Iniciado em	domingo, 18 jun. 2023, 20:39
Estado	Finalizada
Concluída em	domingo, 18 jun. 2023, 20:40
Tempo empregado	40 segundos
Notas	3,00/6,00
Avaliar	**5,00** de um máximo de 10,00(**50**%)

Questão **1**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Calcule a integral $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} \sin(y)\cos(x)\ dx + \cos(y)\sin(x)\ dy +\ dz$

Resposta: 0 ✖

Resposta:

A forma diferencial de $M\ dx + N\ dy + P\ dz$ é exata em um domínio convexo, se e somente se :

$$M\ dx + N\ dy + P\ dz = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy + \frac{\partial f}{\partial z}\ dz =\ df$$

Onde:

$$M\ dx = sen(y)\ cos(x)\ dx$$

$$N\ dy = cos(y)\ sen(x)\ dy$$

$$P\ dz = 1\ dz$$

Calculando os diferenciais da integral acima temos:

$$\frac{\partial\ M}{\partial y} = \frac{\partial\ sen(y)\ cos(x)}{\partial y} = cos(x)\ cos(y)$$

$$\frac{\partial\ M}{\partial z} = \frac{\partial\ sen(y)\ cos(x)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\ N}{\partial x} = \frac{\partial\ sen(x)\ cos(y)}{\partial x} = cos(x)\ cos(y)$$

$$\frac{\partial\ N}{\partial z} = \frac{\partial\ sen(x)\ cos(y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\ P}{\partial x} = \frac{\partial\ (1)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\ P}{\partial y} = \frac{\partial\ (1)}{\partial y} = 0$$

Logo observamos que a condição é satisfeita e o diferencial de $M\ dx + N\ dy + P\ dz$ definida inicialmente é exata.

$$\vec{\mathbf{F}}(x) = sen(y)\ cos(x)\mathbf{i} + sen(x)\ cos(y)\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\ x} = M\ = sen(y)\ cos(x)$$

Derivando em relação a x , temos:

$$f(x, y, z) = sen(x)\ sen(y) + g(y, z)$$

Derivando em relação a y , temos:

$$f_y(x, y, z) = sen(x)\ cos(y) + g_y(y, z)$$

$$f_y(x, y, z) = N\ = sen(x)\ cos(y)$$

Assim temos que $g(y, z) = 0$. Então integrando em relação a y, temos:

$$f(x, y, z) = sen(x)\ sen(y) + h(z)$$

Derivando em relação a z:

$$f_z(x, y, z) = h'(z) = 1$$

Derivando em relação a z, temos:

$$f_z(x, y, z) = h(z) = z + C$$

Logo,

$$f(x, y, z) = sen(x)\ sen(y) + z + C$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = f(0, 1, 1) - f(1, 0, 0)$$

$$(0 + 1) - (0 + 0) = 1$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = 1$$

A resposta correta é: 1

Questão **2**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Utilize o teorema de Green para encontrar a circulação em sentido anti-horário para o campo $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ e a curva C (o triângulo limitado por $y = 0$, $x = 3$, $y = x$).

Resposta: 9

Resposta:

Primeiramente devemos definir nosso M e N:

$M = y^2 - x^2$ e $N = x^2 + y^2$

Circulação:

Neste caso podemos usar o Teorema de Green. Aplicaremos os valores na equação $\iint\limits_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} dA$.

Primeiro, nós calculamos:

$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$

Agora, podemos calcular a integral:

