Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

Nome: ____ Matrícula:______________

Avaliação Parcial 2 - 20/06/2023

1) Encontre a série de Fourier de tempo discreto do sinal:

$$x[n] = \cos(0,4\pi n) + \cos(0,5\pi n).$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j0,4\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j0,4\pi n} + \frac{1}{2}e^{j0,5\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j0,5\pi n}$$

Período fundamental de $\cos(0,4\pi n)$: $\Omega_1 = 0,4\pi$, $N_1 = \frac{2\pi k}{\Omega_1} \to N_1 = \frac{2}{0,4}k = 5$

Período fundamental de $\cos(0,5\pi n)$: $\Omega_2 = 0,5\pi$, $N_2 = \frac{2\pi k}{\Omega_2} \to N_2 = \frac{2}{0,5}k \to N_2 = 4$

Período fundamental de $x[n]$: mínimo múltiplo comum (MMC) de N_1 e $N_2 \to N = 20$

Frequência fundamental de $x[n]$: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$

Achando a série de Fourier de tempo discreto por inspeção:

$$x[n] = \sum_{k=-10}^{9} X[k]e^{jk\frac{\pi}{10}n}$$

$k = 4 \to X[4] = \frac{1}{2}$

$k = -4 \to X[-4] = \frac{1}{2}$

$k = 5 \to X[5] = \frac{1}{2}$

$k = 5 \to X[-5] = \frac{1}{2}$

A série de Fourier $X[k]$ foi descrita acima apenas para o primeiro período. Para k fora do intervalo $-10 \leq k \leq 9$, $X[k]$ é periódica com período $N = 20$.

2) Encontre a série de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m) + \delta(t-3m).$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

Período fundamental do primeiro termo: $T_1 = 1$

Período fundamental do segundo termo: $T_2 = 3$

Período fundamental de $x(t)$: mínimo múltiplo comum (MMC) de T_1 e $T_2 \to T = 3$

Frequência fundamental de $x(t)$: $\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

Calculando a série de Fourier:

$$X[k] = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{1.5}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m) + \delta(t-3m)\right] e^{-j\frac{2\pi}{3}kt}dt$$

$$X[k] = \frac{1}{3}\int_{-1.5}^{1.5}\left[\delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t+1) + \delta(t)\right] e^{-j\frac{2\pi}{3}kt}dt$$

$$X[k] = \frac{1}{3}\left[2 + e^{-jk\pi\frac{2}{3}} + e^{jk\pi\frac{2}{3}}\right]$$

$$X[k] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right)$$

3) Encontre a resposta ao impulso em tempo discreto $h[n]$ do filtro passa-baixa ideal cuja resposta em frequência é definida (no primeiro período) por:

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j5\Omega}, & |\Omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Não usar os resultados das tabelas de pares básicos de Fourier.

Solução:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{-j5\Omega}e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{j\Omega(n-5)}d\Omega$$

Para $n \neq 5$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{e^{j\Omega(n-5)}}{j(n-5)}\right|_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j(n-5)}\left[e^{j\frac{2\pi}{3}(n-5)} - e^{-j\frac{2\pi}{3}(n-5)}\right]$$

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}(n-5))}{\pi(n-5)}$$

Para $n = 5$:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\Omega = \frac{\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}}{2\pi}$$

$$h[n] = \frac{2}{3}$$

4) Encontre a saída de um sistema LTI (de tempo discreto) cuja entrada é dada por: $x[n] = \frac{2}{\pi(n-5)}\sin(0,3\pi(n-5))$, e a resposta ao impulso é dada por $h[n] = \frac{-2}{\pi(n+1)}\sin(0,3\pi(n+1))$. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução:

Olhando na Tabela:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 2e^{-j5\Omega}, & |\Omega| \leq 0,3\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -2e^{j\Omega}, & |\Omega| \leq 0,3\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Usando Teorema da convolução:

$$Y(e^{j\Omega}) = \begin{cases} -4e^{-j4\Omega}, & |\Omega| \leq 0,3\pi, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Olhando na Tabela: $y[n] = \frac{-4}{\pi(n-4)} \sin(0,3\pi(n-4))$

5)Encontre a transformada de Fourier (de tempo contínuo) do sinal:

$$x(t) = \frac{d}{dt}\left(\cos(\frac{2}{3}\pi t)e^{-at}u(t)\right),$$

para $a > 0$. É permitido usar os resultados das tabelas.

Solução: Olhando na Tabela:

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

Propriedade da multiplicação por exponencial complexa:

$$\cos(\frac{2}{3}\pi t)e^{-at}u(t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2}{3}\pi t} + e^{-j\frac{2}{3}\pi t}\right)e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{a + j(\omega - \frac{2}{3}\pi)} + \frac{1}{2}\frac{1}{a + j(\omega + \frac{2}{3}\pi)}$$

Propriedade da diferenciação:

$$\frac{d}{dt}\left(\cos(\frac{2}{3}\pi t)e^{-at}u(t)\right) \leftrightarrow \frac{j\omega}{2}\frac{1}{a + j(\omega - \frac{2}{3}\pi)} + \frac{j\omega}{2}\frac{1}{a + j(\omega + \frac{2}{3}\pi)}$$