Álgebra Linear

Fco. Leonardo Bezerra M.

2019.1

(leonardobluesummers@gmail.com)

Aulas 3, 4 e 5

Sistemas de Equações Lineares
(SEL)

Introdução

- Na resolução de sistemas lineares por escalonamento, podemos apenas efetuar 3 operações:
    1) Multiplicar uma equação por um número diferente de zero;
    2) Adicionar (ou subtrair) uma equação à outra;
    3) Permutar duas equações;

- Essas operações num sistema produzem sempre sistemas com um mesmo conjunto solução.

$$\text{(I)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1') \\ 0x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 & (2') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3') \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1'') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2'') \\ 0x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 4 & (3'') \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$
\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1''') \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2''') \\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (3''') \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}
$$

$$
\text{(V)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{3} & (1^{iv}) \\ 0x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{2}{3} & (2^{iv}) \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 & (3^{iv}) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{(IV)}\quad \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -2 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

Sistemas e Matrizes

- Um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais.

- Uma solução desse sistema é um conjunto de números (x_1, x_2, ..., x_n) que satisfaça simultaneamente estas *m* equações.

- Escrevendo o sistema na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- Ou **A • X = B**.

- Outra matriz que podemos associar é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- A qual chamamos de *matriz ampliada* do sistema.

Operações Elementares

i) Permuta das *i*-ésima e *j*-ésima linhas. ($L_i \longleftrightarrow L_j$)

Exemplo: $L_2 \longrightarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não nulo k.
$(L_i \longrightarrow kL_i)$

Exemplo: $L_2 \longrightarrow -3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha. $(L_i \longrightarrow L_i + kL_j)$

Exemplo: $L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se **A** e **B** são matrizes *m x n*, dizemos que **B** é *linha equivalente* de **A** se **B** for obtida de operações elementares de **A**. Notação: **A** → **B** ou **A ~ B**.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ é linha equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 4L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 3L_1]{}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to -1L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 4L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método Escada

2.4.1 Definição: Uma matriz $m \times n$ é *linha reduzida à forma escada* se

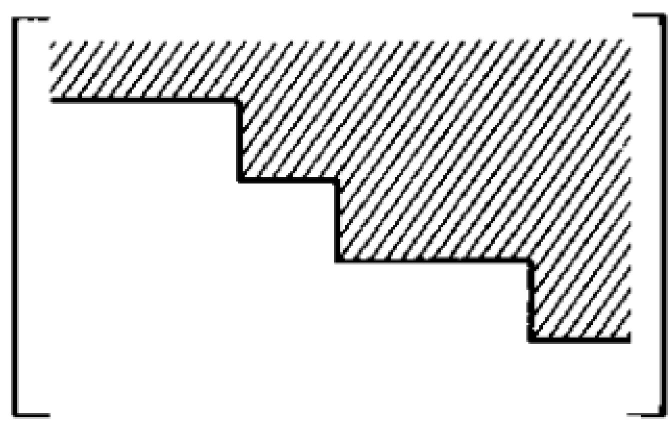
a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.

b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo).

d) Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Esta última condição impõe a forma escada à matriz:



- **Teorema:** Toda matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única *matriz-linha reduzida a forma escada*.

- **Definição:** Dada uma matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$, seja $\mathbf{B}_{m \times n}$ a *matriz-linha reduzida a forma escada* equivalente à **A**. O *posto* de **A**, denotado por *p*, é o número de linhas não nulas de **B**. A nulidade de **A** é o número $n - p$.

Exemplo 1: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de **A**, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações com matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

O posto de **A** é 3 e a nulidade de **A** é $4 - 3 = 1$.

Exemplo 2: Desejamos encontrar o posto e a nulidade de **B**, onde

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$$

Assim, efetuamos as seguintes operações matriciais:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O posto de **B** é 2, e a nulidade é 1.

Soluções de um SEL

Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita

$$ax = b$$

existirão três possibilidades:

i) $a \neq 0$. Neste caso a equação tem uma única solução

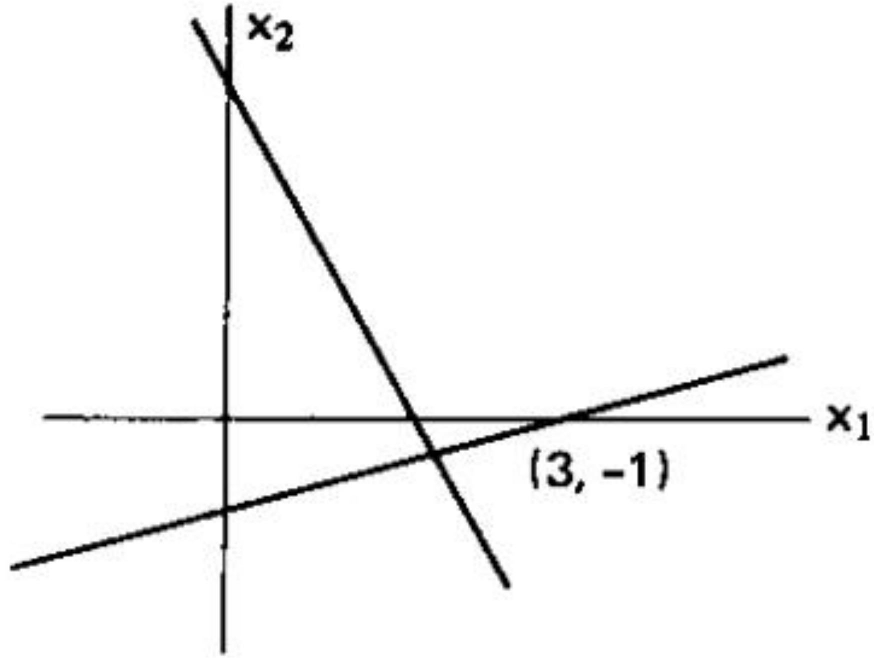
$$x = \frac{b}{a}$$

ii) $a = 0$ e $b = 0$. Então temos $0x = 0$ e qualquer número real será solução da equação.

iii) $a = 0$ e $b \neq 0$. Temos $0x = b$.
Não existe solução para esta equação.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$



A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$.

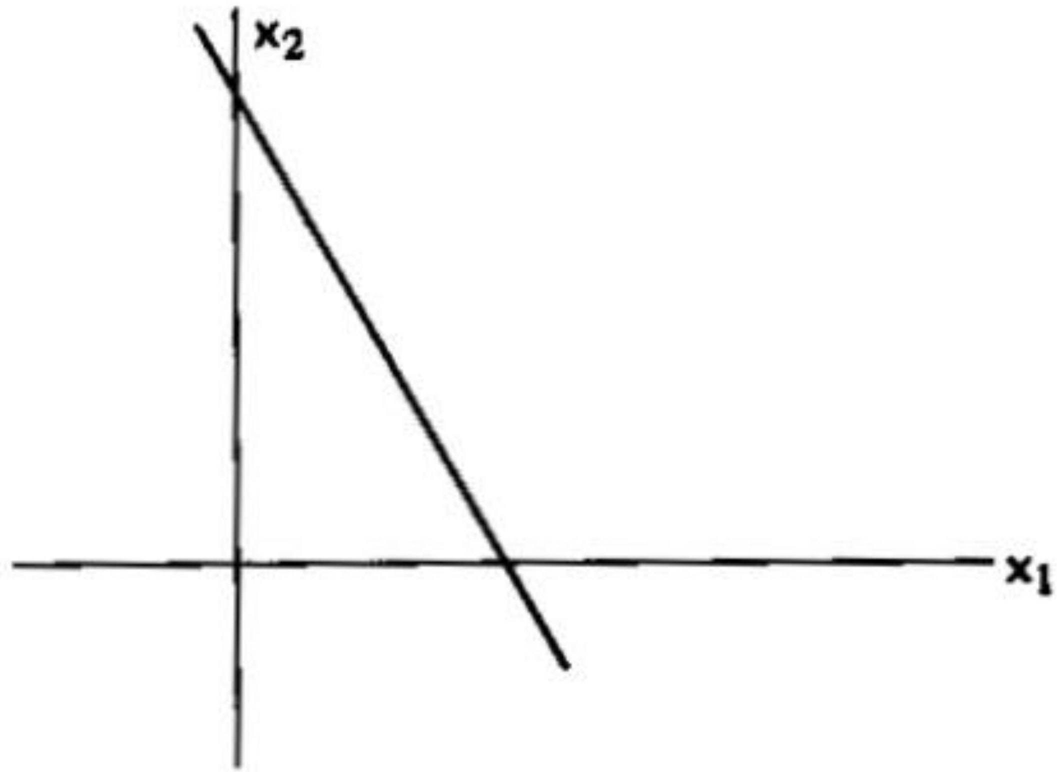
A matriz-linha reduzida à forma escada é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

O posto da matriz dos coeficientes do sistema reduzido

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e o da matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é 2.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases}$$

