Representações de Fourier

Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre R. Fernandes

Agenda

I. Por que usar representações de Fourier?

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

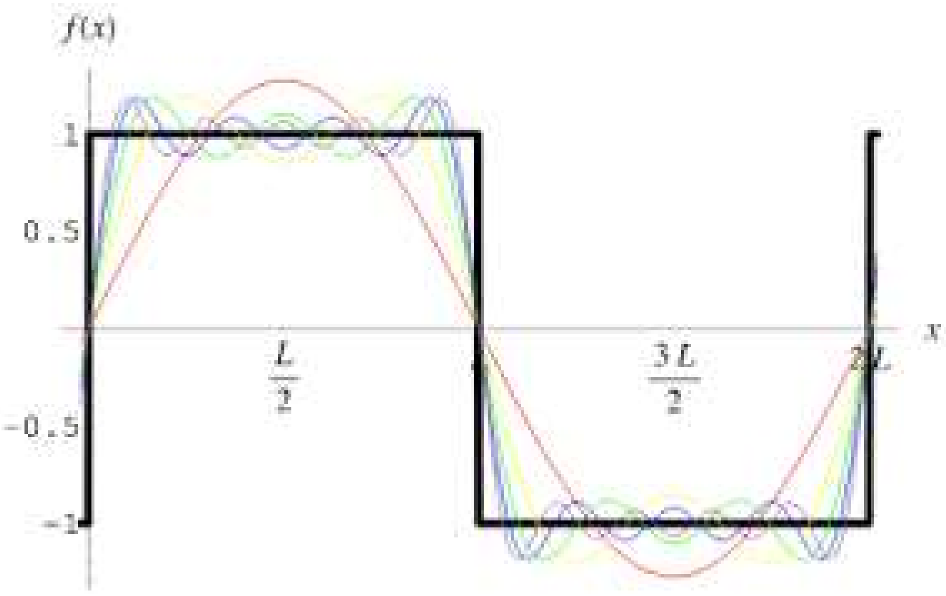
III. Série de Fourier de Tempo Contínuo

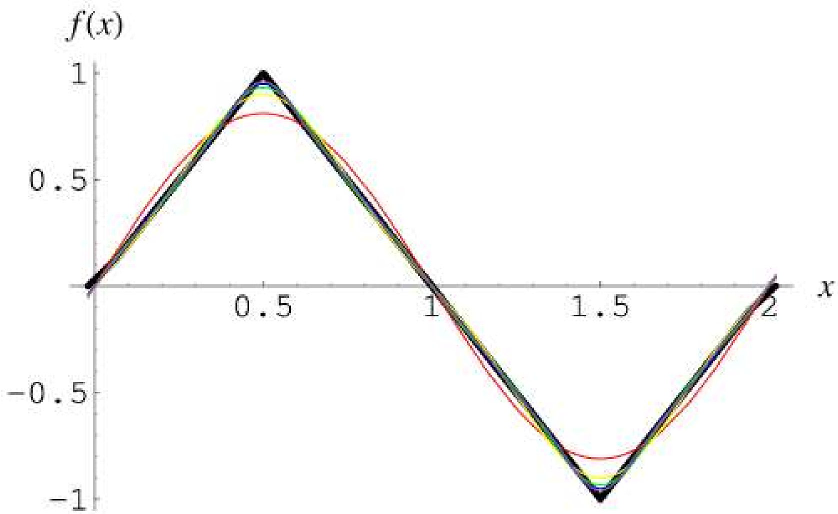
I.Por que usar representações de Fourier?

- O que é Transformada e Série de Fourier?
  - Expressam sinais como uma soma (ponderada) de exponenciais complexas unitárias.
  - Decomposição de um sinal em uma base de exponenciais complexas unitárias.
  - Exponenciais complexas unitárias são compostas de senos e cossenos.

I.Por que usar representações de Fourier?

- O que é Transformada e Série de Fourier?
  - Vídeos ilustrativos:
    - https://www.instagram.com/reel/CXthXUXp_O2/
    - https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM





I.Por que usar representações de Fourier?

- Por que usar exponenciais complexas unitárias/senos e cossenos?
  - Exponenciais complexas formam uma base ortogonal (isto simplifica muita coisa!).
  - Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT (convolução vira um produto no domínio da frequência!)
  - Exponenciais complexas unitárias, senos e cossenos são usadas para modelar matematicamente ondas eletromagnéticas e mecânicas.

I. Por que usar representações de Fourier?

- Por que usar exponenciais complexas unitárias/senos e cossenos?
  - Em diversos tipos de sinais (áudio, imagem etc), senos e cossenos possuem significado físico muito relevante:
    - Áudio: senos e cossenos representam notas musicais (frequências fundamentais)
    - Ondas eletromagnéticas visíveis: senos e cossenos representam cores

I.Por que usar representações de Fourier?

- Por que usar exponenciais complexas unitárias/senos e cossenos?
  - Um grande número de sinais podem ser expressos pela Transformada/Série de Fourier
  - Aplicações em vários ramos da engenharia e da ciência
  - Possui propriedades interessantes (e.g. linearidade, teorema da convolução)

I. Por que usar representações de Fourier?

- Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT:

  - Saída de um sistema quando a entrada é uma exponencial complexa unitária (caso discreto):

$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)}$$

I. Por que usar representações de Fourier?

- Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k} \\
&= H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}
\end{aligned}
$$

$$
H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k}
$$

- Saída do sistema é igual à entrada vezes uma constante (que depende de ômega).

$$
e^{j\Omega n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n}
$$

I. Por que usar representações de Fourier?

- Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT:

  - Saída de um sistema quando a entrada é uma exponencial complexa unitária (caso contínuo):

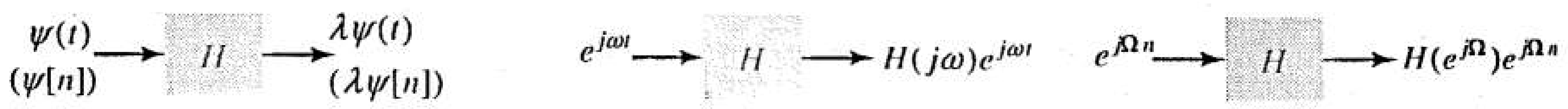
$$x(t) = e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= H(j\omega) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

I. Por que usar representações de Fourier?

- Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT:
  - Saída do sistema também é igual à entrada vezes uma constante (que depende de ômega).



  - Analogia com álgebra linear: autovetores e autovalores.
  - Se a entradas é uma exponenciais complexas, os SLIT se comportam de forma simples.

