dfrac{3k^2+2k+3k+2}{2} = \dfrac{3k^2+5k+2}{2} =$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}(3i-2)$ então, $\forall k \in A \Rightarrow k+1 \in A$ e assim, $A = \mathbb{N}^+$ e a proposição é verdadeira. cqd