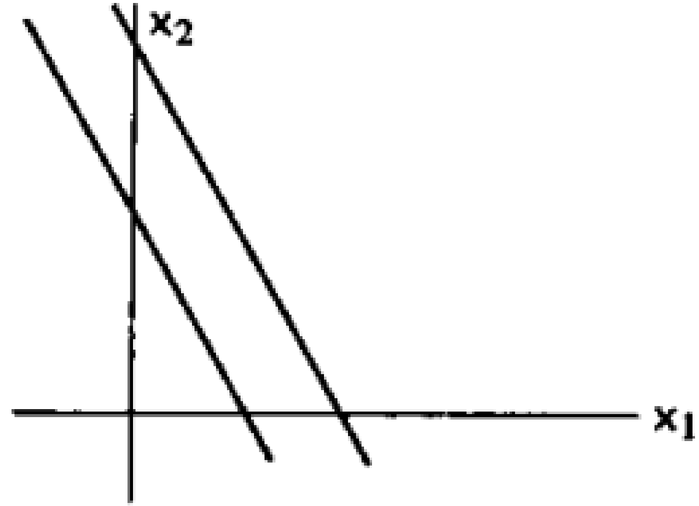


Neste caso, vemos geometricamente que qualquer ponto de uma das retas é solução deste sistema. A matriz ampliada do sistema e a matriz reduzida por linhas à forma escada são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$



A matriz ampliada deste sistema $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

é equivalente à matriz-linha reduzida à forma escada $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Não existe nenhum valor de x_1 ou x_2
capaz de satisfazer a segunda equação.
Assim, o sistema inicial não tem solução.

Observe que o posto da matriz dos coeficientes do sistema inicial é 1 e o posto de sua matriz ampliada é 2.

Caso Geral: Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, ..., x_n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Este sistema poderá ter

i) uma única solução: $\begin{cases} x_1 = k_1 \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = k_n \end{cases}$ sistema *possível determinado*

ii) infinitas soluções: sistema *possível indeterminado*

iii) nenhuma solução: sistema *impossível*

➢ Resumindo:

1. Um sistema de *m* equações e *n* incógnitas **admite solução se**, e somente se, **o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes**.
2. Se as duas matrizes tem o **mesmo posto** p, e $p = n$, a **solução** será **única**.
3. Se as duas matrizes tem o **mesmo posto** p, e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.
4. Se o **posto** da matriz **ampliada** é **maior** que o **posto** da matriz dos **coeficientes** então o sistema **não admite soluções**.

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a = 3$$

$m = 3$, $n = 3$ e $p = 3$.

Então, a solução é única e $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 2$.

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad p_c = p_a = 2$$

$m = 2$, $n = 3$ e $p = 2$. Temos um grau de liberdade: $x_1 = -10 - 7x_3$ e $x_2 = -6 - 5x_3$.

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$m = 3$, $n = 3$, $p_c = 2$ e $p_a = 3$.

O sistema é impossível e, portanto, não existe solução.

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad p_c = p_a = 2$$

$m = 3$, $n = 4$ e $p = 2$. Temos dois graus de liberdade: $x_1 = -10 + 10x_3 + 2x_4$ e $x_2 = 4 - 7x_3 - x_4$.

SPI

- Na determinação do conjunto solução de sistemas do tipo SPI devemos:
  1. Resolver o sistema pelo método escada;
  2. Reescrever as equações independentes como funções de uma ou mais variáveis livres (igual ao grau de liberdade: $n - p$);
  3. Reescrever o sistema na forma matricial e determinar as soluções básicas do sistema (e, assim o conjunto (intervalo) solução completo).

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada, associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

que, reduzida à forma escada, dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ou seja, z é uma variável livre

se tornarmos $z = \lambda$, teremos

$$\begin{cases} x - \lambda = 0 \\ y - \frac{1}{2}\lambda = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

A matriz associada ao sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que reduzida à forma escada fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que z e t são variáveis livres

Chamando $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$ obtemos:

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[-5\ 2\ 1\ 0]'$ e $[1\ -1\ 0\ 1]'$ são soluções do sistema obtidas da seguinte forma:

a primeira, fazendo $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$,

e a segunda, fazendo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

Elas são chamadas *soluções básicas* do sistema

A solução será uma soma destas soluções multiplicadas por constantes.

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

que reduzida torna-se $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y e z são variáveis livres

Fazendo $y = \lambda_1$ e $z = \lambda_2$, temos

$$\begin{aligned} x &= -3\lambda_1 - \lambda_2 \\ y &= \lambda_1 \\ z &= \lambda_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As soluções básicas são então:

$x = -3$, $y = 1$, $z = 0$ e $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases}$$

A matriz associada é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

que reduzida à forma escada torna-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

z e t são livres.

Fazendo $z = \lambda_1$ e $t = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= -5\lambda_1 + \lambda_2 + 3 \\ y &= 2\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \\ z &= \lambda_1 \\ t &= \lambda_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Páginas 49-58, exercícios 1 a 4, 6, 8, 10, 11, 13, 16, 19, 20, 23.

BIBLIOGRAFIA

BOLDRINI, José Luiz et al. **Álgebra linear**. Harper & Row, 1980.