Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 16, 17, 18, 19 e 20

Transformações Lineares

Transformação Linear

- **Definição:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* é uma função de V em W, $T: V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

I. Para quaisquer $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em V:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

II. Para quaisquer $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$:

$$T(k\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$$

Exemplos

- Verifique os EVs nas TLs.

1. $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$ / T: x $\rightarrow$ 3x;
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$ / T: (x, y) $\rightarrow$ (3x, – y, 2x – 3y);
3. $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \mathbb{R}$ / T: (x, y, z, w) $\rightarrow$ (x – 2y – 2z + 3w);

Testes – TL

- Sempre realizaremos 2 testes:

1. Para $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in V$, $T(\mathbf{u} + \mathbf{w}) \in W$ e $T(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{w})$?;

2. Para $\mathbf{u} \in V$ e $k \in \mathbb{R}$, $T(k\mathbf{u}) \in W$ e $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$?;

Exemplos

- Verifique se as seguintes transformações são TLs:
  1. $T(x) = ax$; Sim.
  2. $T(x) = ax + b$; Não.
  3. $T(x, y) = (2x, -x + y, -7y)$; Sim.
  4. $T(x, y, z) = (x - y, y + z)$; Sim.
  5. $T(x, y, z) = ((x - y)^2, z^2)$; Não.

- Assim, para $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots + a_n\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}$ temos $T(\mathbf{v}) = a_1T(\mathbf{v_1}) + a_2T(\mathbf{v_2}) + \ldots + a_nT(\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}})$. Uma TL pode então ser representada como uma matriz.

- Exemplo:

$$L_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$L_{\mathbf{A}}(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$$

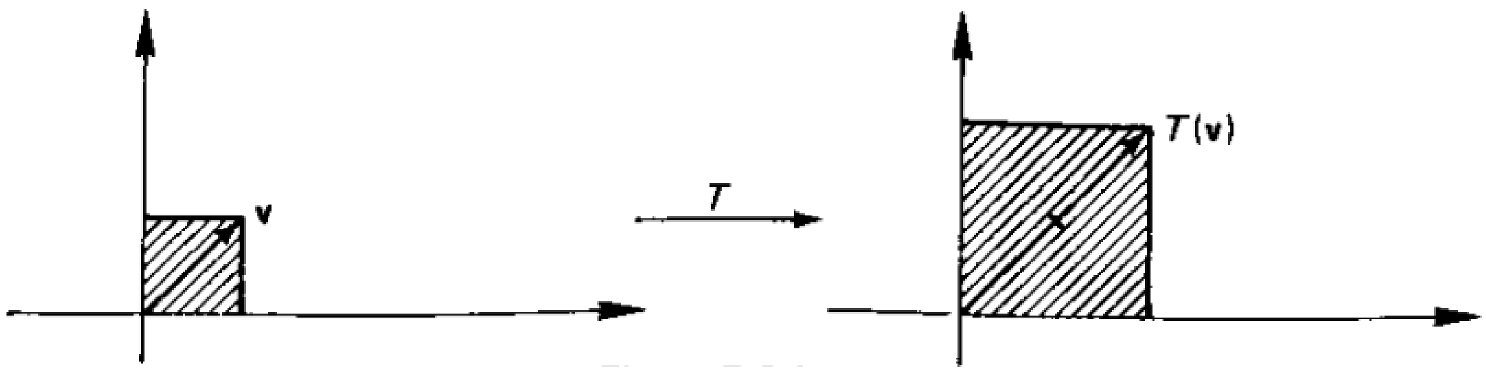
TLs do Plano no Plano

- **Expansão (ou Contração) Uniforme:** T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, **v** = α**v**.

Por exemplo: $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{v} \mapsto 2\mathbf{v}, \quad \text{ou} \quad T(x, y) = 2(x, y)$$

Esta função leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de **v**, mas de módulo maior.

