UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL
ENGENHARIA ELÉTRICA

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Módulo 5: Distribuições de Probabilidade Conjunta e Amostras Aleatórias.

Prof.: Miguel Silva

Sumário

- Introdução
- Variáveis Aleatórias de Distribuição Conjunta
- Valores Esperados, Covariância e Correlação
- Estatística e suas Distribuições
- A Distribuição da Média Amostral

Introdução

Introdução

- Vimos nos módulos 3 e 4 modelos probabilísticos com uma única variável aleatória.
- Porém, muitos problemas em probabilidade e estatística nos conduzem a modelos que envolvem diversas variáveis aleatórias simultaneamente.
- Neste módulo estudaremos aspectos importantes relacionados ao caso em que deseja-se estudar diversas variáveis aleatórias conjuntamente.

Variáveis Aleatórias de Distribuição Conjunta

Fmp conjunta para duas va’s discretas

- A função de massa de probabilidade (fmp) de uma única va discreta *X especifica quanta massa de probabilidade* é colocada em cada valor *X possível.*
- A fmp conjunta de duas vas discretas *X e Y descreve quanta massa de probabilidade* é colocada em cada par de valores possível
- Quando estamos tratando de duas va’s conjuntamente temos um tratamento similar dado pela **função de massa de probabilidade conjunta.**

Fmp conjunta para duas va's discretas

- **Definição:**

  Sejam X e Y duas va's discretas definidas no espaço amostral *S* de um experimento. A **função de massa de probabilidade conjunta** *p(x, y)* é definida para cada par de números *(x,y)* por:

$$p(x, y) = P(X = x \text{ e } Y = y)$$

Fmp conjunta para duas va's discretas

- **Definição (continuação):**

  Seja *A* qualquer conjunto formado por pares de valores *(x, y)*. A probabilidade *P[(X,Y) Є A]* é obtida pela soma dos valores da fmp conjunta para os pares de *A.*

$$P[(X,Y) \in A] = \sum_{(x,y)\in A}\sum p(x,y)$$

Fmp conjunta para duas va’s discretas

- Exemplo: Suponha que os computadores de uma certa empresa possam ser fabricados com um tamanho de memória RAM de 1GB, 2GB ou 3GB e com 1, 2, 3 ou 4 processadores paralelos. Seja X uma va que represente o tamanho da memória e Y o número de processadores de um computador escolhido aleatoriamente. A tabela a seguir ilustra as probabilidades envolvidas.

Fmp conjunta para duas va's discretas

- Exemplo (continuação):

p(x, y)	y				
x		1	2	3	4
	1GB	0,20	0,10	0,10	0,05
	2GB	0,15	0,10	0,05	0,05
	3GB	0,05	0,05	0,05	0,05

Determine a probabilidade de P(X=2 e Y=4) e P(Y ≥ 3).

Fmp conjunta para duas va’s discretas

- Exemplo (continuação):

  $P(X=2 \text{ e } Y=4) = p(2, 4)$ que é igual a 0,05 de acordo com a tabela

  Para calcular $P(Y \geq 3)$ devemos elencar todos os pares em que $Y \geq 3$. São eles: (1GB, 3), (2GB, 3), (3GB, 3), (1GB, 4), (2GB, 4) e (3GB, 4). Assim $P(Y \geq 3) = p(1,3) + p(2,3) + p(3,3) + p(1,4) + p(2,4) + p(3,4) = 0,10 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0,05 = 0,35$

  Obs: Assim como a fmp para uma única variável, a fmp conjunta também deve sempre somar 1 quando todos eventos possíveis são considerados

Fmp's marginais

- **Definição:**

  As **funções de massa de probabilidade marginais** de X e de Y, representadas respectivamente por $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ são dadas por:

$$p_X(x) = \sum_y p(x,y) \qquad p_Y(y) = \sum_x p(x,y)$$

Fmp’s marginais

- Exemplo: Baseado no exemplo anterior, calcule a fmp marginal de X. Calcule também a fmp marginal de Y.

