Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral

Cálculo Diferencial e Integral II – 2021.1 (SBL0058)
Prof. Rui F. Vigelis

3a Avaliação Progressiva

Nome:____

1. Usando a Regra de L'Hôpital, encontre o valor dos limites:

(a) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x^2}$;

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0}\exp(\ln((1+x^2)^{1/x^2}))\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)\\ &\overset{(*)}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\right)\\ &= \exp(1) = e\end{aligned}$$

$$(*) \Leftarrow \begin{cases} \text{(i)}\ \ln(1+x^2) \text{ e } x^2 \text{ são deriváveis em } (-1,1)\\ \text{(ii)}\ 2x \neq 0 \text{ em } (-1,1)\setminus\{0\}\\ \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\ln(1+x^2) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} x^2 = 0\end{cases}$$

(b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} &\overset{(*)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}\\ &= 3\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1/3}}\\ &= 3\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

$$(*) \Leftarrow \begin{cases} \text{(i)}\ \ln x \text{ e } \sqrt[3]{x} \text{ são deriváveis em } (0,\infty)\\ \text{(ii)}\ \dfrac{1}{3}x^{-2/3} \neq 0 \text{ em } (0,\infty)\\ \text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \text{ e } \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty\end{cases}$$

2. Encontre o valor das integrais impróprias:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx;$

$$u = 1 - x \Rightarrow du = -dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}}(-du)\\ &= -2\sqrt{u} + C\\ &= -2\sqrt{1-x} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_{a}^{0}\\ &= \lim_{a\to-\infty}(-2 + 2\sqrt{1-a})\\ &= \infty\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx.$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{-x^2}dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx\\ &= \lim_{a\to-\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_{0}^{b}\\ &= \lim_{a\to-\infty}\Big[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-a^2}\Big] + \lim_{b\to\infty}\Big[-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}\Big]\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0\end{aligned}$$

3. Calcule a área da região delimitada pela curva $r = 3\,\mathrm{sen}(2\theta)$.

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}[3\,\mathrm{sen}(2\theta)]^2 d\theta\\ &= \frac{9}{2}\int_{0}^{2\pi}\frac{1-\cos(4\theta)}{2}d\theta\\ &= \frac{9}{4}\Big[\theta - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4\theta)\Big]_{0}^{2\pi}\\ &= \frac{9\pi}{2}\end{aligned}$$

4. Calcule o volume do sólido gerado, pela rotação em torno do eixo $y = -1$, da região delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x/2$.

$$\sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 4$$

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^4 \left[(1+\sqrt{x})^2 - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2\right] dx \\
&= \pi \int_0^4 \left[(1+2x^{1/2}+x) - \left(1+x+\frac{x^2}{4}\right)\right] dx \\
&= \pi \int_0^4 \left(2x^{1/2} - \frac{x^2}{4}\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 \\
&= \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}
$$

5. Calcule o volume do sólido gerado, pela rotação em torno do eixo $y = -2$, da região delimitada pela curva $x = (y-2)^2$, e pela reta $y = x$.

$$
y = (y-2)^2 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } 4
$$

$$
\begin{aligned}
A(y) &= 2\pi \cdot \text{raio} \cdot \text{altura} \\
&= 2\pi(y+2)(y-(y-2)^2) \\
&= 2\pi(-y^3 + 3y^2 + 6y - 8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \int_1^4 A(y)dy \\
&= 2\pi \int_1^4 (-y^3 + 3y^2 + 6y - 8)dy \\
&= 2\pi \left[-\frac{y^4}{4} + y^3 + 3y^2 - 8y\right]_1^4 \\
&= 2\pi \cdot 16 = 32\pi
\end{aligned}
$$

6. Ache o comprimento de arco da curva $y = \ln(\sec x)$ do ponto em que $x = 0$ ao ponto em que $x = \pi/4$.

$$
y = \ln(\sec x) \Rightarrow y' = \operatorname{tg} x
$$

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \sec x dx \\
&= \Big[\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|\Big]_0^{\pi/4} \\
&= \ln(\sqrt{2} + 1)
\end{aligned}
$$