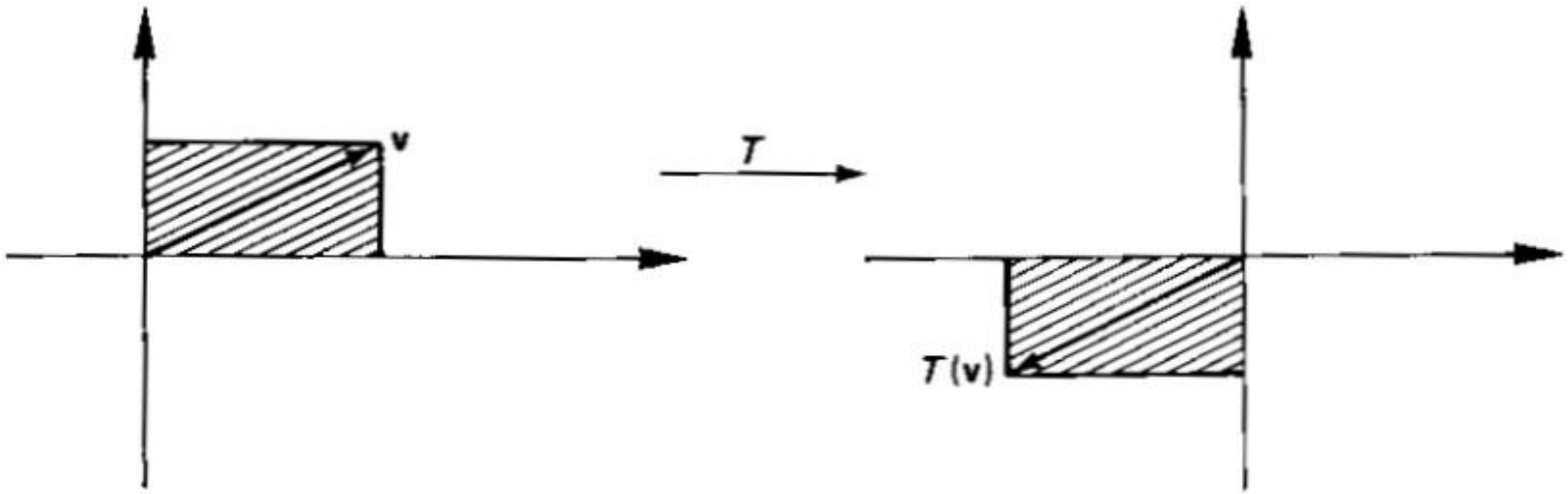


$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow 2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **Reflexão na Origem:** T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, **v = -v**.

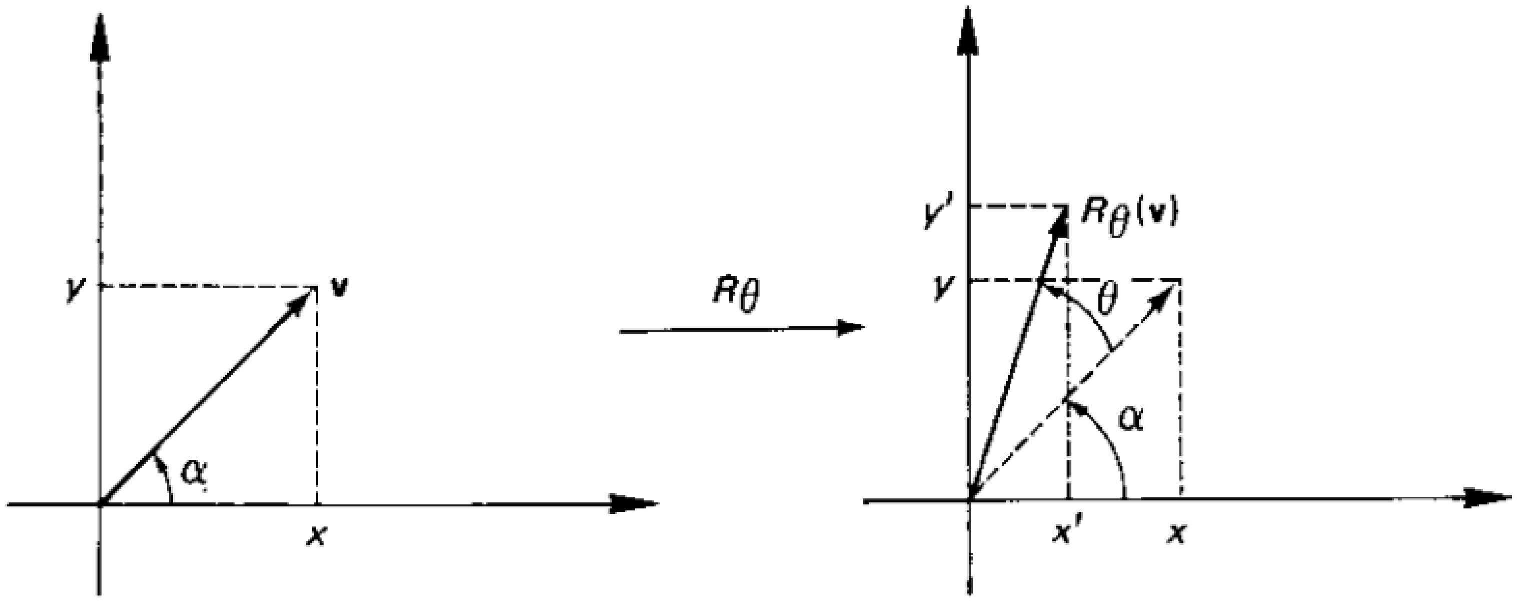
$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$