Fmp's marginais

- Exemplo (continuação):

  Os valores possíveis de X são 1GB, 2GB e 3GB. Assim temos que:

  $p_X(1) = p(1,1) + p(1,2) + p(1,3) + p(1,4) = 0,45$

  $p_X(2) = p(2,1) + p(2,2) + p(2,3) + p(2,4) = 0,35$

  $p_X(3) = p(3,1) + p(3,2) + p(3,3) + p(3,4) = 0,20$

x	**1**	**2**	**3**
$p_X(x)$	0,45	0,35	0,20

Fmp's marginais

- Exemplo (continuação):

  Os valores possíveis de Y são 1, 2, 3 e 4. Assim temos que:

  $p_Y(1) = p(1,1) + p(2,1) + p(3,1) = 0{,}40$

  $p_Y(2) = p(1,2) + p(2,2) + p(3,2) = 0{,}25$

  $p_Y(3) = p(1,3) + p(2,3) + p(3,3) = 0{,}20$

  $p_Y(4) = p(1,4) + p(2,4) + p(3,4) = 0{,}15$

y	1	2	3	4
$p_Y(y)$	0,40	0,25	0,20	0,15

Fdp conjunta para duas va's contínuas

- A probabilidade de o valor observado de uma va contínua X estar em um intervalo é obtido através da integração da função de densidade de probabilidade (fdp), f(x), no intervalo especificado
- Quando estamos tratando de duas va's conjuntamente temos um tratamento similar dados pela **função de densidade de probabilidade conjunta**

Fdp conjunta para duas va's contínuas

- **Definição:**

  Sejam X e Y duas va's contínuas. Então *f(x,y)* é a **função de densidade de probabilidade conjunta** de X e Y, se para qualquer conjunto bidimensional *A* temos que:

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Fdp conjunta para duas va's contínuas

- **Definição (continuação):**

  Em particular, se *A* for o retângulo bidimensional {(x,y): a≤x ≤b, c ≤y ≤d}, então:

$$P[(X,Y) \in A]$$
$$= P(a \le X \le b, c \le Y \le d)$$
$$= \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

Fdp conjunta para duas va’s contínuas

- Exemplo: Uma lanchonete oferece aos seus clientes a opção de comprar suas refeições pelo *drive-thru* ou da forma tradicional no guichê de atendimento. Assuma que X e Y consistem em va’s representando a proporção de tempo em que o *drive-thru* e o guichê estão em uso, respectivamente. Suponha que a fdp conjunta seja dada por

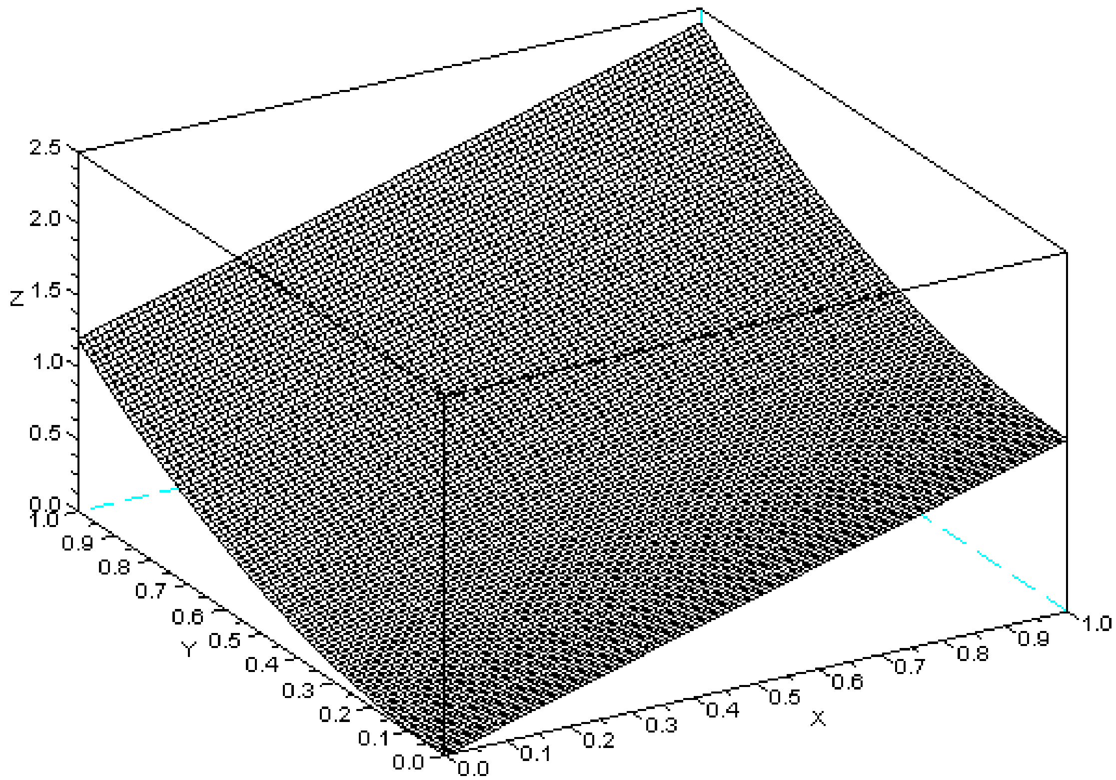
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Fdp conjunta para duas va's contínuas