I. Por que usar representações de Fourier?

- Tanto $H(e^{j\Omega})$ quanto $H(j\omega)$ são chamadas de resposta em frequência.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k}$$

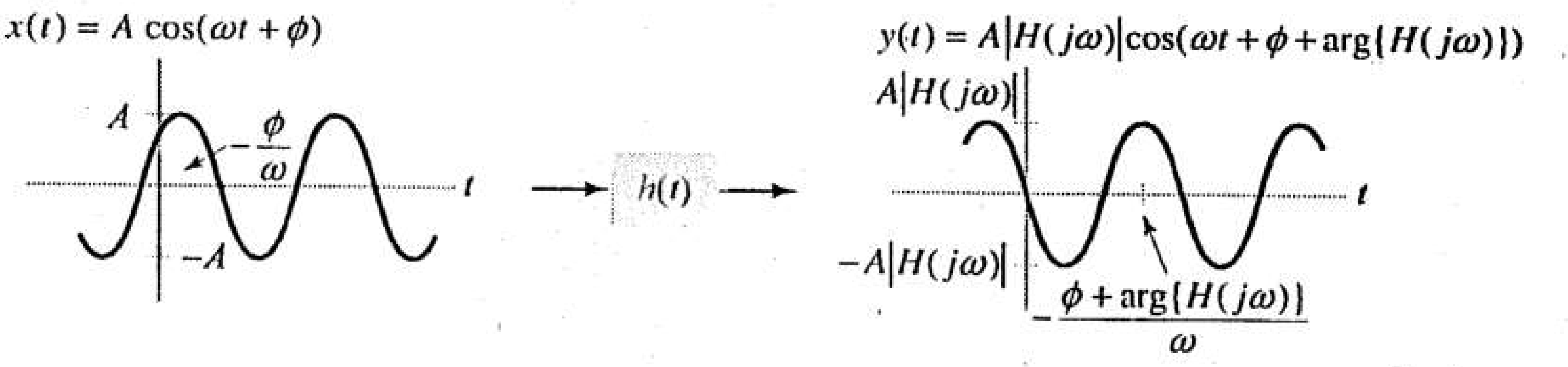
- Elas são a resposta (ganho) que o sistema dá à exponencial complexa de uma certa frequência.

$$y(t) = \left| H(j\omega) \right| e^{j(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})}$$

I. Por que usar representações de Fourier?

- Resposta em frequência: ganho em amplitude e deslocamento da fase inicial.

$$y(t) = \left| H(j\omega) \right| e^{j(\omega t + \arg\{H(j\omega)\})}$$



- Resposta em frequência é complexa (mesmo se a resposta ao impulso é real).

I. Por que usar representações de Fourier?

- Vimos que, no caso de entradas iguais a exponenciais complexas, os SLIT se comportam de forma simples.

- Este resultados pode ser estendido para uma soma de exponenciais complexas:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\omega_k t} \qquad y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

- Operação de convolução torna-se uma multiplicação:

$$h(t) * x(t) \longrightarrow a_k H(j\omega_k)$$

- O resultado acima também vale pro caso discreto.

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Representações de Fourier para quatro tipos de sinais

Propriedade de Tempo	*Periódica*	*Não Periódica*
Contínuo	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreto	Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- <u>**1º caso: sinal PERIÓDICO e DISCRETO NO TEMPO**</u>

- Ideia básica: representar um sinal discreto periódico (de período N) como uma soma de exponencial complexas unitárias:

$$\hat{x}[n] = \sum_{k} A[k] e^{jk\Omega_o n}$$

$\Omega_o = 2\pi / N$ é a frequência fundamental.

- Neste caso, usamos a frequência fundamental e as frequência múltiplas desta (harmônicas).

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Lembrando: exponencial complexas unitárias discretas no tempo são periódicas na frequência:

$$
\begin{aligned}
e^{j(N+k)\Omega_o n} &= e^{jN\Omega_o n} e^{jk\Omega_o n} \\
&= e^{j2\pi n} e^{jk\Omega_o n} \\
&= e^{jk\Omega_o n}
\end{aligned}
$$

Ou seja, só precisamos usar N frequências: k=0,..,N-1 (ou k=-N/2,...,N/2-1)

$$
\hat{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_o n}
$$

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Como achar os coeficientes A[k] da série de Fourier?
  - Minimizando o erro quadrático médio (MSE) entre o sinal x[n] e a soma de exponencial complexas unitárias:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left| x[n] - \hat{x}[n] \right|^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \left| x[n] - \sum_{k=\langle N \rangle} A[k] e^{jk\Omega_o n} \right|^2$$

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Como achar os coeficientes A[k] da série de Fourier?
  - Derivação omitida para efeitos de simplificação:

$$A[k] = X[k]$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\, \Omega_o} X[k]$$

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n}$$

  - DTFS = discrete time Fourier series (série de Fourier discreta no tempo)

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Note que DTFS X[k] é complexa, mesmo x[n] sendo real.

- Qual é o significado disso?

  - A magnitude de X[k] representa a amplitude com a qual a exponencial complexa de frequência $k\Omega_o$ está presente em x[n].

  - A fase de X[k] representa a fase inicial com a qual a exponencial complexa de frequência $k\Omega_o$ está presente em x[n].

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

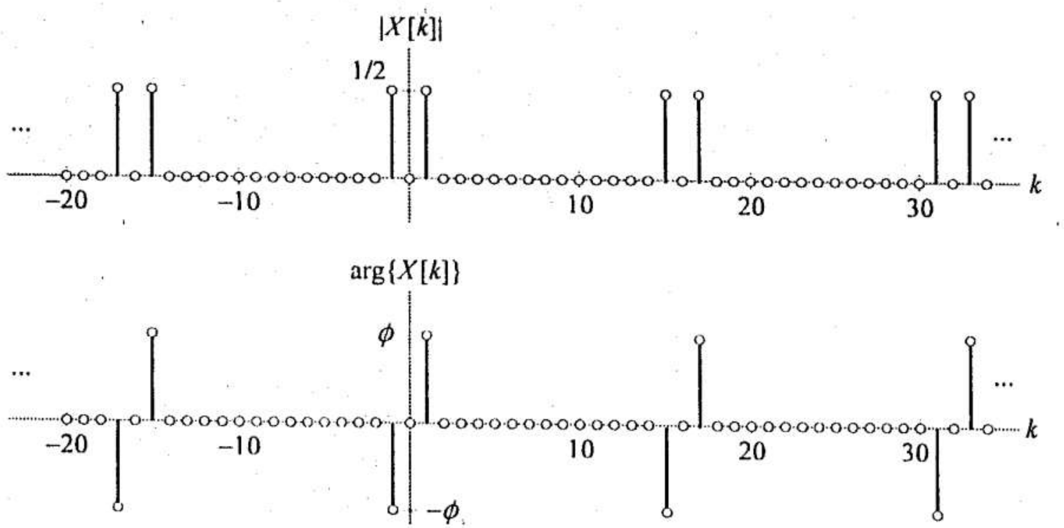
- Não há restrições para a representação da DTFS.
- Ou seja, qualquer sinal discreto e periódico pode ser expresso por uma DTFS.
- Exemplos:

EXEMPLO 3.1 Encontre a representação por DTFS para

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n + \phi\right)$$

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\,2\pi/16} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-j\phi}, & k=-1 \\ \frac{1}{2}e^{j\phi}, & k=1 \\ 0, & -7 \le k \le 8 \text{ e } k \ne \pm 1 \end{cases}$$



II. Série de Fourier de Tempo Discreto

▶ **Exercício 3.1** Determine os coeficientes da DTFS por inspeção para o sinal

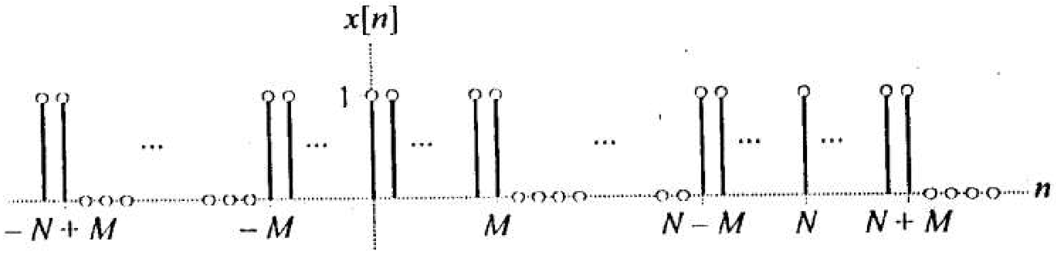
$$x[n] = 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{12}\pi n + \frac{3\pi}{8}\right)$$

Resposta:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\ 2\pi/24} X[k] = \begin{cases} -\dfrac{e^{-j(3\pi/8)}}{2j}, & k=-1 \\ 1, & k=0 \\ \dfrac{e^{j(3\pi/8)}}{2j}, & k=1 \\ 0 & \text{caso contrário para } -11 \leq k \leq 12 \end{cases}$$

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

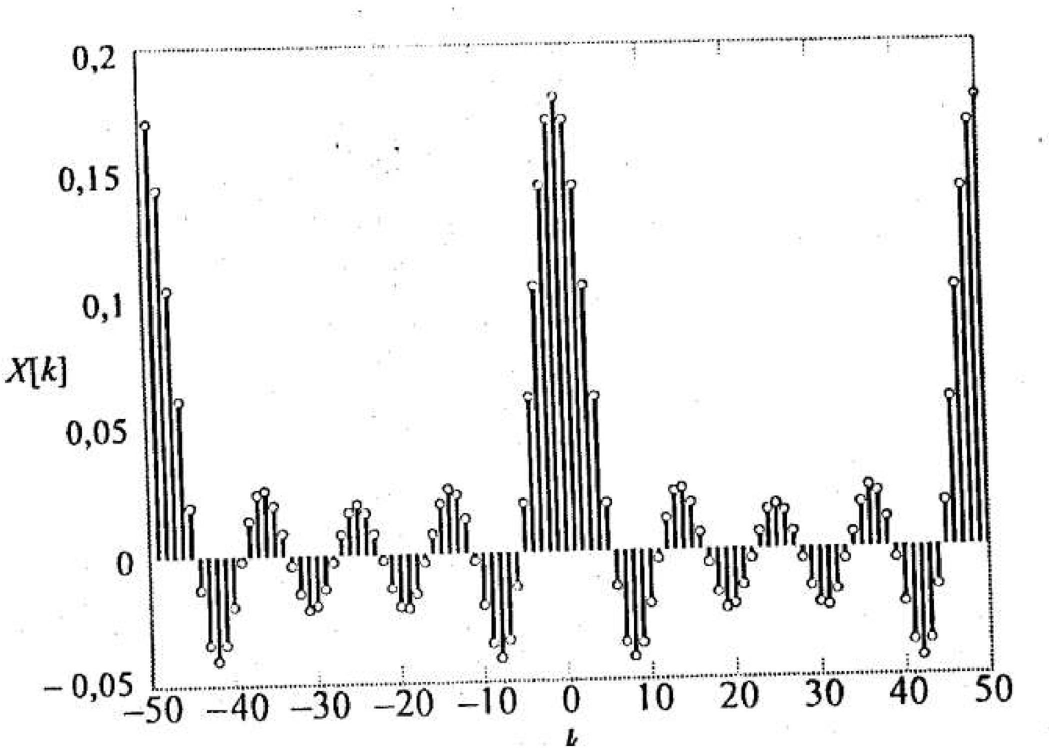
Exemplo 3.2 Encontre os coeficientes da DTFS para a onda quadrada com período N descrita na Figura 3.3.



$$X[k] = \begin{cases} \dfrac{1}{N} \dfrac{\operatorname{sen}\left(k \dfrac{\pi}{N}(2M+1)\right)}{\operatorname{sen}\left(k \dfrac{\pi}{N}\right)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \dfrac{2M+1}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \end{cases}$$

II. Série de Fourier de Tempo Discreto

Exemplo 3.2 Encontre os coeficientes da DTFS para a onda quadrada com período N descrita na Figura 3.3.

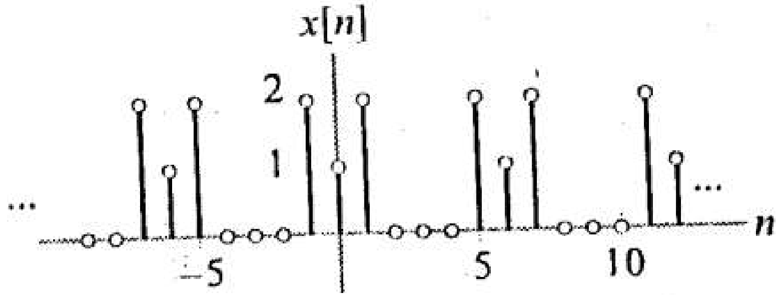


II. Série de Fourier de Tempo Discreto

Exercício 3.2 Determine os coeficientes da DTFS para o sinal periódico descrito na Figura 3.5.