$\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$, ou seja, $T(x, y) = (-x, -y)$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- **Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário):**



$x' = r\cos(\alpha + \theta) = r\cos\alpha\ \cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{sen}\,\theta$

Mas $r\cos\theta = x$ e $r\,\mathrm{sen}\,\theta = y$.

Então $x' = x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta$.

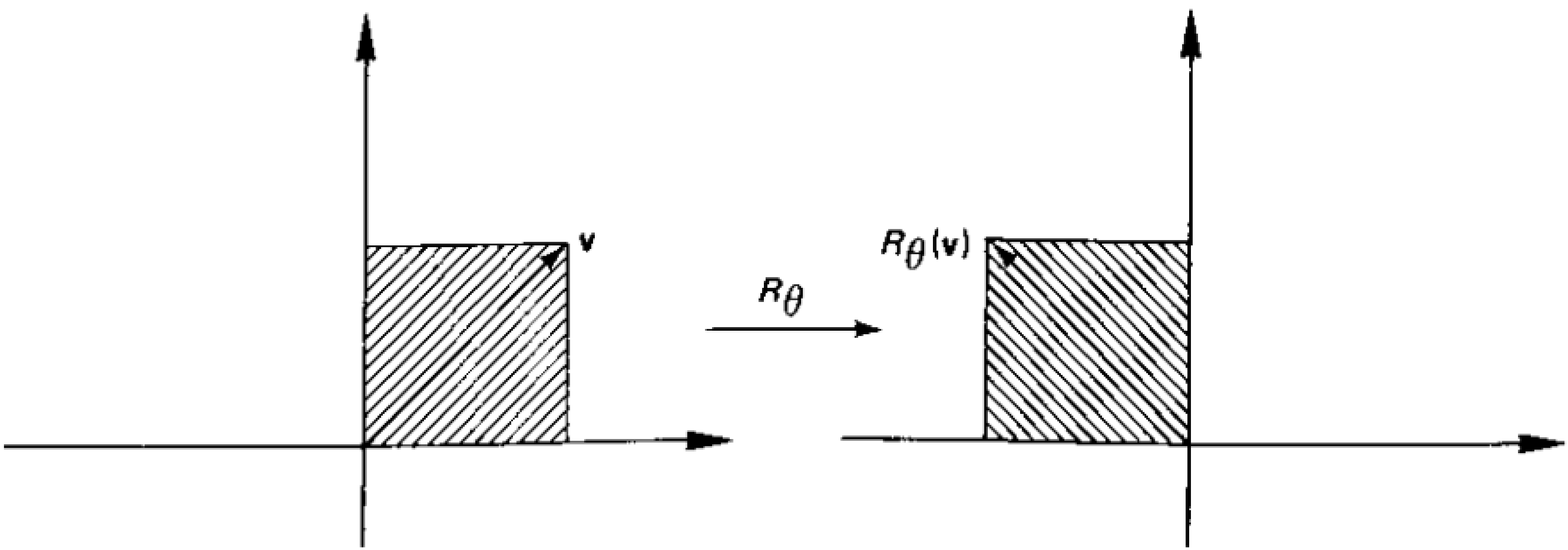
Analogamente, $y' = r\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \theta) = r(\mathrm{sen}\,\alpha\ \cos\theta + \cos\alpha\ \mathrm{sen}\,\theta) = y\cos\theta +$
$+ x\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Assim $\mathbf{R}_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta)$ ou na forma coluna,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Consideremos o caso particular onde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Neste caso, $\cos\theta = 0$ e $\operatorname{sen}\theta = 1$.

