# Sinais e Sistemas: Parte 2

Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação

**Sistemas Lineares (SBL0091)**

**Prof. C. Alexandre R. Fernandes**

# Agenda

I. Equações de diferenças

II. Equações diferenciais

# I. Equações de Diferenças

- Equações de diferenças com coeficientes constantes ou simplesmente Equações de diferenças

Subclasse importante de sistemas LTI cuja entrada e saída satisfazem uma equação de diferenças de ordem $N$ com coecifientes constantes:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

# I. Equações de Diferenças

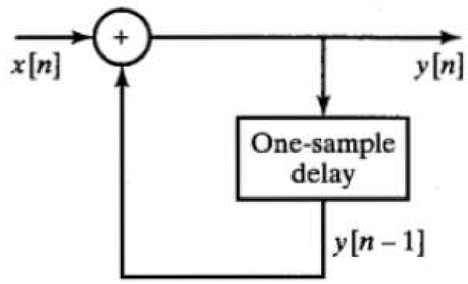
**Exemplo 1** (acumulador):

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]}_{y[n-1]} = x[n] + y[n-1]$$

Portanto, temos:

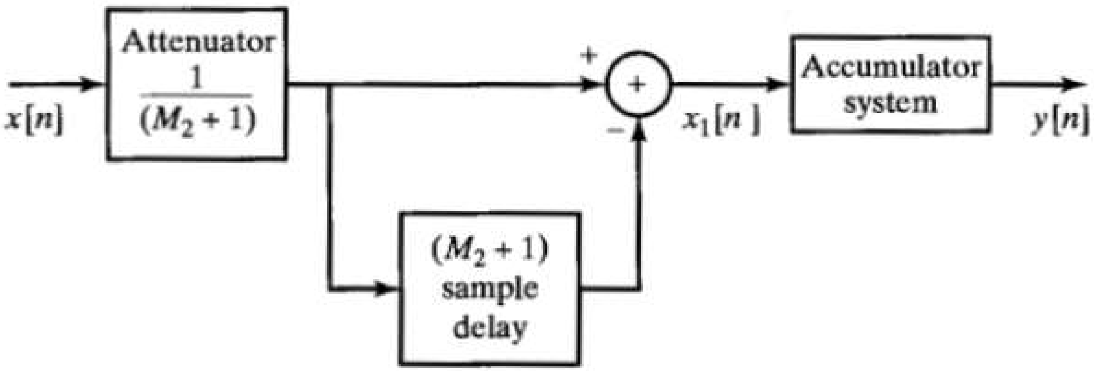
$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$

Ou seja, equações de diferenças podem ser usadas para descrever um sistema de maneira simplificada.



# I. Equações de Diferenças

**Exemplo 2** (média móvel com $M_1 = 0$):




$$x_1[n] = \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n - M_2 - 1])$$
$$y[n] - y[n-1] = x_1[n] = \frac{1}{M_2+1}(x[n] - x[n - M_2 - 1])$$

Obs: Equação de diferenças com $N = 1$, $M = M_2$, $a_0 = 1, a_1 = -1$,

$b_0 = -b_{M_2+1} = 1/(M_2+1)$, $b_k = 0$ para demais valores de $k$.

# I. Equações de Diferenças

- Equações de diferenças necessitam de informações adicionais, chamadas de *condições auxiliares*, para especificar de maneira única a saída do sistema.
- A saída do sistema pode ser expressa por:

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n],$$

em que $y_p[n]$ é a solução particular, que depende da entrada mas não depende das condições auxiliares, e $y_h[n]$ é a solução homogênea, que não depende da entrada mas depende das condições auxiliares.

- A solução homogênea é a solução de:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = 0$$

# I. Equações de Diferenças

- A solução homogênea possui a seguinte forma:

$$y_h[n] = \sum_{m=1}^{N} A_m \, z_m^n$$

sendo $z_m$ as raízes do polinômio:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, z^{-k} = 0$$

- As condições auxiliares são frequentemente dadas na forma de $N$ valores de $y[n]$, como, por exemplo: $y[-1], y[-2], ..., y[-N]$.
- Se o sistema é causal e LTI, então ele estará em repouso antes da aplicação da entrada. Por exemplor, se $x[n] = 0$ para $n < 0$, então um sistema causal LTI terá $y[-1] = y[-2] = ... = y[-N] = 0$.

# I. Equações de Diferenças

**Example 2.16 Recursive Computation of Difference Equations**

The difference equation satisfied by the input and output of a system is

$$y[n] = ay[n-1] + x[n].$$

Consider the input $x[n] = K\delta[n]$, where $K$ is an arbitrary number, and the auxiliary condition $y[-1] = c$.

# I. Equações de Diferenças

- Equações de diferenças – principais pontos:
  - Tal como a resposta ao impulso, equações de diferenças são usadas para representar sistemas discretos no tempo matematicamente.
  - Não é unicamente definida pelos coeficientes, depende das condições iniciais.
  - Em geral, as condições iniciais são os valores de $y[-1],\ldots,y[-N]$.
  - O sistemas será linear, invariante no tempo e causal se e somente se $y[-1]=\ldots=y[-N]=0$.

