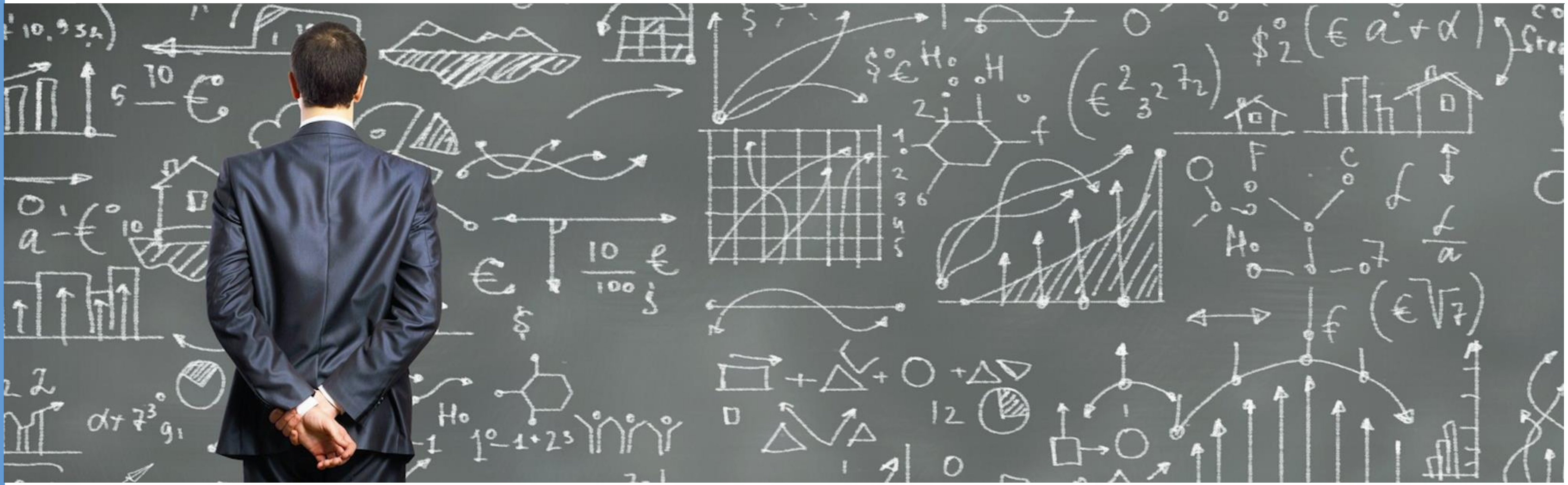
Métodos Numéricos

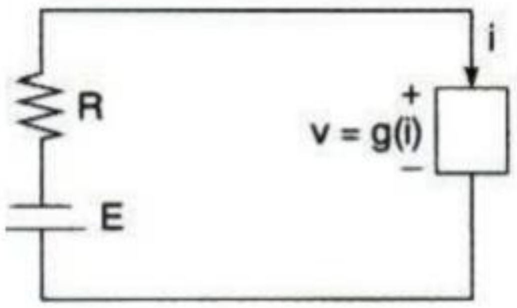
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ



Unidade II: Zeros de Funções Reais

Introdução

- Em muitos problemas nas mais diversas áreas da engenharia temos situações que envolvem a resolução de uma equação do tipo **f(x) = 0**.
- Consideremos, por exemplo, o seguinte problema:



  - O esquema acima representa um **dispositivo não linear** onde a função **g modela um dispositivo** de tensão controlado por corrente.
  - Se quisermos estudar o fluxo de corrente no circuito devemos resolver a equação:

$$E - Ri - g(i) = 0$$

Solução de Equações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Uma equação polinomial, algébrica ou transcendental é representada por:

$$f(x) = 0$$

- Onde f é uma função não linear a uma variável que pode ser uma função **polinomial**, **algébrica** ou **transcendental**.
  - Função Transcendental → $sen(x), e^x, ln(x)$
  - Equação Polinomial → $x^4 - 4x^3 + 10x - 100 = 0$
  - Equação Algébrica → $\frac{1}{(x^3+2)^{1/2}} - 20 = 0$

Solução de Equações

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- As soluções da equação $f(x) = 0$ são denominadas raízes da equação ou zeros da função f.
  - Estas raízes podem ser reais ou complexas, podendo ainda ter um número finito ou infinito de raízes.
    - $\boldsymbol{x^4 - 4x^3 + 10x - 100} = 0 \rightarrow$ 4 raízes
    - $\boldsymbol{x \cdot tg(x) - 1 = 0} \rightarrow$ infinitas raízes
  - As raízes reais e/ou complexas podem ainda ser simples e repetidas (múltiplas).

$$(x - 0{,}5)^3 \cdot (x - 0{,}7)^2 \cdot (x - 1{,}2) = 0$$

- Possui 6 raízes reais;
- 0,5 é uma raiz repetida com multiplicidade 3;
- 0,7 raiz repetida com multiplicidade 2;
- 1,2 raiz simples;

Métodos Numéricos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Sabemos que para algumas equações, como polinomiais do **segundo grau** por exemplo, existem **fórmulas explícitas** que dão as raízes em função dos coeficientes.
- No caso de **polinômios de grau mais alto** ou para funções mais complexas a tarefa de **identificação exata** dos zeros torna-se **complicada**.
- Desta forma os **métodos numéricos buscam aproximações** para estes métodos.
- A ideia inicial é a partir de uma aproximação inicial para a raiz **refinar a solução** através de um processo iterativo.

Métodos Numéricos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Os métodos para encontrar as raízes devem conter duas fases distintas:

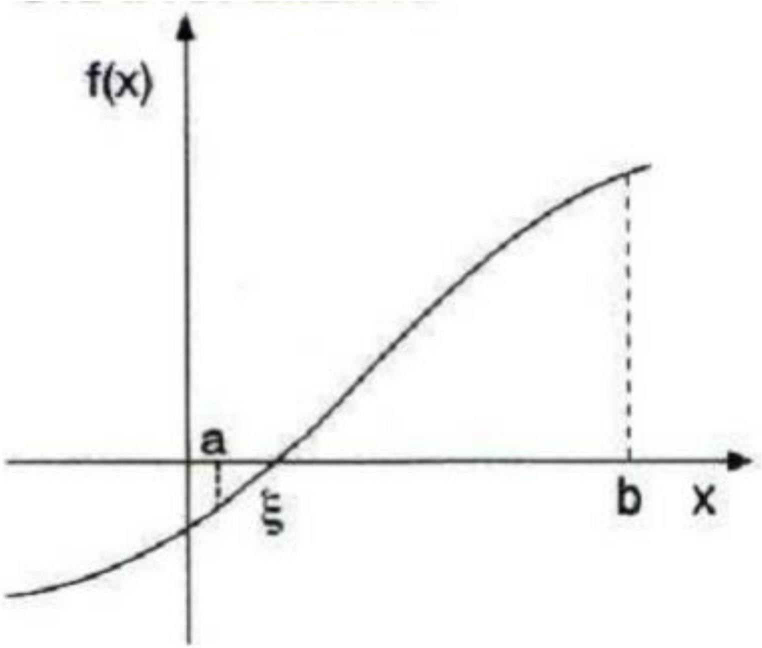
  - FASE I → **Localização ou isolamento** da raiz, que consiste em limitar um intervalo que contém a raiz;

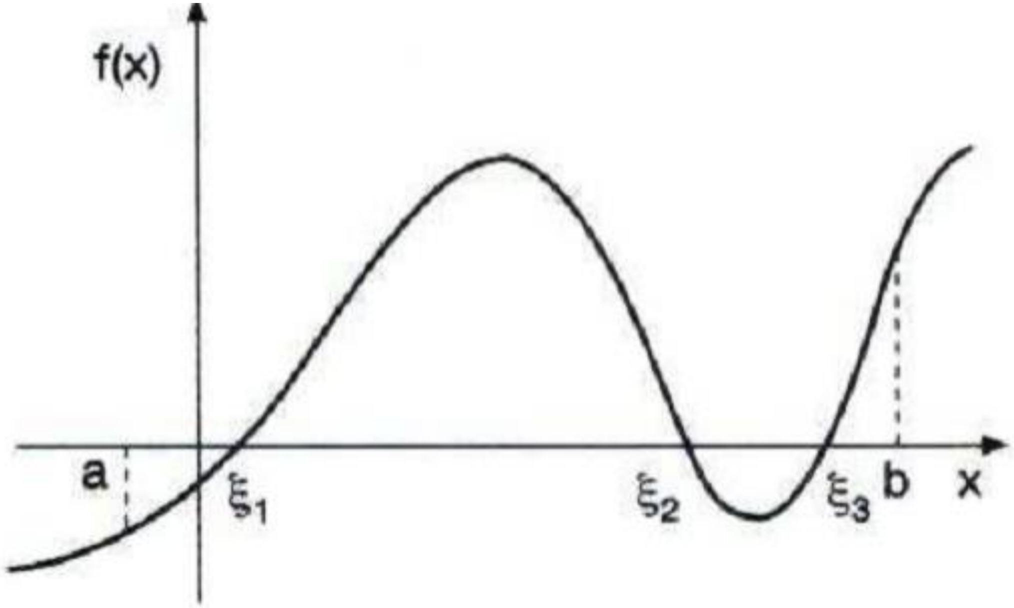
  - FASE II → **Refinamento**, que consiste em, dado uma aproximação inicial no intervalo fornecido pela FASE I, melhorar a solução sucessivamente até obtermos uma raiz dentro de uma precisão ε pré-definida.

Isolamento das Raízes

Definição

- Seja f(x) uma **função contínua** num **intervalo [a, b].**
- Se $\boldsymbol{f(a) \cdot f(b) < 0}$ então existe pelo menos **um ponto x= ξ** entre a e b que é **zero de f(x).**

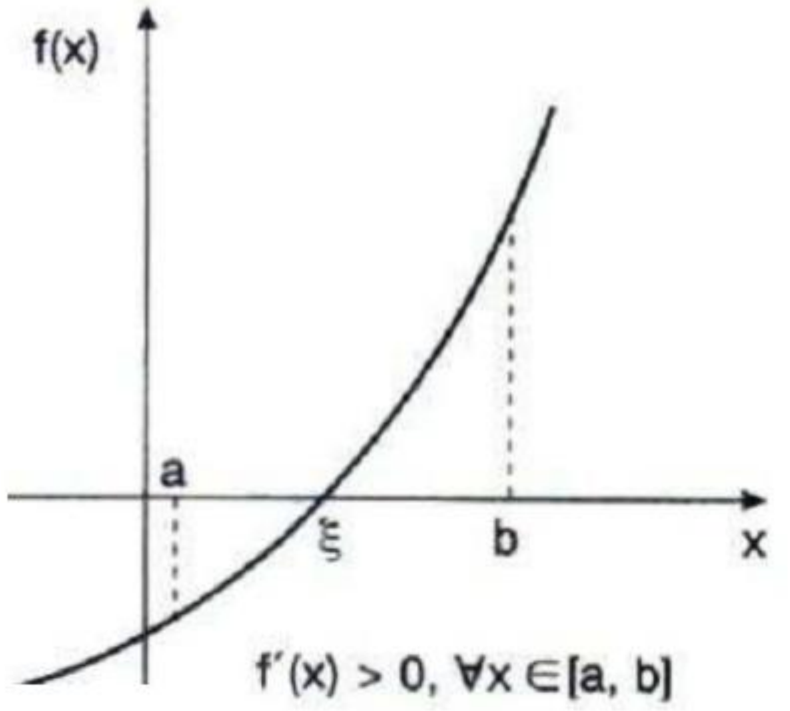


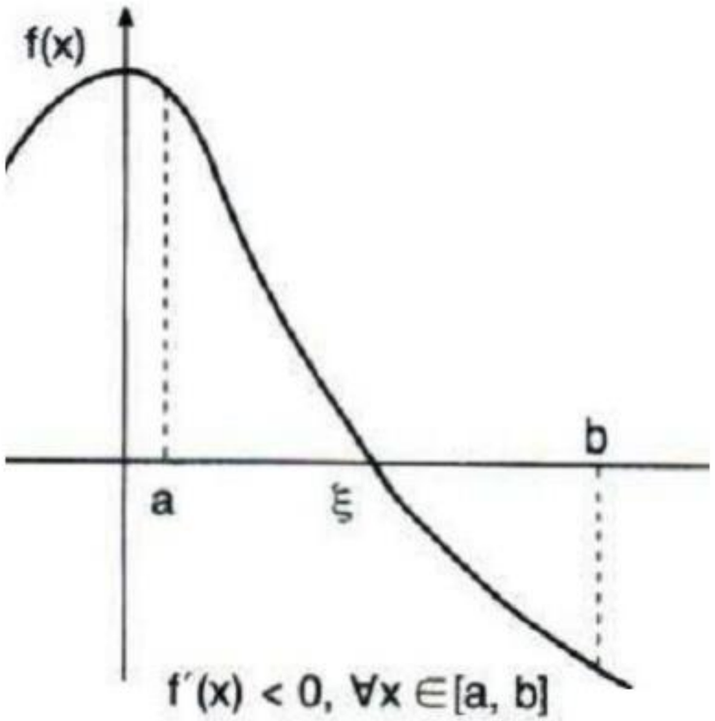


Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Sob a hipótese do teorema anterior, **se f '(x) existir e preservar seu sinal** em (a, b), então este intervalo **contém um único zero de f(x).**





Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Uma forma de isolar as raízes de f(x) usando os resultados anteriores é **tabelar f(x)** para vários valores de x e **analisar as mudanças de sinal** de f(x) **e o sinal da derivada** nos intervalos em que f(x) mudou de sinal.
- Ex: $f(x) = x^3 - 9x + 3$

x	-∞	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
F(x)	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

  - Sabendo que f(x) é contínua para qualquer x real e observando as variações de sinal, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1=[-5,-3]$, $I_2=[0,1]$, $I_3=[2,3]$ contém pelo menos um zero de f(x).