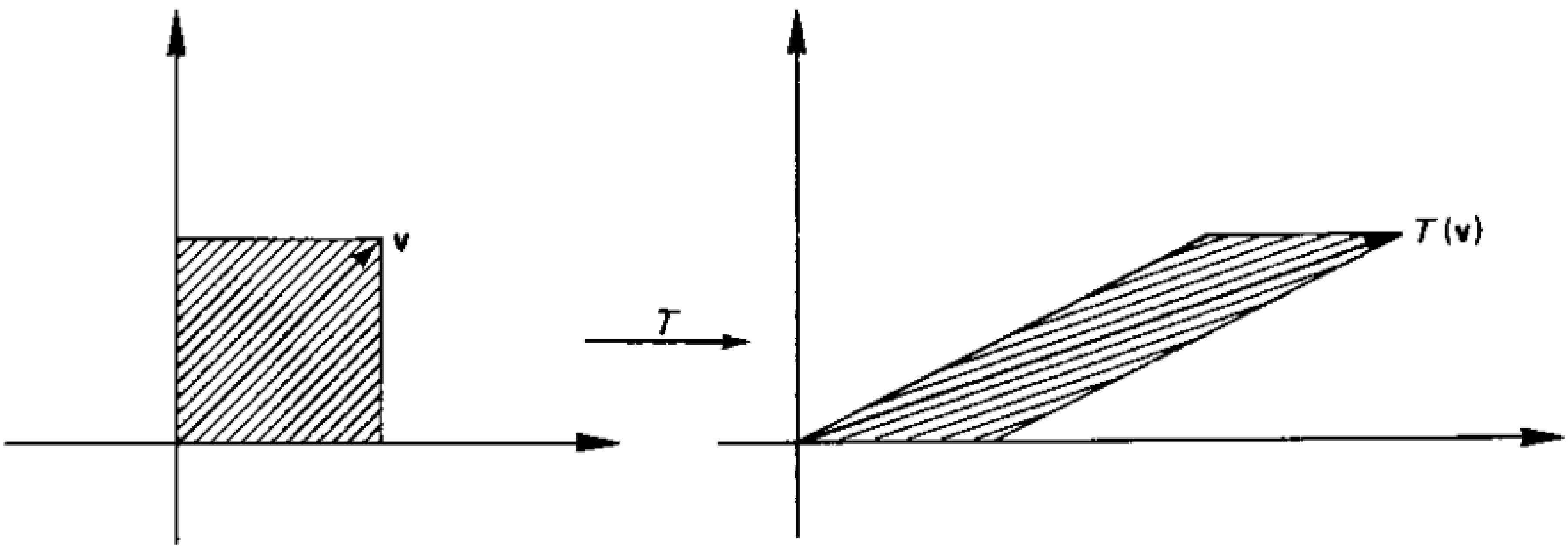
Então, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



- **Cisalhamento Horizontal:** $T(x, y) = (x + \alpha y, y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



- **Translação (transformação não-linear):** T(x, y) = (x + *a*, y + *b*), *a*, *b* ∈ $\mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Esta é uma translação do plano segundo o vetor (a, b) e, a menos que $a = b = 0$, *T não é linear*.

