Questão **1**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Substitua a integral cartesiana por uma integral equivalente em coordenadas polares. Em seguida, calcule a integral polar:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x} dydx$$

Qual o valor da integral?

Escolha uma:

- a. $2 - \sqrt{3}$ ✓
- b. $-2 - \sqrt{3}$
- c. $\sqrt{3} - 2$
- d. $2\sqrt{3}$
- e. $2 + \sqrt{3}$

Sua resposta está correta.

Resposta:

Resolvendo a integral em relação acima teremos:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x} dydx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\csc(\theta)}^{\sqrt{3}\sec(\theta)} rdrd\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\tfrac{3}{2}\sec^2\theta - \tfrac{1}{2}\csc^2\theta\right)\ d\theta\ = \left[\tfrac{3}{2}\tan(\theta) + \tfrac{1}{2}\cot(\theta)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2\ -\ \sqrt{3}$$

A resposta correta é: $2 - \sqrt{3}$

.

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{2x+y} \, dzdxdy.$

Resposta: 5,33333333333333

Resposta:

$\int_0^{2x+y} \, dz$

$= 2x + y$

$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x + y) \, dxdy$

Aplicando a regra da soma $\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

Temos que:

$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x + y) \, dxdy$

$= \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx + \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (y) \, dx$

Resolvendo as integrais:

$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (y) \, dx = 2y\sqrt{4 - y^2}$

$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx = 0$

Pois, se $f(x)$ é uma função ímpar e contínua em: $[-a, a]$ então $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$

Paridade de $2x$: ímpar

Logo, $\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (2x) \, dx = 0$

Somando, temos:

$= 2y\sqrt{4 - y^2} + 0$

$= 2y\sqrt{-y^2 + 4}$

Por fim, integrando em relação a dy:

$\int_0^2 (2y\sqrt{-y^2 + 4}) \, dy$

$= 2 \int_0^2 (y\sqrt{-y^2 + 4}) \, dy$

Aplicando integração por substituição: $u = -y^2 + 4$

$= 2 \int_4^0 \left(-\frac{\sqrt{u}}{2}\right) \, du$

Temos que, $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a \, dx \, , \, a < b$

$= 2 \left(- \int_0^4 -\frac{\sqrt{u}}{2} du\right)$

$= 2 \left(- \left(-\frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{u} \, du\right)\right)$

Aplicando a regra da potência:

$= 2 \left(- \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4\right)\right)$

Simplificando, temos:

$= \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

/

Por último, calculamos os limites:

$$= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3}$$

A resposta correta é: 5,33333.

Questão **3**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Calcule a integral iterada $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} r\,z\,dz\,dr\,d\theta$?

Escolha uma:

- a. $\frac{36}{13}\pi$
- b. $\frac{38}{17}\pi$
- c. $\frac{7}{5}\pi$
- d. $\frac{39}{23}\pi$
- e. $\frac{37}{15}\pi$

Sua resposta está correta.

Resposta:

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\frac{z^2}{2}\Big|_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(\frac{9(4-r^2)}{2}-\frac{(4-r^2)}{2}\right)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(\frac{8(4-r^2)}{2}\right)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{8}{2}\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} r\left(4-r^2\right)\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}4\int_0^{\frac{\theta}{\pi}} 4r-r^3\,dr\,d\theta$$

Aplicando a regra da soma para integrais:

$$=\int_0^{\pi}4\left(\int_0^{\frac{\theta}{\pi}}4r\,dr-\int_0^{\frac{\theta}{\pi}}r^3\,dr\right)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}4\left(\frac{4r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\theta}{\pi}}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\left(\frac{2\theta^2}{\pi^2} - \frac{\theta^4}{4\pi^4}\right) d\theta$$

