Cálculo Diferencial e Integral II

Rui F. Vigelis

rfvigelis@gmail.com

Universidade Federal do Ceará – UFC

Versão:
2021-01-11 22:44:34

Objetivos:

- Continuação da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.
- Capacitar o aluno a identificar e enfrentar os problemas de Engenharia que possam ser resolvidos com técnicas de Cálculo Diferencial e Integral de uma variável.

Frequência:

- $\geq 75\%$, que equivale a um máximo de 16 horas em faltas.

Avaliação:

- 3 avaliações progressivas distribuídas durante o semestre.

Critério de aprovação:

- Se $7 \leq \text{MAPs}$, o aluno é aprovado por média.
- Se $4 \leq \text{MAPs} < 7$, o aluno faz a prova de avaliação final.
- Se $4 \leq \text{NAF}$ e $5 \leq \text{MAF} = \dfrac{\text{MAPs} + \text{NAF}}{2}$, o aluno é aprovado.
- Caso contrário, o aluno é reprovado.

Bibliografia básica:

- Leithold, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica. Vol. 1,** 3a. ed. São Paulo: Harbra, 2002.

Bibliografia complementar:

- Stewart, James.**Cálculo. Vol. 1,** 8a. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- Guidorizzi, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo. Vol. 1,** 6a. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2018.

Conteúdo:

- Seções 2.4 e 2.5, e capítulos 7 e 8 (AP1)
- Seções 11.1–11.3, e capítulo 9 (AP2)
- Capítulo 6 (AP3)

Definição

Dizemos que uma função f é **injetiva** se cada número em sua imagem corresponder exatamente a um número em seu domínio; ou seja, para todos x_1, e x_2 no domínio de f,

$$\boxed{\text{se } x_1 \neq x_2, \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2),}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{\text{se } f(x_1) = f(x_2), \text{ então } x_1 = x_2.}$$

Exemplo

(a) Prove que $f(x) = 4x - 3$ é injetiva.

(b) Prove que $g(x) = 4 - x^2$ não é injetiva.

Teorema

Uma função que seja crescente ou decrescente em um intervalo é injetiva no intervalo.

Exemplo

Mostre que a função

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

é injetiva em cada um dos intervalos $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$.

Definição

Se f for uma função injetiva, então existirá uma função f^{-1}, chamada de **inversa de** f, tal que

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \text{ se e somente se } y = f(x).}$$

O domínio de f^{-1} é a imagem de f e a imagem de f^{-1} é o domínio de f.

Teorema

Se f for uma função injetiva tendo f^{-1} como sua inversa, então f^{-1} será uma função injetiva tendo f como sua inversa. Além disso,

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para } x \text{ no domínio de } f,}$$

e

$$\boxed{f(f^{-1}(y)) = y, \text{ para } y \text{ no domínio de } f^{-1}.}$$

Exemplo

Encontre a inversa da função

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

e verifique as igualdades $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$.

R.: $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$.

Teorema

Suponha que o domínio da função f seja o intervalo fechado $[a, b]$. Então

(i) *se f for contínua e crescente em $[a, b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(a), f(b)]$;*

(ii) *se f for contínua e decrescente em $[a, b]$, f terá uma inversa f^{-1} que estará definida em $[f(b), f(a)]$.*

Teorema da Função Inversa

Vamos supor que a função f seja contínua e crescente (decrescente) no intervalo fechado $[a, b]$. Seja f^{-1} sua inversa, que está definida em $[f(a), f(b)]$ (em $[f(b), f(a)]$). Então

(i) f^{-1} é crescente (decrescente), e

(ii) f^{-1} é contínua.

Teorema

Suponha que a função f seja monótona e contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e seja $x = f^{-1}(y)$. Se f for derivável em $[a, b]$, e se $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então a derivada da função inversa f^{-1}, definida por $x = f^{-1}(y)$, será dada por

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

Exemplo

Verifique o teorema anterior para a função $f(x) = \sqrt{x}$.

R.: $(f^{-1})'(y) = 2y$.

Exemplo

Encontre a derivada da inversa da função

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1},$$

usando o teorema anterior.

R.: $(f^{-1})'(y) = -\frac{5}{(y-2)^2}$.

Exemplo

Determine se a função

$$f(x) = x^3 + x$$

tem uma inversa. Se tiver, ache a derivada da função inversa em $y = 2$.

R.: $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}$.

Exemplo

Determine se a função

$$f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x - 4$$

tem uma inversa. Se tiver, ache a derivada da função inversa em $y = 4$.

R.: $(f^{-1})'(4) = \frac{1}{22}$.

Definição

A **função logarítmica natural** é a função definida por

$$\boxed{\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,} \text{ para } x > 0.$$

Teorema

A função $\ln(x)$ *tem derivada*

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x},} \textit{ para } x > 0.$$

Exemplo

Calcule a derivada $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 8)$;

(b) $f(x) = \ln[(4x^2 + 3)(2x - 1)]$;

(c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

R.: (a) $f'(x) = \frac{6x-6}{3x^2-6x+8}$; (b) $f'(x) = \frac{24x^2-8x+6}{(4x^2+3)(2x-1)}$; (c) $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

Teorema

Sejam a e b números reais positivos quaisquer, e r um número racional qualquer. Então

(i) $\ln(1) = 0$;

(ii) $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$;

(iii) $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$;

(iv) $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

Exemplo

Use as propriedades da função $\ln(\cdot)$ para calcular a derivada $f'(x)$ se

(a) $f(x) = \ln[(4x^2 + 3)(2x - 1)]$;

(b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$;

(c) $f(x) = \ln[(2x - 1)^3]$

R.: (a) $f'(x) = \frac{24x^2 - 8x + 6}{(4x^2+3)(2x-1)}$; (b) $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$; (c) $f'(x) = \frac{6}{2x-1}$.

Teorema

A função $\ln|x|$ *tem derivada*

$$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x},}\ \textit{para } x \neq 0.$$

Teorema

A função $1/x$ *tem primitiva*

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.}$$

Exemplo

Ache $f'(x)$ se

(a) $f(x) = \ln|x^4 + x^3|$;

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$.

R.: (a) $f'(x) = \frac{4x+3}{x^2+x}$; (b) $f'(x) = \frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$.

Exemplo

Calcule as integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+1}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

R.: (a) $\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$; (b) $\frac{1}{2}x^2-x+3\ln|x+1|+C$; (c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

Teorema

(i) $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx = \ln|\sec x| + C};$

(ii) $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{cotg} x dx = -\ln|\operatorname{cosec} x| + C};$

(iii) $\boxed{\displaystyle\int \sec x dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C};$

(iv) $\boxed{\displaystyle\int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C}.$

Exemplo

Calcule

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} (\operatorname{cosec} 4x - \operatorname{cotg} 4x)\,dx.$$

R.: $\frac{1}{4}\ln(2)$.

Definição

A **função exponencial natural** é a inversa da função logarítmica natural; assim sendo, ela é definida por

$$\boxed{\exp(x) = y \text{ se e somente se } x = \ln y.}$$

Definição

Se a for um número positivo qualquer e x for um número real qualquer, definimos

$$\boxed{a^x = \exp(x \ln a).}$$

Teorema

Se a for um número positivo qualquer e x um número real qualquer, então

$$\boxed{\ln a^x = x \ln a.}$$

Definição

O número e é definido pela fórmula

$$\boxed{e = \exp 1.}$$

Teorema

$$\boxed{\ln e = 1.}$$

Teorema

Para todos os valores de x,

$$\boxed{\exp(x) = e^x.}$$

Teorema

Se a e b forem números reais quaisquer, então

(i) $e^0 = 1$;

(ii) $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$;

(iii) $e^a / e^b = e^{a-b}$;

(iv) $(e^a)^b = e^{ab}$.

Teorema

A função e^x *tem derivada*

$$\boxed{\frac{d}{dx}e^x = e^x,} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

A função e^x *tem primitiva*

$$\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C.}$$

Exemplo

Ache dy/dx se $y = e^{1/x^2}$.

R.: $-2\frac{e^{1/x^2}}{x^3}$.

Exemplo

Ache dy/dx se $y = e^{2x+\ln x}$.

R.: $e^{2x} + 2xe^{2x}$.

Exemplo

Ache

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

R.: $2e^{\sqrt{x}} + C$.