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Dados dois espaços vetoriais reais V e W, e uma base de V, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}\}$, sejam $\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, ..., \mathbf{w}_{\boldsymbol{n}}$ elementos arbitrários de W. Então, existe uma única aplicação linear $T: V \longrightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1}$, $T(\mathbf{v_2}) = \mathbf{w_2}, ..., T(\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}) = \mathbf{w}_{\boldsymbol{n}}$.

- Ou seja, se $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}$

  Então:

$$T(\mathbf{v}) = a_1T(\mathbf{v_1}) + a_2T(\mathbf{v_2}) + ... + a_nT(\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}}).$$
$$= a_1\mathbf{w_1} + a_2\mathbf{w_2} + ... + a_n\mathbf{w}_{\boldsymbol{n}}$$

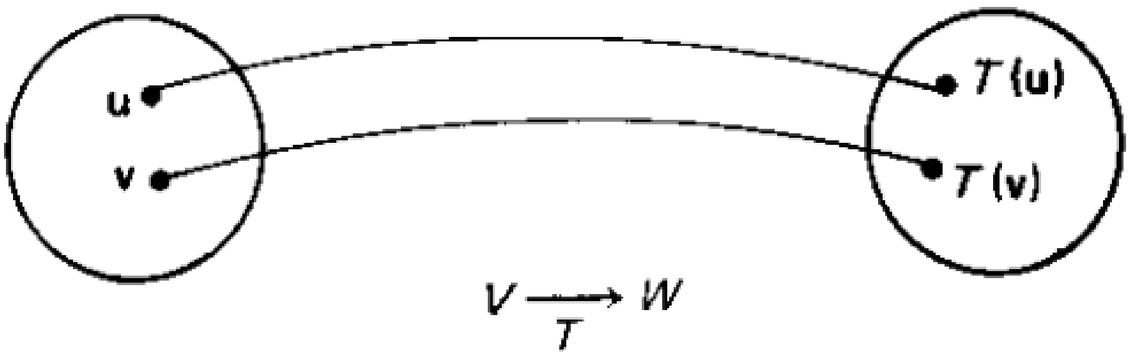
Exemplos

- Determine a TL a partir de uma base:

1. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^2$ / T(1, -1) = (-2, 5) e T(0, 1) = (– 1, 3).
    - T(x, y) = |-3x – y, 8x + 3y|
2. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$ / T(-1, 1) = (3, 2, 1) e T(0, -2) = (1, 1, 0).
    - T(x, y) = |(-7x – y)/2, (-5x – y)/2, -x|.
3. $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}$ / T(1, 2) = 0 e T(0, 4) = – 2.
    - T(x, y) = (2x – y)/2.

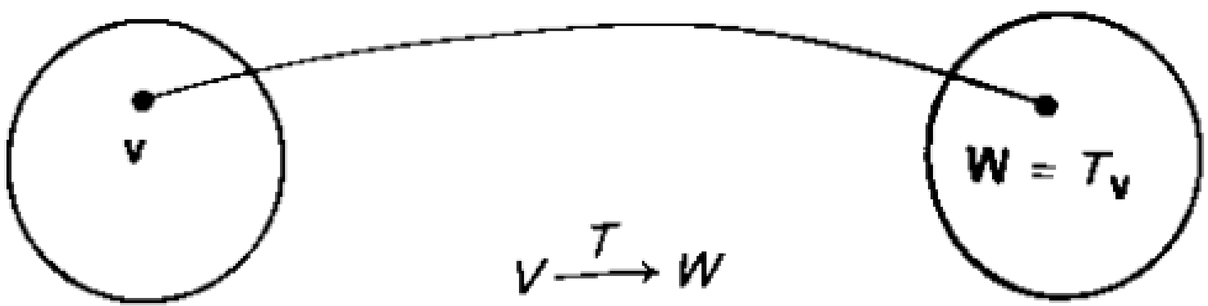
- **Definição:** Dada uma transformação $T: V \to W$, dizemos que T é *injetora* se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ tivermos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ou equivalentemente, T é *injetora* se dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

- Ou seja, T é *injetora* se as imagens de vetores distintos são distintas.



