UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
Campus de Sobral
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Variáveis Complexas SBL0095
Prof. Ailton Campos
Data: 23/05/2022 Período: 2023.1

Nome:____

3ª Lista de Exercícios

1. Fazer todos os exercícios ímpares do capítulo 4 (Integrais) do livro texto.

2. Seja $u(x,y)$ uma função harmônica numa região R, uma função $v(x,y)$ de modo que $f = u + iv$ seja analítica em R é chamada a função **harmônica conjugada** da função u e é determinada pelas equações de Cauchy-Riemann. De fato, u e v devem satisfazer

$$v_y = u_x \text{ e } v_x = -u_y.$$

Resolva os seguintes itens.

   a) Sendo $f = u + iv$ uma função analítica numa região R, mostre que u é conjugada harmônica de $-v$.
   b) Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo plano. Determine sua conjugada v e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.

3. Integrar as seguintes funções sobre o caminho circular dado por $|z| = 3$ orientado no sentido positivo:

   a) $\mathrm{Log}(z - 4i)$.
   b) $\dfrac{1}{z-1}$.
   c) O valor principal de i^{z-3}.

4. **(O índice de uma curva)** Suponha que $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ é uma curva suave fechada que não passa pela origem. Definimos o *winding number* ou o índice da curva γ (em torno de 0) como

$$w(\gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt.$$

   a) Use o fato que $\exp(2\pi i a) = 1$ se, e somente se $a \in \mathbb{Z}$, para mostrar que $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$, prosseguindo da seguinte forma. Defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ por

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}ds\right), \; t \in [0,1].$$

   Para mostrar que $w(\gamma) \in \mathbb{Z}$, basta provar que $\varphi(1) = 1$. Para tanto, calcule $\varphi'(t)$ e use esta expressão para mostrar que φ/γ é constante em $[0,1]$. Use este fato para concluir que $\varphi(1) = 1$.
   b) Calcule o índice de $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0,1]$.
   c) Seja $m \in \mathbb{N}$. Calcule o índice de $\gamma_m : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_m(t) = \exp(2\pi i m t)$, $t \in [0,1]$.

5. Calcule as integrais dadas.

   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i2t}dt$.
   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}dt$ $(\mathrm{Re}z > 0)$.

6. Calcule as seguintes integrais curvilíneas.

   a) $\int_C (z-1)dz$, onde C é o caminho semicircular $z = 1 + e^{i\theta}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

   b) $\int_C \frac{z+2}{z}dz$, onde C é o caminho circular $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

   c) $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$, onde γ é o círculo unitário centrado na origem e orientado negativamente.

   d) $\int_\gamma (\overline{z} + z^2\overline{z})dz$, onde γ é o quadrado unitário de lado 2 centrado na origem e orientado positivamente.

   e) $\int_\gamma \frac{z}{8+z^2}dz$, onde γ é o triângulo com vértices $1, i, -i$ e orientado negativamente.

   f) $\int_\gamma \frac{\overline{z}}{8+z}dz$, onde γ é o retângulo com vértices $\pm 3, \pm i$ e orientado positivamente.

7. Use a fórmula integral de Cauchy para calcular as integrais.

   a) $\int_C \frac{z^2+1}{z+2}dz$, onde C é o caminho circular $|z| = 3$.

   b) $\int_C \frac{\cos\ z}{z(z^2+8)}dz$, onde C é a fronteira orientada positivamente do quadrado de lados delimitados pelas retas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$.

   c) $\int_\gamma \frac{\exp z}{z-1}dz$, onde γ é o círculo $|z| = 2$ orientado negativamente.

   d) $\int_\gamma \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$, onde γ é o círculo $|z+1| = 1$ orientado negativamente.

8. **(O ramo principal da função z^c).** A equação V.P.$z^c = e^{c\mathrm{Log} z}$ também serve para definir o **ramo principal** da função z^c no domínio $|z| > 0$, $-\pi < \mathrm{Arg}\ z < \pi$.

   Usando o ramo principal da função potência $f(z) = z^{-1+i}$ calcule a integral

$$I = \int_C z^{-1+i}dz$$

   onde C é o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqq \theta \leqslant \pi$ em torno da origem e orientado positivamente.

Bom Trabalho!!!