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Ex: $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$, com D(f)=$\mathbb{R}^+$

x	0	1	2	3
F(x)	-	-	+	+

  - Analisando a tabela, vemos que f(x) admite pelo menos um zero no intervalo (1,2).
  - Para saber se este zero é único neste intervalo podemos usar a definição, isto é, analisar o sinal de f'(x):

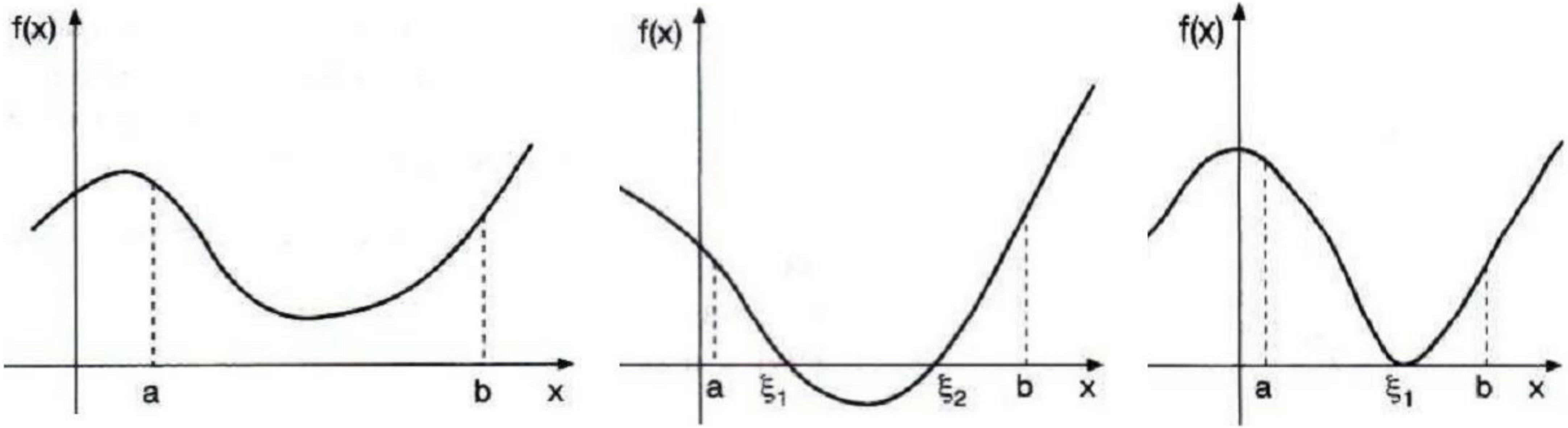
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5e^{-x} > 0, \forall\, x > 0$$

  - Assim, podemos concluir que f(x) admite um único zero em todo seu domínio de definição e este zero está no intervalo (1,2).

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a, b].
- Se $f(a) \cdot f(b) > 0$ então podemos ter várias situações.



Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- A análise gráfica da função f(x) ou da equação f(x) = 0 é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz. Desta forma podemos adotar as seguintes técnicas:
  - Esboçar o gráfico de f(x) e localizar os pontos onde a curva realiza a transição do eixo x.
  - A partir da equação f(x) = 0, obter o equivalente g(x) = h(x) e esboçar os gráficos de g(x) e h(x) no mesmo plano afim de localizar os pontos onde as curvas se interceptam pois neste caso $f(\xi) = 0 \rightarrow g(\xi) = h(\xi)$
  - Utilizar programas computacionais afim de esboçar os gráficos das funções;

OBS: O esboço do gráfico de uma função requer o estudo detalhado do comportamento desta função, que envolve basicamente os itens: **domínio**; **pontos de máximo e mínimo**; **pontos de descontinuidade**; **intervalos de crescimento e decrescimento**; **concavidade**; **pontos de inflexão** e **assíntotas da função**;

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Traçar os gráficos as seguintes funções:
  a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$
  b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$
  c) $f(x) = x\log(x) - 1$

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Antes de abordamos métodos para determinação o número e os limites das raízes reais de uma equação polinomial, serão vistos modelos de avaliar um polinômio e algumas propriedades importantes desse tipo de função.
- Uma equação algébrica de **grau n** tem exatamente **n raízes**, reais ou complexas, contando cada raiz **de acordo com sua multiplicidade.**
  - Uma raiz ξ de uma equação polinomial tem multiplicidade m se:

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

$$P(\xi) = P'(\xi) = P''(\xi) = \ldots = P^{m-1}(\xi) = 0 \text{ e}$$

$$P^m(\xi) \neq 0 \quad \text{sendo}$$

$$P^i(\xi) = \left.\frac{d^i P(x)}{dx^i}\right|_{x=\xi},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

$$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x - 5 & \rightarrow P(1) &= 0, \\
P'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 24x + 14 & \rightarrow P'(1) &= 0, \\
P''(x) &= 12x^2 + 12x - 24 & \rightarrow P''(1) &= 0 \text{ e} \\
P'''(x) &= 24x + 12 & \rightarrow P'''(1) &= 36.
\end{aligned}$$

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Se os **coeficientes** de uma equação algébrica forem **reais**, então **suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares**, ou seja, se $\boldsymbol{\xi_1 = a + bi}$ for uma raiz de multiplicidade m, então $\boldsymbol{\xi_2 = a - bi}$ também será uma **raiz com a mesma multiplicidade**.
- Uma equação algébrica com **grau ímpar com coeficientes reais** tem, no mínimo, **uma raiz real**.

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Dada a equação:

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

  - Se $\boldsymbol{c_n} > \mathbf{0}$ e **k (0 ≤ k ≤ n-1)** for o **maior índice de coeficiente escolhido dentre os coeficientes negativos**, então o limite superior das raízes positivas de P(x) = 0 pode ser dado por:

$$\boxed{L = 1 + \sqrt[n-k]{\frac{B}{c_n}}},$$

onde B é o valor absoluto do maior coeficiente negativo em módulo.

  - Desta foma se ξ_p for a maior das raízes positivas de P(x) = 0, então ξ_p ≤ L.

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo:
  - Seja a equação:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$$

Os coeficientes negativos são $c_{\underline{2}} = -13$ e $c_{\underline{1}} = -14$, portanto, $k = 2$, pois $\underline{2} > \underline{1}$, $B = |-14|$

$$L = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{14}{1}} \rightarrow L = 4{,}74.$$

- O Teorema de Lagrange garante que P(x)=0 **não tem nenhuma raiz maior que 4,74**.

Teorema de Lagrange

- Se $\boldsymbol{c_i}$ **> 0** (i = 0, 1, ... n), então **P(x) = 0 não tem raízes positivas**, pois $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ para $c_i > 0$ e x > 0 .
- Para determinar os limites superiores e inferiores das raízes positivas e negativas, são necessárias três equações auxiliares.

$$P_1(x) = x^n P(1/x) = 0,$$

$$P_2(x) = P(-x) = 0 \text{ e}$$

$$P_3(x) = x^n P(-1/x) = 0.$$

Teorema de Lagrange

- Exemplo

Seja $P(x) = x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 42x + 40 = 0$,

então as equações auxiliares e suas respectivas raízes são

$$P_1(x) = x^4 P(1/x) = 40x^4 + 42x^3 - 5x^2 - 6x + 1,$$

$$P_2(x) = P(-x) = x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 40,$$

$$P_3(x) = x^4 P(-1/x) = 40x^4 - 42x^3 - 5x^2 + 6x + 1,$$

Teorema de Lagrange

- Se $1/\xi_q$ for a maior das raízes positivas de $P_1(x) = 0$, então ξ_q será a menor das raíz positivas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo 6.10). Sendo L_1 o limite superior das raízes positiv de $P_1(x) = 0$, calculado pelo Teorema 6.3, tem-se que

$$\frac{1}{\xi_q} \leq L_1 \to \xi_q \geq \frac{1}{L_1},$$

conseqüentemente, o limite inferior das raízes positivas de $P(x) = 0$ é $1/L_1$. Desse modo, s $P(x) = 0$ possuir raízes positivas ξ^+, elas estarão no intervalo

$$\boxed{\frac{1}{L_1} \leq \xi^+ \leq L}.$$

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Por outro lado, se $-\xi_r$ for a maior das raízes positivas de $P_2(x) = 0$, então ξ_r será a meno das raízes negativas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo 6.10). Sendo L_2 o limite superior das raíze positivas de $P_2(x) = 0$, dado pelo Teorema 6.3

$$-\xi_r \leq L_2 \rightarrow \xi_r \geq -L_2.$$

Se $-1/\xi_s$ for a maior das raízes positivas de $P_3(x) = 0$, então ξ_s será a menor das raíze negativas de $P(x) = 0$ (ver Exemplo 6.10). Sendo L_3 o limite superior das raízes positiva de $P_3(x) = 0$, dado pelo Teorema 6.3

$$-\frac{1}{\xi_s} \leq L_3 \rightarrow \xi_s \leq -\frac{1}{L_3}.$$

Então, se $P(x) = 0$ tiver raízes negativas ξ^-, elas estarão no intervalo

$$\boxed{-L_2 \leq \xi^- \leq -\frac{1}{L_3}},$$

Teorema de Lagrange

- A Figura 6.3 mostra os limites das raízes reais de uma equação algébrica. É importante notar que esses limites não garantem a existência das raízes reais, mas tão-somente informam onde as raízes reais estarão caso existam.

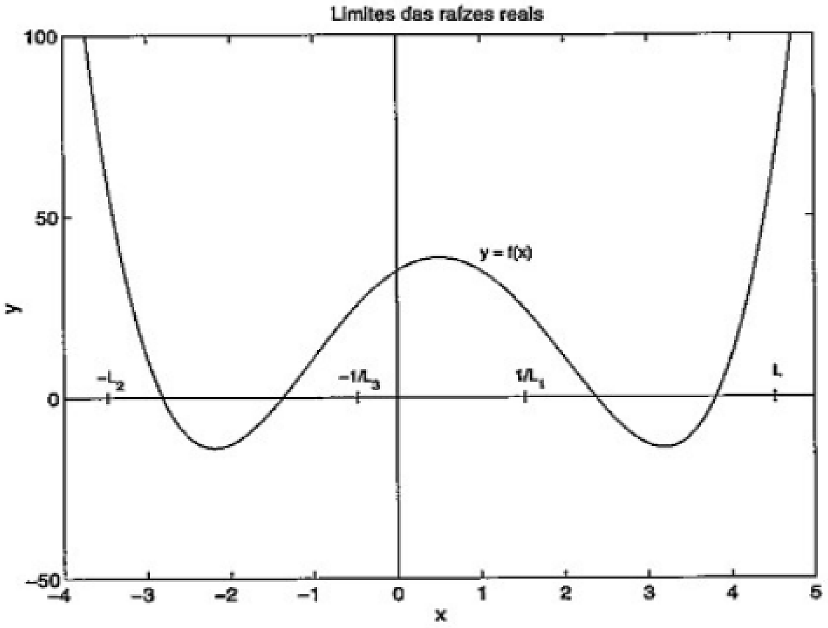


Figura 6.3 Limites das raízes reais de uma equação algébrica.

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Calcular os limites das raízes reais de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

As equações auxiliares são

$$P_1(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^4\left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3} - \frac{13}{x^2} - \frac{14}{x} + 24\right) = 0 \rightarrow$$

$$P_1(x) = 24x^4 - 14x^3 - 13x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$L_1 = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{14}{24}} \rightsquigarrow \frac{1}{L_1} = 0{,}63,$$

$$P_2(x) = P(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 13(-x)^2 - 14(-x) + 24 = 0 \rightarrow$$

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$$P_2(x) = P(-x) = (-x)^4 + 2(-x)^3 - 13(-x)^2 - 14(-x) + 24 = 0 \rightarrow$$

$$P_2(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0,$$

$$L_2 = 1 + \sqrt[4-3]{\frac{13}{1}} \rightsquigarrow -L_2 = -14 \text{ e}$$

$$P_3(x) = x^4 P\left(\frac{1}{-x}\right) = x^4\left(\frac{1}{(-x)^4} + \frac{2}{(-x)^3} - \frac{13}{(-x)^2} - \frac{14}{(-x)} + 24\right) = 0 \rightarrow$$

$$P_3(x) = 24x^4 + 14x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$L_3 = 1 + \sqrt[4-2]{\frac{13}{24}} \rightsquigarrow -\frac{1}{L_3} = -0{,}58.$$

Considerando que $L = 4{,}74$, conforme o Exemplo 6.9, então os limites das raízes reais são

$$0{,}63 \leq \xi^+ \leq 4{,}74 \text{ e } -14 \leq \xi^- \leq -0{,}58.$$

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Pode-se assim construir um dispositivo para facilitar a determinação dos limites das raízes reais. O dispositivo é constituído de dois blocos.
- No primeiro bloco são definidos os coeficientes de P(x) = 0 e de suas três equações auxiliares P_1(x) = 0, P_2 (x) = 0, P_3 (x) = 0.
- Para tal:
    1. Colocar os coeficientes de P(x) = 0 em uma coluna com c n no topo
    2. Inverter a ordem dos coeficientes da coluna P(x) e colocá-los em P_1(x)
    3. Trocar o sinal dos coeficientes de P(x), cujos índices sejam ímpares e atribuir a P_2(x)
    4. Inverter a ordem dos coeficientes da coluna P_2(x) e colocá-los em P_3(x)
    5. Se algum $c_n < 0$ então trocar o sinal de todos os coeficientes da coluna para garantir que $c_n > 0$ conforme exige o teorema.

Teorema de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- No segundo bloco são atribuídos os parâmetros necessários para aplicar o teorema a cada uma das quatro equações:
- Assim:
  - k é o primeiro coeficiente negativo.
  - n é o grau do polinômio,
  - B é o valor absoluto do maior coeficiente negativo em módulo,
  - L_i é o limite superior das raízes positivas de $P_i(x) = 0$ dado pelo teorema e
  - $L_{\xi(P)}$ são os limites superiores e inferiores das raízes positivas e negativas de P(x) = 0 sendo que

$$L_{\xi(P)} = L,\ L_{\xi(P_1)} = 1/L_1,\ L_{\xi(P_2)} = -L_2 \text{ e } L_{\xi(P_3)} = -1/L_3.$$

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Calcular os limites das raízes de $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$ usando o dispositivo prático.