- **Definição:** Uma transformação T: $V \rightarrow W$ será *sobrejetora* se a imagem de T coincidir com W, ou seja, $T(V) = W$.

- Ou seja, T é *sobrejetora* se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.



- **Definição:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma aplicação linear. A *imagem* de T é o conjunto de vetores $\mathbf{w} \in W$ tais que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

- Ou seja,

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W \,;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}.$$

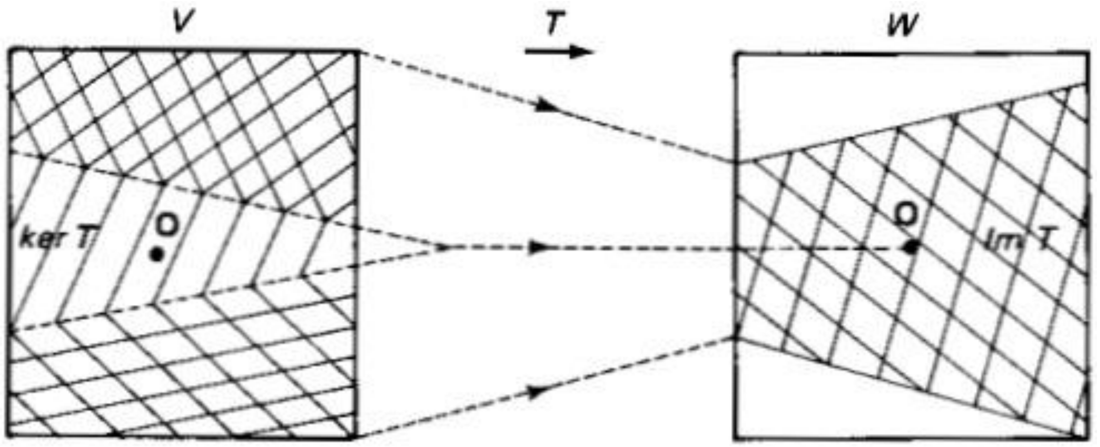
- $Im(T)$ é, portanto, um sub-espaço vetorial de W.

- **Definição:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é chamado *núcleo* de T, sendo denominado $ker(T)$.

- Ou seja,

$$ker(T) = \{\mathbf{v} \in V;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

- $ker(T)$ é, portanto, um sub-conjunto vetorial de V.

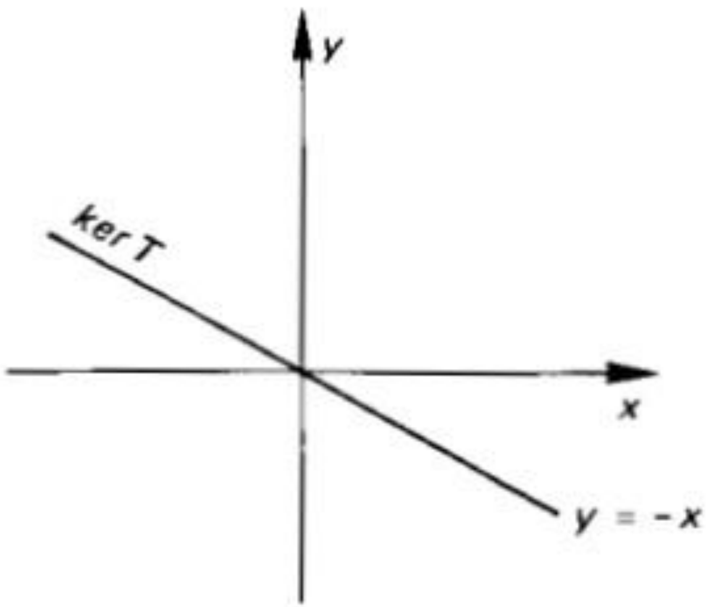


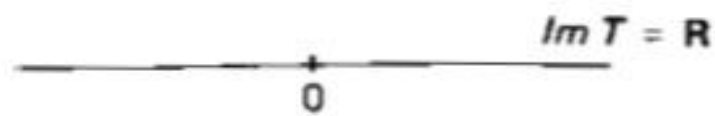
Exemplo 1:

