Álgebra Linear
Aula 5

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 04

- Avalie as afirmações abaixo. Em caso ache que é falso, justifique.
    1. Considere a seguinte sequência de conta

    $$AB + AC = 0 \to A(B + C) = 0.$$

    Se $A \neq 0$ então podemos concluir que $B = -C$.
    2. Dados matrizes A e B quadradas de mesmo tamanho quaisquer, temos

    $$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A(A+B)+B(A+B) = A^2+2AB+B^2.$$

3. Considere a matriz a seguir $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ m_3+1 & 1 \end{bmatrix}$. Qual o valor de x na matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{-9(m_3+1)} & \frac{1}{m_3+1} \\ \frac{1}{9} & x \end{bmatrix}$ para que B seja a matriz inversa de A?

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 04 - Gabarito

1. Falso. Na aula passada vimos um contra-exemplo no qual $AB = 0$, $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
2. Falso. Seria verdade apenas se $AB = BA$.
3. $x = 0$.

Inversa Matriz 2×2

Inversa Matriz 2×2

Exemplo

Seja A uma matriz invertível tal que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Temos que

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matrizes Inversas Vs Sistemas Lineares

Exemplo

Resolva o sistema linear $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $b^T = [1\ 2]$.

Teorema (1.4.6)

Sejam A e B duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Teorema (1.4.6)

Sejam A e B duas matrizes invertíveis de mesmo tamanho então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Corolário

Se $A_1, \ldots, A_k$ são matrizes invertíveis de mesmo tamanho então $A_1 \cdots A_k$ é invertível e

$$(A_1 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. Se A é invertível então $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

Potência de Matrizes

Seja A uma matriz quadrada e n um inteiro não negativo. Definimos $A^n = \prod_{i=1}^{n} A$.

Proposição

Sejam k, ℓ inteiros não negativos e c um escalar fixo. Seja A uma matriz quadrada. Temos

1. $A^{k+\ell} = A^k A^\ell$;
2. $A^{k\ell} = (A^k)^\ell = (A^\ell)^k$;
3. Se A é invertível então $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. Se A é invertível então $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;
5. Se $c \neq 0$ e A é invertível então kA é invertível e $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

Exemplo - Produto Notável

Resolva $(A+B)^2$.

Polinômio Matricial

Seja $p(x)$ um polinômio qualquer da forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Um polinômio matricial em A, onde A é quadrada, é definido na forma

$$p(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n.$$

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Teorema

Se tomarmos as matrizes a seguir de forma que as operações indicadas possam ser efetuadas, então

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Teorema

Se tomarmos as matrizes a seguir de forma que as operações indicadas possam ser efetuadas, então

1. $(A^T)^T = A$;

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Teorema

Se tomarmos as matrizes a seguir de forma que as operações indicadas possam ser efetuadas, então

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Teorema

Se tomarmos as matrizes a seguir de forma que as operações indicadas possam ser efetuadas, então

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;
3. $(kA)^T = kA^T$;

Transposta de uma matriz

A Transposta de uma matriz A de tamanho $m \times n$ é uma matriz A^T de tamanho $n \times m$ tal que

$$(A)_{ij} = (A^T)_{ji}.$$

Teorema

Se tomarmos as matrizes a seguir de forma que as operações indicadas possam ser efetuadas, então

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$;
3. $(kA)^T = kA^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Teorema - Inversa Transposta

Se a matriz A é invertível então sua transposta também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Equivalência de Matrizes

Duas matrizes A e B são equivalentes por linhas se podemos a partir de A realizar uma sequência finita de operações elementares nas linhas e obter B.

Equivalência de Matrizes

Duas matrizes A e B são equivalentes por linhas se podemos a partir de A realizar uma sequência finita de operações elementares nas linhas e obter B.

Teorema (1.5.1)

Cada operação elementar na linha possui uma matriz E, chamada de matriz elementar, tal que a matriz resultante EA é igual a matriz resultante da operação elementar em A.

Teorema (1.5.2)

Toda matriz elementar é invertível e sua inversa também é uma matriz elementar.

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;
3. A forma escalonada reduzida de A é I_n;

Teorema (1.5.3)

Seja A uma matriz $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é invertível;
2. $Ax = 0$ tem somente a solução trivial;
3. A forma escalonada reduzida de A é I_n;
4. A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Algoritmo para encontrar a inversa de A

Encontre a sequência de matrizes elementares que levam A até I então execute a mesma sequência em I.

Teorema (1.6.1)

Um sistema linear de equações tem zero, uma ou infinitas soluções.

Exemplo

Analise o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Analise o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema (1.6.2)

Se A é uma matriz invertível de tamanho $n \times n$, então para cada vetor b de tamanho $n \times 1$ o sistema $Ax = b$ tem uma única solução. A saber

$$x = A^{-1}b.$$

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;
2. Mostrar que $AB = I$.

Como mostrar que uma matriz A é invertível:

1. Encontrar B tal que $BA = I$;
2. Mostrar que $AB = I$.

Teorema 1.6.3

Seja A é uma matriz quadrada.

1. Se B é tal $AB = I$ então $A^{-1} = B$;
2. Se B é tal $BA = I$ então $A^{-1} = B$;

Teorema 1.6.4

Seja A uma matriz quadrada. As seguintes afirmações são equivalentes.

1. A é invertível;
2. $Ax = b$ tem exatamente uma solução para cada matriz b;
3. $Ax = b$ é consistente para toda cada matriz b;

Exemplo

Sejam A e B as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre as inversas de A, B e AB.

Exemplo

Sejam A e B as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre as inversas de A, B e AB.

Teorema 1.6.5

Sejam A e B matrizes quadradas. Se AB for invertível então A e B também serão invertíveis.

Problema Fundamental

Encontre uma relação para os elementos de $b^T = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ tal que o sistema $Ax = b$ seja consistente, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$