Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral

Métodos Numéricos – 2020.2 (SBL0081)
Prof. Rui F. Vigelis

2a Avaliação Progressiva

Nome:____

1. Dado o sistema linear

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -9 & -28 \\ -3 & 10 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

encontre sua solução através do método da eliminação de Gauss. Encontre também a fatoração LU da matriz de coeficientes.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 8 & 2 \\ -2 & 2 & -9 & -28 & -5 \\ -3 & 10 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -22 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -9 & -28 \\ -3 & 10 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Resolva o sistema abaixo, com precisão de duas casas decimais, usando o método da eliminação de Gauss com pivotamento parcial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2.00 & 3.00 & 1.00 & 1.00 \\ -1.00 & 2.00 & 1.00 & 7.00 \\ -4.00 & 3.00 & 4.00 & -2.00 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4.00 & 3.00 & 4.00 & -2.00 \\ 0 & 1.25 & 0.00 & 7.50 \\ 0 & 1.50 & -1.00 & 2.00 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -4.00 & 3.00 & 4.00 & -2.00 \\ 0 & 1.50 & -1.00 & 2.00 \\ 0 & 0 & 0.83 & 5.84 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 12.06 \\ 6.03 \\ 7.04 \end{pmatrix}$$

3. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dada a aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, encontre as aproximações sucessivas $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ usando o método de Jacobi.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.250000000000000 \\ 1.000000000000000 \\ 0.800000000000000 \end{pmatrix} \to$$

$$\to x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.550000000000000 \\ 1.183333333333333 \\ 1.400000000000000 \end{pmatrix} \to x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.491666666666667 \\ 1.283333333333333 \\ 1.713333333333333 \end{pmatrix}$$

4. Considere o sistema linear da questão anterior. Dada a aproximação inicial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$, use o método de Gauss–Seidel, para encontrar as aproximações sucessivas $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.500000000000000 \\ 1.166666666666667 \\ 1.666666666666667 \end{pmatrix} \to$$

$$\to x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.416666666666667 \\ 1.416666666666667 \\ 1.700000000000000 \end{pmatrix}$$

5. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 2 & 10 \\ 2 & 16 & 8 \\ 10 & 8 & 22 \end{pmatrix}.$$

Aplique o método QR, para encontrar duas aproximações sucessivas para os autovalores da matriz A.

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \begin{pmatrix} 25 & 2 & 10 \\ 2 & 16 & 8 \\ 10 & 8 & 22 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.925925925925926 & -0.209513120351570 & -0.314269680527354 \\ 0.074074074074074 & 0.916619901538117 & -0.392837100659193 \\ 0.370370370370370 & 0.340458820571301 & 0.864241621450225 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 27.000000000000007 & 6.000000000000000 & 18.000000000000000 \\ 0 & 16.970562748477143 & 12.727922061357855 \\ 0 & 0 & 12.727922061357852 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 32.111111111111121 & 5.971123930019732 & 4.714045207910314 \\ 5.971123930019735 & 19.888888888888893 & 4.333333333333330 \\ 4.714045207910316 & 4.333333333333332 & 10.999999999999995 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.973063973063973 & -0.202576732556784 & -0.110041681882697 \\ 0.180943149394537 & 0.966892823785230 & -0.179938445029990 \\ 0.142849854785161 & 0.155180329743308 & 0.977503444622379 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 33.000000000000014 & 10.028059805918307 & 6.942502942558825 \\ 0 & 18.693261259847780 & 4.941896654902282 \\ 0 & 0 & 9.454063165900021 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 34.917355371900840 & 4.088366784327812 & 1.350511550378554 \\ 4.088366784327819 & 18.841265317754353 & 1.467084639498427 \\ 1.350511550378558 & 1.467084639498432 & 9.241379310344826 \end{pmatrix}$$