- Exemplo (continuação): Mostre que essa função é realmente uma fdp (probabilidade do espaço amostral é 1). Calcule a probabilidade de nenhuma das instalações estarem ocupadas em mais de um quarto do tempo.

Fdp conjunta para duas va’s contínuas

- Exemplo (continuação): A função desta questão pode ser visualizada na figura abaixo



Fdp conjunta para duas va's contínuas

- Exemplo (continuação): Para provar que essa função é realmente uma fdp conjunta devemos integrar no espaço dos reais

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{6x}{5}dxdy + \int_0^1\int_0^1 \frac{6y^2}{5}dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{6x^2}{10}\bigg|_0^1\right)dy + \int_0^1 \left(\frac{6y^2x}{5}\bigg|_0^1\right)dy$$

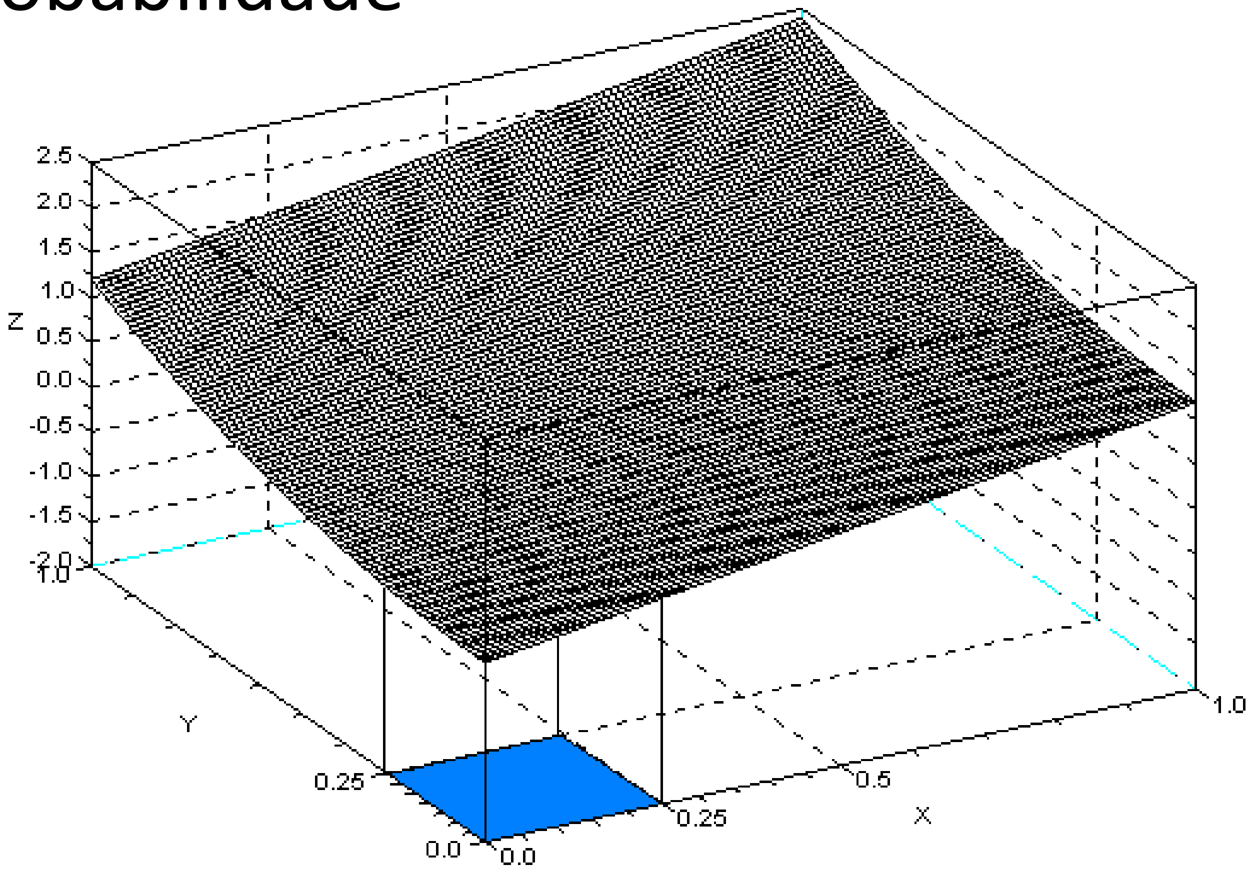
$$= \int_0^1 \frac{6}{10}dy + \int_0^1 \frac{6y^2}{5}dy = \frac{6y}{10}\bigg|_0^1 + \frac{6y^3}{15}\bigg|_0^1 = \frac{6}{10} + \frac{6}{15} = 1$$