Aplicando novamente a regra da soma:

$$= \int_0^{\pi} \frac{8\theta^2}{\pi^2}\, d\theta \, - \int_0^{\pi} \frac{\theta^4}{\pi^4}\, d\theta$$

$$= \frac{8\theta^3}{3\pi^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{\theta^5}{5\pi^4}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{8\pi}{3} - \frac{\pi}{5}$$

$$= \frac{37}{15}\pi$$

A resposta correta é: $\frac{37}{15}\pi$

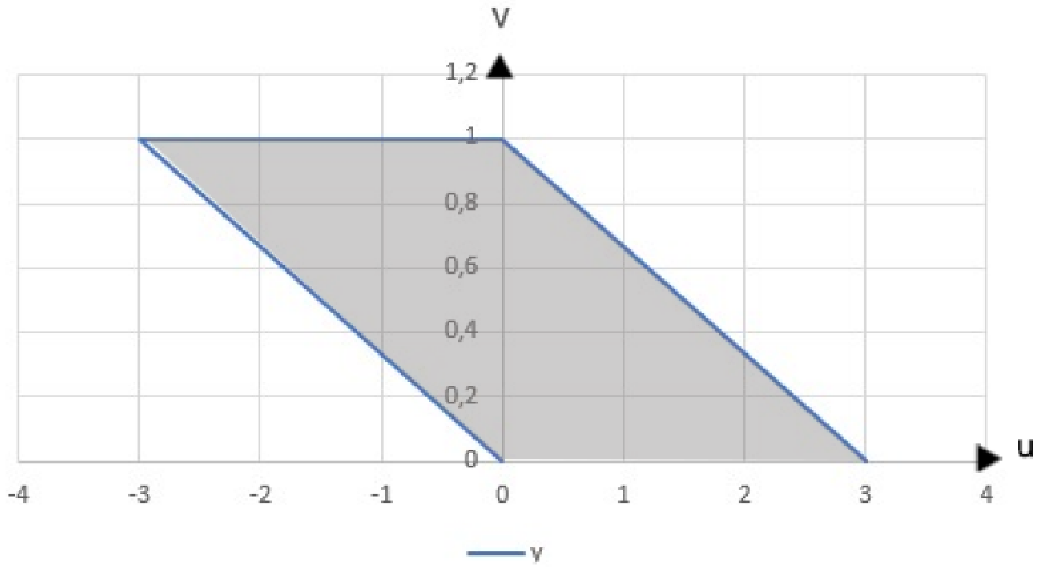
.

Questão **4**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a imagem pela transformação $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ do paralelogramo R no plano xy com fronteiras $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ e $y = x + 1$. Esboce no seu caderno a região transformada no plano uv. Depois compare com figura abaixo.



Agora, resolva o sistema $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ para x e y em termos de u e v . Em seguida, encontre o valor do jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}$.

Resposta: -1

Primeira Solução:

Resolvendo as equações $u = 2x - 3y$ e $v = x + y$ para x e y temos:

$x = -u - 3v \;\; (1)$

$y = -u - 2v \;\; (2)$

Substituindo x da equação (1) pelo valor das fronteiras $x = -3$ encontramos

$-u - 3v = -3$

$u + 3v = 3$

para $x = 0$

$-u - 3v = 0$

$u + 3v = 0$

substituindo y da equação (2) pelo valor das fronteiras $y = x$, temos:

$-u - 3v = -u - 2v$

Resolvendo a equação acima, trazemos $-u-2v$ para a esquerda e somamos com $-u-3v$,obtendo $-v=0$, entao mutiplicamos por (-1) temos

$v=0$

quando $y=x+1$

$-u-3v+1=-u-2v$

Pegamos $-u-2v$ levamos para o lado esquerdo e somamos com $-u-3v+1$ resultando em $-v+1=0$, levando o 1 para direita e multiplicando os dois lado da equação por -1 obtemos

$v=1$

Dessa forma para $v=0$ e $u+3v=3$ encontramos $u=3$ e quando $v=1$ encontramos $u=0$ assim encontramos as coordenadas $(3,0)$ e $(0,1)$.