$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$(x, y) \to x + y$

Neste caso temos $\ker T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x + y = 0\}$, isto é, $\ker T$ é a reta $y = -x$. Podemos dizer ainda que $\ker T = \{(x, -x); x \in \mathbf{R}\} = \{x(1, -1); x \in \mathbf{R}\} = [(1, -1)]$. $Im\, T = \mathbf{R}$, pois dado $\mathbf{w} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{w} = T(\mathbf{w}, 0)$.





- **Teorema:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ se, e somente se, T é *injetora*.

- **Teorema:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então $\dim ker(T) + \dim Im(T) = \dim V$.

- **Corolário:** Se $\dim V = \dim W$ então T é *injetora* se, e somente se, T é *sobrejetora*.

- **Corolário:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear *injetora*. Se $\dim V = \dim W$ então se $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ é uma base de V, $\{T(\mathbf{v_1}), T(\mathbf{v_2}), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ é base de W.

Dimensão

- **Teorema:** Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e α e β sejam bases de V e W respectivamente. Então:

- dim $Im(T)$ = posto de $[T]_{\alpha\to\beta}$;
- dim $ker(T)$ = nulidade de $[T]_{\alpha\to\beta}$.

  = nº de colunas – posto de $[T]_{\alpha\to\beta}$.

Exemplos

➢ Determine a imagem, o núcleo e suas dimensões para as TLs:

1. $T(x, y) = (2x, -x + y, -7y)$;
   - *ker*(T) = {(0, 0)}, dim = 0; *Im*(T) = (a, b, -7b -7a/2), dim = 2.
2. $T(x, y, z) = (x - y, y + z)$;
   - *ker*(T) = {(y, y, -y)}, dim = 1; *Im*(T) = (a, b), dim = 2.
3. $T(x, y, z) = (x - 4y + 4z, 3x + y + 8z)$;
   - *ker*(T) = {(-36z/13, 4z/13, z)}, dim = 1; *Im*(T) = (a, b), dim = 2.
4. $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$;
   - *ker*(T) = {(5z, -2z, z)}, dim = 1; *Im*(T) = (a, b, a + b), dim = 2.

Matriz da TL

- Se o **domínio** e a **imagem** estão nas **bases canônicas:**
  1. A matriz da TL é composta pelos valores de T na base do domínio.
  2. As dimensões da matriz são inversas às dimensões dos espaços. ($T = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, logo $[T]_{\beta} = A_{3x2}$).
- Se o **domínio** e a **imagem** estão em outras **bases:**
  1. A matriz da TL é composta pelos pesos dos vetores na base da imagem.
  2. Para isso, encontramos os valores de T nos vetores da base do domínio e os representamos utilizando a base da imagem.

Exemplos

Exemplo 1:

Seja $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.
Sejam $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.

Procuremos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

Calculando T nos elementos da base β, temos:

$$\begin{aligned} T(1, 1, 1) &= (2, 5) = 3(1, 3) - 1(1, 4) \\ T(1, 1, 0) &= (3, 1) = 11(1, 3) - 8(1, 4) \\ T(1, 0, 0) &= (2, 3) = 5(1, 3) - 3(1, 4) \end{aligned}$$

Então

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Exemplo 2:

Seja T a transformação linear do Exemplo 1 e sejam $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta'}$.