Fdp conjunta para duas va’s contínuas

- Exemplo (continuação): A probabilidade de nenhuma das instalações estarem ocupadas em mais de um quarto do tempo pode ser representada por $P(0 \leq X \leq 0{,}25,\ 0 \leq Y \leq 0{,}25)$. Devemos portanto integrar a fdp conjunta nestes intervalos

Fdp conjunta para duas va's contínuas

- Exemplo (continuação): Ilustração do cálculo de probabilidade



Fdp conjunta para duas va's contínuas

- Exemplo (continuação): Temos então que

$$P(0 \leq X \leq 0{,}25, 0 \leq Y \leq 0{,}25)$$

$$= \int_0^{0,25}\int_0^{0,25} f(x,y)dxdy = \int_0^{0,25}\int_0^{0,25} \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{0,25}\int_0^{0,25} \frac{6x}{5}dxdy + \int_0^{0,25}\int_0^{0,25} \frac{6y^2}{5}dxdy$$

$$= \int_0^{0,25}\left(\frac{6x^2}{10}\bigg|_0^{0,25}\right)dy + \int_0^{0,25}\left(\frac{6y^2x}{5}\bigg|_0^{0,25}\right)dy$$

$$= \int_0^{0,25}\frac{6}{160}dy + \int_0^{0,25}\frac{6y^2}{20}dy = \frac{6y}{160}\bigg|_0^{0,25} + \frac{6y^3}{60}\bigg|_0^{0,25}$$

$$= \frac{6}{640} + \frac{6}{3840} = \frac{7}{640} = 0{,}0109$$

Fdp's marginais

- **Definição:**

  As **funções de densidade de probabilidade marginais** de X e de Y, representadas respectivamente por $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são dadas por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Fdp’s marginais

- Exemplo: Calcule as fdp’s marginais de X e Y considerando a fdp conjunta do exemplo anterior

Fdp's marginais

- Exemplo (continuação): Aplicando a definição temos:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)dy$$

$$= \frac{6}{5}\left(xy + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Fdp's marginais

- Exemplo (continuação): Aplicando a definição temos:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)dx$$

$$= \frac{6}{5}\left(\frac{x^2}{2} + y^2x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2} + y^2\right)$$

Va’s independentes

- **Definição:**

  Duas va’s X e Y são **independentes** se, para cada par de valores x e y,

$$p(x, y) = p_X(x).\, p_Y(y) \quad \forall x, y$$

quando X e Y são va’s **discretas**, ou

$$f(x, y) = f_X(x).\, f_Y(y) \quad \forall x, y$$

quando X e Y são va’s **contínuas**

Va’s independentes

- Exemplo: Verifique se as variáveis X e Y do primeiro exemplo desse módulo são independentes.