$n=4$	$P(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
c_4	1	24	1	24
c_3	2	-14	-2	14
c_2	-13	-13	-13	-13
c_1	-14	2	14	-2
c_0	24	1	24	1
k	2	3	3	2
$n-k$	2	1	1	2
B	$\|-14\|$	$\|-14\|$	$\|-13\|$	$\|-13\|$
L_i	4,74	1,58	14	1,74
L_ξ	4,74	0,63	-14	$-0,58$

Trabalho

- Elaborar um algoritmo que implemente o dispositivo pratico apresentado. Os parâmetros de entrada são o grau do polinômio e o vetor c dos coeficientes. O parâmetro de saída é o vetor L contendo os limites das raízes reais.

Refinamento das Raízes

Definição

- Uma vez que tenhamos uma raiz ξ isolada em um dado intervalo [a, b], então a próxima etapa consiste em gerar uma sequência $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, \xi\} \in$ [a, b] que convirja para a raiz exata ξ de f(x) = 0.

- Desta forma temos que todos os métodos devem efetuar um teste do tipo:
  - Minha aproximação x_k está suficientemente próxima de ξ (raiz exata)?

Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Assim existem duas formas de interpretar a tolerância desta raiz aproximada que, nem sempre, resultam em uma mesma resposta:

$\bar{x}$ é *raiz aproximada* com precisão ε se:

i) $|\bar{x} - \xi| < \varepsilon$ ou

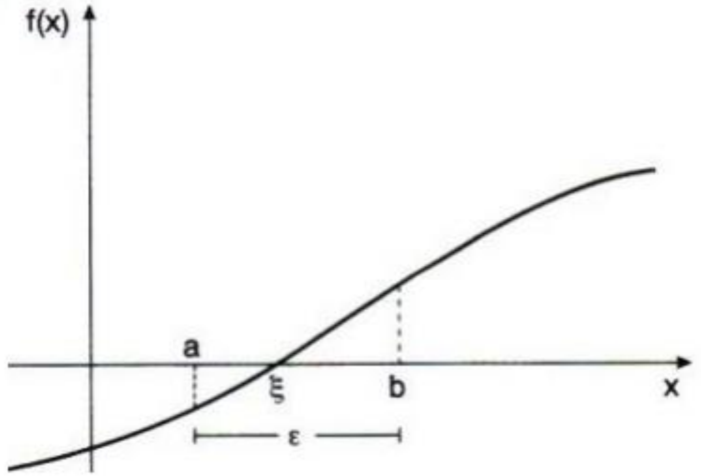
ii) $|f(\bar{x})| < \varepsilon$.

- No entanto como podemos executar este teste de forma prática se o valor exato (ξ) da raiz não é conhecido?

Definição

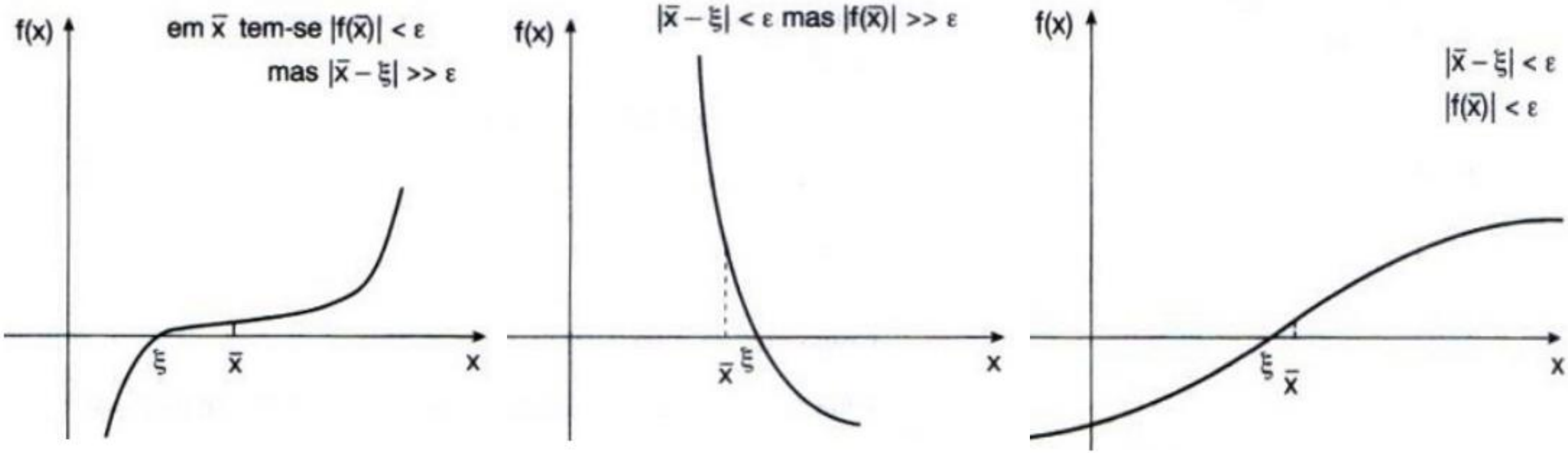
- Uma das maneiras de se implementar este critério de parada seria reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração.
- Ao se conseguir um intervalo [a, b] tal que:

$$\left.\begin{array}{c} \xi \in [a, b] \\ \text{e} \\ b - a < \varepsilon \end{array}\right\}$$ então $\forall\, x \in [a, b]$, $|x - \xi| < \varepsilon$. Portanto, $\forall\, x \in [a, b]$ pode ser tomado como $\bar{x}$



Definição

- No entanto, nem sempre é possível cumprir-se ambos os critérios de parada de forma simultânea devido as relações de variação entre domínio e imagem de f(x).



Definição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Pode-se ainda de forma prática estabelecer o critério de parada em função evolução da sequência de aproximação:

$$\boxed{|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon},$$

$$\boxed{\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k}\right| \leq \varepsilon},$$

- Há desta forma todas as condições para a implementação de qualquer método iterativo com objetivo de isolar uma aproximação para raiz de f(x) dada uma tolerância ε.

Método da Bisseção

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

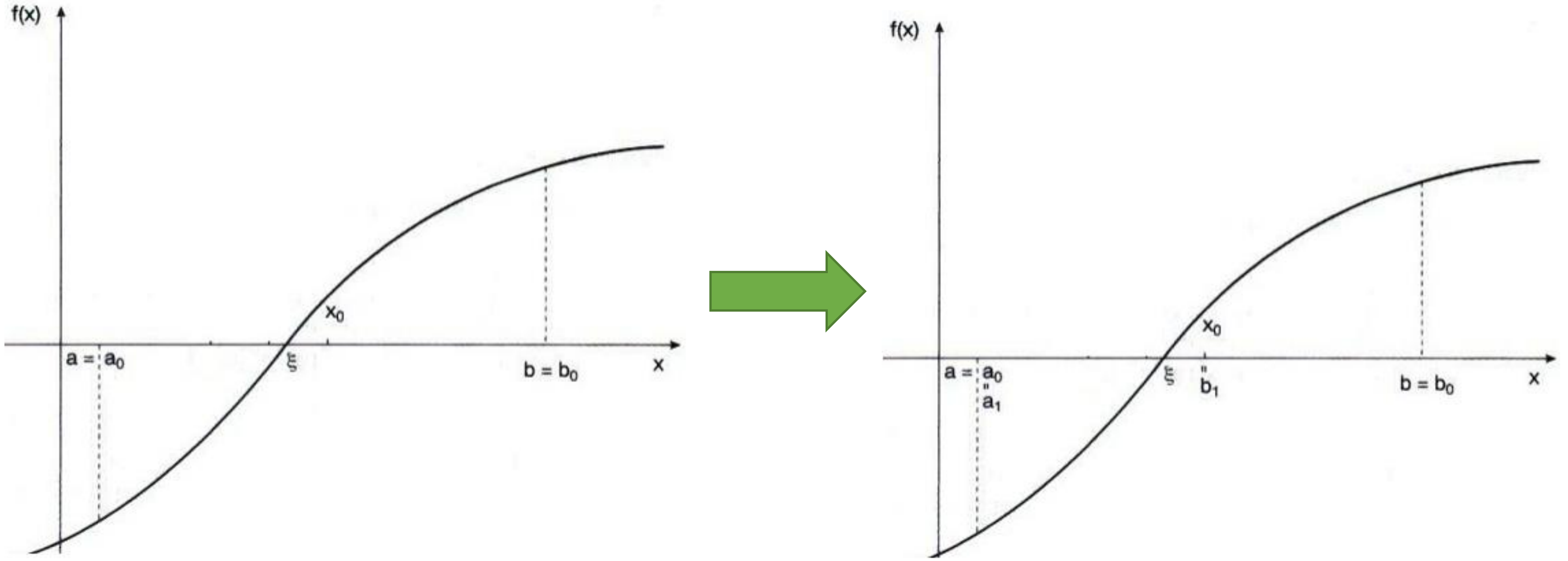
- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a, b], sendo ξ a única raiz de f(x) = 0 neste intervalo.
- O método da bisseção consiste em subdividir o intervalo ao meio a cada iteração e a metade desta divisão que contenha a raiz, ou seja, aquele em que f(x) tenha sinais opostos nos extremos.
- Seja a função f(x) no intervalo [a, b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.
  - Suponha que em (a, b) contenha apenas uma única raiz para fins de simplificação.
  - O método visa reduzir o tamanho deste intervalo até se atingir a precisão requerida: $(b - a) < \varepsilon$, usando para isto sucessivas divisões de [a, b] pela metade.

Método da Bisseção

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

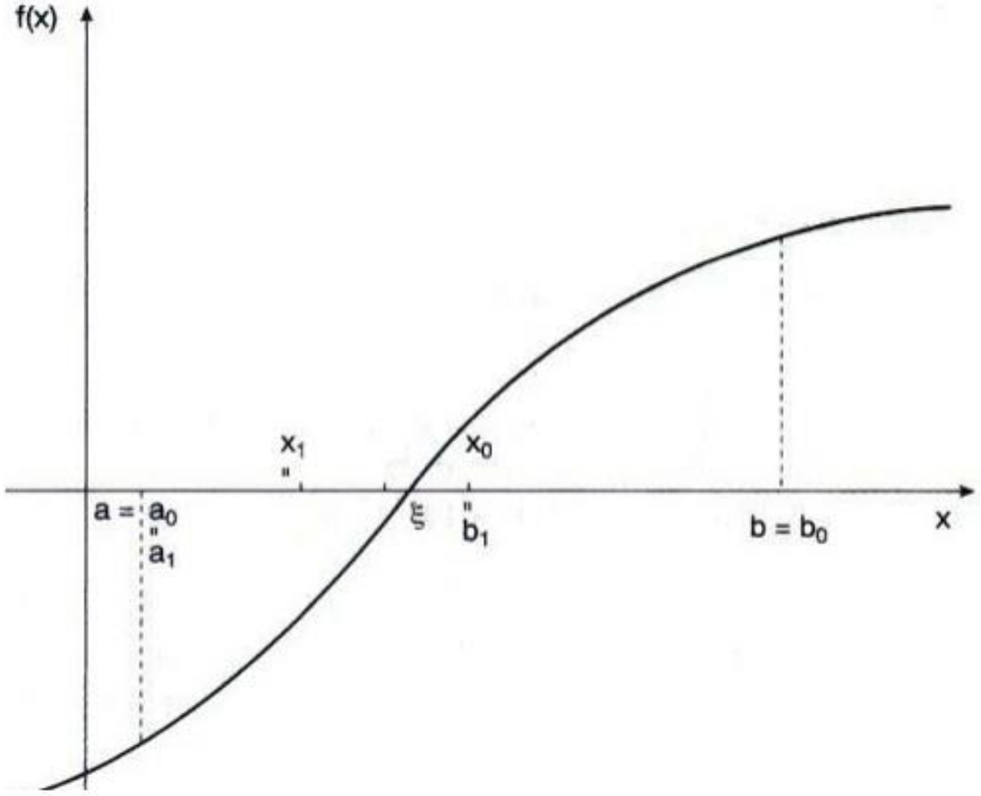
- De forma gráfica teremos:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \qquad \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$$



Método da Bisseção

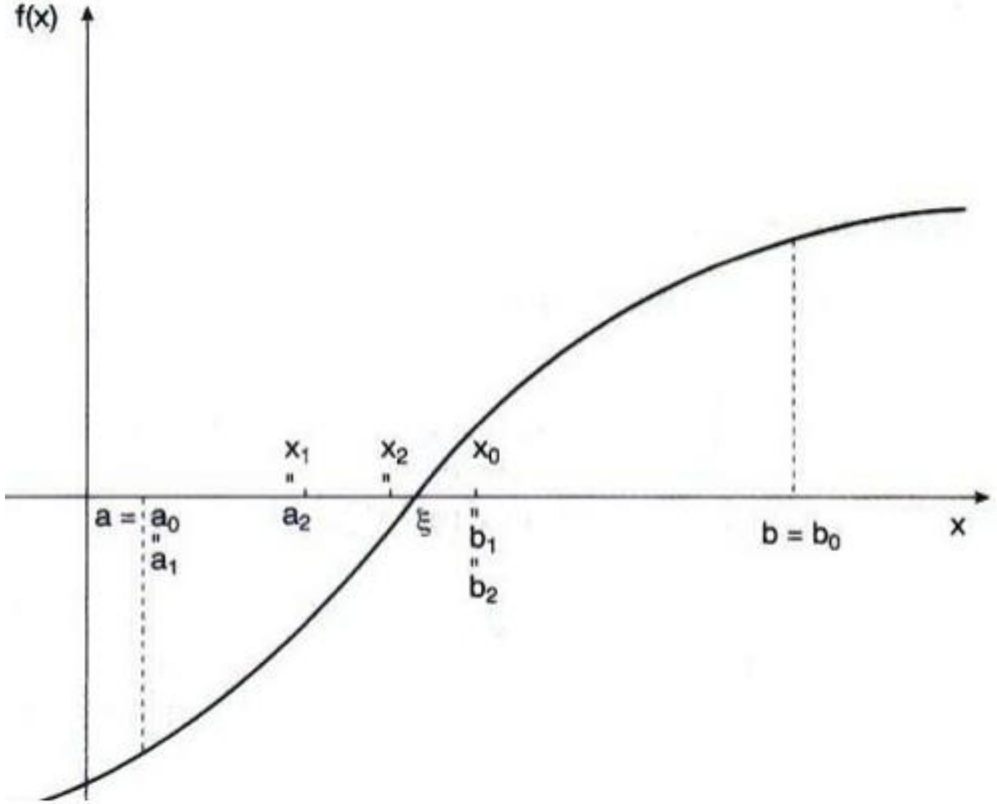
- De forma gráfica teremos:



$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$$

Método da Bisseção

- De forma gráfica teremos:



$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \quad \begin{Bmatrix} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{cases}$$

Método da Bisseção

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Ache o valor aproximado da raiz da equação polinomial.