Definição

Se a for um número real positivo qualquer e x for qualquer número real, então a função f definida por

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

será chamada de **função exponencial de base** a.

Teorema

Se a for um número real positivo qualquer,

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a,} \quad \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Se a for qualquer número real positivo diferente de 1,

$$\boxed{\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.}$$

Exemplo

Se $y = 3^{x^2}$, calcule dy/dx.

R.: $2(\ln 3)x3^{x^2}$.

Exemplo

Calcule
$$\int \sqrt{10^{3x}}\,dx.$$

R.: $\frac{2}{3\ln 10}\sqrt{10^{3x}} + C$.

Definição

Se a for um número positivo qualquer diferente de 1, a **função logarítmica de base** a será a inversa da função exponencial de base a; escrevemos

$$\boxed{y = \log_a x \text{ se e somente se } a^y = x.}$$

Teorema

Se a for um número real positivo qualquer,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{(\ln a)x},} \quad \textit{para } x > 0.$$

Teorema

Se n for um número real qualquer e a função f for definida por $f(x) = x^n$, para todo $x > 0$, então

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}.}$$

Exemplo

Ache dy/dx se $y = \log_{10} \dfrac{x+1}{x^2+1}$

R.: $\frac{1}{\ln(10)} \frac{1-2x-x^2}{(x+1)(x^2+1)}$.

Exemplo

Ache dy/dx se $y = x^x$, em que $x > 0$.

R.: $(1 + \ln x)x^x$.

Definição

Seja f uma função definida num intervalo (a, ∞). O limite de $f(x)$, com x crescendo indefinidamente, é L, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L,}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $M > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } x > M, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo $(-\infty, a)$. O limite de $f(x)$, com x decrescendo indefinidamente, é L, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,}$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $M < 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } x < M, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

Exemplo

Usando a definição de limite, encontre:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-x}$.

Teorema

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0.}$$

As regras para soma, produto, quociente e raiz n-ésima envolvendo o limite ordinário também são válidas se "$x \to a$" for substituído por "$x \to \infty$" ou "$x \to -\infty$".

Teorema

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$*, então*

- $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) + g(x)] = L + M$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$;
- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$.

Teorema

Se n for um inteiro positivo e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$*, então*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

com a restrição de que se n for par, $L > 0$.

O teorema do quociente para limites infinitos também será válido se "$x \to a$" for substituído por "$x \to \infty$" ou "$x \to -\infty$".

Exemplo

Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{4x-3}{2x+5}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2+5}}$.

R.: (a) 2; (b) 0; (c) $3/\sqrt{2}$; (d) $-3/\sqrt{2}$.

Definição

Seja f uma função definida num intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. A função $f(x)$ cresce indefinidamente, com x tendendo a a, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \infty,}$$

se, para todo $N > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } f(x) > N.}$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente no próprio a. A função $f(x)$ decresce indefinidamente, com x tendendo a a, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,}$$

se, para todo $N < 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ então } f(x) < N.}$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo (a, c). A função $f(x)$ cresce indefinidamente, com x tendendo a a pela direita, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty,}$$

se, para todo $N > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } 0 < x - a < \delta, \text{ então } f(x) > N.}$$

Os limites $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ são definidos analogamente.

Definição

Seja f uma função definida num intervalo (a, ∞). A função $f(x)$ cresce indefinidamente, com x crescendo indefinidamente, o que denotamos por

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,}$$

se, para todo $N > 0$, existir $M > 0$ tal que

$$\boxed{\text{se } x > M, \text{ então } f(x) > N.}$$

Os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ são definidos analogamente.

Exemplo

Usando a definição de limite, mostre:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$.

Teorema

Se r for um inteiro positivo qualquer, então

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = \infty$;

(ii) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} \infty, & \text{se } r \text{ for par,} \\ -\infty, & \text{se } r \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = c$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *onde* c *é uma constante qualquer, então*

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \pm\infty.}$$

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = c$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, *onde* c *é uma constante qualquer, então*

(i) *se* $c > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \pm\infty;}$$

(ii) *se* $c < 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \mp\infty.}$$

O teorema também será válido se "$x \to a$*" for substituído por "*$x \to a^+$*" ou "*$x \to a^-$*".*

Teorema

Se a for um número real qualquer e se $\lim_{x\to a} f(x) = c$ *e* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *onde c é uma constante não nula, então*

(i) *se* $c > 0$ *e se* $g(x) \to 0$ *por valores positivos de* $g(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty;$$

(ii) *se* $c > 0$ *e se* $g(x) \to 0$ *por valores negativos de* $g(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty;$$

Teorema

(iii) *se* $c < 0$ *e se* $g(x) \to 0$ *por valores positivos de* $g(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty;$$

(iv) *se* $c < 0$ *e se* $g(x) \to 0$ *por valores negativos de* $g(x)$,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty;$$

O teorema também será válido se “$x \to a$” for substituído por “$x \to a^+$” ou “$x \to a^-$”.

Exemplo

Mostre:

(a) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{x-1} = \infty$;

(b) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x-1} = -\infty$.

Exemplo

Encontre os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$;

(b) $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$.

R.: (a) ∞; (b) $-\infty$.

Exemplo

Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$.

R.: (a) ∞; (b) $-\infty$.

Definição

A **função inversa do seno**, denotada por $\operatorname{sen}^{-1}(\cdot)$ ou $\operatorname{arcsen}(\cdot)$, é assim definida:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}(x) \text{ se e somente se } x = \operatorname{sen}(y) \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Definição

A **função inversa do cosseno**, denotada por $\cos^{-1}(\cdot)$ ou $\arccos(\cdot)$, é assim definida:

$$y = \cos^{-1}(x) \text{ se e somente se } x = \cos(y) \text{ e } 0 \leq y \leq \pi.$$

A funções inversas $\operatorname{sen}^{-1}(\cdot)$ e $\cos^{-1}(\cdot)$ satisfazem a relação

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1}(x), \qquad \text{para } |x| \leq 1.$$

Definição

A **função inversa da tangente**, denotada por $\operatorname{tg}^{-1}(\cdot)$ ou $\operatorname{arctg}(\cdot)$, é definida da seguinte forma:

$$y = \operatorname{tg}^{-1}(x) \text{ se e somente se } x = \operatorname{tg}(y) \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Definição

A **função inversa da cotangente**, denotada por $\operatorname{cotg}^{-1}(\cdot)$ ou $\operatorname{arccotg}(\cdot)$, é definida por

$$y = \operatorname{cotg}^{-1}(x) \text{ se e somente se } x = \operatorname{cotg}(y) \text{ e } 0 < y < \pi.$$

A funções inversas $\operatorname{tg}^{-1}(\cdot)$ e $\operatorname{cotg}^{-1}(\cdot)$ satisfazem a relação

$$\operatorname{cotg}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1}(x), \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Definição

A **função inversa da secante**, denotada por $\sec^{-1}(\cdot)$ ou $\operatorname{arcsec}(\cdot)$, é definida da seguinte forma:

$$y = \sec^{-1}(x) \text{ se e somente se } x = \sec(y) \text{ e } \begin{cases} 0 \leq y < \frac{1}{2}\pi, & \text{se } x \geq 1, \\ \pi \leq y < \frac{3}{2}\pi, & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

Definição

A **função inversa da cossecante**, denotada por $\operatorname{cosec}^{-1}(\cdot)$ ou $\operatorname{arccosec}(\cdot)$, é definida por

$$y = \operatorname{cosec}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{cosec}(y) \text{ e } \begin{cases} 0 < y \leq \frac{1}{2}\pi, & \text{se } x \geq 1, \\ -\pi < y \leq -\frac{1}{2}\pi, & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

A funções inversas $\sec^{-1}(\cdot)$ e $\operatorname{cosec}^{-1}(\cdot)$ satisfazem a relação

$$\operatorname{cosec}^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}(x), \qquad \text{para } |x| \geq 1.$$

Teorema

(i) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(ii) $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(iii) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tg}^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

(iv) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotg}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

(v) $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(vi) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exemplo

Ache dy/dx se

(a) $y = \operatorname{sen}^{-1}(x^2)$;

(b) $y = \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$;

(c) $y = x^3 \operatorname{cotg}^{-1}(\frac{1}{3}x)$;

(d) $y = \sec^{-1}(3e^x)$;

(e) $y = x \operatorname{cosec}^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

R.: (a) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; (b) $\frac{-1}{x^2+2x+2}$; (c) $3x^2 \operatorname{cotg}^{-1}(\frac{1}{3}x) - \frac{3x^3}{9+x^2}$; (d) $\frac{1}{\sqrt{9e^{2x}-1}}$;
(e) $\operatorname{cosec}^{-1}(\frac{1}{x}) + \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}}$.