Resposta:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\, 2\pi/6} X[k] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos k\frac{\pi}{3}$$



II. Série de Fourier de Tempo Discreto

- Exemplo – calcule a DTFS:

$$x[n] = \Sigma_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - 2m] + \delta[n + 3m]$$

- Exemplo – calcule x[n]:

$$X[k] = \Sigma_{m=-\infty}^{\infty} \delta[k - 2m] - 2\delta[k + 3m]$$

III. Série de Fourier de tempo contínuo

- **2º caso: sinal PERIÓDICO e CONTÍNUO NO TEMPO**

- Ideia básica: representar um sinal contínuo periódico (de período T) como uma soma de exponencial complexas unitárias:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$\omega_0 = 2\pi/T$ é a frequência fundamental.

- Usamos a frequência fundamental e as frequência múltiplas desta (harmônicas).

III. Série de Fourier de tempo contínuo

- No caso contínuo, a exponencial complexa unitária NÃO é periódicas na frequência.

- Ou seja, usamos todas as harmônicas possíveis.

- Como achar os coeficientes A[k] da série de Fourier?

- Demonstração no livro (pag. 179): $$A[m] = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} x(t)e^{-jm\omega_o t}\,dt$$

- Inversa da Série de Fourier.

III. Série de Fourier de tempo contínuo

- Resumo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\omega_o t}$$

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t)e^{-jk\omega_o t}\, dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_o} X[k]$$

III. Série de Fourier de tempo contínuo

- A FS X[k] é complexa, mesmo x(t) sendo real.
- Neste caso, a FS só existe se x(t) é integrável ao quadrado.
- Condição de existência da FS:

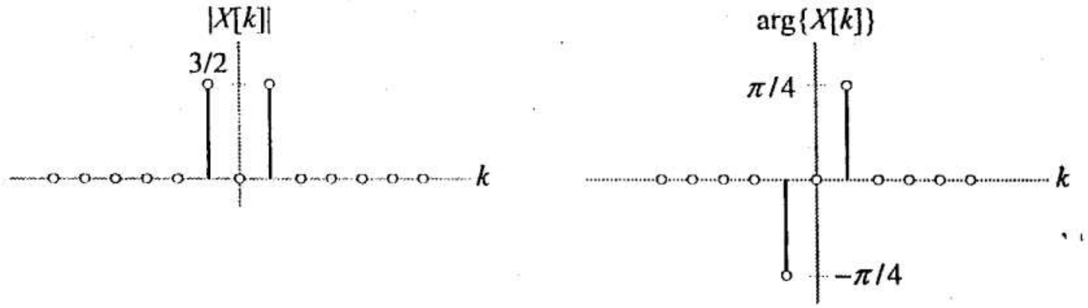
$$\frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle}|x(t)|^2\,dt<\infty$$

III. Série de Fourier de tempo contínuo

Exemplo 3.5 Determine a representação por FS para o sinal

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$X[k] = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4}, & k = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



III. Série de Fourier de tempo contínuo

▶ **Exercício 3.3** Determine a representação por FS para

$$x(t) = 2\,\text{sen}(2\pi t - 3) + \text{sen}(6\pi t)$$

Resposta:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS;\,2\pi} X[k] = \begin{cases} j/2, & k = -3 \\ je^{j3}, & k = -1 \\ -je^{-j3}, & k = 1 \\ -j/2 & k = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

III. Série de Fourier de tempo contínuo

Exemplo 3.6 Determine a representação por FS correspondente à onda quadrada da Figura 3.9.

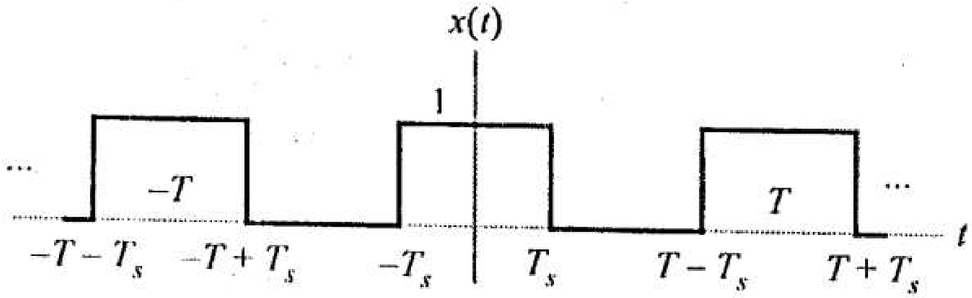
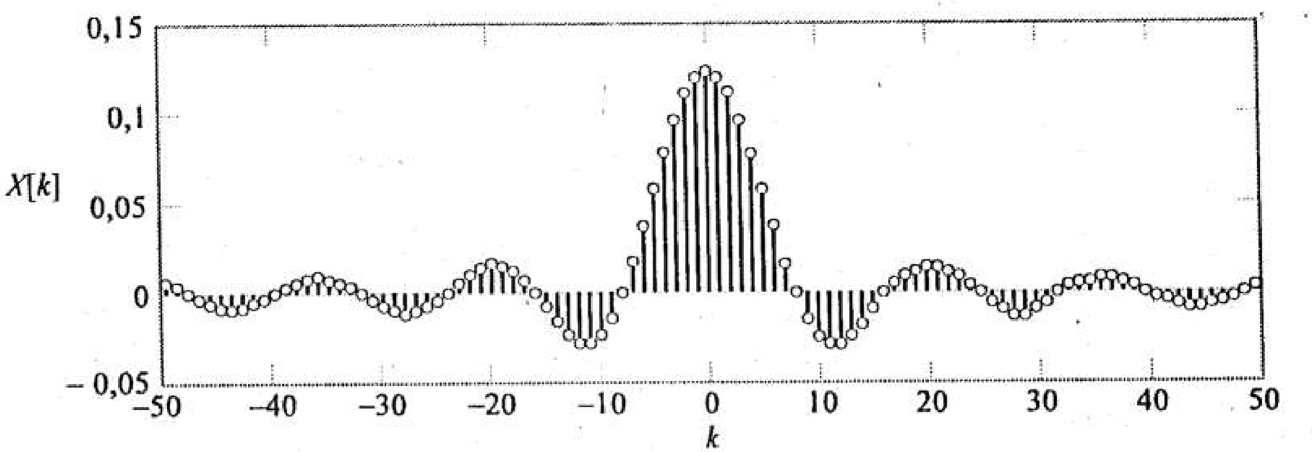


Figura 3.9 Onda quadrada correspondente ao Exemplo 3.6.

