Lista 3

Exercício 3.1 Considere o Teorema 3.2 - Transitividade da Continência. No caso em que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, como fica a demonstração se A for vazio? Observe que, neste caso, não existe elemento $a \in A$.

Exercício 3.2 Suponha o conjunto universo $S = \{ p, q, r, s, t, u, v, w \}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{ p, q, r, s \}$
$B = \{ r, t, v \}$
$C = \{ p, s, t, u \}$

Então, determine:

a) $B \cap C$
b) $A \cup C$
c) $\sim C$
d) $A \cap B \cap C$
e) $B - C$
f) $\sim(A \cup B)$
g) $A \times B$
h) $(A \cup B) \cap \sim C$
i) $A + B$
j) $B + B$

Exercício 3.3 Suponha o conjunto universo $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{ 2, 4, 5, 6, 8 \}$
$B = \{ 1, 4, 5, 9 \}$
$C = \{ x \mid x \in \mathbf{Z} \wedge 2 \leq x < 5 \}$

Então, determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A \cap C$
d) $B \cup C$
e) $A - B$
f) $\sim A$
g) $A \cap \sim A$
h) $\sim(A \cap B)$
i) $C - B$
j) $(C \cap B) \cup \sim A$
k) $\sim(B - A) \cap (A - B)$
l) $\sim(\sim C \cup B)$
m) $B \times C$
n) $(A \times B) \times C$
o) $B + C$

p) $(A + B) + C$

q) $(B + B) + B$

Exercício 3.4 Prove as seguintes propriedades da operação de união (suponha A e B conjuntos):

a) *Elemento Neutro.*

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

b) *Idempotência.*

$$A \cup A = A$$

c) *Comutativa.*

$$A \cup B = B \cup A$$

Exercício 3.5 Considere o Teorema 3.5 - Associatividade da União. Observe que o *caso 1* e o *caso 2* são análogos, trocando o sentido da implicação. Seria possível reduzir essa prova a um único caso, usando equivalências? Nesse caso, como ficaria a prova?

Exercício 3.6 Prove as seguintes propriedades da operação de intersecção (suponha o conjunto universo **U** bem como quaisquer conjuntos A, B e C):

a) *Elemento Neutro.*

$$A \cap \mathbf{U} = \mathbf{U} \cap A = A$$

b) *Idempotência.*

$$A \cap A = A$$

c) *Comutativa.*

$$A \cap B = B \cap A$$

d) *Associativa.*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Exercício 3.7 Relativamente à união e à intersecção, prove as seguintes propriedades:

a) *Distributividade da união sobre a intersecção*, ou seja (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

b) *Absorção*, ou seja (suponha A e B conjuntos quaisquer):

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

Exercício 3.8 Considere a propriedade de *DeMorgan*, relacionada com a operação de complemento e que envolve as operações de união e de intersecção. Prove que a intersecção (respectivamente, a união) pode ser calculada em termos das operações de complemento e de união (respectivamente, de intersecção), ou seja, que:

a) $A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$

b) $A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$

Exercício 3.9 Para uma dada operação binária $\oplus$ sobre um conjunto A, afirma-se que a operação $\oplus$ possui *elemento absorvente* se existe $a \in A$ tal que, para qualquer $x \in A$ vale:

$$a \oplus x = x \oplus a = a$$

Mostre que as seguintes operações possuem elemento absorvente:

a) União;
b) Intersecção;
c) Produto cartesiano.

Por que as seguintes operações não possuem elemento absorvente? Justifique:

d) Diferença;
e) União Disjunta.

Exercício 3.10 Prove que (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) $(A \cup B) \cap \sim A = B \cap \sim A$
b) $(A \cap B) \cup A = A$
c) $A \cup (\sim A \cap B) = A \cup B$
d) $A \cap (\sim A \cup B) = A \cap B$
e) $\sim((A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B)) = (\sim A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$

Exercício 3.11 Prove que (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) $A - B \subseteq A$
b) $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
c) $(A - B) \cap B = \varnothing$
d) $(A - B) \cup B = A \cup B$
e) $A \cap B = A - (A - B)$
f) $A - \sim B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
g) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
h) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) = (A - B) - C$

Exercício 3.12 Por que a operação de diferença é não-reversível?

Exercício 3.13 Verifique se a operação de diferença *satisfaz* ou *não satisfaz* as seguintes propriedades (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) Elemento Neutro, ou seja, se existe algum conjunto E tal que:

$$A - E = E - A = A$$

b) Idempotência.

$$A - A = A$$

c) Comutativa.

$$A - B = B - A$$

d) Associativa.

$$A - (B - C) = (A - B) - C$$

Exercício 3.14 Verifique se a operação de união disjunta *satisfaz* ou *não satisfaz* às seguintes propriedades (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) Elemento Neutro, ou seja, se existe algum conjunto E tal que:

$$A + E = E + A = A$$

b) Idempotência.

$$A + A = A$$

c) Comutativa.

$$A + B = B + A$$

d) Associativa.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Exercício 3.15 Para um dado conjunto S, considere o conjunto universo como sendo **P**(S). Mostre que a operação conjunto das partes não necessariamente é fechada sobre **P**(S).

Exercício 3.16 Prove que o produto cartesiano se distribui sobre a união e sobre a intersecção, ou seja, que (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) *Distributividade do produto cartesiano sobre a união.*

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

b) *Distributividade do produto cartesiano sobre a intersecção.*

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Exercício 3.17 Por que a reversibilidade do produto cartesiano nem sempre é válida quando o conjunto resultante é vazio.

Dica: observe o EXEMPLO 3.9 - Produto Cartesiano.

Exercício 3.18 Prove que (suponha A, B e C conjuntos quaisquer):

a) $A \cup B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing \wedge B = \varnothing$

b) $A \cup B = B \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

c) $A \cap B = A \wedge B \cup C = C \Rightarrow A \cap \sim C = \varnothing$

d) $A \cap \sim B = \varnothing \wedge A \cap B = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

e) $A = \varnothing \Leftrightarrow (\forall B)((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) = B)$

f) $A \subseteq B \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$

Exercício 3.19 Foi proposto, no Capítulo 2 - Lógica e Técnicas de Demonstração, um exercício o qual estabelece que qualquer dos conetivos estudados ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$) pode ser expresso usando somente os conetivos $\neg$ e $\wedge$. Conseqüentemente, o mesmo vale para a Álgebra de Conjuntos, usando somente as operações $\sim$ e $\cap$, respectivamente. Então, qual a correspondência dos conetivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ na Álgebra de Conjuntos?