Teorema

(i) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}(x) + C;$$

(ii) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{tg}^{-1}(x) + C;$$

(iii) $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}(x) + C.$$

Teorema

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, *em que* $a > 0$;

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, *em que* $a \neq 0$;

(iii) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$, *em que* $a > 0$.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2-2x+5}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{x^2+2x+5}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{3}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx$.

R.: (a) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}(\frac{3x}{2})+C$; (b) $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{3x-1}{\sqrt{14}})+C$;
(c) $\ln|x^2+2x+5|+\frac{5}{2}\operatorname{tg}^{-1}(\frac{x+1}{2})+C$; (d) $3\sec^{-1}(x+2)+C$.

Definição

A **função seno hiperbólico** é definida por

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.}$$

O domínio e a imagem são o conjunto de todos os números reais.

Definição

A **função cosseno hiperbólico** é definida por

$$\boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.}$$

O domínio é o conjunto de todos os números reais e a imagem é o conjunto de todos os números no intervalo $[1, \infty)$.

O seno hiperbólico é uma função ímpar e o cosseno hiperbólico é uma função par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x), \qquad \cosh(-x) = \cosh(x).$$

Teorema

(i) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x)$;

(ii) $\dfrac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x)$.

Definição

As **funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas** são definidas da seguinte forma:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) &= \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}; \\ \operatorname{cotgh}(x) &= \frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}; \\ \operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh(x)}; \\ \operatorname{cosech}(x) &= \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}. \end{aligned}}$$

As funções hiperbólicas satisfazem às identidades:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) &= \frac{1}{\operatorname{cotgh}(x)}, \\ \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= 1, \\ 1 - \operatorname{tgh}^2(x) &= \operatorname{sech}^2(x), \\ 1 - \operatorname{cotgh}^2(x) &= -\operatorname{cosech}^2(x), \end{aligned}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y). \end{aligned}}$$

Teorema

(i) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{tgh}(x) = \operatorname{sech}^2(x);$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cotgh}(x) = -\operatorname{cosech}^2(x);$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}(x) = -\operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x);$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\operatorname{cosech}(x) = -\operatorname{cosech}(x)\operatorname{cotgh}(x).$

Exemplo

Ache dy/dx para:

(a) $y = \operatorname{tgh}(1 - x^2)$;

(b) $y = \ln(\operatorname{senh} x)$.

R.: (a); $-2x \operatorname{sech}^2(1 - x^2)$; (b) $\operatorname{cotgh} x$.

Teorema

(i) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)dx = \cosh(x) + C;$

(ii) $\displaystyle\int \cosh(x)dx = \operatorname{senh}(x) + C;$

(iii) $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2(x)dx = \operatorname{tgh}(x) + C;$

(iv) $\displaystyle\int \operatorname{cosech}^2(x)dx = -\operatorname{cotgh}(x) + C;$

(v) $\displaystyle\int \operatorname{sech}(x)\operatorname{tgh}(x)dx = -\operatorname{sech}(x) + C;$

(vi) $\displaystyle\int \operatorname{cosech}(x)\operatorname{cotgh}(x)dx = -\operatorname{cosech}(x) + C.$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{senh}(x)\cosh^2(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tgh}^2(x)dx$.

R.: (a); $\frac{1}{3}\cosh^3 x + C$; (b) $x - \operatorname{tgh} x + C$.

Definição

Se f e g forem duas funções tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então a função f/g tem a **forma indeterminada** $0/0$ **em** a.

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a \in I$. Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$ em I. Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, e se

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Exemplo

Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$

R.: (a) -1; (b) $-\frac{1}{6}$.

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis para todo $x > N$, em que N é uma constante positiva, e suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x > N$. Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, e se

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema continua válido se trocarmos $x \to \infty$ por $x \to -\infty$.

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)},$$

se existir.

R.: 1.

Exemplo

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Prove que f é contínua em 0. (b) Prove que f é diferenciável em 0 calculando $f'(0)$.

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f e g funções diferenciáveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente em $a \in I$. Suponha que $g'(x) \neq 0$, para todo $x \neq a$ em I. Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ou $-\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ou $-\infty$, e se

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema é válido se ambos os limites forem laterais à direita ou à esquerda.

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}},$$

se existir.

R.: 0.

Teorema (Regra de L'Hôpital)

Sejam f *e* g *funções diferenciáveis para todo* $x > N$, *em que* N *é uma constante positiva, e suponha que* $g'(x) \neq 0$, *para todo* $x > N$. *Se* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *ou* $-\infty$ *e* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ *ou* $-\infty$ *, e se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

O teorema continua válido se trocarmos $x \to \infty$ *por* $x \to -\infty$.

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3x},$$

se existir.

R.: $\frac{1}{3}$.

Exemplo

Calcule os limites, caso existam:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(3x)}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}^{-1}(x)\operatorname{cosec}(x)$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2\sec(x)}\right)$;

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (x+1)^{\operatorname{cotg}(x)}$.

R.: (a) 9; (b) 1; (c) $\frac{1}{2}$; (d) e.

Definição

Se f for contínua para todo $x \geq a$, então

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

se esse limite existir.

Definição

Se f for contínua para todo $x \leq b$, então

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

se esse limite existir.

Exemplo

Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx.$$

R.: $\frac{1}{2}$.

Exemplo

Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx.$$

R.: 1.

Definição

Se f for contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, e c for um número real qualquer, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx,$$

se esses limites existirem.

Nas três definições anteriores, se os limites existirem, diremos que a integral imprópria é **convergente**. Se os limites não existirem, diremos que a integral imprópria é **divergente**.

Exemplo

Calcule, se existirem:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x dx$;

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} x dx$.

R.: (a) não existe; (b) 0.

Exemplo

Calcule a integral, se ela convergir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+12} dx.$$

R.: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Se f e g são funções diferenciáveis, então vale a **fórmula de integração por partes**:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.}$$

Denotando $u = f(x)$ e $v = g(x)$, obtemos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, e assim podemos escrever

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int x\ln(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2} dx$;

(c) $\displaystyle\int x\cos(x)dx$.

R.: (a) $\frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$; (b) $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$;
(c) $x\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) + C$.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^{-1}(x) \, dx$;

(c) $\displaystyle\int e^x \operatorname{sen}(x) \, dx$.

R.: (a) $x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$; (b) $x \operatorname{tg}^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$; (c) $\frac{1}{2} e^x [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)] + C$.

Caso 1: $\int \operatorname{sen}^n(x)dx$ ou $\int \cos^n(x)dx$, em que n é um número inteiro ímpar.

Exemplo

Calcule:

(a) $\int \cos^3(x)dx$;

(b) $\int \operatorname{sen}^5(x)dx$.

R.: (a) $\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C$; (b) $-\cos(x) + \frac{2}{3}\cos^3(x) - \frac{1}{5}\cos^5(x) + C$.

Caso 2: $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)dx$, em que pelo menos um dos expoentes é ímpar.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^3(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$.

R.: (a) $\frac{1}{6}\cos^6(x) - \frac{1}{4}\cos^4(x) + C$; (b) $-\frac{1}{5}\cos^5(x) + \frac{1}{7}\cos^7(x) + C$.

Caso 3: $\int \operatorname{sen}^n(x)dx$ ou $\int \cos^n(x)dx$, em que n é um número inteiro par.

- Usaremos as seguintes relações trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\int \operatorname{sen}^2(x)dx$;

(b) $\int \operatorname{sen}^4(x)dx$.

R.: (a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$; (b) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) + C$.

Caso 4: $\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)dx$, em que ambos m e n são pares.

- A solução deste caso é semelhante à do Caso 3.

Exemplo

Calcule:

(a) $\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)dx$;

(b) $\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^4(x)dx$.

R.: (a) $\frac{1}{16}x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) + C$;
(b) $\frac{1}{128}3x - \frac{1}{128}\operatorname{sen}(4x) + \frac{1}{1024}\operatorname{sen}(8x) + C$.