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1) \end{aligned}$$

Então

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Exemplo 4: Dadas as bases $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de $\mathbf{R}^2$ e $\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de $\mathbf{R}^3$, encontremos a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz é

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Interpretando a matriz, temos:

$$T(1, 1) = 0(0, 3, 0) - 1(-1, 0, 0) - 1(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$$
$$T(0, 1) = 2(0, 3, 0) + 0(-1, 0, 0) + 3(0, 1, 1) = (0, 9, 3)$$

Devemos encontrar agora $T(x, y)$. Para isto escrevemos (x, y) em relação à base β:

$$(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$$

Aplicando T e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 1) + (y - x)T(0, 1) \\ &= x(1, -1, -1) + (y - x)(0, 9, 3) \\ &= (x, 9y - 10x, 3y - 4x) \end{aligned}$$

Exemplos

Exemplo: Seja a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ dada por

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é base de $\mathbf{R}^2$, $\beta = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é base de $\mathbf{R}^3$. Queremos saber qual é a imagem do vetor $\mathbf{v} = (2, -3)$ pela aplicação T. Para isto, achamos as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ em relação à base α, obtendo $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; a seguir, usando o teorema, temos

$$[T\mathbf{v}]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha}[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T\mathbf{v} &= 5(1, 0, 1) - 3(-2, 0, 1) - 13(0, 1, 0) \\ &= (11, -13, 2) \end{aligned}$$

TL Composta

- **Teorema:** Sejam T_1: $V \rightarrow W$ e T_2: $W \rightarrow U$ transformações lineares e α, β e γ sejam bases de V, W e U, respectivamente. Então a composta de T_1 com T_2, $T_1 \circ T_2$: $V \rightarrow U$, é linear e:

$$[\mathrm{T}]_{\alpha \rightarrow \gamma} = [T]_{\beta \rightarrow \gamma} [T]_{\alpha \rightarrow \beta};$$

Exemplos

Exemplo 1: Consideremos uma expansão do **plano $\mathbf{R}^2$** dada por $T_1(x, y) = 2(x, y)$, e um cisalhamento dado por $T_2(x, y) = (x + 2y, y)$.

As matrizes (em relação à base canônica de $\mathbf{R}^2$, ξ) das transformações são

$$[T_1]^{\xi}_{\xi} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]^{\xi}_{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, a matriz (em relação à base canônica de $\mathbf{R}^2$) da aplicação que expande e cisalha (que é justamente a composta $T_2 \circ T_1$) será

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Exemplo 2: Sejam as transformações lineares $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujas matrizes são

$$[T_1]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2]^{\beta}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

em relação às bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta = \{(\frac{1}{3}, 0, -3), (1, 1, 15), (2, 0, 5)\}$ e $\gamma = \{(2, 0), (1, 1)\}$. Queremos encontrar a transformação linear composta $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ou seja, precisamos achar $(T_2 \circ T_1)(x, y)$.
Para isto, usamos o teorema anterior para achar a matriz da composta.

$$[T_2 \circ T_1]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Escrevemos agora as coordenadas do vetor (x, y) em relação à base α.

$$[(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix}$$

Então, usando o teorema 5.4.6, temos

$$[(T_2 \circ T_1)(x, y)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (x - y)(2, 0) + 0(1, 1) = (2x - 2y, 0)$.

TL Inversa

- **Corolário:** Se T: $V \rightarrow W$ é uma transformação linear inversível e α e β são bases de V e W. Então T^{-1}: $V \rightarrow W$, é linear e:

$$[T^{-1}]_{\alpha\rightarrow\beta} = ([T]_{\alpha\rightarrow\beta})^{-1}.$$

- **Corolário:** Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W. Então T é inversível se, e somente se, $\det [T]_{\alpha\rightarrow\beta} \neq 0$;

Exemplos

Exemplo: Seja $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ uma transformação linear dada por

$$[T]_\xi^\xi = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

onde ξ é a base canônica de $\mathbf{R}^2$. Como $\det [T]_\xi^\xi = 1$, o corolário 5.4.9 afirma que T é inversível. Pelo corolário 5.4.8 sabemos que

$$[T^{-1}]_\xi^\xi = ([T]_\xi^\xi)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Então $[T^{-1}(x,\ y)]_\xi = [T^{-1}]_\xi^\xi \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_\xi = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 4y \\ -2x + 3y \end{bmatrix}$,

ou seja, $T^{-1}(x,\ y) = (3x - 4y,\ -2x + 3y)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Página 171 a 175, exercícios 1 a 3, 4, 5 a 7, 11, 13, 15, 19, 23, 24, 28.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.

2ª AP – 07/05/19