III. Série de Fourier de tempo contínuo

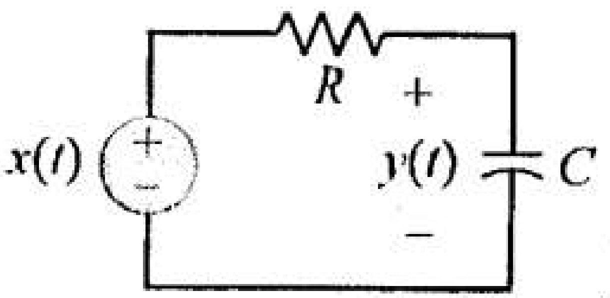
EXEMPLO 3.6 Determine a representação por FS correspondente à onda quadrada da Figura 3.9.

$$X[k] = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_o T_s)}{Tk\omega_o}$$



III. Série de Fourier de tempo contínuo

Exemplo 3.8 Aqui, desejamos encontrar a representação por FS para a saída, $y(t)$, do circuito RC descrito na Figura 3.14 em resposta à entrada de onda quadrada descrita na Figura 3.9, supondo $T_s/T = \frac{1}{4}$, $T = 1$ s, e $RC = 0{,}1$ s.



$$y(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_o} Y[k] = H(jk\omega_o)X[k]$$

$$Y[k] = \frac{10}{j2\pi k + 10}\,\frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi}$$

$$H(j\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

III. Série de Fourier de Tempo contínuo

- Exemplo – calcule a FS:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tfrac{1}{2}m) + \delta(t - \tfrac{3}{2}m)$$

- Exemplo – calcule x(t):

$$X[k] = j\delta[k-1] - j\delta[k+1] + \delta[k-3] + \delta[k+3], \quad \omega_o = \pi$$

III. Série de Fourier de tempo contínuo

Domínio de Tempo	Periódico
Contínuo	*Série de Fourier* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt$ $x(t)$ tem período T $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$
Discreto	*Série de Fourier de Tempo Discreto* $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n}$ $x[n]$ e $X[k]$ têm período N $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$
	Discreto

TABELA 3.3 ***Propriedades de Periodicidade das Representações de Fourier***

Propriedade no Domínio de Tempo	*Propriedade no Domínio de Freqüência*
Contínua	Não periódica
Discreta	Periódica

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Vamos voltar ao caso de sinais em tempo discreto x[n].

- Entretanto, considere agora que x[n] não é periódico (aperiódico).

- Não conseguiremos mais expressar x[n] como uma soma de um número finito de exponencial complexas unitárias.

- Teremos que usar todas as frequência disponíveis (entre 0 e 2pi ou -pi e pi).

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Transformada de Fourier em tempo discreto:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} \, d\Omega$$

- Diferença básica para a série de Fourier: somatório virou integral.

- Usa-se todas as frequências disponíveis.

- É como se a TF fosse a série de Fourier com N→ inf.

- Frequência fundamental $\Omega_o \to 0$.

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- TF e IF inversa:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$

- Eq. da TF: soma é para todos os valores de *n* e não apenas dentro de um período.
- Demonstração na pag. 188 do livro.

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- A Transformada de Fourier é, em geral, complexa:
  - Magnitude da TF: espectro de magnitude
  - Fase da TF: espectro de fase

- Qual é o significado disso?

  - O espectro de magnitude representa a amplitude com a qual a exponencial complexa de frequência Ω está presente em x[n].

  - O espectro de fase representa a fase inicial com a qual a exponencial complexa de frequência Ω está presente em x[n].

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Para a TF do sinal x[n] existir, as seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} | x[n] | < \infty.$$

- Ou seja, x[n] deve ser absolutamente somável.
- Demonstração:

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Note que a Resposta em Frequência (RF) é a TF da resposta ao impulso:

$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\Omega k}$$

- RF é uma forma de representar sistemas TI no domínio da frequência.

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

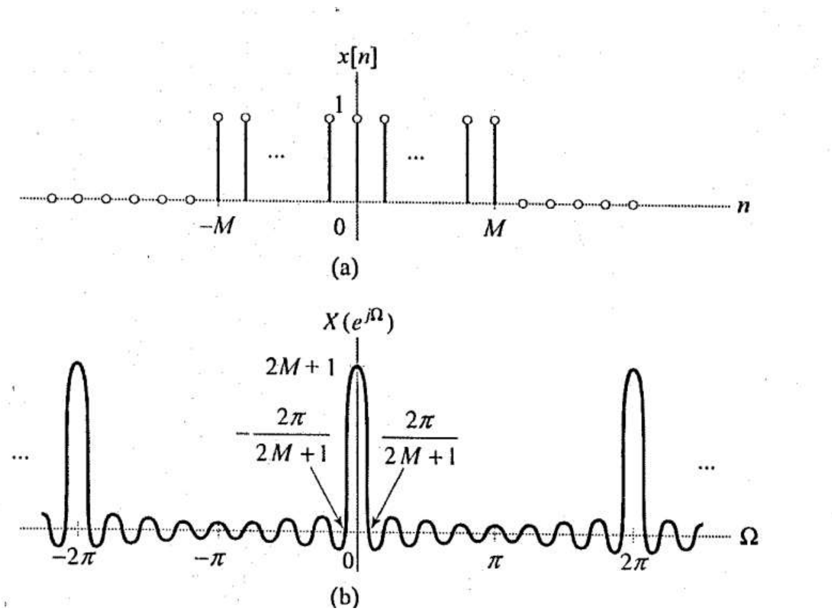
- Exemplos – calcule a TF:
  - $x[n] = a^n u[n]$, para $|a|<1$.
  - $x[n] = 2.\ 3^n u[-n]$
  - $x[n] = delta[n]$
  - $x[n] = delta[n-n_0]$

IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Exemplos – calcule a TF:

Exemplo 3.10 *Pulso retangular.* Admitamos que

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$



IV. Transformada de Fourier de tempo Discreto

- Exemplos – calcule a TF inversa:

$$X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega), -\pi < \Omega \leq \pi.$$

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

$$X(e^{j\Omega}) = 2\cos(2\Omega)$$

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

Tabela 3.1 *Relação Entre Propriedades de Tempo de um Sinal e a Representação de Fourier Apropriada*

Propriedade de Tempo	*Periódica*	*Não Periódica*
Contínuo	Série de Fourier (FS)	Transformada de Fourier (FT)
Discreto	Série de Fourier de Tempo Discreto (DTFS)	Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT)

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Vamos voltar ao caso de sinais em tempo contínuo x(t)

- Considere que x(t) não é periódico (aperiódico).

- Assim como no caso discreto e aperiódico, x(t) não pode ser expresso como soma de um número finito de exponencial complexas unitárias.

- Teremos que usar todas as frequência disponíveis.

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Transformada de Fourier e a sua inversa (tempo contínuo):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \, dt$$

- Ambas as eqs usam integrais: contínuo no tempo e na frequência
- Usa-se todas as frequências disponíveis (e não apenas de -pi a pi).