Caso 1: $\int \operatorname{tg}^n(x)dx$ ou $\int \operatorname{cotg}^n(x)dx$, em que n é um número inteiro positivo.

- Usaremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^n(x) &= \operatorname{tg}^{n-2}(x)\operatorname{tg}^2(x)\\ &= \operatorname{tg}^{n-2}(x)(\sec^2(x)-1),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}^n(x) &= \operatorname{cotg}^{n-2}(x)\operatorname{cotg}^2(x)\\ &= \operatorname{cotg}^{n-2}(x)(\operatorname{cosec}^2(x)-1).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^4(3x)dx$.

R.: (a) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(x) + \ln|\cos(x)| + C$;
(b) $-\frac{1}{9}\operatorname{cotg}^3(3x) + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x) + x + C$.

Caso 2: $\int \sec^n(x)dx$ ou $\int \mathrm{cosec}^n(x)dx$, em que n é um número inteiro par positivo.

- Usaremos:

$$\begin{aligned}\sec^n(x) &= \sec^{n-2}(x)\sec^2(x)\\ &= (\mathrm{tg}^2(x)+1)^{(n-2)/2}\sec^2(x),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{cosec}^n(x) &= \mathrm{cosec}^{n-2}(x)\,\mathrm{cosec}^2(x)\\ &= (\mathrm{cotg}^2(x)+1)^{(n-2)/2}\,\mathrm{cosec}^2(x).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

$$\int \operatorname{cosec}^6(x)dx.$$

R.: $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5(x) - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3(x) - \operatorname{cotg}(x) + C.$

Caso 3: $\int \sec^n(x)dx$ ou $\int \operatorname{cosec}^n(x)dx$, em que n é um número inteiro ímpar positivo.

- Usaremos integração por partes com
$$u = \sec^{n-2}(x),$$
$$dv = \sec^2(x)dx,$$

ou

$$u = \operatorname{cosec}^{n-2}(x),$$
$$dv = \operatorname{cosec}^2(x)dx.$$

Exemplo

Calcule:

$$\int \sec^3(x)dx.$$

R.: $\frac{1}{2}\sec(x)\,\mathrm{tg}(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \mathrm{tg}(x)| + C.$

Caso 4: $\int \mathrm{tg}^m(x)\sec^n(x)dx$ ou $\int \mathrm{cotg}^m(x)\,\mathrm{cosec}^n(x)dx$, em que n é um número inteiro par positivo.

- Usaremos:

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}^m(x)\sec^n(x) &= \mathrm{tg}^m(x)\sec^{n-2}(x)\sec^2(x)\\ &= \mathrm{tg}^m(x)(\mathrm{tg}^2(x)+1)^{(n-2)/2}\sec^2(x),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{cotg}^m(x)\,\mathrm{cosec}^n(x) &= \mathrm{cotg}^m(x)\,\mathrm{cosec}^{n-2}(x)\,\mathrm{cosec}^2(x)\\ &= \mathrm{cotg}^m(x)(\mathrm{cotg}^2(x)+1)^{(n-2)/2}\,\mathrm{cosec}^2(x).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

$$\int \operatorname{tg}^5(x)\sec^4(x)dx.$$

R.: $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^8(x)+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6(x)+C.$

Caso 5: $\displaystyle\int \operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x)dx$ ou $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^m(x)\operatorname{cosec}^n(x)dx$, em que m é um número inteiro impar positivo.

- Usaremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^m(x)\sec^n(x) &= \operatorname{tg}^{m-1}(x)\sec^{n-1}(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)\\ &= (\sec^2(x)-1)^{(m-1)/2}\sec^{n-1}(x)\sec(x)\operatorname{tg}(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg}^m(x)\operatorname{cosec}^n(x) &= \operatorname{cotg}^{m-1}(x)\operatorname{cosec}^{n-1}(x)\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x)\\ &= (\operatorname{cosec}^2(x)-1)^{(m-1)/2}\operatorname{cosec}^{n-1}(x)\operatorname{cosec}(x)\operatorname{cotg}(x).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

$$\int \text{tg}^5(x)\sec^7(x)dx.$$

R.: $\frac{1}{11}\sec^{11}(x) - \frac{2}{9}\sec^9(x) + \frac{1}{7}\sec^7(x) + C.$

Caso 6: $\int \mathrm{tg}^m(x)\sec^n(x)dx$ ou $\int \mathrm{cotg}^m(x)\,\mathrm{cosec}^n(x)dx$, em que m é um número inteiro par positivo, e n é um número inteiro ímpar positivo.

- Expressamos o integrando em termos de potências ímpares de secante ou cossecante

Exemplo

Calcule:

$$\int \mathrm{tg}^2(x)\sec^3(x)dx.$$

R.: $\frac{1}{4}\sec^3(x)\,\mathrm{tg}(x) - \frac{1}{8}\sec(x)\,\mathrm{tg}(x) - \frac{1}{8}\ln|\sec(x)+\mathrm{tg}(x)| + C.$

Caso 1: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, em que $a > 0$.

- Usaremos a mudança de variáveis $x = a\,\mathrm{sen}(\theta)$, com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Como $\cos(\theta) > 0$ para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a\,\mathrm{sen}(\theta))^2}\\ &= \sqrt{a^2(1 - \mathrm{sen}^2(\theta))}\\ &= \sqrt{a^2\cos^2(\theta)}\\ &= a\cos(\theta).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

R.: (a) $-\operatorname{sen}^{-1}(\frac{x}{3}) - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$; (b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$.

Caso 2: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{a^2 + x^2}$, em que $a > 0$.

- Usaremos a mudança de variáveis $x = a\,\mathrm{tg}(\theta)$, com $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Como $\sec(\theta) > 0$ para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + x^2} &= \sqrt{a^2 + (a\,\mathrm{tg}(\theta))^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 + \mathrm{tg}^2(\theta))} \\ &= \sqrt{a^2 \sec^2(\theta)} \\ &= a \sec(\theta).\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+5}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{2}{x\sqrt{x^4+25}}\,dx$.

R.: (a) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$; (b) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+25}-5}{x^2}\right|+C$.

Caso 3: O integrando contém uma expressão da forma $\sqrt{x^2 - a^2}$, em que $a > 0$.

- Usaremos a mudança de variáveis $x = a\sec(\theta)$, com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.
- Como $\operatorname{tg}(\theta) > 0$ para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{(a\sec(\theta))^2 - a^2} \\ &= \sqrt{a^2(\sec^2(\theta) - 1)} \\ &= \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2(\theta)} \\ &= a\operatorname{tg}(\theta). \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-9}}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(6-x^2)^{3/2}}\,dx$.

R.: (a) $\frac{1}{54}\sec^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{1}{18}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} + C$; (b) $\ln|x+\sqrt{x^2-25}| + C$;
(c) $\frac{1}{6}\frac{x}{\sqrt{6-x^2}} + C$.

- Para calcularmos integrais de funções racionais, ou seja, integrais na forma

$$\boxed{\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,}$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, usaremos **divisão de polinômios** e **expansão em frações parciais**.

- Dividindo $P(x)$ por $Q(x)$, podemos escrever

$$P(x) = A(x)Q(x) + R(x),$$

em que $A(x)$ e $R(x)$ são polinômios, e o grau de $R(x)$ é menor que o grau de $Q(x)$.

- Se o grau de $P(x)$ é menor que o grau de $Q(x)$, então $A(x) = 0$ e não é necessário realizar o procedimo de divisão de polinômios.
- Como resultado da divisão, temos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int A(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

- A integral envolvendo o polinômio $A(x)$ é facilmente calculada. Já para calcularmos a integral de $R(x)/Q(x)$, usaremos a técnica de expansão em frações parciais.

Exemplo

Realize a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ para

(a) $P(x) = x^4 - 10x^2 + 3x + 1$, $Q(x) = x^2 - 4$;

(b) $P(x) = x^5 - x^2 + 10x + 1$, $Q(x) = x^3 - 3x + 1$;

(c) $P(x) = x^6 - 3x$, $Q(x) = x^3 + 1$;

(d) $P(x) = x^7$, $Q(x) = x^2 - 1$;

R.: (a) $A(x) = x^2 - 6$, $R(x) = 3x - 23$; (b) $A(x) = x^2 + 3$, $R(x) = -2x^2 + 19x - 2$; (c) $A(x) = x^3 - 1$, $R(x) = -3x + 1$; (d) $A(x) = x^5 + x^3 + x$, $R(x) = x$.