$f(x) = x^3 - 9x + 3$ $\quad I = [0, 1]$ $\quad \varepsilon = 10^{-3}$

Iteração	x	f(x)	b − a
1	.5	−1.375	.5
2	.25	.765625	.25
3	.375	−.322265625	.125
4	.3125	.218017578	.0625
5	.34375	−.0531311035	.03125
6	.328125	.0822029114	.015625
7	.3359375	.0144743919	7.8125×10^{-3}
8	.33984375	−.0193439126	3.90625×10^{-3}
9	.337890625	$-2.43862718 \times 10^{-3}$	1.953125×10^{-3}
10	.336914063	$6.01691846 \times 10^{-3}$	9.765625×10^{-4}

Método da Bisseção

- Estimativa do número de iterações
  - Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a, b], é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método da bisseção até que se obtenha b - a < ε.
  - Vimos que:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

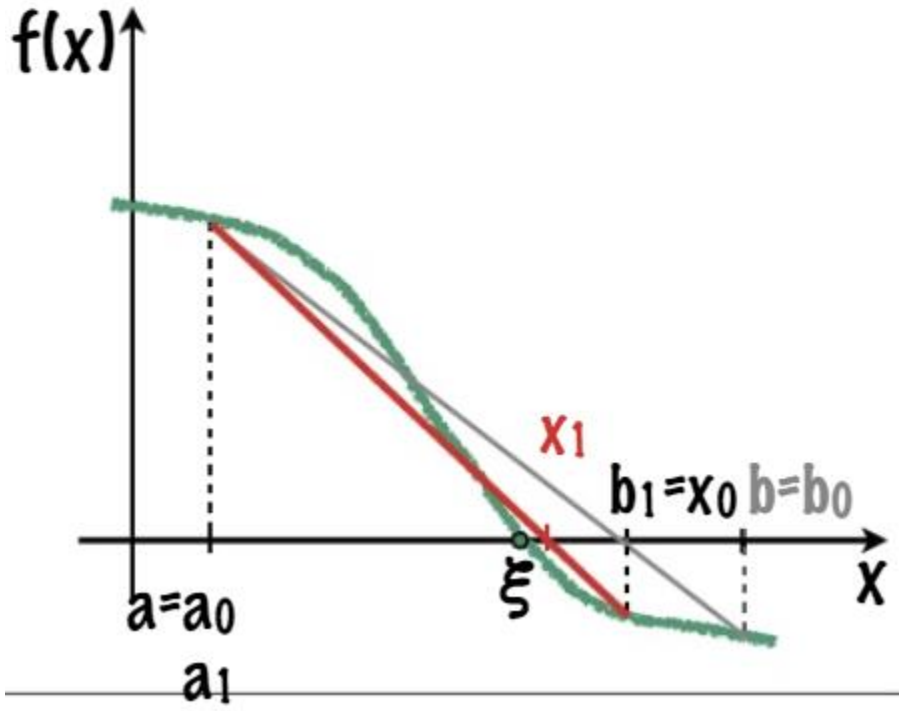
  - Deve-se obter o valor k tal que $b_k - a_k < \varepsilon$, ou seja

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow 2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Rightarrow k \log(2) > \log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon) \Longrightarrow k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Método da Posição Falsa

- O método da posição falsa consiste em **reduzir a amplitude do intervalo** [a,b] que contém a raiz.

- Ao invés de usar o ponto médio do intervalo, o método usa o ponto onde a **reta secante** unindo (a_k, f(a_k)) e (b_k, f(b_k)) cruza o eixo x e o seleciona para ser uma nova extremidade do intervalo.



Método da Posição Falsa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a, b], sendo ξ a única raiz de f(x)=0 neste intervalo.

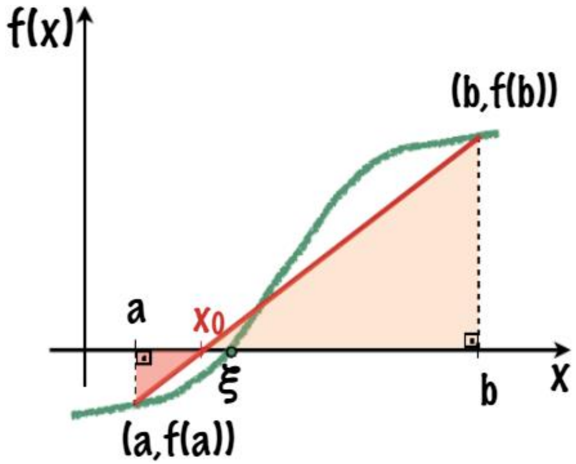
- Uma estimativa da raiz ξ é tomada onde a reta secante cruza o eixo x.

- A equação da reta secante que passa pelos pontos de coordenadas (a, f(a)) e (b, f(b)) é dada por:

$$\frac{b - x_0}{f(b)} = \frac{x_0 - a}{-f(a)}$$

$$x_0\big(f(b) - f(a)\big) = a\big(f(b)\big) - b\big(f(a)\big)$$

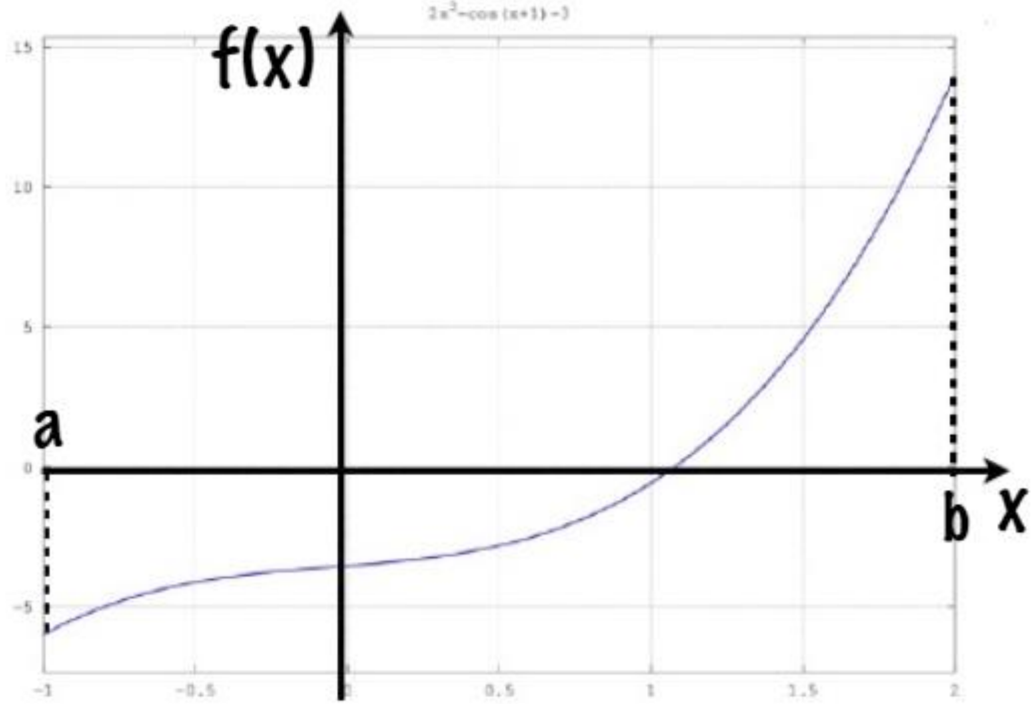
$$x_0 = \frac{a\big(f(b)\big) - b\big(f(a)\big)}{f(b) - f(a)}$$



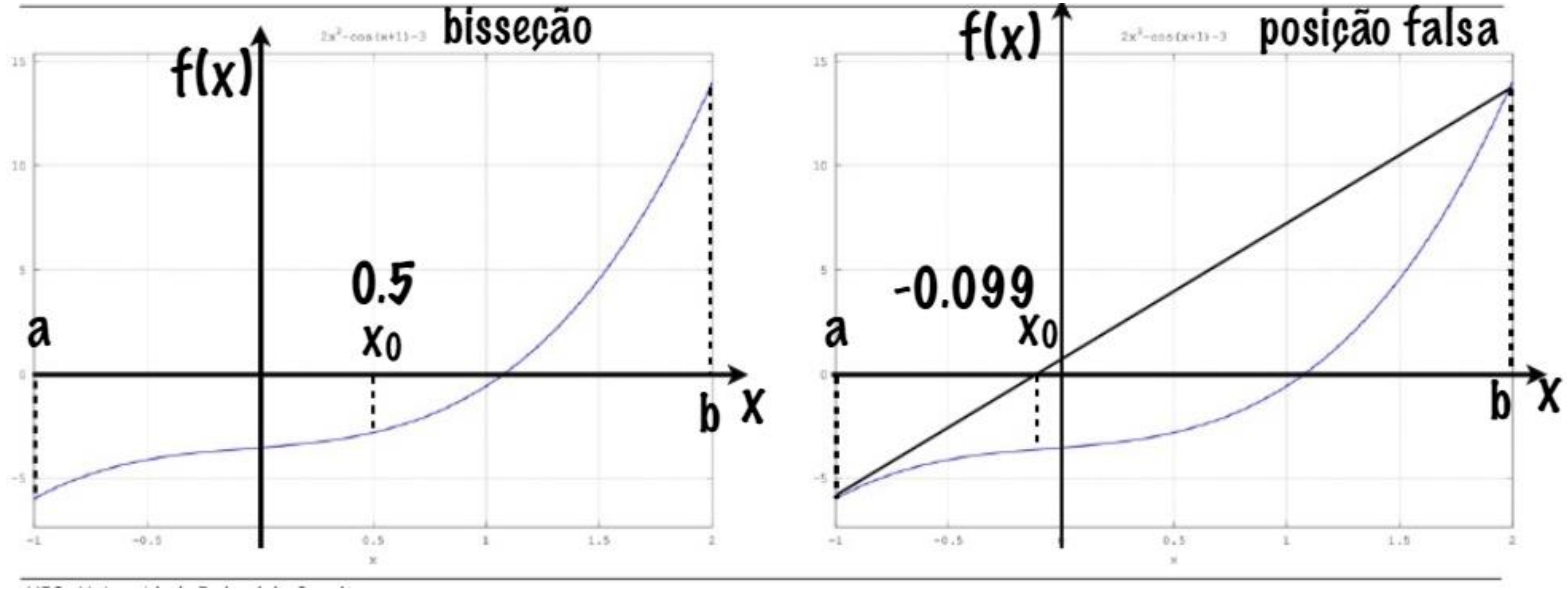
Método da Posição Falsa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

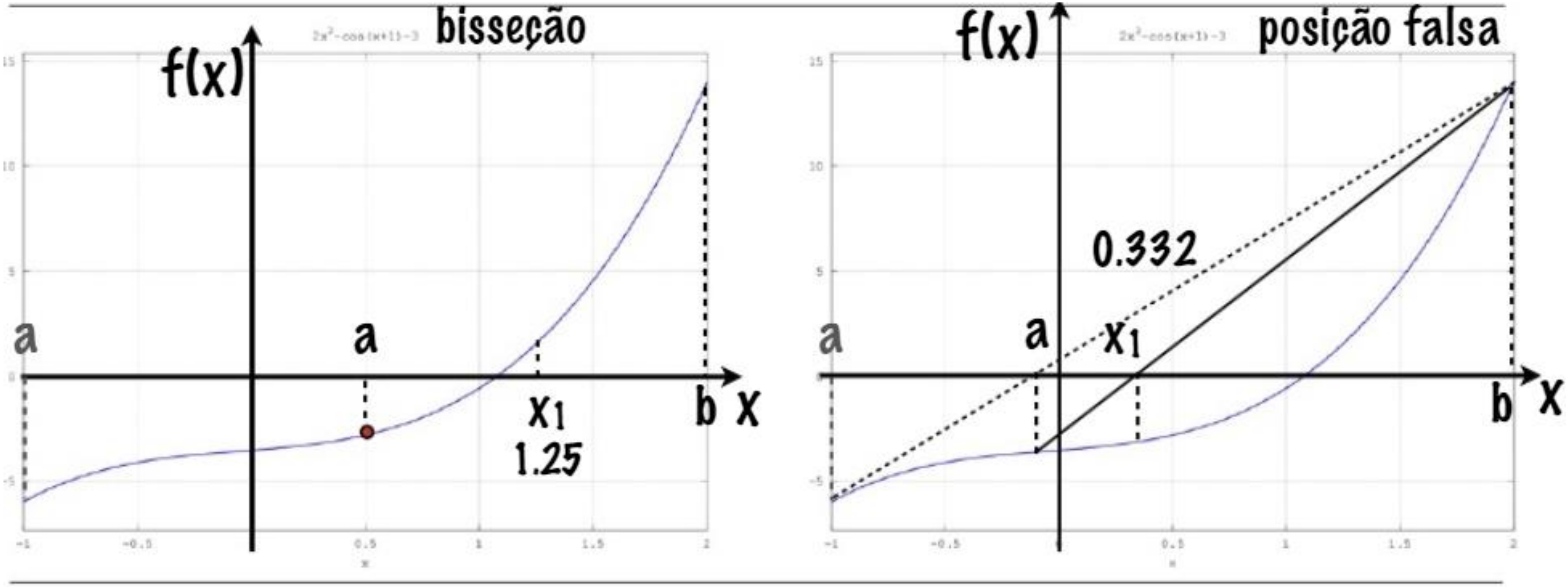
- $f(x) = 2x^3 - \cos(x + 1) - 3$
- a = -1, b = 2, ε = 0,01