Va’s independentes

- Exemplo: Verifique se as variáveis X e Y do primeiro exemplo desse módulo são independentes.

  Naquele exemplo vimos que $p(1,1) = 0,20$. Vimos também que $p_X(1) = 0,45$ e $p_Y(1) = 0,40$. Como $p_X(1) \,.\, p_Y(1) = 0,18 \neq 0,20 = p(1,1)$ então as variáveis X e Y são **dependentes**.

Va's independentes

- Exemplo: Considere 2 lâmpadas de uma luminária. Seja X uma va do tempo de vida da primeira lampada e Y a va da segunda (ambas em horas). Sabendo que X e Y são independentes e que cada uma tenha distribuição exponencial com $\lambda=1$.

  a) qual a fdp conjunta de x e y?

  b) Qual a probabilidade de cada lampada durar 1000 horas? $p(x \leq 1 \text{ e } y \leq 1)$

Va's independentes

a) qual a fdp conjunta de x e y?

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = e^{-x} \cdot e^{-y} = e^{-x-y}$$

b) Qual a probabilidade de cada lâmpada durar 1 hora? p(x ≤1 e y ≤ 1) = ?

Va's independentes

a) qual a fdp conjunta de x e y?

$$f(x,\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f(x,y) = f(x)\cdot f(y) = e^{-x}\cdot e^{-y} = e^{-x-y}$$

b) Qual a probabilidade de cada lâmpada durar 1 hora? p(x ≤1 e y ≤ 1) = 0,4

Generalização: várias va's

- **Definição:**

  Seja X_1, X_2, ..., X_n va's discretas, a fmp conjunta das variáveis é a função:

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n)$$

  Caso essas va's sejam contínuas fdp conjunta para os intervalos $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$ é dada por:

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \cdots, a_n \leq X_n \leq b_n)$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Generalização: várias va's

- **Definição**:

  As va's X_1, X_2, ..., X_n são **independentes** se para cada subconjunto X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{ik} das variáveis (cada par, cada trio e assim por diante), a fmp ou fdp conjuntas do subconjunto for igual ao produto das fdp's ou fmp's marginais.

Distribuições condicionais

- **Definição**:

  Sejam X e Y duas va's contínuas com fdp conjunta f(x,y) e fdp marginal de X, $f_X(x)$. Então, para qualquer valor x de X para o qual $f_X(x) > 0$, a função de densidade de probabilidade condicional de Y dado que X = x é:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad -\infty < y < \infty$$

  Se X e Y forem discretas, substituir as fdp's por fmp's nesta definição fornecerá a função de massa de probabilidade condicional de Y quando X = x.

Distribuições condicionais

- Exemplo: Considere o terceiro exemplo deste módulo. Calcule a fdp condicional de Y dado que X = 0,8. Calcule também a probabilidade de Y ≤ 0,5 dado que X = 0,8.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{6}{5}\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Distribuições condicionais

- Exemplo (continuação):

$$f_{Y|X}(y|0{,}8) = \frac{f(0{,}8\,,y)}{f_X(0{,}8)} = \frac{1{,}2(0{,}8+y^2)}{1{,}2(0{,}8)+0{,}4}$$

$$= \frac{1}{34}(24+30y^2) \quad 0 \le y \le 1$$

$$P(Y \le 0{,}5|X=0{,}8) = \int_{-\infty}^{0{,}5} f_{Y|X}(y|0{,}8)dy$$

$$= \int_{0}^{0{,}5} \frac{1}{34}(24+30y^2)dy = 0{,}390$$

Sugestão de exercícios

- Capítulo 5 (Livro: Probabilidade e Estatística para engenharia e ciências; Autor: Jay L. Devore)
  - Seção 5.1 – 1,2, 3, 4,5,6,7,8,9,10,11, 12,13,14,16,18,19,20.
  - Exercícios suplementares – 75-a) e b), 77-b)