- Consideremos a fatoração

$$
\begin{aligned}
Q(x) = a(x - r_1)^{l_1}(x - r_2)^{l_2} \cdots (x - r_n)^{l_n} \\
\cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{p_1}(x^2 + b_2 x + c_2)^{p_2} \cdots (x^2 + b_m x + c_m)^{p_m},
\end{aligned}
$$

  em que
  - $a \in \mathbb{R}$;
  - $(x - r_i)^{l_i}$ corresponde à raiz real $r_i \in \mathbb{R}$ de multiplicidade $l_i \in \mathbb{N}$;
  - $(x^2 + b_i x + c_i)^{p_i}$ é um termo quadrático irredutível ($b_i^2 - 4c_i < 0$) de multiplicidade $p_i \in \mathbb{N}$.
- Acima assumimos que as raízes reais são distintas assim como os termos quadráticos, i.e.,
  - $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$, e
  - $(b_i, c_i) \neq (b_j, c_j)$ para $i \neq j$.

- Se o grau do polinômio $P(x)$ é menor que o grau do polinômio $Q(x)$, então podemos escrever

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l_1} \frac{A_{1,i}}{(x-r_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} \frac{A_{n,i}}{(x-r_n)^i} + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{B_{1,i}x + C_{1,i}}{(x^2+b_1x+c_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{p_m} \frac{B_{m,i}x + C_{m,i}}{(x^2+b_mx+c_m)^i},$$

em que $A_{k,i}, B_{k,i}, C_{k,i} \in \mathbb{R}$ são constantes.

- Usaremos as notações:
    - $A_k = A_{k,1}$ se $l_k = 1$, e
    - $B_k = B_{k,1}$ e $C_k = C_{k,1}$ se $p_k = 1$.

Caso 1: As raízes de $Q(x)$ são todas reais com multiplicidade 1.

- Neste caso, a expansão em frações parciais é dada por

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - r_1)} + \frac{A_2}{(x - r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - r_n)}.$$

- As constantes A_i podem ser encontradas usando a fórmula

$$A_i = \lim_{x \to r_i} \left[(x - r_i) \frac{P(x)}{Q(x)} \right].$$

- Alternativamente, podemos encontrar as contantes A_i desenvolvendo a expansão em frações parciais e comparando os coeficientes dos polinômios envolvidos.

Exemplo

Calcule
$$\int \frac{x^2}{x^2+x-6}\,dx.$$

R.: $x+\frac{4}{5}\ln|x-2|-\frac{9}{5}\ln|x+3|+C.$

Exemplo

Calcule
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx, \qquad \text{para } a>0.$$

R.: $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$

Exemplo

Calcule
$$\int \frac{4x-11}{2x^2+7x-4}\,dx.$$

R.: $3\ln|x+4| - \ln|x-\frac{1}{2}| + C$.

Exemplo

Calcule
$$\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx.$$

R.: $\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln|x+1| + C$.

Caso 2: As raízes de $Q(x)$ são todas reais com multiplicidade não necessariamente igual a 1.

- Neste caso, a expansão em frações parciais é dada por

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l_1} \frac{A_{1,i}}{(x-r_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} \frac{A_{n,i}}{(x-r_n)^i}.$$

- As constantes $A_{k,i}$ podem ser encontradas usando a fórmula

$$A_{k,i} = \lim_{x \to r_k} \frac{1}{(l_k - i)!} \frac{d^{l_k - i}}{dx^{l_k - i}} \left[(x - r_k)^{l_k} \frac{P(x)}{Q(x)} \right].$$

- Alternativamente, podemos encontrar as contantes A_i desenvolvendo a expansão em frações parciais e comparando os coeficientes dos polinômios envolvidos.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+3x^2}\,dx;$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}\,dx;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x-7}{(2x+3)(x+1)^2}\,dx;$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$

R.: (a) $-\frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{1}{9}\ln|x+3| + C$; (b) $3\ln|x-1| + \frac{1}{x} + C$;
(c) $-\frac{1}{2}\ln|x+\frac{3}{2}| + \ln|x+1| + 3\frac{1}{x+1} + C$;
(d) $-2\ln|x| - \frac{1}{x} + 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$.

Caso 3: Na fatoração do polinômio $Q(x)$, todos os termos quadráticos irredutíveis têm multiplicidade 1.

- Neste caso, a expansão em frações parciais é dada por

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l_1} \frac{A_{1,i}}{(x-r_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} \frac{A_{n,i}}{(x-r_n)^i} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + b_1 x + c_1} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{x^2 + b_m x + c_m},$$

- As constantes $A_{k,i}$ são encontradas como no caso 2.
- Determinamos as contantes B_k e C_k desenvolvendo a expansão em frações parciais e comparando os coeficientes dos polinômios envolvidos.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^3+x}\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{16x^4-1}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2+x}\,dx$.

R.: (a) $\ln|x-1| + \operatorname{tg}^{-1}(x) + C$; (b) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+\frac{1}{2}| + C$;
(c) $\frac{1}{8}\ln|x-\frac{1}{2}| - \frac{1}{8}\ln|x+\frac{1}{2}| - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}(2x)$;
(d) $\frac{9}{10}\ln|x^2+2x+2| - \frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}(x+1) - \frac{4}{5}\ln|x-1| + C$;
(e) $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

Caso 4: Na fatoração do polinômio $Q(x)$, existem termos quadráticos irredutíveis com multiplicidade não necessariamente igual a 1.

- Neste caso, a expansão em frações parciais é dada por

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{l_1} \frac{A_{1,i}}{(x-r_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} \frac{A_{n,i}}{(x-r_n)^i} + \sum_{i=1}^{p_1} \frac{B_{1,i}x + C_{1,i}}{(x^2+b_1x+c_1)^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{p_m} \frac{B_{m,i}x + C_{m,i}}{(x^2+b_mx+c_m)^i}$$

- As constantes $A_{k,i}$ são encontradas como no caso 2.
- Determinamos as contantes $B_{k,i}$ e $C_{k,i}$ desenvolvendo a expansão em frações parciais e comparando os coeficientes dos polinômios envolvidos.

Exemplo

Calcule
$$\int \frac{x-2}{x(x^2-4x+5)^2}\,dx.$$

R.: $\frac{1}{25}\ln\left|\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right| - \frac{3}{50}\,\mathrm{tg}^{-1}(x-2) + \frac{x-4}{10(x^2-4x+5)} + C.$

Se um integrando envolver potências fracionárias de uma variável x , o integrando poderá ser simplificado pela substituição

$$x = z^n,$$

onde n é o menor múltiplo comum entre os denominadores dos expoentes.

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx;$

(b) $\displaystyle\int x^5\sqrt{x^2+4}\,dx.$

R.: (a) $\frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\,\mathrm{tg}^{-1}(x^{1/6}) + C$; (b) $\frac{1}{105}(x^2+4)^{3/2}(15x^4 - 48x^2 + 128) + C$.

Se um integrando for uma função racional de $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ ele poderá ser reduzido a uma função racional de z pela substituição

$$z = \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}x).$$

Teorema

Se $z = \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x)$, *então*

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+z^2}dz.$$

Exemplo

Calcule:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\mathrm{sen}(x)+\cos(x)}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \sec(x)\,dx$.

R.: (a) $-\ln\left|1-\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x)\right|+C$; (b) $\ln\left|\frac{1+\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x)}{1-\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x)}\right|+C$.

- No sistema de coordenadas polar, as coordenadas consistem em uma distância orientada, e na medida de um ângulo relativo a um ponto fixo e a um semi-eixo fixo.
- O ponto fixo é chamado de **pólo** (ou **origem**), sendo designado pela letra O.
- O semi-eixo fixo é chamado de **eixo polar** (ou **reta polar**) e vamos designá-lo por OA.
- O semi-eixo OA, normalmente colocado na horizontal, é orientado para a direita e se estende indefinidamente.

