Iniciado em	quinta-feira, 29 jun. 2023, 10:00
Estado	Finalizada
Concluída em	quinta-feira, 29 jun. 2023, 11:55
Tempo empregado	1 hora 55 minutos
Avaliar	**10,00** de um máximo de 10,00(**100**%)

Questão **1**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Integre $G(x,y,z) = x\,y\,z$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = 8$, $y = 2$, $z = 2$.

Resposta: 288 ✔

Exemplo: Integre $G(x,y,z) = x\,y\,z$ sobre a superfície do sólido retangular cortado do primeiro octante pelos planos $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

Solução:

Como o sólido esta no primeiro octante então a superfície é uma caixa com faces em:

$x = 2$,$y = 2$ e $z = 2$

$x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$

Quando x, y ou z são iguais a zero, a função $G(x,y,z)$ é igual a zero. Por isso, precisamos calcular apenas 3 faces, aquelas cujas faces não passam pela origem.

Agora, vamos aos cálculos.

Para $x = 2$:

$G(a,y,z) = 2yz$

$$\iint\limits_{S_1} G d\sigma = \iint\limits_{S_1} 2yz\,d\sigma = \int_0^2 \int_0^2 2yz\,dydz = \frac{32}{4}$$

Para $y = 2$:

$G(a,y,z) = x2z$

$$\iint\limits_{S_2} G d\sigma = \iint\limits_{S_2} x2z\,d\sigma = \int_0^2 \int_0^2 x2z\,dxdz = \frac{32}{4}$$

Para $z = 2$:

$G(a,y,z) = xy$

$$\iint\limits_{S_3} G d\sigma = \iint\limits_{S_3} xy2\,d\sigma = \int_0^2 \int_0^2 xy2\,dxdy = \frac{32}{4}$$

Logo:

$$\iint\limits_{S} G d\sigma = \int_0^2 \int_0^2 2yz\,dydz + \int_0^2 \int_0^2 x2z\,dxdz + \int_0^2 \int_0^8 xy2\,dxdy$$

$$\iint\limits_{S} G(x,y,z) d\sigma = \frac{(32+32+32)}{4} = 24.$$

A resposta acima pode ser diferente da resposta da sua questão, pois ela é apenas um exemplo. No entanto, a forma de resolver será a mesma.

A resposta correta para a sua questão você encontra abaixo.

A resposta correta é: 288,00

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = \frac{6}{\pi} z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Resposta: 64 ✔

Exemplo: Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = \frac{6}{\pi} z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Solução

Passo 1

Note que estamos interessados num fluxo através de uma esfera e raio 2. Então, vamos fazer a parametrização dessa superfície:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\sin\theta) + (2\cos\phi)\mathbf{k}$.

Passo 2: Limites de integração

Para o primeiro octante, temos que ϕ e θ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Passo 3: Encontrar o vetor normal a superfície

Primeiro, vamos derivar em relação a ϕ para obtermos o vetor tangente $\vec{\mathbf{r}}_\phi$.

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (2\cos\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\cos\phi\sin\theta)\mathbf{j} - (2\sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a θ para obtermos o vetor tangente $\vec{\mathbf{r}}_\theta$.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-2\sin\phi\sin\theta)\mathbf{i} + (2\sin\phi\cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (4\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (4\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (4\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}$.

Passo 4 Desenvolvendo o integrando

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $8\cos^2\phi\sin\phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = \frac{6}{\pi} z\mathbf{k}$, temos que: $\frac{6}{\pi}(2\cos\phi)\mathbf{k}$.

Passo 5 - Finalizando o cálculo do Fluxo

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada S na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$$\frac{6}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi.$$

Que tem como resultado o valor 8.

Observação: A valor acima é referente ao exemplo. Para ver a resposta da sua questão,você deve olhar para resposta correta abaixo.

A resposta correta é: 64,00

Questão **3**

Correto

Atingiu 3,00 de 3,00

Seja S o cilindro $x^2 + y^2 = 64$, $0 \leq z \leq h$, juntamente com seu topo, $x^2 + y^2 \leq 64$, $z = h$. Seja $\vec{\mathbf{F}} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. Utilize o teorema de Stokes para encontrar o fluxo exterior de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$ através de S. Depois divida o valor desse fluxo por π.

Importante: Divida o valor desse fluxo por π e insira no campo abaixo para verificar se a sua repsota está correta.

Resposta: 128 ✔

Solução: Pelo teorema de Stokes, o fluxo de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$ através de S é dado por $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, d\sigma = \oint\limits_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$.

Para solucionar essa questão podemos usar a integral de Superfície ou a integal de caminho. Aqui nós vamos usar a integral de caminho.

Então podemos contornar o cilindro com a curva paramétrica $\vec{\mathbf{r}} = (8\ \cos\ t)\mathbf{i} + (8\ \sin\ t)\mathbf{j}$, onde $0 \leq t \leq 2\pi$.

Derivando temos $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-8\ \sin\ t)\mathbf{i} + (8\ \cos\ t)\mathbf{j}$.

Agora podemos desenvolver o integrando: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 64\ \sin^2\ t + 64\ \cos^2\ t = 64$

Lembre: Pelo teorema de Stokes, o fluxo de $\nabla \times \vec{\mathbf{F}}$ através da superfície S é dado por $\oint\limits_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_0^{2\pi} 64\, dt = 128\pi$

Se você dividiu por π e obteve a resposta abaixo, parabéns.

A resposta correta é: 128,00

Questão **4**

Correto

Atingiu 3,00 de 3,00

Utilize o teorema da divergência para encontrar o fluxo exterior de $\vec{\mathbf{F}}$ através da fronteira da região D.

Esfera $\vec{\mathbf{F}} = \frac{5}{12\pi}(x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k})$, D: A esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$.

Use uma calculadora para calcular a resposta final.

Não insira unidades de fluxo. Apenas o resultado numérico.

Resposta: 3125

Solução: Primeiro, caculamos o divergente do campo. Obtemos $\nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{5}{12\pi}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2)$.

Então calculamos o fluxo:

$$flux = \frac{5}{12\pi} \int \int_D \int 3(x^2 + y^2 + z^2)\, d\vec{\mathbf{V}}$$

$$= \frac{5}{12\pi} 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{5} \rho^2 (\rho^2 \, \sin\, \phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{5}{12\pi} 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{3125}{5} \sin\, \phi\, d\phi\, d\theta = \frac{5}{12\pi} 3 \int_0^{2\pi} \frac{6250}{5}\, d\theta = 3125 \text{ u.f}$$

A resposta correta é: 3125,00