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- É como se a TF fosse a série de Fourier com T→ inf.
- Frequência fundamental $w_0 \rightarrow 0$.

Domínio de Tempo	*Periódico*	*Não periódico*	
Contínuo	*Série de Fourier* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_o t}$ $X[k] = \frac{1}{T}\int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_o t} dt$ $x(t)$ tem período T $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$	*Transformada de Fourier* $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	*Não periódico*
Discreto	*Série de Fourier de Tempo Discreto* $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_o n}$ $X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_o n}$ $x[n]$ e $X[k]$ têm período N $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$	*Transformada de Fourier de Tempo Discreto* $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$ $X(e^{j\Omega})$ tem período 2π	*Periódico*
	Discreto	*Contínuo*	*Domínio de Freqüência*

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Para a TF do sinal x(t) existir, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

- Ou seja, x[n] deve ser absolutamente somável.

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Note que a Resposta em Frequência (RF) é a TF da resposta ao impulso:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- RF é uma forma de representar sistemas TI no domínio da frequência.

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Exemplos – calcule a TF:
  - $x(t) = e^{-at}\, u(t)$
  - $x(t) = e^{-at}\, u(-t)$, para $a>0$
  - Pulso retangular no tempo: $$x(t) = \begin{cases} 1, & -T \le t \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$
  - Pulso retangular na frequência: $$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & -W \le \omega \le W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

V. Transformada de Fourier (tempo contínuo)

- Exemplos – calcule a TF:
  - $x(t) = \text{delta}(t-t_0)$
  - $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega).$

VI. Propriedades de Fourier

Tabela 3.3 ***Propriedades de Periodicidade das Representações de Fourier***

Propriedade no Domínio de Tempo	*Propriedade no Domínio de Freqüência*
Contínua	Não periódica
Discreta	Periódica
Periódica	Discreta
Não periódica	Contínua

VI. Propriedades de Fourier

- 1. Linearidade

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FS;\ \omega_o} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$$

$$z[n] = ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFS;\ \Omega_o} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

VI. Propriedades de Fourier

- 2. Simetria da Transformada e Série de Fourier
  - Caso de sinal PERIÓDICO e DISCRETO NO TEMPO
  - Propriedade muito importante da série de Fourier (para x[n] real):

$$X[-k] = X^*[k]$$

  - **Série de Fourier é conjugado-simétrica.**

VI. Propriedades de Fourier

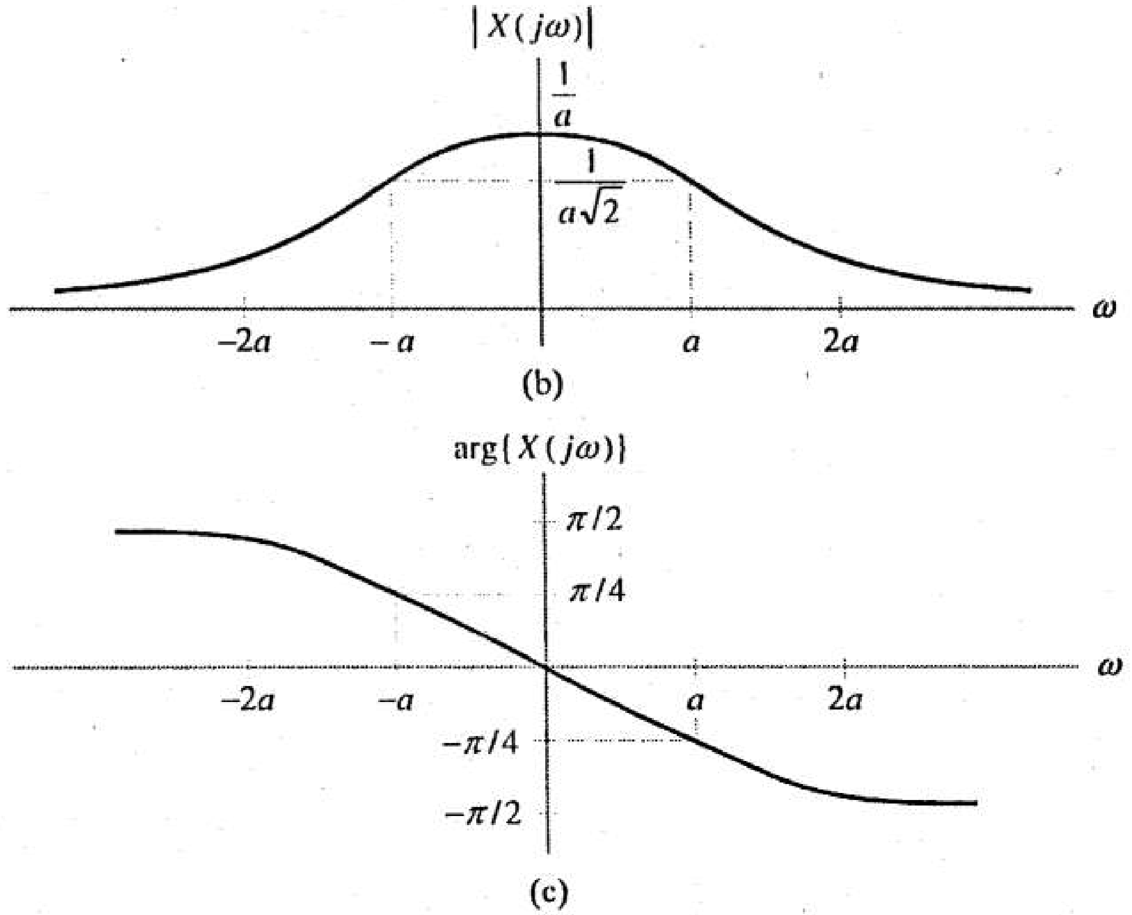
- 2. Simetria da Transformada e Série de Fourier

Tabela 3.4 ***Propriedades de Simetria das Representações de Fourier para Sinais de Tempo com Valores Reais***

	Forma Complexa	*Forma Retangular*	*Forma Polar*
FT	$X^*(j\omega) = X(-j\omega)$	$\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$	$\lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert$ $\arg\{X(j\omega)\} = -\arg\{X(-j\omega)\}$
FS	$X^*[k] = X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$	$\lvert X[k]\rvert = \lvert X[-k]\rvert$ $\arg\{X[k]\} = -\arg\{X[-k]\}$
DTFT	$X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega})$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = \mathrm{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\mathrm{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$	$\lvert X(e^{j\Omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\Omega})\rvert$ $\arg\{X(e^{j\Omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X^*[k] = X[-k]$	$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{Re}\{X[-k]\}$ $\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$	$\lvert X[k]\rvert = \lvert X[-k]\rvert$ $\arg\{X[k]\} = -\arg\{X[-k]\}$