- Seja P um ponto qualquer do plano, distinto de O.
- Seja θ a medida em radianos do ângulo AOP, positiva quando considerada no sentido anti-horário e negativa quando no sentido horário, tendo como lado inicial OA e como lado final OP.
- Então, se r for a distância não orientada de O a P (isto é, $r = |\overline{OP}|$), o conjunto de coordenadas polares de P será dado por r e θ, e escrevemos essas coordenadas como (r, θ).

- Um dado ponto tem um número ilimitado de conjuntos de coordenadas polares.
- As coordenadas $(r, \theta + 2n\pi)$, onde n é um inteiro qualquer, são do mesmo ponto, designado com (r, θ).
- Se $r = 0$ e θ é qualquer número real, temos a origem, que é designada por $(0, \theta)$.

- Podemos considerar coordenadas polares com r negativo.
- Nesse caso, o ponto estará no prolongamento do lado terminal do ângulo, que é a semi-reta que parte da origem, estendendo-se no sentido oposto ao lado terminal.
- Assim, se P estiver sobre o prolongamento do lado terminal do ângulo de medida θ, o conjunto de coordenadas polares de P será (r, θ), em que $r = -|\overline{OP}|$.

- Se o ponto P não for a origem e se restringirmos r e θ de tal forma que $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$, então existirá um único par ordenado de coordenadas polares para P.

- Suponha que P seja o ponto que tenha (x, y) como representação num sistema de coordenadas cartesianas retangulares e seja (r, θ) a representação de P em coordenadas polares.
- Podemos obter as coordenadas cartesianas retangulares de um ponto cujas coordenadas polares são conhecidas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{cases}$$

- Já para obter o conjunto das coordenadas polares de um ponto quando as coordenadas retangulares são conhecidas:

$$\begin{cases} r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Exemplo

Encontre as coordenadas cartesianas retangulares do ponto cujas coordenadas polares são $(-6, \frac{7}{4}\pi)$.

R.: $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

Exemplo

Ache (r, θ) se $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ para o ponto cuja representacão cartesiana é $(-\sqrt{3}, -1)$.

R.: $(2, \frac{7}{6}\pi)$.

- Se a equação de um gráfico for dada em coordenadas polares, ela será chamada de **equação polar** para podermos distingui-la da **equação cartesiana** que é o termo usado quando uma equação é dada em coordenadas cartesianas retangulares.

Exemplo

Dado que a equação polar de um gráfico é $r^2 = 4\,\text{sen}(2\theta)$ ache a equação cartesiana.

R.: $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

Exemplo

Ache a equação polar do gráfico cuja equação cartesiana é $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

R.: $r = 4\cos\theta$.

- A equação
$$\boxed{\theta = C,}$$
onde C é uma constante, está satisfeita por todos os pontos tendo coordenadas polares (r, C), qualquer que seja o valor de r. Logo, o gráfico dessa equação é uma reta que passa pela origem e faz com o eixo polar um ângulo de medida C.

- O gráfico da equação polar

$$\boxed{r \operatorname{sen}\theta = b}$$

  é uma reta paralela ao eixo polar.
- A equação cartesiana equivalente corresponde a $y = b$.

- O gráfico da equação polar

$$\boxed{r\cos\theta = a}$$

  é uma reta perpendicular ao eixo polar.
- A equação cartesiana equivalente corresponde a $x = a$.

- O gráfico da equação

$$\boxed{r = C,}$$

onde C é uma constante qualquer, é uma circunferência cujo centro está na origem e cujo raio é $|C|$.

- O gráfico da equação polar

$$\boxed{r = 2a\cos\theta}$$

é uma circunferência, de raio $|a|$, com seu centro sobre o eixo polar ou em sua extensão, e tangente ao semi-eixo $\frac{\pi}{2}$.

- Se $a > 0$, a circunferência está à direita da origem, e se $a < 0$, a circunferência está à esquerda da origem.

- O gráfico da equação polar

$$\boxed{r = 2b \operatorname{sen} \theta}$$

é uma circunferência, de raio $|b|$, com seu centro sobre o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ ou em sua extensão, e tangente ao eixo polar.
- Se $b > 0$, a circunferência está acima da origem, e se $b < 0$, está abaixo dela.

- O gráfico de uma equação da forma

$$\boxed{r = a \pm b\cos\theta} \quad \text{ou} \quad \boxed{r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

é chamada de **limaçon**.
- Existem quatro tipos de limaçon e cada tipo depende da razão a/b, onde a e b são positivos.
- Vamos mostrar os quatro tipos obtidos da equação

$$\boxed{r = a + b\cos\theta,} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

- Limaçon com um laço: $\boxed{0 < \dfrac{a}{b} < 1}$
- Cardioide: $\boxed{\dfrac{a}{b} = 1}$
- Limaçon com um dente: $\boxed{1 < \dfrac{a}{b} < 2}$
- Limaçon convexa: $\boxed{2 \leq \dfrac{a}{b}}$

- As limaçons obtidas da equação

$$\boxed{r = a + b\,\text{sen}\,\theta,} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0,$$

têm o semi-eixo $\frac{\pi}{2}$ como eixo de simetria.

- Se a limaçon tiver a equação

$$\boxed{r = a - b\cos\theta,} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0,$$

ela apontará na direção π.

- Se tiver a equação

$$\boxed{r = a - b\,\text{sen}\,\theta,} \quad \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0,$$

apontará na direção de $\frac{3\pi}{2}$.

- O gráfico de uma equação da forma

$$\boxed{r = a\cos(n\theta)} \quad \text{ou} \quad \boxed{r = a\,\mathrm{sen}(n\theta)}$$

será uma **rosácea** com n folhas se n for ímpar e $2n$ folhas se n for par.

Exemplo

Ache os pontos de intersecção das duas curvas

$$r = 2 - 2\cos\theta \qquad \text{e} \qquad r = 2\cos\theta.$$

Faça esboços de seus gráficos.

R.: O, $(1, \frac{\pi}{3})$, $(1, -\frac{\pi}{3})$.

- Seja f uma função contínua e não negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. Seja R a região limitada pela curva cuja equação é $r = f(\theta)$ e pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$.
- Consideremos uma partição P de $[\alpha, \beta]$ definida por
$$P = \{\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta\}.$$
- Temos, portanto, n subintervalos da forma $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, para $i = 1, \dots, n$.
- Seja $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$.

- A área do setor circular de raio $f(\xi_i)$ e ângulo $(\theta_i - \theta_{i-1})$ é dado por

$$\frac{1}{2} f^2(\xi_i)(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

- Há um desses setores circulares para cada um dos n subintervalos.
- A soma das medidas das áreas desses n setores circulares é

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)(\theta_i - \theta_{i-1}).$$

- A área A da região R é definida como o limite da soma acima com $||P|| \to 0$.

Definição

Seja R a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, e a curva cuja equação é $r = f(\theta)$, onde f é contínua e não negativa no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$. A área A da região R é definida como

$$A = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)(\theta_i - \theta_{i-1}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

Exemplo

Ache a área da região limitada pelo gráfico de

$$r = 2 + 2\cos\theta.$$

R.: 6π.

- Consideremos a região limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, e pelas curvas cujas equações são $r = f(\theta)$ e $r = g(\theta)$, onde f e g são contínuas no intervalo fechado $[\alpha, \beta]$ e $f(\theta) \geq g(\theta)$ em $[\alpha, \beta]$.
- A área dessa região é

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f^2(\theta) - g^2(\theta)]d\theta. \end{aligned}$$

Exemplo

Ache a área da região interior à circunferência $r = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$ e exterior à limaçon $r = 2 - \mathrm{sen}\,\theta$.

R.: $3\sqrt{3}$.