Quando temos $v=0$ e $u+3v=0$ obtemos $u=0$ e quando $v=1$ e $u+3v=0$ obtemos $u=-3$, então temos as coordenadas $(0,0)$ e $(-3,1)$.

Segunda Solução:

Primeiro resolvemos o sistema para x e y em termos de u e v.

$x=-u-3v$

$y=-u-2v.$

Para resolver o jacobiano iremos derivar x e y em relação a (u,v), respectivamente.

$\frac{\partial(x)}{\partial(u,v)}=-1-3$

$\frac{\partial(y)}{\partial(u,v)}=-1-2$

Então a partir da definição do jacobiano

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Resolvemos

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=2-3=-1.$$

Resposta: Jacobiano = -1.

A resposta correta é: -1.

Questão **5**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Calcule $\int_C (xy + y + z)\, ds$ ao longo da curva $\vec{\mathbf{r}}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \leq\ t\ \leq\ 1.$

Resposta: 2,1666666666666666 ✗

SOLUÇÃO:

1°) Como a função $\vec{\mathbf{r}}(t)$ dada tem uma derivada primeira, descobrindo a equação da velocidade a derivando-a. Logo, $\vec{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{2i} + \mathbf{j} - \mathbf{2k}$.

2°) Encontramos o módulo de $\vec{\mathbf{v}}(t)$.

$\parallel \vec{\mathbf{v}}(t) \parallel = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = 3$

3°) Calculamos a integral de linha $\int_b^a\ f(g(t), h(t), k(t)) \parallel \vec{\mathbf{v}}(t) \parallel\ dt$ para a parametrização lisa de C dada por $\vec{\mathbf{r}}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \leq\ t\ \leq\ 1.$

= $\int_0^1 (2t^2\ - t + 2)3\, dt$

= $3\ \int_0^1 (2t^2\ - t + 2)dt$

= $3\ (\int_0^1 2t^2\, dt - \int_0^1 t dt + \int_0^1 2dt)$

= $3\ (2[\frac{t^3}{3}]_0^1\ -\ [\frac{t^2}{2}]_0^1\ +\ [2t]_0^1\ )$

= $3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$

= $\frac{13}{2} = 6,5$

A resposta correta é: 6,5.

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre o trabalho realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre a curva na direção de t crescente, onde:

- $\vec{\mathbf{F}} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
- C é o caminho dado pela função vetorial $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1.$

Resposta: 4,5

Solução:

Lembrando que: $W = \int\limits_{C_1} dw \to \int\limits_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \to \int\limits_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot \left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}\right) dt$

i) Derivando $\vec{\mathbf{r}}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, obtemos:

$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

ii) Parametrizando a função $\vec{\mathbf{F}} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$ em termos de t, obtemos:

$\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

iii) Simplificando para a integração:

$\vec{\mathbf{F}}(t) \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}dt = (3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dt = (3t + 2t + 4t)\, dt = (9t)\, dt$

iv) Após simplificarmos a expressão anterior, integramos:

$$\int_{C_1} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} \Leftrightarrow \int\limits_a^b \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}(t)) \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} dt = \int\limits_0^1 9t dt = \left[\frac{9t^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{9(1)^2}{2} - \frac{9(0)^2}{2}\right] = \left(\frac{9}{2}\right) = 4,5$$

Resposta: $\frac{9}{2}$.

A resposta correta é: 4,5.

Questão **7**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Mostre que a forma diferencial na integral $\int_{(2,3,-6)}^{(0,0,0)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$ é exata. Em seguida, calcule a integral.

Resposta: 49

SOLUÇÃO:

- Como $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e que $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial y}$. Portanto, concluímos que $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ é exata.

- Temos que:

= $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

Logo, $f(x,y,z) = x^2 + g(y,z)$

- Calculando $g(y,z)$

= $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$. Assim, $g(y,z) = y^2 + h(z)$.

Logo, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + h(z)$.