# I. Equações de Diferenças

- Equações de diferenças – principais pontos:
  - Uma equação de diferenças sempre tem um número finito de coeficientes, ao contrário da resposta ao impulso.
  - Para sistemas com resposta ao impulso finita, a eq. da convolução já está no formato da equação de diferenças.
  - Sistemas com resposta ao impulso infinita só podem ser implementados computacionalmente usando-se a equação de diferenças.

# II. Equações Diferenciais

- No caso de sistemas contínuos, as equações diferenciais são usadas no lugar das equações de diferenças:

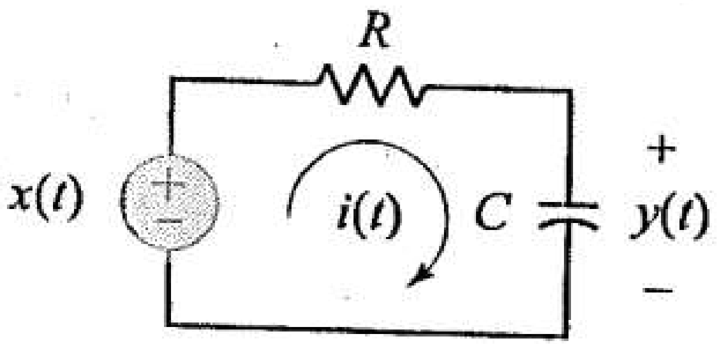
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

- Note que as ordens N e M da equação diferencial são as derivadas mais elevada.

- Na equações de diferenças, as ordens são as memórias máximas.

# II. Equações Diferenciais

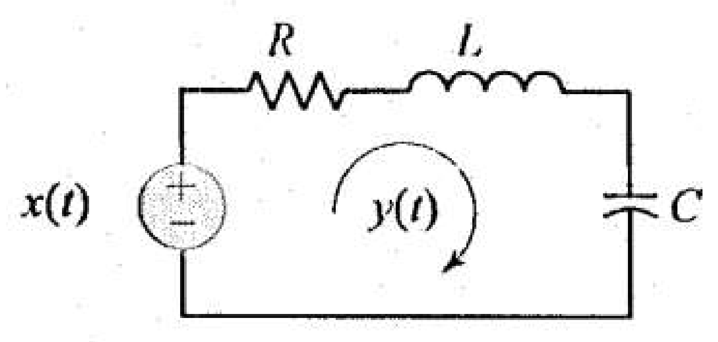
- Exemplo de sistema modelos por eq. diferencial:




$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

# II. Equações Diferenciais

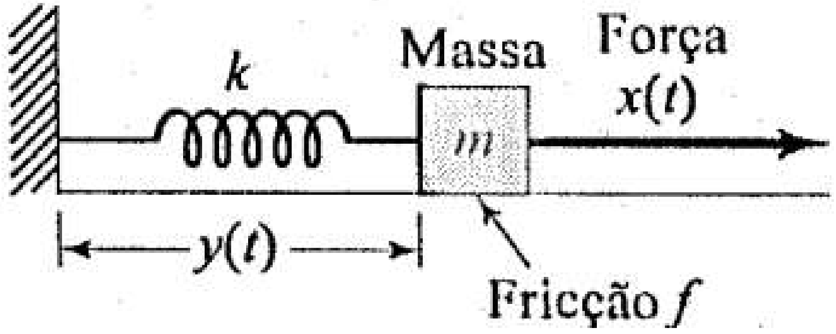
- Exemplo mais complexo:




$$R_y(t) + L\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\, d\tau = x(t)$$

# II. Equações Diferenciais

- Sistemas mecânico massa mola modelado por eq. diferencial:




$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + f \frac{d}{dt} y(t) + ky(t) = x(t)$$

# II. Equações Diferenciais

- Uma eq. diferencial não é completamente determinada pelos seus coeficientes, ela depende também das condições auxiliares.

- Neste caso, as condições auxiliares são as seguintes derivadas:

$$\frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

  calculadas, em geral, em t=0.

# II. Equações Diferenciais

- Uma eq. diferencial também possui respostas natural e forçada:
  - Resposta Natural:
    - Associada às condições iniciais do sistema
    - Não depende da entrada
  - Resposta Forçada:
    - Associada à entrada do sistema.
    - Depende da entrada.

- Para o sistema ser linear, invariante no tempo e causal, as condições inicias devem ser nulas.
  - Condições iniciais nulas → Não há energia armazenada no sistema

# II. Equações Diferenciais

- Resposta Natural:
  - Solução da eq. homogênea:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y^{(n)}(t) = 0$$

- Não será cobrada obtenção da solução da eq. homogênea.

# II. Equações Diferenciais

- Equações diferenciais – principais pontos:
  - Tal como a resposta ao impulso, equações diferenciais são usadas para reapresentar sistemas contínuos no tempo matematicamente.
  - Não é unicamente definida pelos coeficientes, depende das condições iniciais.
  - Em geral, as condições iniciais são os valores de das derivadas de ordem 1 até N de y(t), em t=0.
  - O sistemas será linear, invariante no tempo e causal se e somente se as condições iniciais forem nulas.