- Seja $r = f(\theta)$. Derivando $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ com respeito a θ, obtemos
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta. \end{cases}$$
- Assim, encontramos
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta}.$$

- Se $\cos\theta \neq 0$, dividimos o numerador e o denominador por $\cos\theta$, resultando em

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\operatorname{tg}\theta + r}{\frac{dr}{d\theta} - r\operatorname{tg}\theta}.}$$

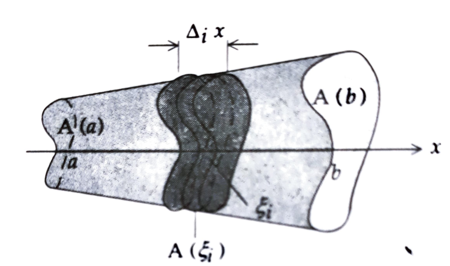
- Se $\cos\theta = 0$, obtemos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}.}$$

Exemplo

Ache a inclinação da reta tangente à curva $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$ no ponto em que (a) $\theta = 0$ e (b) $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

R.: (a) -2, (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

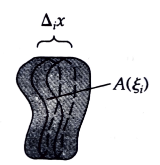


- Seja $A(x)$ a área da seção plana do sólido S que é perpendicular ao eixo x em x.
- Assumimos que $A(x)$ é contínua em $[a, b]$.
- Consideremos uma partição P de $[a, b]$ definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

- Temos, portanto, n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$.
- Seja $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Consideremos cilindros retos com altura $(x_i - x_{i-1})$ e a área das secções planas igual a $A(\xi_i)$.
- A soma das medidas dos volumes desses n cilindros retos é
$$\sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$
- O volume V do sólido S é definido como o limite da soma acima com $||P|| \to 0$.



Definição

Seja S um sólido tal que S esteja entre planos perpendiculares ao eixo x em a e b. Seja a área da secção plana de S no plano perpendicular ao eixo x em x dada por $A(x)$, em que $A(x)$ é contínua em $[a, b]$. Então o volume V do sólido S será dado por

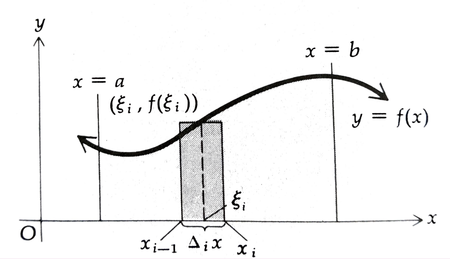
$$\begin{aligned} V &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b A(x)dx. \end{aligned}$$

Exemplo

Ache o volume de uma pirâmide reta cuja altura é h e cuja base é um quadrado com lado igual a s.

R.: $\frac{1}{3}s^2h$.

- Um **sólido de revolução** é um sólido obtido pela rotação de uma região num plano em torno de uma reta no plano, chamada de **eixo de revolução**.
- Se a região limitada por um semi-círculo e seu diâmetro for girada em torno do diâmetro, obteremos uma esfera.
- Um cone circular reto é gerado se a região limitada por um triângulo retângulo for girada em torno de um de seus catetos.



- Consideremos, em primeiro lugar, o caso em que o eixo de revolução é uma fronteira da região que gira.
- Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$.
- Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

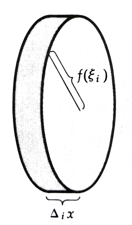
- Consideremos uma partição P de $[a, b]$ definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

- Temos, portanto, n subintervalos da forma $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$.
- Seja $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Consideremos n retângulos com base $(x_i - x_{i-1})$ e altura $f(\xi_i)$.

- Quando o i-ésimo retângulo é girado em torno do eixo x, obtemos um sólido que é um disco cuja base é um círculo de raio $f(\xi_i)$ e altura $(x_i - x_{i-1})$.
- Se V_i for o volume desse disco, então

$$V_i = \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



- A soma dos volumes desses n discos circulares será

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- O volume V do sólido de revolução será o limite dessa soma com $||P|| \to 0$.

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se S for o sólido de revolução obtido pela rotação efetuada, em torno do eixo x, da região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, então o volume V de S será

$$\begin{aligned} V &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \pi \int_a^b f^2(x)dx. \end{aligned}$$

Exemplo

Encontre o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 2$ for rotacionada em torno do eixo x.

R.: $\frac{31}{5}\pi$.

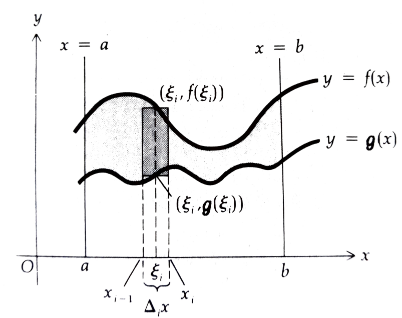
Exemplo

Ache o volume do sólido gerado pela rotação em torno da reta $x = 1$, da região limitada pela curva

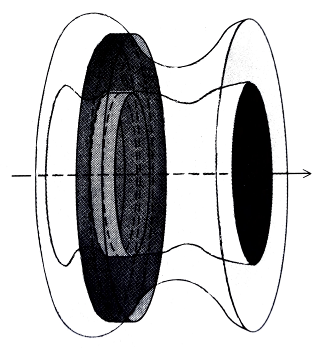
$$(x-1)^2 = 20 - 4y,$$

e pelas retas $x = 1$, $y = 1$ e $y = 3$ e à direita de $x = 1$.

R.: 24π.



y
x = a
x = b
y = f(x)
y = g(x)
(ξ_i, f(ξ_i))
(ξ_i, g(ξ_i))
O
a
b
x
ξ_i
x_{i-1}
x_i
Δ_i x



Teorema

Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Então, se V for o volume do sólido de revolução gerado com a rotação, em torno do eixo x, da região limitada pelas curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$,

$$V = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi [f^2(\xi_i) - g^2(\xi_i)](x_i - x_{i-1})$$
$$= \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Exemplo

Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e pela reta $y = x + 3$.

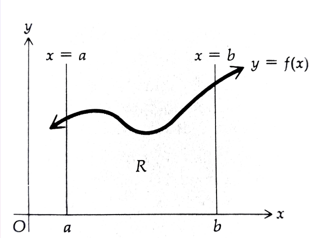
R.: $\frac{117}{5}\pi$.

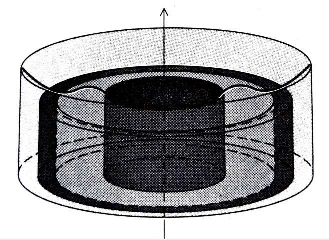
Exemplo

Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $x = -4$, da região limitada pelas parábolas $x = y - y^2$ e $x = y^2 - 3$.

R.: $\frac{875}{32}\pi$.

- Veremos agora um procedimento alternativo para calcular o volume de um sólido de revolução, que envolve tomar elementos retangulares de área, paralelos ao eixo de revolução.
- Quando um elemento de área for rotacionado em torno do eixo de revolução, obteremos um **invólucro cilíndrico**, ou seja, um sólido contido entre dois cilindros, com o mesmo centro e eixo.





- Seja R a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Além disso, suponha que $a \geq 0$.
- Se R girar em torno do eixo y, um sólido de revolução S será gerado.
- Para encontrar o volume de S quando os elementos de área são tomados paralelamente ao eixo y, prosseguimos da seguinte maneira:

- Seja P uma partição de $[a, b]$ definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

- Seja $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ o ponto médio do i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.
- Considere o retângulo tendo altura $f(m_i)$ e comprimento $(x_i - x_{i-1})$.
- Se esse retângulo girar em torno do eixo y, um invólucro cilíndrico será obtido.

- Se V_i for o volume desse invólucro cilíndrico, então

$$\begin{aligned} V_i &= \pi x_i^2 f(m_i) - \pi x_{i-1}^2 f(m_i) \\ &= \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(m_i) \\ &= \pi(x_i - x_{i-1})(x_i + x_{i-1}) f(m_i) \\ &= 2\pi m_i f(m_i)(x_i - x_{i-1}), \end{aligned}$$

  onde foi usado que $(x_{i-1} + x_i) = 2m_i$.
- A soma dos volumes dos n invólucros cilíndricos será

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- O volume V do sólido de revolução será o limite dessa soma com $||P|| \to 0$.

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, onde $a \geq 0$. Suponha que $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se R for a região limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, se S for o sólido de revolução obtido pela rotação da região R em torno do eixo y, então o volume V de S será

$$\begin{aligned} V &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi m_i f(m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \end{aligned}$$

Exemplo

A região limitada pela curva $y = x^2$, pelo eixo x e pela reta $x = 2$ gira em torno do eixo y. Ache o volume do sólido gerado. Tome os elementos de área paralelos ao eixo de revolução.

R.: 8π.