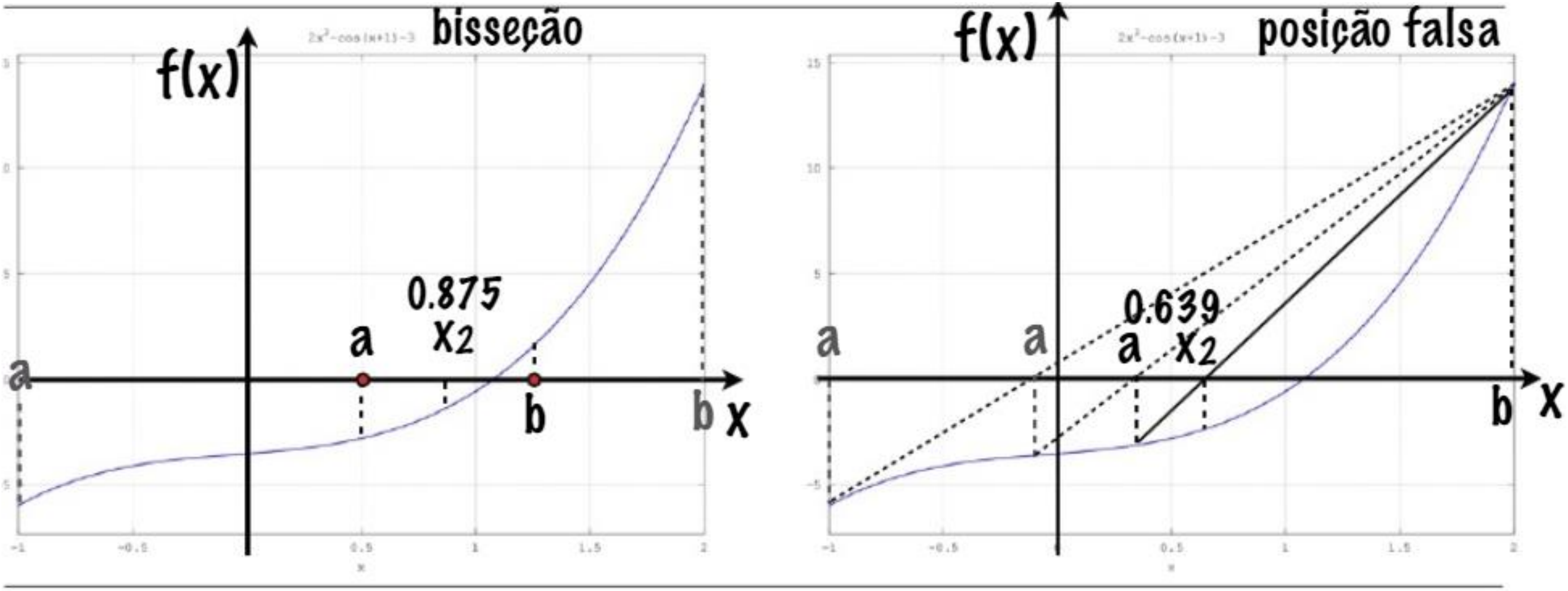
Bisseção x Posição Falsa



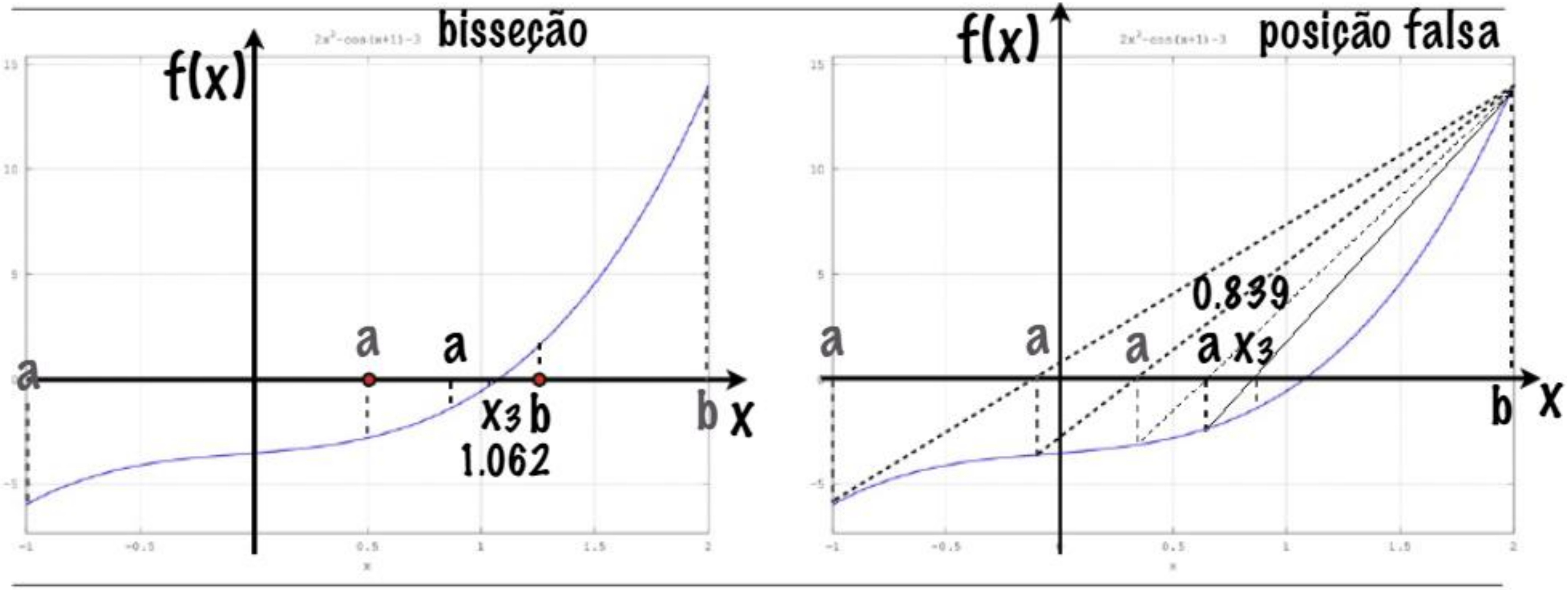
Bisseção x Posição Falsa



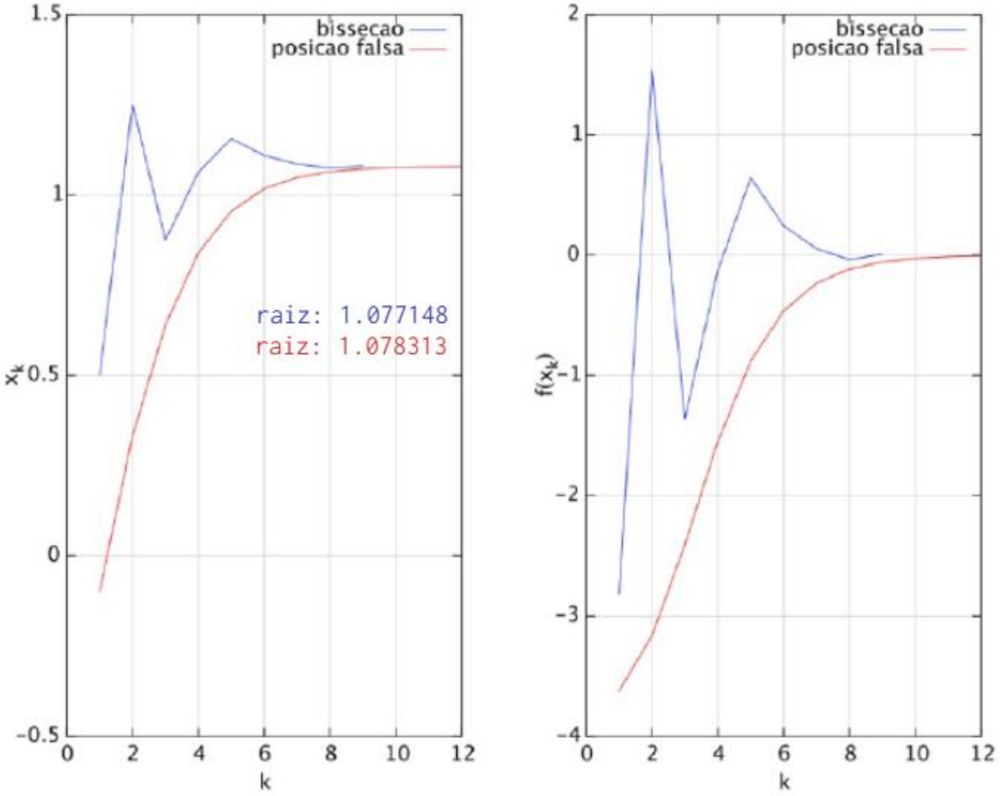
Bisseção x Posição Falsa



Bisseção x Posição Falsa



Bisseção x Posição Falsa



Método da Falsa Posição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - $f(x) = \ xlog(x) - 1 \qquad [a_0, b_0] = [2, 3]$

$f(a_0) = -0.3979 < 0$

$f(b_0) = 0.4314 > 0$

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{2 \times 0.4314 - 3 \times (-0.3979)}{0.4314 - (-0.3979)} = \frac{2.0565}{0.8293} = 2.4798$$

$$\begin{cases} a_1 = x_0 = 2.4798 & f(a_1) < 0 \\ b_1 = 3 & f(b_1) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{2.4798 \times 0.4314 - 3 \times (-0.0219)}{0.4314 - (-0.0219)} = 2.5049$$

$f(x_1) = -0.0011$. Analogamente,

$$\begin{cases} a_2 = x_1 = 2.5049 \\ b_2 = b_1 = 3 \end{cases} \qquad \vdots$$

Método da Falsa Posição

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício

$f(x) = x^3 - 9x + 3 \qquad I = [0, 1] \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

Iteração	x	f(x)	b – a
1	.375	–.322265625	1
2	.338624339	$-8.79019964 \times 10^{-3}$	.375
3	.337635046	$-2.25883909 \times 10^{-4}$	.338624339

E portanto $\bar{x} = 0.337635046$ e $f(\bar{x}) = -2.25 \times 10^{-4}$.

Método de Pégaso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- De maneira similar ao método da posição falsa, o método de Pégaso consiste em reduzir a amplitude do intervalo [a, b] que contém a raiz.

- Ao invés de apenas usar o ponto onde a reta secante unindo $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$ cruza o eixo x, o método também reduz o valor de $f(x_{k-1})$ por um fator de:

$$\frac{f(x_k)}{f(x_k) + f(x_{k+1})}$$

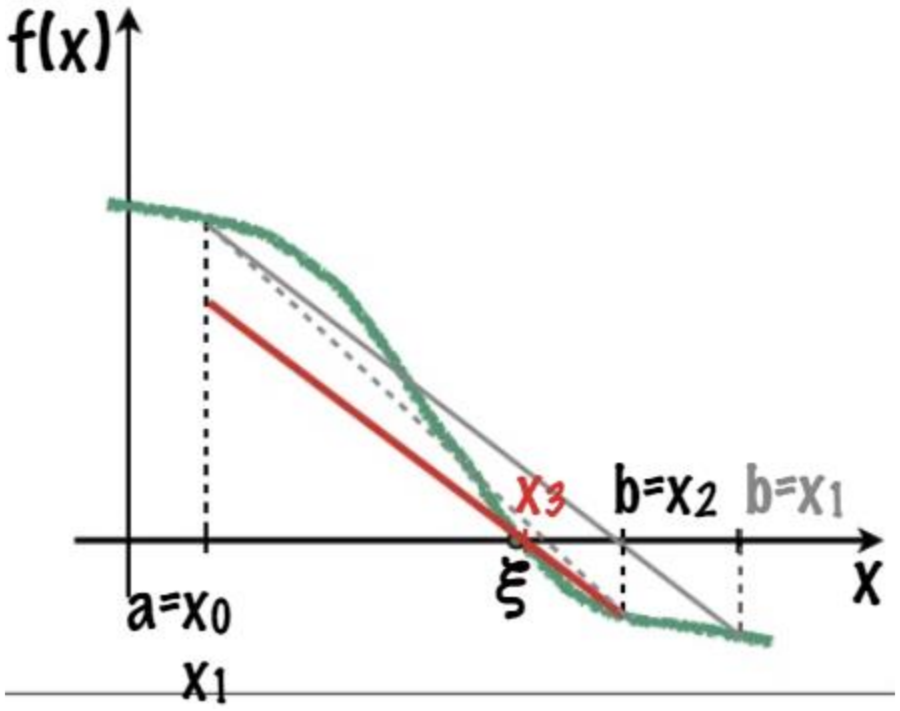
Método de Pégaso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

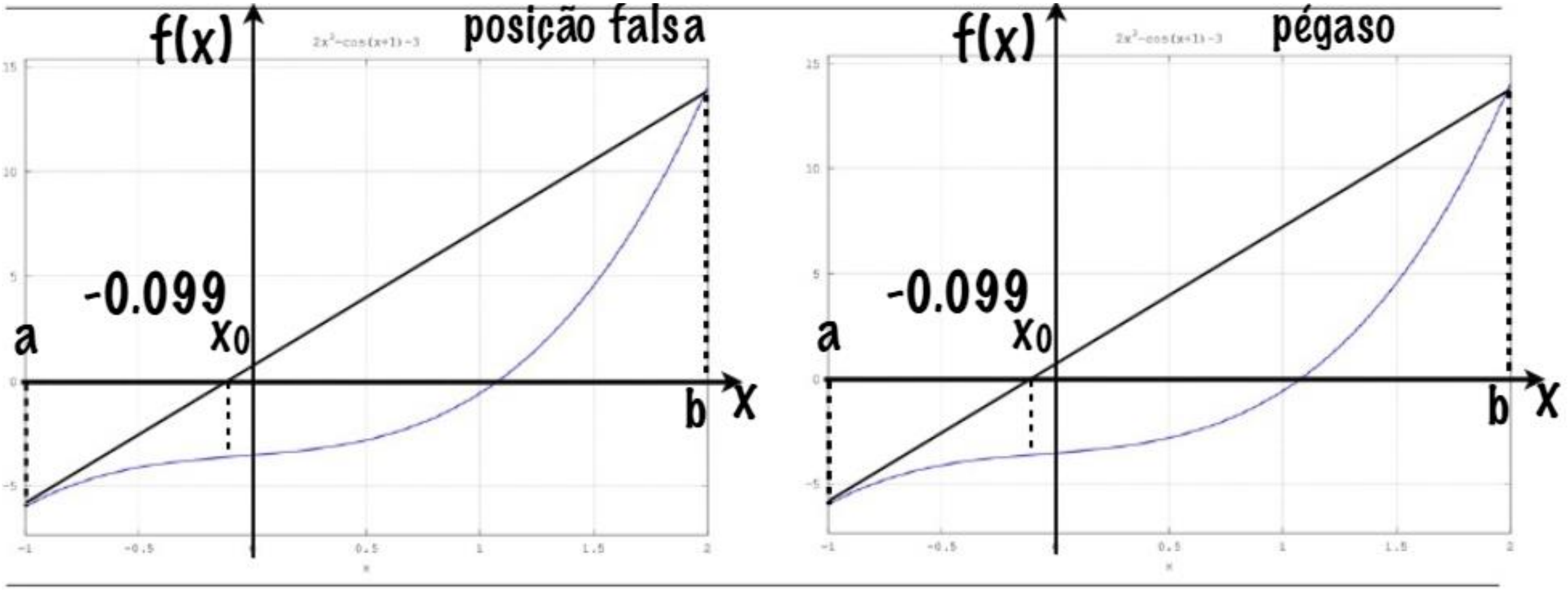
- Seja uma função f(x) contínua no intervalo [a, b], sendo ξ a única raiz de f(x)=0 neste intervalo.