VI. Propriedades de Fourier

- 2. Simetria da Transformada e Série de Fourier



VI. Propriedades de Fourier

3. Simetria para sinais pares/ímpares:

– quando x[n] é um sinal par (x[n]=x[-n]), a série/Transformada de Fourier é real (Im{X[k]} = 0):

- Re{X[k]} = X[k]
- Im{X[k]} = 0

– Neste caso, x[n] é expresso como uma soma apenas de cossenos (demonstração no livro – pag. 175)

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} B[k] \cos(k\Omega_o n)$$

$$B[k] = \begin{cases} X[k], & k = 0,\ N/2 \\ 2X[k], & k = 1, 2, \ldots, N/2 - 1 \end{cases}$$

VI. Propriedades de Fourier

- 3. Simetria para sinais pares/ímpares:
  - Resultado simular: quando x[n] é ímpar (x[n]=-x[-n]), a série de Fourier é puramente imaginária:
    - Re{X[k]} = 0
    - Im{X[k]} = X[k]
  - Neste caso, x[n] é expresso como uma soma apenas de senos.

VI. Propriedades de Fourier

- 3. Simetria para sinais pares/ímpares:
  - Caso genérico: $x[n]$ não é par nem ímpar.
  - $x[n] = x_P[n] + x_I[n] \quad \rightarrow \quad X[k] = Re\{X[k]\} + j\, Im\{X[k]\}$
  - Série de Fourier de $x_p[n] \rightarrow Re\{X[k]\}$
  - Série de Fourier de $x_I[n] \rightarrow j\, Im\{X[k]\}$
- Estas propriedades de simetria valem para os casos discreto e contínuo, e para o série e transformada.

VI. Propriedades de Fourier

- 4. Deslocamento no Tempo:

TABELA 3.6 ***Propriedades de Deslocamento no Tempo das Representações de Fourier***

$$x(t-t_o) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_o} X(j\omega)$$
$$x(t-t_o) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_o} e^{-j\omega_o t_o} X[k]$$
$$x[n-n_o] \xleftrightarrow{DTFT} e^{-j\Omega_o n_o} X(e^{j\Omega})$$
$$x[n-n_o] \xleftrightarrow{DTFS;\,\Omega_o} e^{-jk\Omega_o n_o} X[k]$$

  - Deslocar no tempo → multiplicar por exponencial complexa unitária na frequência
  - Apenas o módulo da Transformada/Série é alterada.

VI. Propriedades de Fourier

- 4. Deslocamento no Tempo:

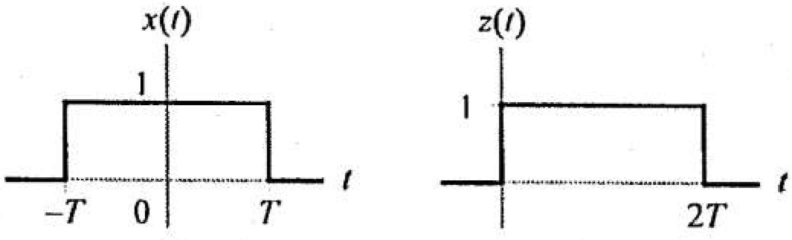
EXEMPLO 3.22 Use a FT do pulso retangular $x(t)$ descrito na Figura 3.28(a) para determinar a FT do pulso retangular deslocado no tempo, $z(t)$, da Figura 3.28(b).

Solução: Primeiramente, note que $z(t) = x(t - T)$; deste modo, a propriedade de deslocamento no tempo implica que $Z(j\omega) = e^{-j\omega T}X(j\omega)$. No exemplo 3.15, obtivemos

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega}\text{sen}(\omega T)$$

Dessa forma, temos

$$Z(j\omega) = e^{-j\omega T}\frac{2}{\omega}\text{sen}(\omega T)$$



(a) (b)

VI. Propriedades de Fourier

- 5. Deslocamento na Frequência:

Tabela 3.7 *Propriedades de Deslocamento em Freqüência das Representações de Fourier*

$$e^{j\gamma t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega-\gamma))$$

$$e^{jk_o\omega_o t}x(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_o} X[k-k_o]$$

$$e^{j\Gamma n}x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j(\Omega-\Gamma)})$$

$$e^{jk_o\Omega_o n}x[n] \xleftrightarrow{DTFS;\,\Omega_o} X[k-k_o]$$

  - Multiplicar por exponencial complexa unitária no tempo → Deslocar na frequência

VI. Propriedades de Fourier

- 5. Deslocamento na Frequência:

Exemplo 3.23 Use a propriedade de deslocamento em freqüência para determinar a FT do pulso senoidal complexo.

$$z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| \le \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução: Podemos expressar $z(t)$ como o produto de uma senoidal complexa, e^{j10t} por um pulso retangular.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Usando os resultados do Exemplo 3.15, escrevemos

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2}{\omega}\text{sen}(\omega\pi)$$

e usando a propriedade de deslocamento em freqüência

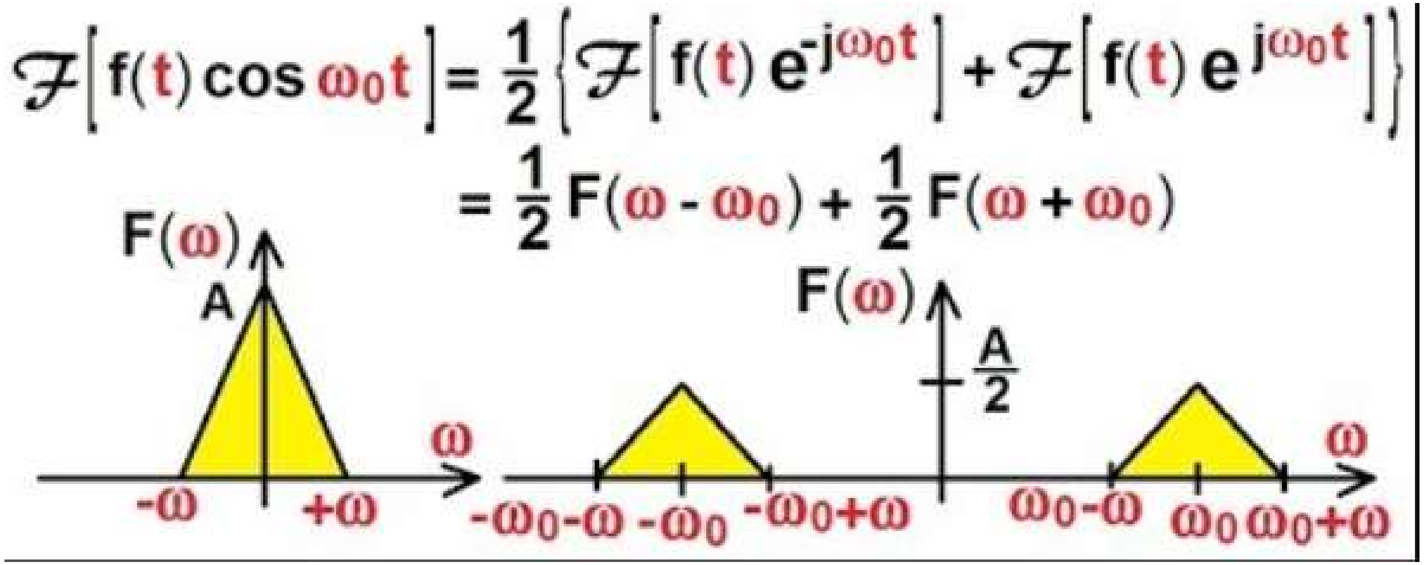
$$e^{j10t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j(\omega - 10))$$