Exemplo

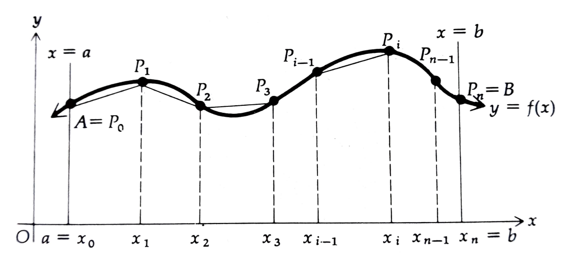
Ache o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, da região limitada pelo gráfico de $y = 3x - x^3$, pelo eixo y e pela reta $y = 2$.

R.: $\frac{2}{5}\pi$.

Exemplo

A região limitada pela curva $y = x^2$ e pelas retas $y = 1$, $x = 2$ gira em torno da reta $y = -3$. Ache o volume do sólido gerado, tomando elementos de área retangulares, paralelos ao eixo de revolução.

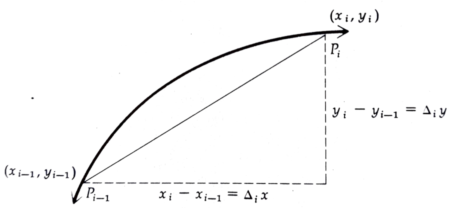
R.: $\frac{66}{5}\pi$.



- Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$.
- Seja P uma partição de $[a, b]$ definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

- Associado a cada ponto x_i no eixo x está um ponto $P_i(x_i, f(x_i))$ sobre a curva.



- O comprimento do segmento de reta de P_{i-1} a P_i é

$$|\overline{P_{i-1}P_i}| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

- A soma dos comprimentos desses segmentos de reta é escrita como

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|.$$

- Definimos o **comprimento de arco** como sendo o limite da soma acima com $||P|| \to 0$.

Definição

Suponhamos que a função f seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Além disso, suponhamos que exista um número L tendo as seguintes propriedades: Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que para toda partição P do intervalo $[a, b]$ seja verdade que se $||P|| < \delta$ então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| - L \right| < \varepsilon.$$

Assim, escrevemos

$$L = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}|$$

e L é chamado de **comprimento de arco** da curva $y = f(x)$ do ponto $A(a, f(a))$ ao ponto $B(b, f(b))$.

- Suponha $f'(x)$ seja contínua em [a, b].
- Pelo Teorema do Valor Médio existe um número z_i no intervalo aberto (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(z_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

- Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\overline{P_{i-1}P_i}| &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

- O somatório dos comprimentos de reta $|\overline{P_{i-1}P_i}|$, com $||P|| \to 0$, resulta em

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\overline{P_{i-1}P_i}| \\
&= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(z_i)]^2} \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.
\end{aligned}
$$

Teorema

Se a função f e sua derivada f' forem contínuas no intervalo fechado $[a, b]$, então o comprimento do arco da curva $y = f(x)$ do ponto $(a, f(a))$ ao ponto $(b, f(b))$ será dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Exemplo

Ache o comprimento de arco da curva $y = x^{2/3}$ do ponto $(1,1)$ ao ponto $(8,4)$.

R.: $\frac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$.

Exemplo

Ache o comprimento do arco da curva $9y^2 = 4x^3$ da origem ao ponto $(3, 2\sqrt{3})$.

R.: $\frac{14}{3}$.

Exemplo

Ache o comprimento de arco da curva $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3x - 1)$ do ponto onde $x = 1$ ao ponto onde $x = 4$.

R.: $\frac{22}{3}$.

Definição

Uma barra de comprimento L tem seu extremo esquerdo na origem. Se $\rho(x)$ for a densidade linear no ponto x da origem, onde $\rho(x)$ é contínua em $[0, L]$, então a **massa** da barra será

$$M = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \int_0^L \rho(x) dx.$$

Exemplo

A densidade linear em um ponto qualquer de uma barra de 4 m varia diretamente com a distância a um ponto externo da barra, situado na mesma reta que ela e a 2 m de um extremo, onde a densidade é 5 kg/m. Ache a massa total da barra.

R.: 40 kg.

Definição

Uma barra de comprimento L tem seu extremo esquerdo na origem e $\rho(x)$ é a densidade linear no ponto a uma distância x da origem, onde ρ é contínua em $[0, L]$. O **momento de massa** da em relação à origem é

$$\begin{aligned} M_0 &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_0^L x\rho(x)dx. \end{aligned}$$

- O **centro de massa** da barra está em um ponto $\overline{x}$ tal que se M for a massa total da barra, $\overline{x}M = M_0$. Assim,

$$\overline{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\int_0^L x\rho(x)dx}{\int_0^L \rho(x)dx}.$$

Exemplo

Ache o centro de massa da barra dada no exemplo anterior.

R.: $\frac{5}{3}$.

- Consideremos agora folhas finas com massa distribuída continuamente, por exemplo, folhas de papel ou de latão.
- Trataremos tais folhas como sendo bidimensionais e chamaremos tal região plana de **lâmina**.
- Restringiremos nossa discussão às lâminas homogêneas, isto é, lâminas com densidade superficial de massa constante.

- Seja L a lâmina homogênea cuja densidade de massa por unidade de área é a constante k, limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.
- A função f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$.
- Seja P uma partição de $[a, b]$ definida por

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

- Seja $\gamma_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ ponto médio de $[x_{i-1}, x_i]$.

- Associada a cada subintervalo existe uma lâmina retangular cujo comprimento, altura e densidade superficial de massa são dados por $(x_i - x_{i-1})$, $f(\gamma_i)$ e k, respectivamente, e cujo centro de massa está no ponto $(\gamma_i, \frac{1}{2}f(\gamma_i))$.
- A área da lâmina retangular é $(x_i - x_{i-1})f(\gamma_i)$; logo, $k(x_i - x_{i-1})f(\gamma_i)$ é sua massa.
- Consequentemente, o momento de massa desse elemento retangular em relação ao eixo y é

$$M_{y,i} = \gamma_i k(x_i - x_{i-1})f(\gamma_i).$$

- A soma dos momentos de massa em relação ao eixo y dessas n lâminas retangulares é dada por

$$\sum_{i=1}^{n} M_{y,i} = \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i(x_i - x_{i-1})f(\gamma_i).$$

- Definimos o momento de massa de L em relação ao eixo y como o limite dessa soma com $||P|| \to 0$.

- Da mesma forma, o momento de massa desse elemento retangular em relação ao eixo x é
$$M_{x,i} = \frac{1}{2} f(\gamma_i) k(x_i - x_{i-1}) f(\gamma_i).$$
- Assim, a soma dos momentos de massa em relação ao eixo x dessas n lâminas retangulares é dada por
$$\sum_{i=1}^{n} M_{x,i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} k f^2(\gamma_i)(x_i - x_{i-1}).$$
- O momento de massa de L em relação ao eixo x é definido como o limite dessa soma com $||P|| \to 0$.
- A soma das massas dessas n lâminas retangulares é dada por
$$\sum_{i=1}^{n} k f(\gamma_i)(x_i - x_{i-1}).$$
- O limite dessa soma com $||P|| \to 0$ define a massa total de L.

Definição

Seja L a lâmina homogênea cuja densidade superficial de massa é a constante k, a qual é limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. A função f é contínua em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$. Se M_y for o **momento de massa da lâmina L, em relação ao eixo y**, então

$$\begin{aligned} M_y &= \lim_{||P|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} k\gamma_i f(\gamma_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= k \int_0^L x f(x) dx. \end{aligned}$$

Definição

Se M_x for o **momento de massa da lâmina** L**, em relação ao eixo** x, então

$$\begin{aligned} M_x &= \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} k f^2(\gamma_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2} k \int_0^L f^2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Definição

Se M for a **massa total da lâmina** L, então

$$M = \lim_{||P||\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(\gamma_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= k \int_0^L f(x)dx.$$

Se $(\overline{x}, \overline{y})$ for a **centro de massa** da lâmina L, então

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{M}.$$

Exemplo

Ache o centroide da região no primeiro quadrante limitada pela curva $y^2 = 4x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$.

R.: $\overline{x} = \frac{93}{35}$, $\overline{y} = \frac{45}{28}$.

Exemplo

Ache o centroide da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$.

R.: $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = \frac{17}{5}$.

Teorema

Se a região plana R tiver a reta L como um eixo de simetria, o centroide de R estará em L.

Exemplo

Ache o centroide da região limitada pelo semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ e pelo eixo x.

R.: $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{8}{3\pi}$.