- Uma estimativa da raiz ξ é tomada onde a reta secante cruza o eixo x.
- Se $\boldsymbol{f(x) \cdot f(b) > 0}$, então

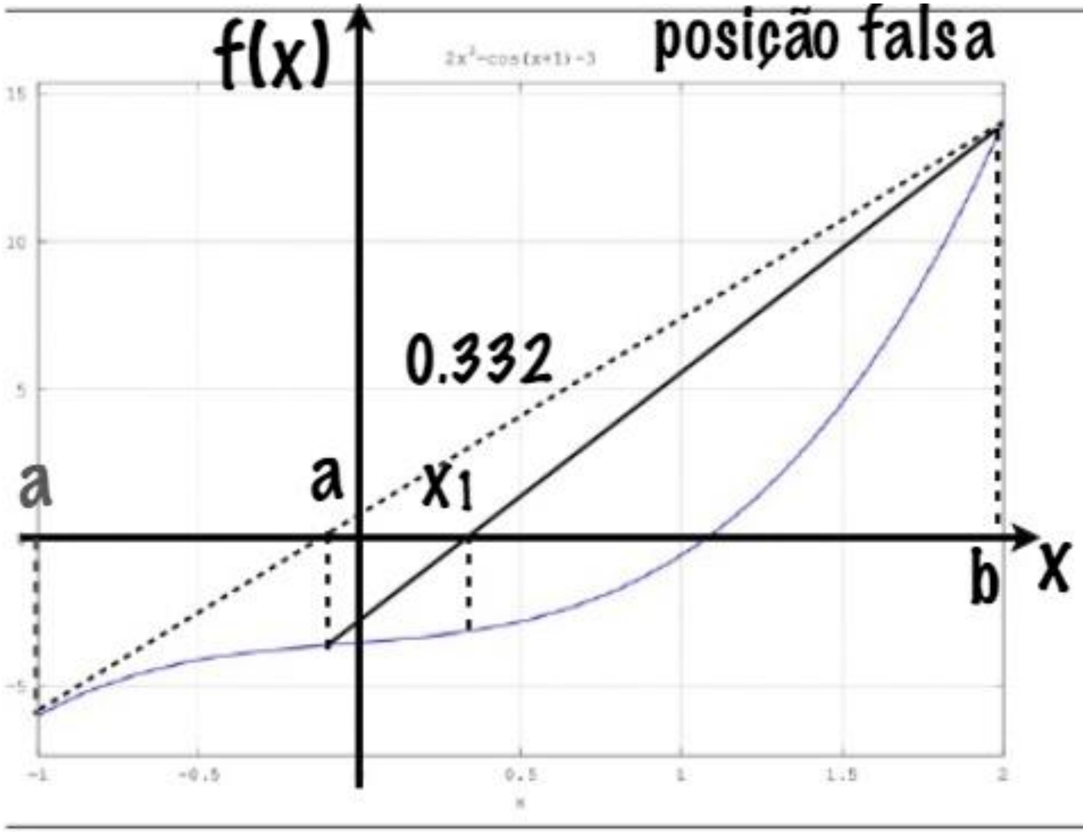
$$\boldsymbol{f(a) = f(a) \cdot \frac{f(b)}{f(b) + f(x)}}$$

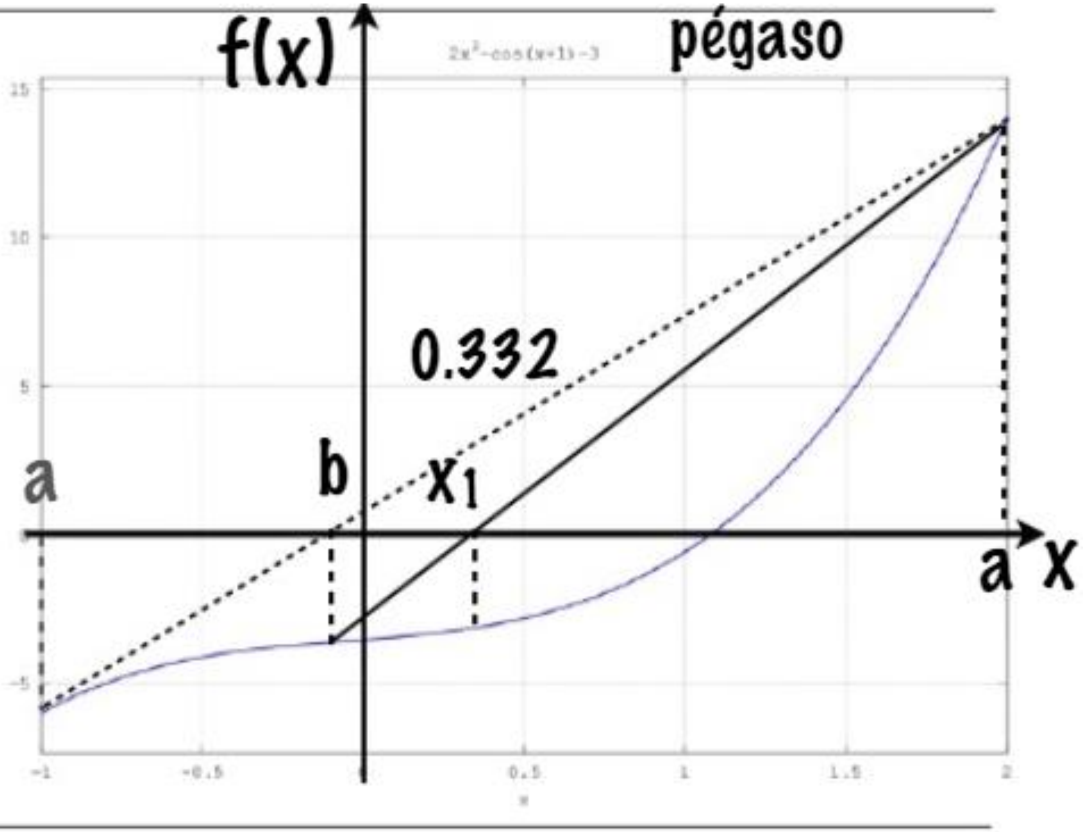


Posição Falsa x Pégaso

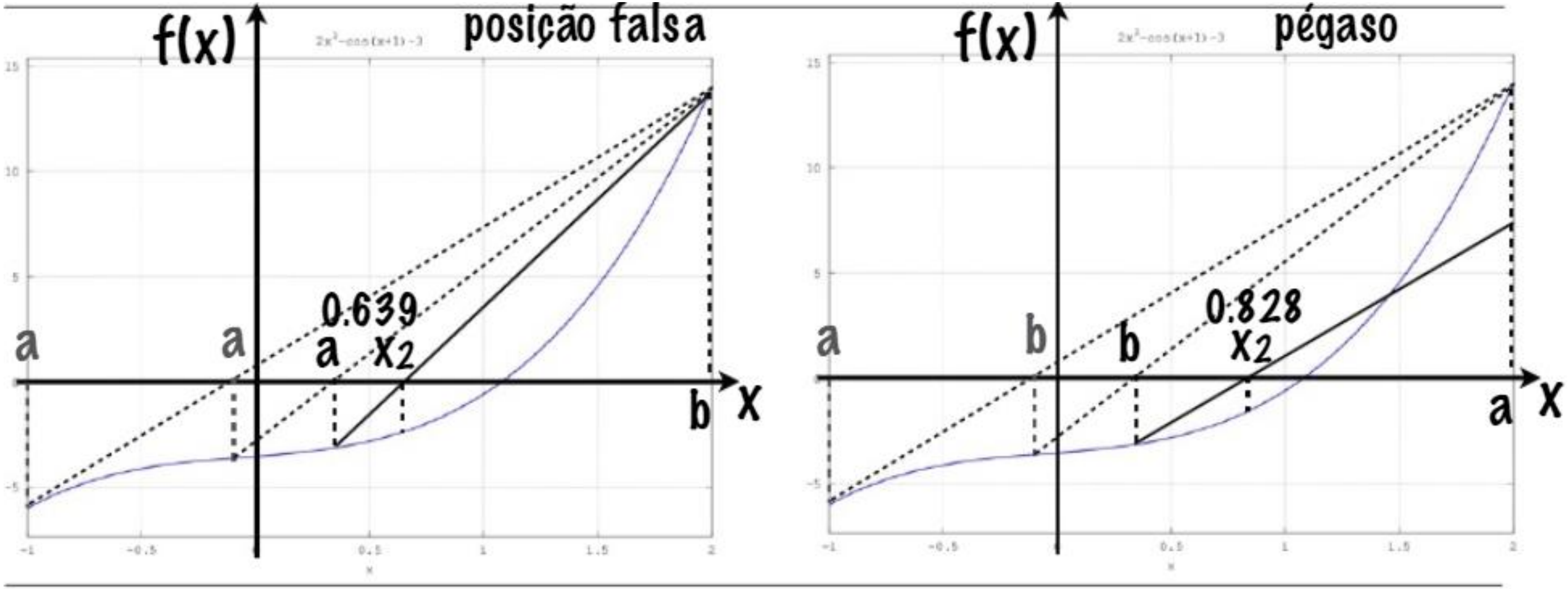


Posição Falsa x Pégaso

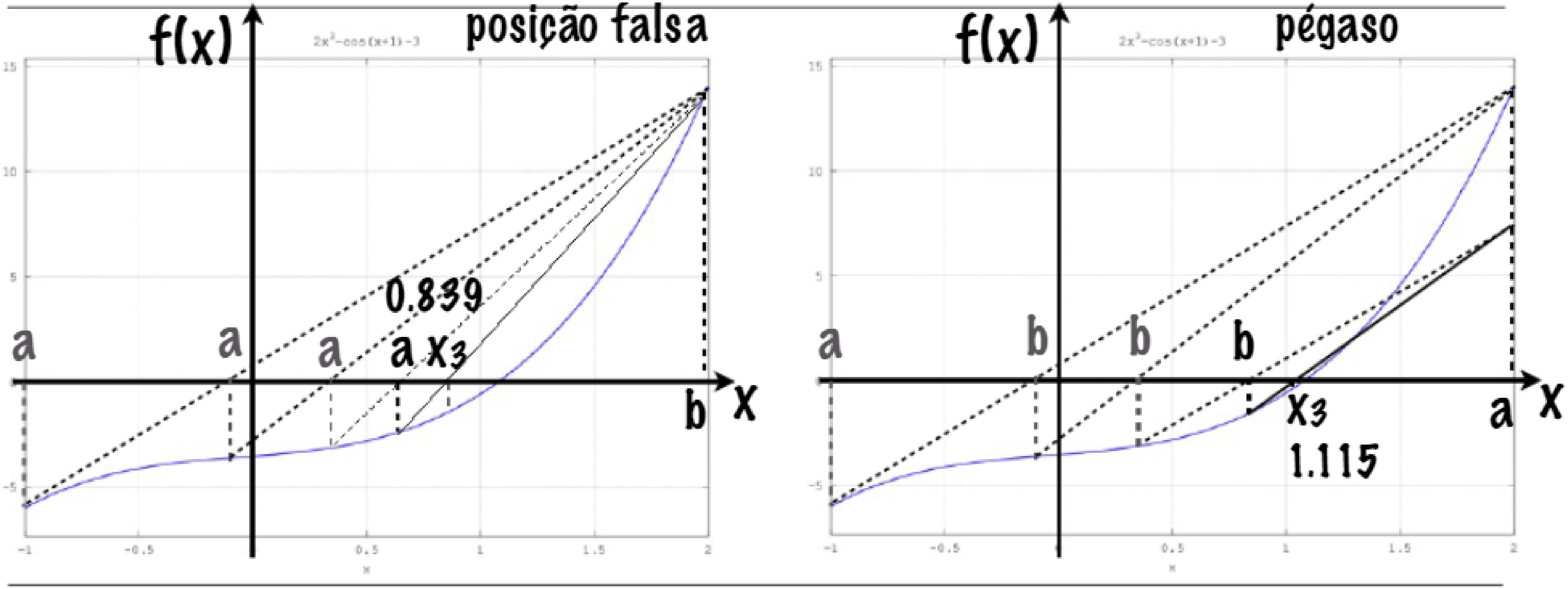




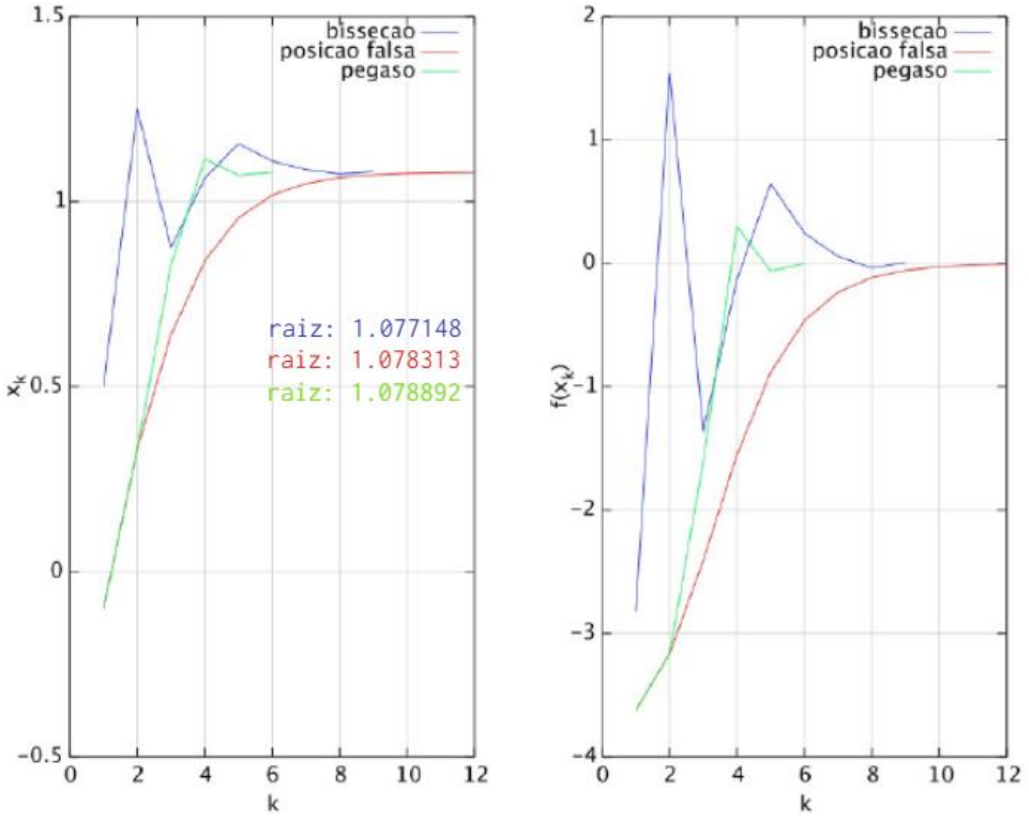
Posição Falsa x Pégaso



Posição Falsa x Pégaso



Posição Falsa x Pégaso



Método de Pégaso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

Calcular com $\varepsilon \leq 0{,}01$, a raiz de $f(x) = 2x^3 - \cos(x+1) - 3 = 0$ pelo método pégaso sabendo-se que $\xi \in [-1, 2]$.

a	-1,00000
fa	-6,00000
b	2,00000
fb	13,98999
x0	-0,09955
fx0	-3,62323

a	2,00000
fa	13,98999
b	-0,09955
fb	-3,62323
x1	0,33235
fx1	-3,16277

a	2,00000	fx0/fx0+fx1
fa	7,46964	0,53393
b	0,33235	
fb	-3,16277	
x2	0,82842	
fx2	-1,60817	

a	2,00000	fx1/fx1+fx2
fa	4,95180	0,66292
b	0,82842	
fb	-1,60817	
x3	1,11563	
fx3	0,29537	

a	0,82842
fa	-1,60817
b	1,11563
fb	0,29537
x4	1,07106
fx4	-0,06294

iter	a	Fa	b	Fb	x	Fx	Delta_x
0	-1.00000	-6.00000	2.00000	13.98999	-0.09955	-3.623e+00	-2.100e+00
1	2.00000	13.98999	-0.09955	-3.62323	0.33235	-3.163e+00	4.319e-01
2	2.00000	7.46964	0.33235	-3.16277	0.82842	-1.608e+00	4.961e-01
3	2.00000	4.95180	0.82842	-1.60817	1.11563	2.954e-01	2.872e-01
4	0.82842	-1.60817	1.11563	0.29537	1.07106	-6.294e-02	-4.457e-02
5	1.11563	0.29537	1.07106	-0.06294	1.07889	-1.807e-03	7.828e-03

Método de Pégaso

- Exercício

Achar o ponto de máximo μ do polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ pelo método pégaso, com $\varepsilon \leq 10^{-5}$, sabendo-se que $\mu \in [-1, 1]$

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Definição
  - Dada uma **função f(x) contínua no intervalo [a,b]** onde existe uma **raiz única, f(x) = 0**, é possível transformar tal equação em uma equação equivalente **$x = g(x)$** e, a partir de uma **aproximação inicial x_0**, gerar uma **seqüência $\{x_k\}$ de aproximações para** ξ pela **relação $x_{k+1} = g(x_k)$**, uma vez que g(x) é tal que **$f(\xi) = 0$** se e somente se **$g(\xi) = \xi$**.

  - O Método do Ponto Fixo inicia-se reescrevendo a função f(x) como: **$f(x) = g(x) - x$**
  - Essa forma de escrever f(x) é bastante útil. No ponto x que corresponde à raiz de f(x), isto é, f(x) = 0, teremos que:

$$f(x) = g(x) - x = 0$$
$$g(x) = x$$

    - g(x) é a Função de Iteração para f(x) = 0.

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - A função $f(x) = x^2 - x - 2$ pode ser reescrita como:

$$f(x) = x^2 - 2 - x = g(x) - x$$

    - onde $g(x) = x^2 – 2$.

  - Essa função tem como ponto fixo o valor $x = 2$, pois $g(2) = 2^2 – 2 = 2$.
  - E esse é exatamente o valor da raiz de $f(x)$, pois $f(2) = 2^2 – 2 – 2 = 0$.
  - Ou seja, no ponto x que corresponde à raiz de f(x), ao substituirmos o valor de x na função g(x), teremos como resultado o próprio valor de x.
  - Portanto, a raiz de f(x) será o ponto fixo de g(x), ou seja, o valor que ao ser substituído em g(x) retorna o próprio valor de x.

Método do Ponto Fixo

- Forma geral das funções de iteração

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

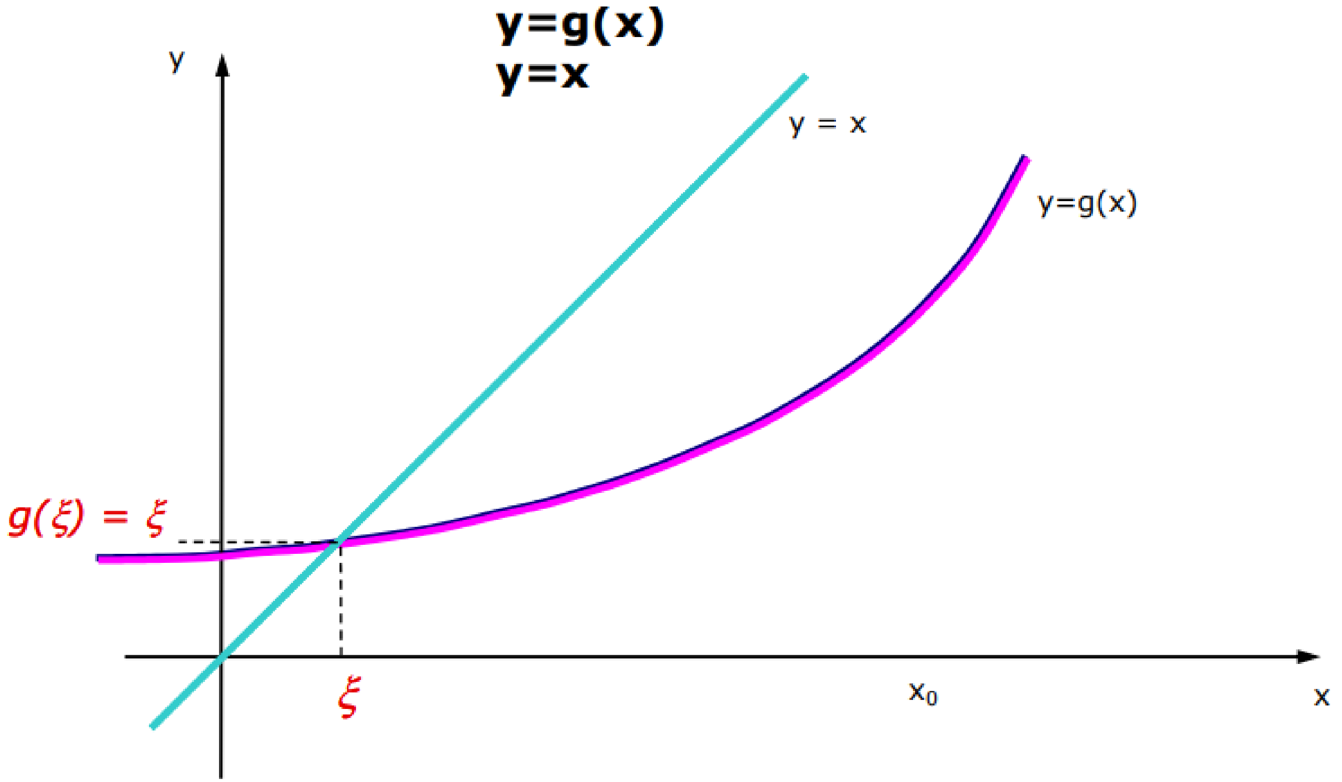
  - com $A(\xi) \neq 0$ em ξ, ponto fixo de $g(x)$.

- Interpretação Gráfica
  - $x = g(x)$ tem como raiz a abcissa do ponto de intersecção da reta $r(x) = x$ e da curva $g(x)$.
  - Determinar os pontos fixos de uma função $g(x)$ é determinar os pontos de intersecção entre as curvas.

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Interpretação Gráfica



Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 - e^x$, com $x_0 = -1$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - e^x = 0$$

$$x = \pm\sqrt{e^x}$$

$$x_0 = -1 \rightarrow \varphi(x_0) = \varphi(-1) = -\sqrt{e^{-1}} = -0{,}606$$

$$x_1 = -0{,}606 \rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(-0{,}606) = -\sqrt{e^{-0{,}606}} = -0{,}738$$

$$x_2 = -0{,}738 \rightarrow \varphi(x_2) = \varphi(-0{,}738) = -\sqrt{e^{-0{,}738}} = -0{,}691$$

$$x_3 = -0{,}691 \rightarrow \varphi(x_3) = \varphi(-0{,}691) = -\sqrt{e^{-0{,}691}} = -0{,}707$$

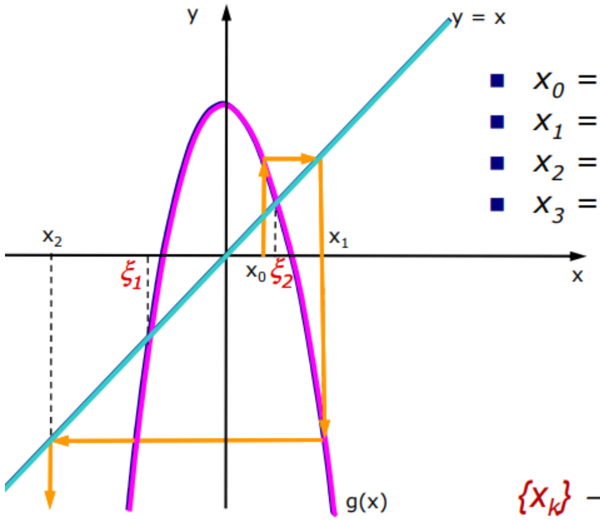
$$x_4 = -0{,}707$$

x	$f(x) = x^2 - e^x$
-1	0,632
-0,606	-0,178
-0,738	0,067
-0,691	-0,024
-0,707	0,007

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + x - 6$, com $x_0 = 1{,}5$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).
    - $g_1(x) = 6 - x^2$
    - $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
    - $g_3(x) = 6/(x + 1)$
  - $g(x) = g_1(x) = 6 - x^2$
    - $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75$
    - $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
    - $x_3 = g(x_2) = 6 - (-8{,}0625)^2 = -59{,}003906$
    - $x_4 = g(x_3) = 6 - (-59{,}003906)^2 = -3475{,}4609$



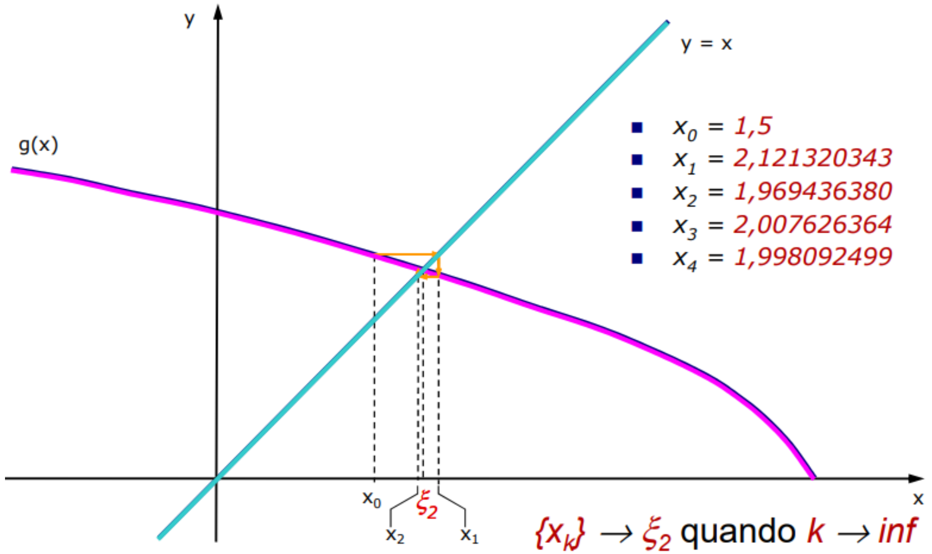
- $x_0 = 1{,}5$
- $x_1 = g(x_0) = 6 - 1{,}5^2 = 3{,}75$
- $x_2 = g(x_1) = 6 - 3{,}75^2 = -8{,}0625$
- $x_3 = g(x_2) = -59{,}00039$