- Calculando $h(z)$

$\frac{\partial f}{\partial z} = h'(z) = 2z$

Logo, $\int h'(z)\,dz \Rightarrow h(z) = z^2 + C$

Assim, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + C$

A resposta correta é: 49.

Questão **8**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize a fórmula da área do teorema de Green $\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy - ydx$ para encontrar a área da região delimitada pela circunferência $\vec{\mathbf{r}}(t) = (acos(t))\mathbf{i} + (asen(t))\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Escolha uma:

- a. $1,2\pi a^2$
- b. $1,5\pi a^2$
- c. $2\pi a^2$
- d. $3\pi a^2$
- e. πa^2

Sua resposta está correta.

SOLUÇÃO:

- Sabendo que $M = x = a\cos(t)$ e $N = y = a\sin(t)$, calculamos as derivadas de x e y. Logo, temos que

$x = -a\sin(t)\,dt$

$x = b\cos(t)\,dt$

$Area = \int_C xdy - ydx$

- Fazendo a substituição

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t))dt$

- Resolvendo a integral, temos que a área da região delimitada é

$=\pi a^2$

A resposta correta é: πa^2

.

Questão **9**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual a parametrização do plano $x + y + z = 1$ inclinado dentro de um cilindro $y^2 + z^2 = 9$.

Escolha uma:

a. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} - (u\cos\,v)\mathbf{j} - (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

b.

$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} - (u\cos\,v)\mathbf{j} + (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

c. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} + (u\cos\,v)\mathbf{j} + (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

✓

d. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} + (u\cos\,v)\mathbf{j} - (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

e. $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 + u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} + (u\cos\,v)\mathbf{j} + (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

Sua resposta está correta.

Solução:

De maneira semelhante às coordenadas cilíndricas, mas trabalhando no plano yz em vez do plano xy.

$y = u\cos\,v$ e $z = u\sin\,v$, onde $u = \sqrt{y^2 + z^2}$ e v é o angulo formado por (x, y, z), $(y, 0, 0)$ e $(x, y, 0)$, com $(x, 0, 0)$ como vértice.

Sendo $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z \Rightarrow x = 1 - u\cos\,v - u\sin\,v$.

Substituindo x, y e z na função de superfície, temos:

$\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} + (u\cos\,v)\mathbf{j} + (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(u, v) = (1 - u\cos\,v - u\sin\,v)\mathbf{i} + (u\cos\,v)\mathbf{j} + (u\sin\,v)\mathbf{k}$, com $0 \leq u \leq 3$ e $0 \leq v \leq 2\pi$.

.

Questão **10**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Considere o campo $\vec{\mathbf{F}} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$, para fora (normal para longe do eixo x) através da superfície cortada do cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ pelos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 0$.

Utilize uma parametrização para encontrar o fluxo $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma$ através da superfície na direção determinada.

Resposta: -32

SOLUÇÃO:

- Sendo a parametrização:

$$\vec{\mathbf{r}}\,(x\,,\,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \left(4 - y^2\right)\mathbf{k}\,,\, 0 \le x \le 1\,,\, -2 \le y \le 2$$

- Sendo:

$$z = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 4 - y^2 \;\Rightarrow\; y = \pm 2$$

- Logo,

$\vec{\mathbf{r}}_x = \mathbf{i}$ e $\vec{\mathbf{r}}_y = \mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$

$$\Rightarrow\; \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

- Tendo:

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \int_a^b \int_c^d \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y}{\|\, \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \,\|} \|\, \vec{\mathbf{r}}_x \times \vec{\mathbf{r}}_y \,\|\, dydx$$

- Substituindo z no produto escalar: $2xy - 3z$:

$$= [2xy - 3(4 - y^2)]$$

- Tendo finalmente: $\int_0^1 \int_{-2}^2 (2xy + 3y^2 - 12)\, dydx$

$$= \int_0^1 \left[xy^2 + y^3 - 12y\right]_{-2}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 -32\, dx$$

$$= -32$$

A resposta correta é: -32.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

O universal pelo regional.