$\int_0^3 \int_0^x 2x - 2y \, dydx$

$= \int_0^3 \left[2xy - \frac{2y^2}{2}\right]_0^x dx$

$= \int_0^3 2x^2 - x^2 \, dx$

$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$

$= \frac{2(3)^3}{3} - \frac{(3)^3}{3} = \frac{2(27)}{3} - \frac{(27)}{3}$

$= 18 - 9 = 9$

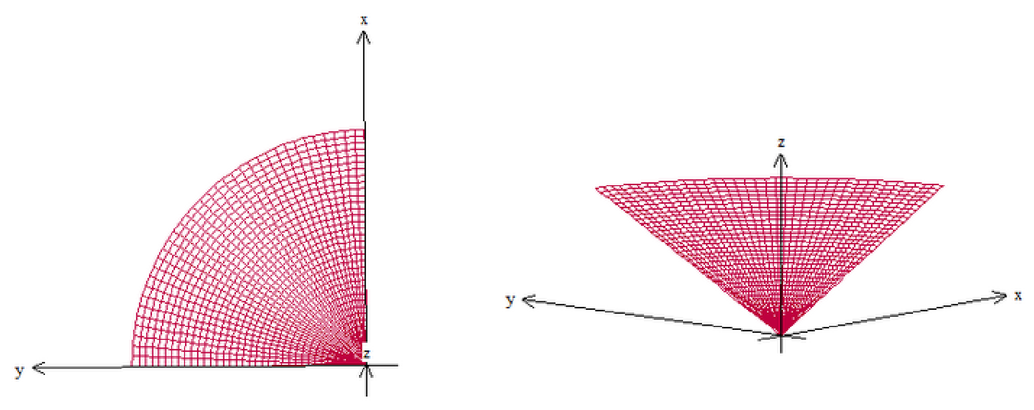
A resposta correta é: 9

Questão **3**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Qual a parametrização da porção no primeiro octante do cone $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre os planos $z = 0$ e $z = 3$? (Veja a figura abaixo)



Escolha uma opção:

- a. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$. ✔
- b. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.
- c. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.
- d. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 6$.
- e. $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.

Sua resposta está correta.

Solução:

i) Para parametrizarmos a função precisamos lembrar que podemos utilizar coordenadas cilíndricas com um ponto típico $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$ com:

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$

Como a equação do cone dada na questão é: $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$, concluímos que $z = \frac{r}{2}$.

Então $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$.

ii) Agora iremos encontrar as variações de z de r e θ.

Como é mostrado na questão o cone é cortado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$, portanto:

Para z temos: $0 \le z \le 3$;

Para r temos: Se $z = \frac{r}{2} \to 0 \le \frac{r}{2} \le 3$;

Para θ temos: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, pois a questão pede o setor do cone no primeiro octante, demonstrado nos gráficos abaixo:

A resposta correta é: $\vec{\mathbf{r}}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{k}$ para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \frac{r}{2} \le 3$.

Questão **4**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Qual o fluxo $\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$ do campo $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$ através da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante no sentido oposto à origem?

Escolha uma opção:

- a. $\frac{\pi a^4}{4}$ ✖
- b. $\frac{\pi a^2}{6}$
- c. $\frac{\pi a^2}{3}$
- d. $\frac{\pi a^3}{6}$
- e. $\frac{\pi a^4}{5}$

Sua resposta está incorreta.

Respostas:

Vamos iniciar fazendo a parametrização para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$:

$\vec{\mathbf{r}}(\phi, \theta) = (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \sin\theta) + (a \cos\phi)\mathbf{k}$.

Utilizando coordenadas esféricas:

$\rho = a$ e $a \geq 0$.

Para o primeiro octante, temos que ϕ e θ estão situados entre:

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Vamos derivar em relação a ϕ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\phi$, logo:

$\vec{\mathbf{r}}_\phi = (a \cos\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a \cos\phi \sin\theta)\mathbf{j} - (a \sin\phi)\mathbf{k}$.

A seguir, vamos derivar em relação a θ para obtermos o vetor $\vec{\mathbf{r}}_\theta$, como foi feito na etapa anterior.

$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-a \sin\phi \sin\theta)\mathbf{i} + (a \sin\phi \cos\theta)\mathbf{j}$.

Agora vamos fazer o produto vetorial entre os vetores $\vec{\mathbf{r}}_\phi$ e $\vec{\mathbf{r}}_\theta$ que encontramos acima, logo:

$$\vec{\mathbf{r}}_\phi \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos\phi \cos\theta & a \cos\phi \sin\theta & -a \sin\phi \\ -a \sin\phi \sin\theta & a \sin\phi \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$= (a^2 \sin^2\phi \cos\theta)\mathbf{i} + (a^2 \sin^2\phi \sin\theta)\mathbf{j} + (a^2 \sin\phi \cos\phi)\mathbf{k}$.

Feito isso, podemos calcular $\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma$.

Sendo, $\vec{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|}$, temos: $\vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta}{\|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\|} \|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\| \, d\theta d\phi$.

Substituindo os valores na equação, obtemos: $a^3 \cos^2\phi \sin\phi d\theta d\phi$.

Já que a questão nos dá $\vec{\mathbf{F}} = z\mathbf{k}$, temos que: $(a \cos\phi)\mathbf{k}$.

O fluxo de um campo vetorial tridimensional $\vec{\mathbf{F}}$ através de uma superfície orientada S na direção de $\vec{\mathbf{n}}$ é dado por:

$\iint\limits_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma.$

Para concluir, vamos colocar os valores encontrados na seguinte integral dupla:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \; a^3 \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi.$

Que tem como resultado a parametrização: $= \frac{\pi a^3}{6}$.

A resposta correta é: $\frac{\pi a^3}{6}$

Questão **5**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 1,00

Seja $\vec{\mathbf{F}}$ um campo vetorial diferenciável definido em uma região contendo uma superfície orientada fechada e lisa S e seu interior. Seja $\vec{\mathbf{n}}$ o campo vetorial normal unitário em S. Suponha que S seja a união de duas superfícies S_1 e S_2 unidas ao longo de uma curva fechada simples e lisa C. Pode-se dizer algo sobre $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma$?

- a. π
- b. 0
- c. 5π
- d. 2π ✖
- e. 4π

Sua resposta está incorreta.

Solução:

Dado que $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma = \int\int_{S_1} \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma + \int\int_{S_2} \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma$, e como S_1 e S_2 estão unidos pela curva fechada simples C, cada uma das integrais acima será igual a uma integral de circulação em C. Mas para uma superfície a circulação será no sentido anti-horário, e para a outra superfície a circulação será no sentido horário. Como os integrandos são iguais, a soma será 0. Portanto $\int\int_S \nabla \times \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}} \, d\sigma = 0.$

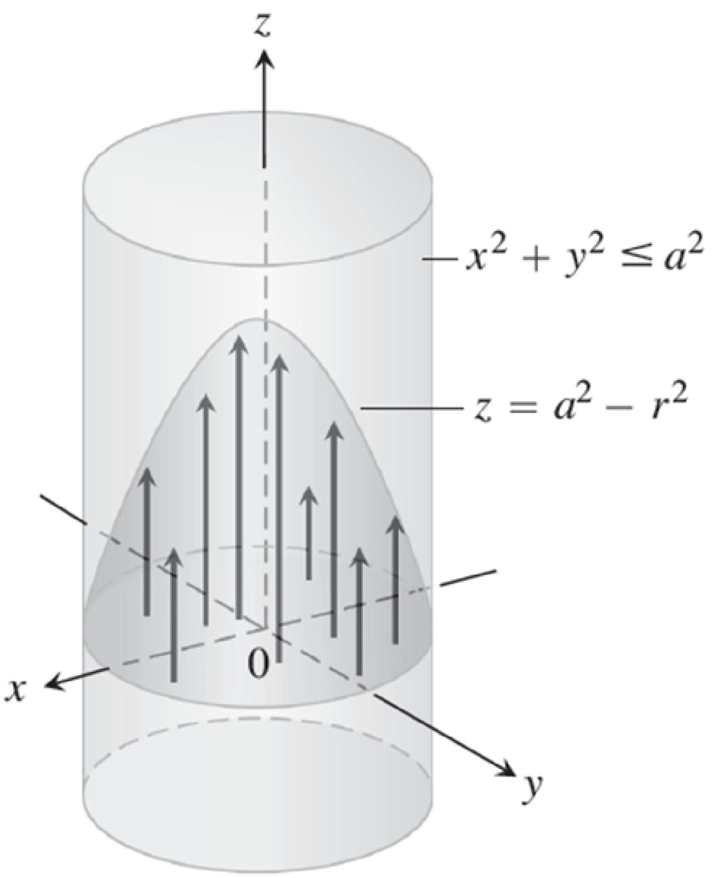
A resposta correta é:
0

Questão **6**

Correto

Atingiu 1,00 de 1,00

Encontre a divergência do campo de velocidade da figura abaixo,



onde a equação do campo é dada por $\vec{\mathbf{v}} = (a^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$, onde a base desses vetores encontra-se no plano xy e extremidades está no parabolóide $z = a^2 - r^2$.

- a. 3
- b. 4
- c. 0 ✔
- d. 1
- e. 2

Sua resposta está correta.

Solução: Temos $z = a^2 - r^2$ em coordenadas cilíndricas, como $r^2 = x^2 + y^2$, substituímos e obtemos $z = a^2 - (x^2 + y^2)$

$\vec{\mathbf{v}} = (a^2 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$, assim \(div\,{\bf\vec v}=0\0

A resposta correta é:
0