$\{x_k\} \to inf$ quando $k \to inf$

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + x - 6$, com $x_0 = 1{,}5$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).
    - $g_1(x) = 6 - x^2$
    - $g_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$
    - $g_3(x) = 6/(x + 1)$

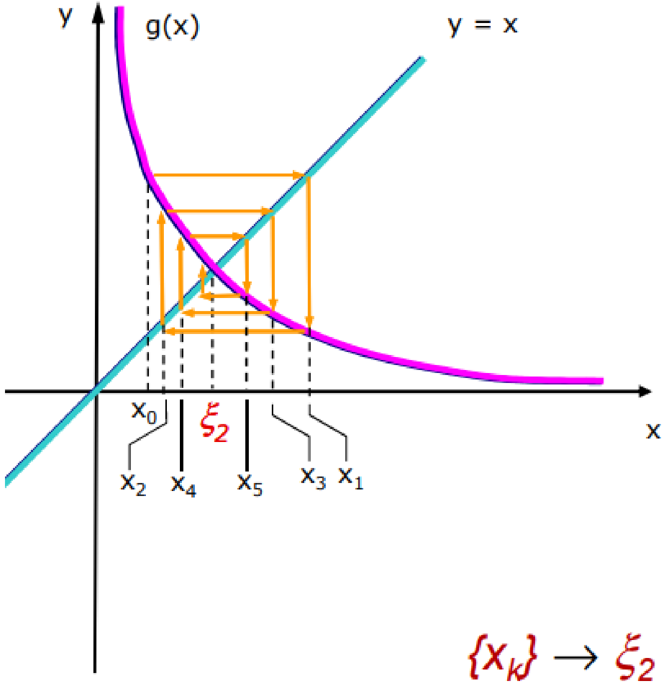


  - $g(x) = g_2(x) = \sqrt{6 - x}$
    - $x_1 = g(x_0) = \sqrt{6 - 1{,}5} = 2{,}121320343$
    - $x_2 = g(x_1) = \sqrt{6 - 2{,}121320343} = 1{,}969436380$
    - $x_3 = g(x_2) = \sqrt{6 - 1{,}969436380} = 2{,}007626364$
    - $x_4 = g(x_3) = \sqrt{6 - 2{,}007626364} = 1{,}998092499$
    - $x_5 = g(x_4) = \sqrt{6 - 1{,}998092499} = 2{,}000476818$

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^3 - x - 1$, com $x_0 = 1$, usando o Método da Iteração Linear (Pontos Fixos).
    - $g_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 1$
    - $g_2(\mathrm{x}) = \pm\sqrt[3]{1+x}$
  - $\mathrm{g(x)} = g_2(\mathrm{x}) = \sqrt[3]{1+x}$
    - $x_1 = g(x_0) = \sqrt[3]{1+1} = 1{,}259921$
    - $x_2 = g(x_1) = \sqrt[3]{1+1{,}259921} = 1{,}312294$
    - $x_3 = g(x_2) = \sqrt[3]{1+1{,}312294} = 1{,}322354$
    - $x_4 = g(x_3) = \sqrt[3]{1+1{,}322354} = 1{,}324269$
    - $x_5 = g(x_4) = \sqrt[3]{1+1{,}324269} = 1{,}324633$



$\{x_k\} \to \xi_2$ quando $k \to inf$

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Estudo da Convergência
  - Sendo ξ uma raiz de f(x) = 0, isolada em um intervalo I = [a,b], centrado em ξ e g(x) uma função de iteração para f(x) = 0, se:
    - g(x) e g'(x) são contínuas em I
    - $|g'(x)| < 1, \forall x \in I = [a,b]$
    - $x_1 \in I$
  - Então a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ convergirá para ξ .

Método do Ponto Fixo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício
  - Aplique o método de convergência para $f(x) = x^2 + x - 6$, com $x_0 = 1{,}5$.

Método de Newton-Raphson

- Definição
  - Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.
  - Uma das condições de convergência é que $|g'(x)| < 1, \forall\ x \in I$, onde I é um intervalo centrado na raiz.
  - A convergência será tanto mais rápida quanto menor for $|g'(x)|$.
  - O método de Newton-Raphson busca garantir e acelerar a convergência do MPF, escolhendo g(x), tal que $g'(\xi) = 0$, como função de interação.

Método de Newton-Raphson

- Dedução
  - Dada a equação $f(x) = 0$ e partindo da forma geral para $g(x)$

$$g(x) = x + A(x)f(x)$$

  - Busca-se obter a função $A(x)$ tal que $g'(\xi) = 0$
    - $g(x) = x + A(x)f(x)$
    - $g'(x) = 1 + A'(x)f(x) + A(x)f'(x)$
    - $g'(\xi) = 1 + A'(\xi)f(\xi) + A(\xi)f'(\xi)$, fazendo $f(\xi) = 0$

$$\mathbf{g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)}$$

Método de Newton-Raphson

- Assim,

$$g'(\xi) = 1 + A(\xi)f'(\xi)$$

  - $g'(\xi) = 0$

- $1 + A(\xi)f'(\xi) = 0$

- $A(\xi) = -1/f'(\xi)$

$$\mathbf{A(x) = -1/f'(x)}$$

Método de Newton-Raphson

- A(x) = -1/f'(x)
  - Como g(x) = x + A(x)f(x)
- $g(x) = x + \left(\frac{-1}{f'(x)}\right) f(x)$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Deste modo, escolhido x_0 , a sequência $\{x_k\}$ será determinada por

$$\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

Método de Newton-Raphson

- Interpretação Gráfica
  - Dado o ponto $(x_k\ , f(x_k))$
    - Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:

$$L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

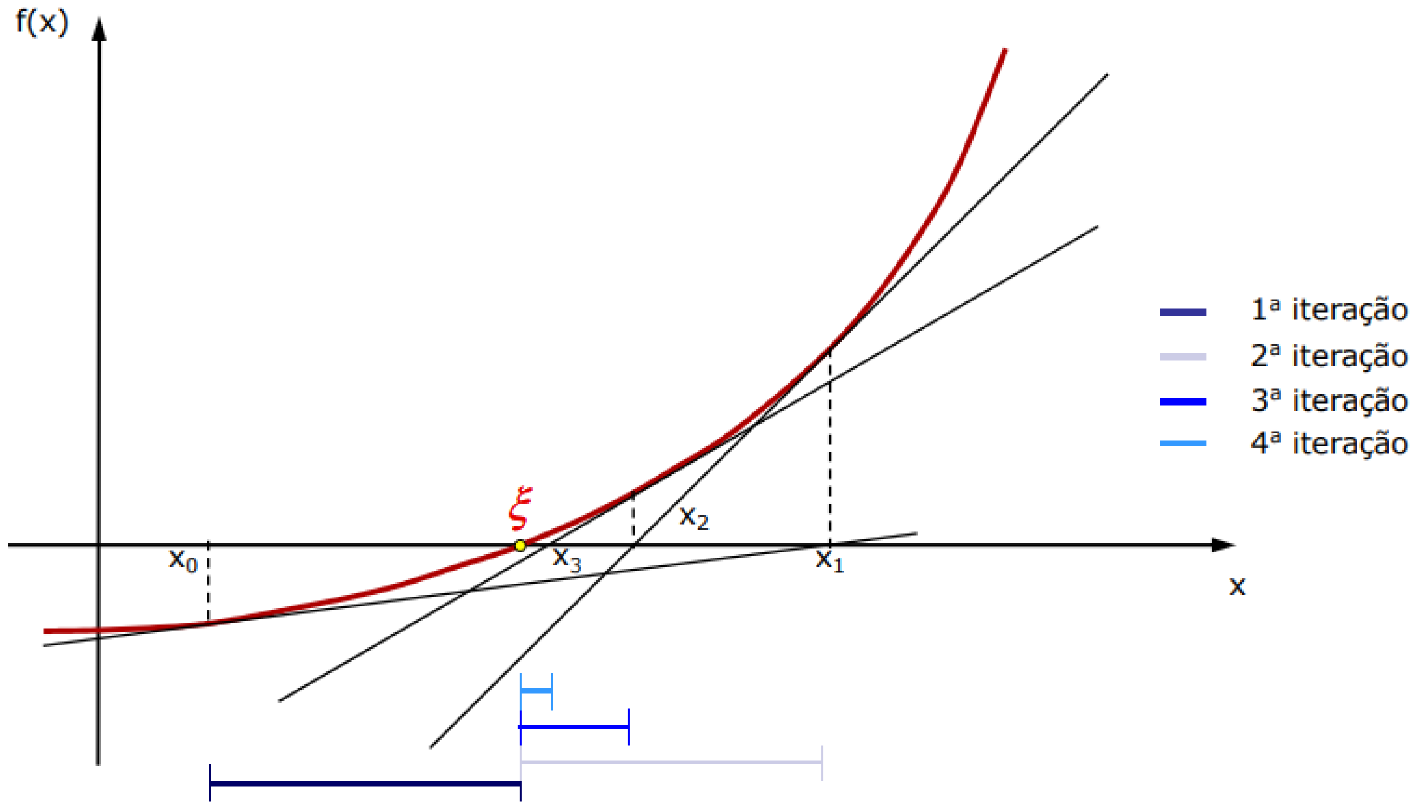
    - Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima f(x) em uma vizinhança x_k.
      - $L_k(x) = 0$

$$x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$$

      - Faz-se $\mathbf{x_{k+1} = x}$

Método de Newton-Raphson

- Interpretação Gráfica



Método de Newton-Raphson

- Estudo da Convergência
  - Sendo f(x), f'(x) e f''(x) contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz.

Método de Newton-Raphson

- Exercício
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + x - 6$, com $x_0 = 1{,}5$, usando o Método de Newton-Raphson.

    - $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2+x-6}{2x+1}$

    - $x_1 = g(x_0) = 1{,}5 - \frac{1{,}5^2+1{,}5-6}{2 \cdot 1{,}5+1} = 2{,}062500000$

    - $x_2 = g(x_1) = 2{,}000762195$

    - $x_3 = g(x_2) = 2{,}000000116$

Método da Secante

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Definição
  - Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da secante à curva em dois pontos x_0 e x_1 com o eixo das abscissas.
  - Um grande inconveniente do Método de Newton-Raphson é a necessidade da obtenção de f'(x) e o cálculo de seu valor numérico a cada iteração.
  - Dessa forma, faz-se a substituição da derivada f'(x_k) pelo quociente das diferenças.

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

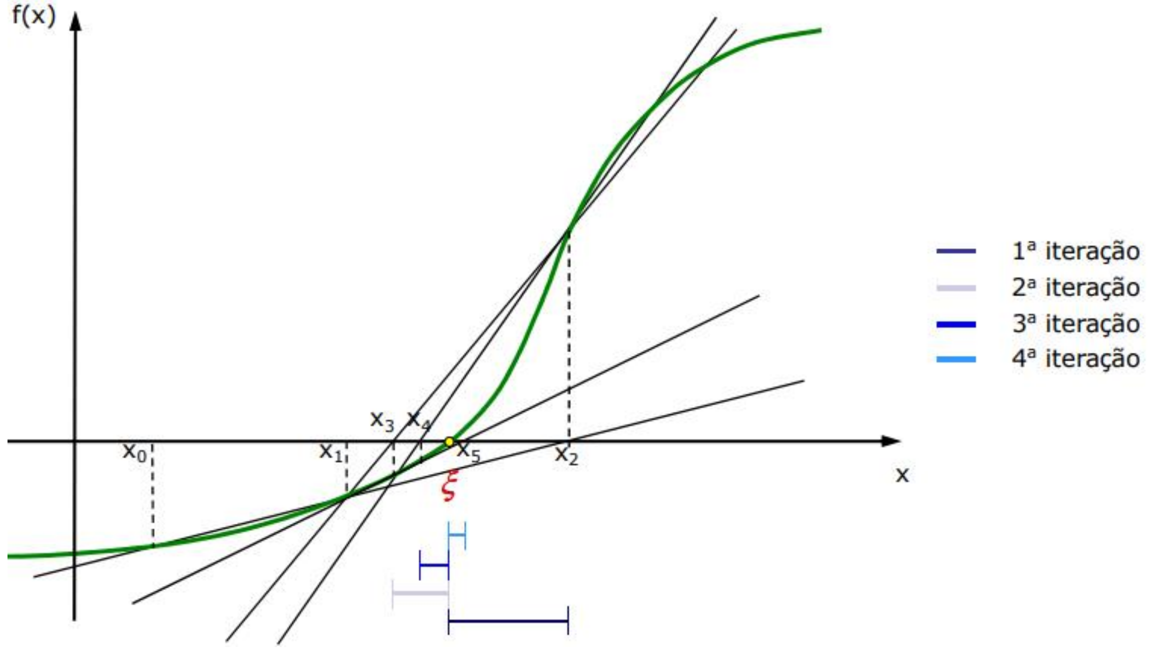
$$\boldsymbol{g(x) = \frac{x_{k-1} \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

(Nova Função de Interação)

Método da Secante

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Interpretação Gráfica
  - A partir de duas aproximações x_{k-1} e x_k obtém-se o ponto x_{k+1} como sendo a abscissa do ponto de intersecção do eixo $\overrightarrow{ox}$ e da reta que passa pelos pontos $(x_{k-1}\ ,\ \mathrm{f}(x_{k-1})\ )$ e $(x_k, \mathrm{f}(x_k)\ )$, secante à curva da função.



Método da Secante

- Exercício
  - Encontre uma estimativa para a raiz de $f(x) = x^2 + x - 6$, com $x_0 = 1{,}5$ e $x_1 = 1{,}7$, usando o Método da Secante.