obtemos

$$z(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{\omega - 10}\text{sen}((\omega - 10)\pi)$$

VI. Propriedades de Fourier

- 5. Deslocamento na Frequência:
  - Multiplicar por cosseno/seno unitária no tempo → Deslocar na frequência para os dois lados



  - Pode-se fazer um sinal ocupar uma banda de frequência desejada.
  - Este é o princípio básico das transmissões em telecomunicações

VI. Propriedades de Fourier

- 6. Diferenciação (apenas para tempo contínuo)

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS;\,\omega_o} jk\omega_o X[k]$$

  – Diferenciação atua, grosso modo, como um filtro passa-alta.

VI. Propriedades de Fourier

- 7. Integração (apenas para tempo contínuo):

$$Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$$

  – Expressão acima é válida apenas para X(j0) = 0.
  – Expressão genérica:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0)\delta(\omega)$$

  – Integração atua, grosso modo, como um filtro passa-baixa.

VI. Propriedades de Fourier

- 8. Teorema da Convolução:

  - Para sinais periódicos:

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$

VI. Propriedades de Fourier

- 8. Teorema da Convolução:

EXEMPLO 3.29 Admitamos que $x(t) = (1/\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi t)$ e $h(t) = (1/\pi t)\,\mathrm{sen}(2\pi t)$. Encontre $y(t) = x(t) * h(t)$.

Solução: Este problema é extremamente difícil de resolver no domínio de tempo. Porém, é simples de resolver no domínio de freqüência usando-se a propriedade da convolução. Temos

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$h(t) \xleftrightarrow{FT} H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 2\pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desde que $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$, temos

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e concluímos que $y(t) = (1/\pi t)\,\mathrm{sen}(\pi t)$.

VI. Propriedades de Fourier

- 8. Teorema da Convolução:

▶ **EXERCÍCIO 3.18** Admitamos que a resposta ao impulso de um sistema de tempo discreto seja dada por $h[n] = (1/\pi n)$ sen$((\pi/4)n)$. Encontre a saída $y[n]$ em resposta à entrada (a) $x[n] = (1/\pi n)$ sen$((\pi/8)n)$, e (b) $x[n] = (1/\pi n)$ sen$((\pi/2)n)$.

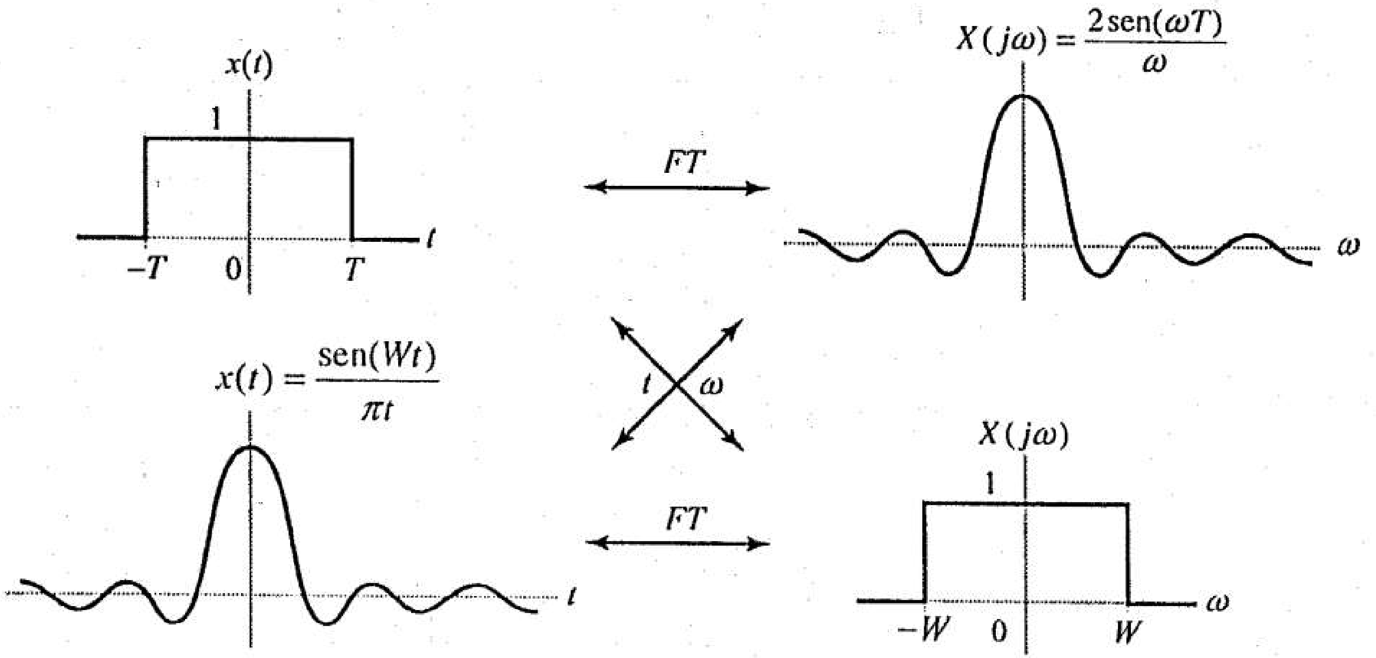
Resposta:

(a) $$y[n] = \frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

(b) $$y[n] = \frac{1}{\pi n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$ ◀

VI. Propriedades de Fourier

- 9. Dualidade:



VI. Propriedades de Fourier

- 9. Dualidade: