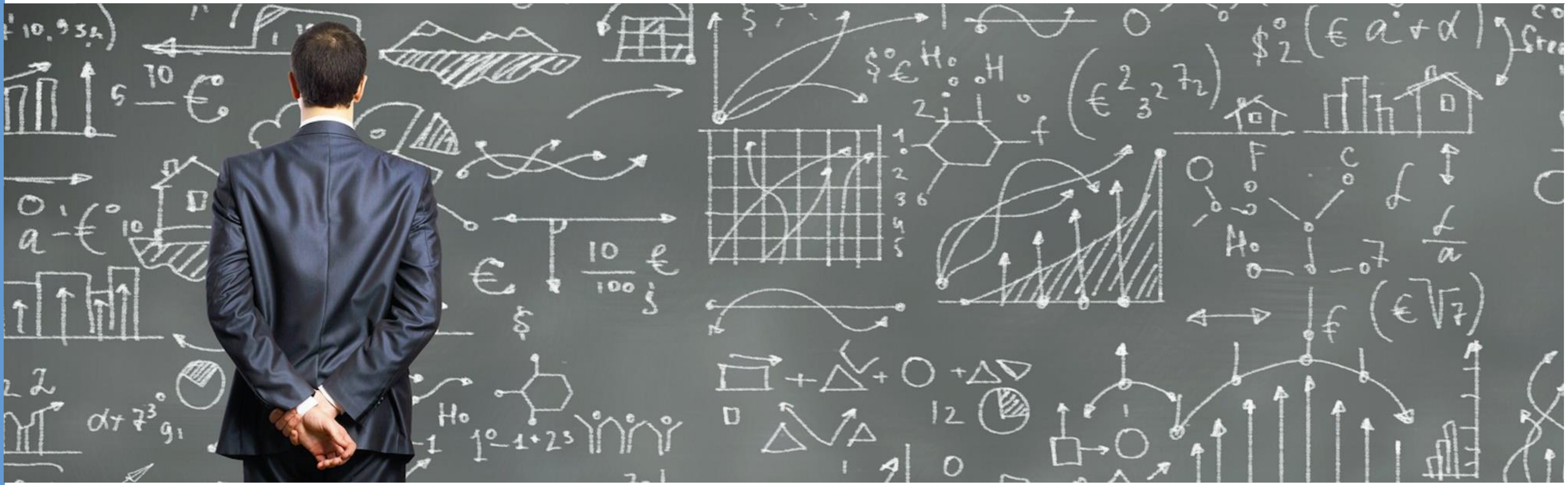
Métodos Numéricos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ



Unidade IV: Interpolação

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar esta função por outra, g(x) que satisfaça algumas propriedades.
- A função g(x) é usada no lugar de f(x), quando, por exemplo:
  - Apenas conhecemos os valores numéricos de f(x) para um conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e precisamos calcular o valor de f(x) em um ponto não tabelado;
  - f(x) é tal que calcula sua diferencial ou integral é difícil (ou mesmo impossíveis).
- Dados experimentais, tabelas estatísticas e de funções complexas são alguns exemplos destas situações.
- Geralmente é utilizado na obtenção de valores intermediários de funções desconhecidas, cálculo de raízes, soluções de E.D.O., integração numérica, etc...

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Considere o seguinte problema
  - A tabela a seguir relaciona o calor específico da água e temperatura.

temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828	0.99849	0.99878

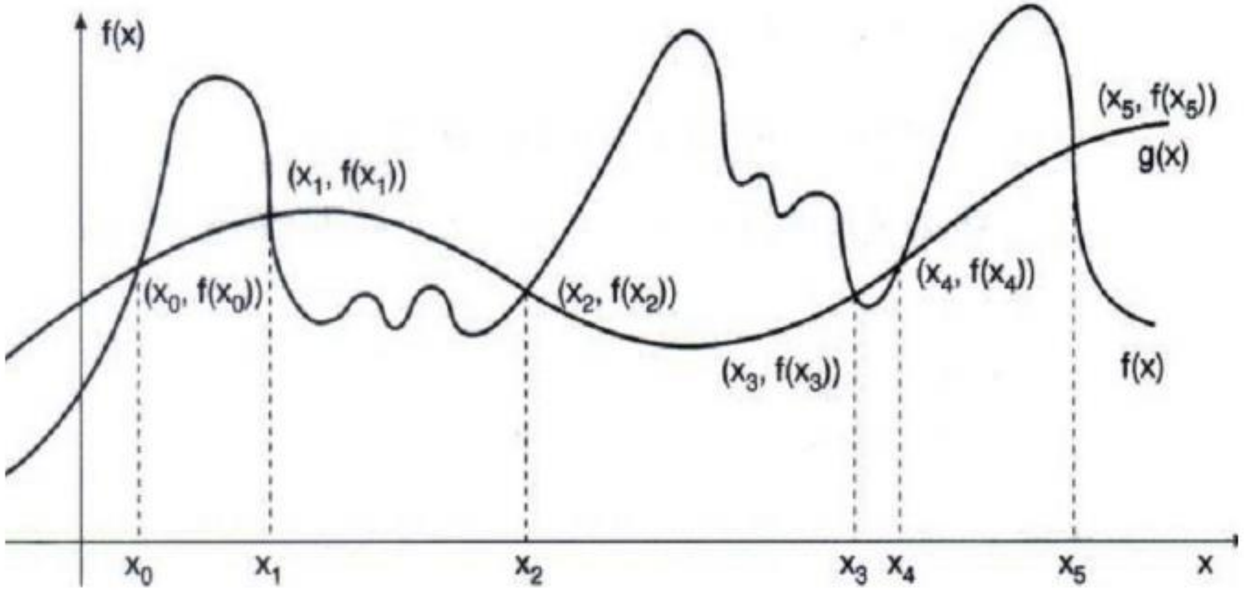
  - Suponha que se deseja calcular:
    - Calor específico da água a 32,5 °C;
    - A temperatura para o qual o calor específico é 0,99873.
    - O problema consiste em encontrar o valor correspondente de y para um dado x não pertencente a tabela.
    - Um modo de resolver estes problema seria obter uma função que relaciona as variáveis x e y.

Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Consideremos os (n+1) pontos distintos: x_0 , x_1 , ... , x_n , chamados de nós da interpolação, e os valores de f(x) nesses pontos: f(x_0), f(x_1), ... ,f(x_n).
- Uma das formas para resolver este problema de interpolação de f(x) seria obter uma função g(x) tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$



Introdução

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Considerando todas as característica da classe de funções polinomiais uma das soluções mais simples seria obter um polinômio para representar a relação $x \rightarrow y$.
- Um polinômio construído com o intuito de aproximar uma função é denominado polinômio interpolador.
- Assim consideraremos que $g(x)$ pertence a classe de funções polinomiais.
- Observamos no entanto que existem outras formas de interpolação polinomial como, por exemplo, a fórmula de Taylor e polinômios de Hermite;
- Poderíamos ter escolhido $g(x)$ para ser uma função racional, função trigonométrica etc.

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Dados os pontos (x_0; f(x_0)), (x_1; f(x_1)), ... ,(x_n; f(x_n)), portanto (n+1) pontos, queremos aproximar f(x) por g(x) = p_n(x) um polinômio de grau menor ou igual a n, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Existe esse polinômio? Caso exista, ele é único?

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- O polinômio $p_n(x)$ pode ser representado por:

$$p_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

  - Desta forma obter $p_n(x)$ significa obter os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.
  - Da condição de igualdade nos nós de interpolação podemos montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = f_n \end{cases}$$

Matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Prova-se facilmente que se os nós de interpolação x_0, x_1,..., x_n são distintos, então det V ≠ 0. Com efeito, para i = 1, 2,...,n − 1, subtraindo à coluna i + 1 a coluna i multiplicada por x_0, obtém-se:

$$\det V = D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

Interpolação Polinomial

- Pelo teorema de Laplace, desenvolvendo a primeira linha, vem

$$\det V = D_{n+1} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_1(x_1 - x_0) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1 - x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n(x_n - x_0) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n - x_0) \end{vmatrix}$$

- Cada elemento da linha i (i = 1, ..., n) contém o fator $(x_i - x_0)$, pelo que

$$\det V = D_{n+1} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\cdots(x_n - x_0)\, D_n$$

Determinante de Vandermonde

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Repetindo o raciocínio o número suficiente de vezes obtém-se a relação geral

$$D_{n-k+1} = \left[\prod_{j=k+1}^{n} (x_j - x_k) \right] D_{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

- Como os nós são distintos, $x_j \neq x_i$,(j ≠ k) então

$$(x_j - x_k) \neq 0, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad k+1 \leq j \leq n$$

$$D_1 = 1 \neq 0.$$

- Assim, os determinantes de Vandermonde são não nulos. Logo, o sistema VA = F admite solução única, o que equivale a dizer que o polinómio interpolador p_n(x) existe e é único.

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Conforme acabamos de ver, o polinômio $p_n(\mathrm{x})$ é único. No entanto, existem várias formas para se obter tal polinômio.
- Podemos citar entre estas formas a resolução do sistema linear obtido, Forma de Lagrange, Newton, etc...
- Teoricamente estas formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha entre os métodos depende de condições como estabilidade do sistema linear, tempo computacional, etc...

Interpolação Polinomial

- Exemplo
  - Encontrar p_2(x) que interpola os pontos da tabela

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2=f(x_0) \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2=f(x_1) \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2=f(x_2) \end{cases} \quad \begin{cases} a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2= 4 \\ a_0+a_1(0) + a_2(0)^2 = 1 \\ a_0+a_1(2)+a_2(2)^2= - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2= 4 \\ a_0 = 1 \\ a_0 +2 a_1 + 4a_2 = - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a_0 = 1 \\ a_1 = -7/3 \\ a_2 = 2/3 \end{matrix}$$

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad p(x)=1- 7/3x+2/3x^2$$

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exercício
  - Considerando a tabela da função f(x) = $\sqrt{x}$

x	1	2	4
$f(x)$	1	1.41	2

Determine o polinômio interpolador.

Interpolação Polinomial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- A determinação dos coeficientes do polinômio interpolador por meio da resolução de um sistema de equações lineares, apesar de ser conceitualmente simples, requer um certo esforço computacional.
- Não podemos esperar que essa seja a forma para qualquer sistema.
- Deve-se procurar metodologia alternativa ao modo da solução de sistemas de equações lineares.

Forma de Lagrange

- Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau ≤ n que interpola f em x_0, ..., x_n. Podemos representar $p_n(x)$ na forma

$$p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x)$$

- Onde $L_k(x)$ são polinômios de grau n.
- Para cada i, desejamos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \cdots + y_nL_n(x_i) = y_i$$

Forma de Lagrange

$$p_n(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \cdots + y_n L_n(x_i) = y_i$$

- A forma mais simples de satisfazer esta condição é impor:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq i \\ 1 \ se \ k = i \end{cases}$$

- Para isto podemos definir $L_k(x)$ que satisfaça a condição anterior por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)}$$

Forma de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)}$$

- Verificamos facilmente que:
  - $L_k(x_k) = 1$
  - $L_k(x_i) = 0$ se i ≠ k
- Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma $(x - x_i)$, i = 0, … , n, i ≠ k.
- Então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim $p_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Forma de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Assim a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x)$$

  - Onde

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

Forma de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Modelo

$\boldsymbol{x}$	x_0	x_1
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$

$$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Forma de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

x	-1	0	2
$f(x)$	4	1	-1

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x),$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\,(x-2)}{(-1-0)\,(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\,(x-2)}{(0+1)\,(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\,(x-0)}{(2+1)\,(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right)$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2,$$

Forma de Lagrange

- Exercício

x	0	1	2
$f(x)$	1	1/2	1/3

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x),$$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -(x-0)(x-2) = -x^2+2x$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{2} = \frac{x^2-x}{2}.$$

$$L_2(x) = \sum_{k=0}^{2} L_{2,k}(x)f(k) = \frac{x^2-3x+2}{2}(1) + (-x^2+2x)(\frac{1}{2}) + \frac{x^2-x}{2}(\frac{1}{3}) = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 1.$$

Forma de Lagrange

- Exercício
  - Calcular f(0,2) a partir da tabela:

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

$$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x),$$

$$L_2(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

$$L_2(0{,}2) = 1{,}221\frac{(0{,}2-0{,}6)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}1-0{,}6)(0{,}1-0{,}8)} + 3{,}320\frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}8)}{(0{,}6-0{,}1)(0{,}6-0{,}8)} +$$

$$4{,}953\frac{(0{,}2-0{,}1)(0{,}2-0{,}6)}{(0{,}8-0{,}1)(0{,}8-0{,}6)} \rightsquigarrow L_2(0{,}2) = 1{,}414.$$

Forma de Lagrange

- Método Alternativo
  - Um dispositivo prático pode ser construído para facilitar o uso dos polinômios de Lagrange. Para tal seja a matriz:

$$G = \begin{bmatrix} x - x_0 & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 & \cdots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x - x_1 & x_1 - x_2 & \cdots & x_1 - x_n \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & x - x_2 & \cdots & x_2 - x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & x_n - x_2 & \cdots & x - x_n \end{bmatrix}$$

  - Onde G_d é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz G e G_i é o produto dos elementos da (i+1) linha de G.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \times \frac{x - x_i}{x - x_i} \longrightarrow \boxed{L_n(x) = G_d \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{G_i}},$$

Forma de Lagrange

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Método Alternativo
  - Exemplo: Calcular f(0,2) a partir da tabela:

i	0	1	2
x_i	0,1	0,6	0,8
y_i	1,221	3,320	4,953

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}2-0{,}1 & 0{,}1-0{,}6 & 0{,}1-0{,}8 \\ 0{,}6-0{,}1 & 0{,}2-0{,}6 & 0{,}6-0{,}8 \\ 0{,}8-0{,}1 & 0{,}8-0{,}6 & 0{,}2-0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}5 & -0{,}7 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & -0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}2 & -0{,}6 \end{bmatrix}$$

$$G_d = (0{,}1)(-0{,}4)(-0{,}6) = 0{,}024$$

$$G_0 = (0{,}1)(-0{,}5)(-0{,}7) = 0{,}035$$

$$G_1 = (0{,}5)(-0{,}4)(-0{,}2) = 0{,}040$$

$$G_2 = (0{,}7)(0{,}2)(-0{,}6) = -0{,}084$$

$$L_2(x) = G_d\left(\frac{y_0}{G_0} + \frac{y_1}{G_1} + \frac{y_2}{G_2}\right)$$

$$L_2(0{,}2) = 0{,}024\left(\frac{1{,}221}{0{,}035} + \frac{3{,}320}{0{,}040} + \frac{4{,}953}{-0{,}084}\right) \rightsquigarrow L_2(0{,}2) = 1{,}414$$

Forma de Newton

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Como visto, os polinômios de Lagrange constituem um modo de interpolar um conjunto de pontos sem a necessidade de resolver um sistema de resolver um sistema de equações lineares.
- Temos ainda uma outra alternativa para esta solução que é dada pelo construção de um polinômio interpolador na forma de Newton.

Forma de Newton

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- A forma de Newton para o polinômio $P_n(x)$ que interpola f(x) em x_0 , x_1 ,.... , x_n , (n+1) pontos distintos é a seguinte:

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + d_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

  - Onde d_k trata-se do operador diferenças divididas de ordem k.

- O operador diferenças de ordem k divididas trata-se de uma função de dependente de k´s pontos de entrada.

$$d_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Forma de Newton

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Operador Diferenças Divididas
  - A definição de diferença de ordem k usada no cálculo do coeficiente do polinômio interpolador de Newton é descrita pela equação:
  - $f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_1,\dots,x_{k-1},x_k] - f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$
  - **Diferença de Ordem Zero:** $f[x_0] = f(x_0)$
  - **Diferença de 1ª Ordem:** $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
  - **Diferença de 2ª Ordem:** $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$

…

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$ d_0					
		$f[x_0, x_1]$ d_1				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$ d_2			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ d_3		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.		$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ d_n
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Forma de Newton

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

Seja f(x) tabelada abaixo

x	−1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	−1	−2

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
−1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		−1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		−1		0	
2	−1		0		
		−1			
3	−2				

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

$\vdots$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1 + 1}{2 - 0} = 0$$

$\vdots$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 1/2}{2 + 1} = \frac{1}{6}$$

$\vdots$

Forma de Newton

- Exemplo
  - Encontrar o polinômio na forma de Newton que interpola os dados abaixo a partir da tabela.

x	0,2	0,5	1,0	1,5	3,0
f(x)	0,04	0,25	1,40	2,25	9,00

x	y = f(x)	$\Delta f/\Delta x = f[x_{k-1}, x_k]$	$\Delta^2 f/\Delta x^2 = f[x_{k-2}, x_k]$	$\Delta^3 f/\Delta x^3 = f[x_{k-3}, x_k]$	$\Delta^4 f/\Delta x^4 = f[x_{k-4}, x_k]$
0,2	0,04				
		$\frac{0,25-0,04}{0,5-0,2}=0,7$			
0,5	0,25		$\frac{2,3-0,7}{1,0-0,2}=2,0$		
		$\frac{1,40-0,25}{1,0-0,5}=2,3$		$\frac{-0,6-2,0}{1,5-0,2}=-2,0$	
1,0	1,40		$\frac{1,7-2,3}{1,5-0,5}=-0,6$		$\frac{0,8-(-2,0)}{3,0-0,2}=1,0$
		$\frac{2,25-1,40}{1,5-1,0}=1,7$		$\frac{1,4-(-0,6)}{3,0-0,5}=0,8$	
1,5	2,25		$\frac{4,5-1,7}{3,0-1,0}=1,4$		
		$\frac{9,00-2,25}{3,0-1,5}=4,5$			
3,0	9,00				

Forma de Newton

- Exemplo

Usando a forma de Newton, o polinômio $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo

x	–1	0	2
f(x)	4	1	–1

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
–1	4		
		–3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		–1	
2	–1		

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\,\frac{2}{3}.$$

Estudo do Erro

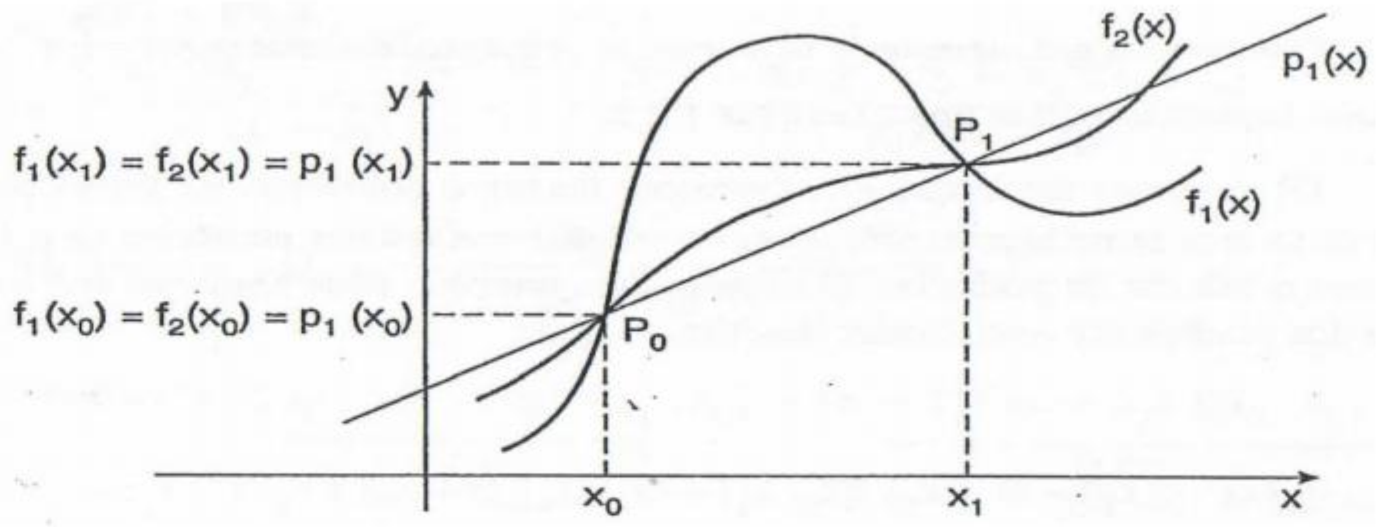
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- O estudo do erro é importante para sabermos o quão próximo $p_n(x)$ está de f(x) nos pontos diferentes dos nós.
- Ao aproximarmos uma função f(x) por um polinômio interpolação de grau ≤ n temos o seguinte erro:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) \qquad \forall\, x \in [x_0, x_n]$$

Estudo do Erro

- Percebemos que para o mesmo polinômio p_1 podemos interpolar f_1(x) e f_2(x) em x_0 e x_1 .
- Contudo temos que para a primeira curva temos um erro maior que para a segunda.



- Podemos notar que neste caso os erros estão ligados a concavidade das curvas, ou seja, f_1''(x) e f_2''(x).

Estudo do Erro

- Sejam $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, (n+1) pontos e seja f(x) com derivadas até a ordem (n+1) para todo x no intervalo $[x_0 , x_n]$.
- Com p_n(x) sendo o polinômio interpolador temos que em qualquer ponto pertencente ao intervalo $[x_0 , x_n]$ o erro é dado por:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

  - Onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- A fórmula para o erro $E_n(x)$ possui uso limitado, uma vez que são raras as situações em que conhecemos $f^{(n+1)}(x)$ e o ponto ξ_x nunca é conhecido.
- A importância da formula exata para $E_n(x)$ é teórica, visto que é usada na obtenção de estimativas de erro para fórmulas de interpolação, diferenciação e integração numérica.
- Desta forma estudaremos duas alternativas para relacionar o erro com um limitante de $f^{(n+1)}(x)$.

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Corolário 01
  - Sob a hipótese do teorema do erro, se $f^{(n+1)}(x)$ for contínua em I = $[x_0, x_n]$, podemos escrever a seguinte relação:

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

- Onde $M_{n+1} = máx \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ x ∈ I

Estudo do Erro

- Corolário 02
  - Se além das hipóteses anteriores tivermos os pontos igualmente espaçados, ou seja,

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

então

$$|f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}$$

- Observe que o majorante acima independe do ponto x considerado, $x \in [x_0, x_n]$.

Estudo do Erro

- Exemplo

Seja $f(x) = e^x + x - 1$ tabelada abaixo. Obter $f(0.7)$ por interpolação linear e fazer uma análise do erro cometido.

x	0	0.5	1	1.5	2.0
f(x)	0.0	1.1487	2.7183	4.9811	8.3890

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

x	0	0.5	0.7	1	1.5	2.0
f(x)	0.0	1.1487	f(0.7)	2.7183	4.9811	8.3890

$$p_1(x) = f(x_0)\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + f(x_1)\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$p_1(x) = 1{,}1487\frac{(0{,}7 - 1)}{(0{,}5 - 1)} + 2{,}7183\frac{(0{,}7 - 0{,}5)}{(1 - 0{,}5)} = 1{,}7765$$

Estudo do Erro

- Exemplo
  - Corolário 01

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

- Onde $M_{n+1} = máx \left|f^{(n+1)}(x)\right|$ x ∈ I

$$|E_1(0{,}7)| \leq |(0{,}7 - 0{,}5)(0{,}7 - 1)| \frac{M_2}{2}$$

- Onde $M_2 = máx\,|f''(x)| = e^1 = 2{,}7183$ x ∈ [0.5,1]

$$|E_1(0{,}7)| \leq 0{,}0815$$

- Realmente $|E_1(0{,}7)| = |f(0{,}7) - p_1(0{,}7)| = 0{,}0628$
- Assim $|E_1(0{,}7)| = 0{,}0628 < 0{,}0815$

Obs.:
$f(x) = e^x + x - 1$

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Corolário 02

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = h$$

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}$$

- Onde $M_2 = máx\,|f''(x)| = e^1 = 2{,}7183 \quad \mathrm{x} \in [0.5{,}1]$

$$|E_1(0{,}7)| < \frac{(0{,}5)^2(2{,}7183)}{8} = 0{,}0850$$

- Então $|E_1(0{,}7)| < 0{,}0850$
- Como $|E_1(0{,}7)| = |f(0{,}7) - p_1(0{,}7)| = 0{,}0628$
- Assim $|E_1(0{,}7)| = 0{,}0628 < 0{,}0850$

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Se no entanto a função f(x) é desconhecida, ou seja, possuímos apenas uma tabela relacionando os valores funcionais, o valor absoluto do erro $|E_n(x)|$ só pode ser estimado. Isto porque, neste caso, não é possível calcular M_{n+1};
- Mas se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem n+1, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças como uma aproximação $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ para no intervalo $[x_0, x_n]$.
- Neste caso dizemos que:

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|(máx|dif\ div\ ord\ n + 1|)$$

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

Seja f(x) dada na forma:

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f(x)	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2.

b) Dar uma estimativa para o erro.

Estudo do Erro

- Exemplo

a) Obter f(0.47) usando um polinômio de grau 2.

b) Dar uma estimativa para o erro.

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2]$$
$$= 0.27 + (x - 0.4)0.1667 + (x - 0.4)\,(x - 0.52)\,(1.0415).$$

a) $p_2(0.47) = 0.2780 \approx f(0.47)$

b) $|E(0.47)| \approx |(0.47 - 0.4)(0.47 - 0.52)(0.47 - 0.6)|\ |18.2492|$

$\approx 8.303 \times 10^{-3}$.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
0.2	0.16			
		0.4286		
0.34	0.22		2.0235	
		0.8333		–17.8963
$x_0 = 0.4$	0.27		–3.7033	
		0.1667		18.2494
$x_1 = 0.52$	0.29		1.0415	
		0.375		–2.6031
$x_2 = 0.6$	0.32		0.2085	
		0.4167		
0.72	0.37			

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Escolha do grau do polinômio interpolador
  - A tabela de diferenças divididas junto com a relação entre diferença dividida de ordem k e derivada de ordem k podem nos auxiliar na escolha do grau do polinômio que usaremos para interpolar uma função f(x) dada.
  - Devemos então, em primeiro ligar, construir a tabela de diferenças divididas.
  - Em seguida, examinar as diferenças divididas da função na vizinhança do ponto de interesse.
  - Se nesta vizinhança as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes (ou se as diferenças de ordem k+1 variarem em torno de zero), poderemos concluir que um polinômio interpolador de grau k será o que melhor aproximará a função na região considerada na tabela.

Estudo do Erro

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo

Por exemplo, consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ tabelada abaixo com quatro casas decimais:

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\sqrt{x}$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

- Assim, no intervalo [1, 1.05] dizemos que um polinômio de **grau 1** é uma boa aproximação para $f(x) = \sqrt{x}$.

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		–0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		

Constantes

Interpolação Inversa

- Dado um conjunto de pontos tabelados o objetivo da interpolação inversa consiste em para um determinado $\overline{y} \in [\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_n)]$ obter $\overline{x}$, tal que $\mathrm{f}(\overline{x}) = \overline{y}$.
- Deve-se então obter $p_n(x)$ que interpola f(x) em $x_0, x_1, \ldots , x_n$ e em seguida encontrar $\overline{x}$ tal que $p_n(\overline{x}) = \overline{y}$.

Interpolação Inversa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Calcular $\overline{x}$ tal que f($\overline{x}$) = 2.

x	0.5	0.6	$\overline{x}$	0.7	0.8	0.9	1.0
f(x)	1.65	1.82	2	2.01	2.23	2.46	2.72

$$p_1(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

$$2 = 1{,}82\frac{(x-0{,}7)}{(-0{,}1)} + 2{,}01\frac{(x-0{,}6)}{(0{,}1)}$$

$$2 = -18{,}2x + 12{,}74 + 20{,}1x - 12{,}06$$
$$\boldsymbol{x = 0,69}$$

Interpolação Inversa

- No entanto se f(x) for invertível no intervalo contendo $\overline{y}$, então faremos a interpolação de $x = f^{-1}(y) = g(y)$.
- Uma condição para que esta função seja invertível é que a mesma seja monótona crescente (ou decrescente) no intervalo.
- Para isto devemos ter $f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_n)$ para monótona crescente e $f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n)$ para decrescente.
- Se esta condição for satisfeita o problema pode ser resolvido se obtivermos o polinômio $p_n(y)$ que interpola $g(y) = f^{-1}(x)$ sobre $[y_0, y_n]$.
- Para isto basta considerar x como função de y e aplicar um método de interpolação: $x = f^{-1}(y) = g(y) \approx p_n(y)$.

Interpolação Inversa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Dada a tabela, obter x tal que $e^x = 1,3165$.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$y = e^x$	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

$p_2(y) = g(y_0) + (y - y_0)g[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1)\, g[y_0, y_1, y_2]$

$p_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)\, 0.7782 + (y - 1.2214)(y - 1.3499)\,(-0.2718)$

$p_2(1.3165) = 0.27487.$

Assim, $e^{0.27487} \approx 1.3165$ (na calculadora, $e^{0.27487} = 1.31659$).

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
1	0			
		0.9506		
1.1052	0.1		-0.4065	
		0.8606		0.1994
1.2214	0.2		-0.3367	
		0.7782		0.1679
1.3499	0.3		-0.2718	
		0.7047		0.1081
1.4918	0.4		-0.2256	
		0.6373		
1.6487	0.5			

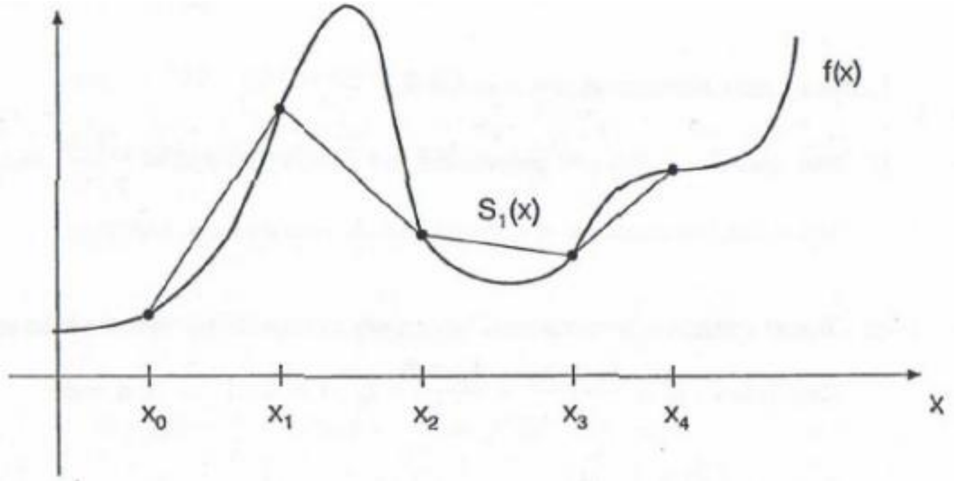
Splines Interpolantes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Dado uma função f(x) tabelada em (n+1) pontos, quando a aproximamos por um polinômio de grau n interpolando os pontos tabelados, o resultado pode apresentar divergências em determinados casos resultando em aproximações desastrosas.
- Desta forma uma das alternativas trata-se de interpolar f(x) em setores de poucos pontos, obtendo-se polinômios de grau menor e impondo condições para que a função de aproximação seja continua e tenha derivadas continuas de até certa ordem.

Splines Interpolantes

- O exemplo mostra o caso em que aproximamos a função f(x) por uma função linear por partes, denotada por $S_1(x)$.



- No caso das funções spline, aproximamos a função tabelada em cada subintervalo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ por um polinômio de grau p, com algumas restrições sobre sua continuidade e derivadas.

Splines Interpolantes

- Definição
  - Considere a função f(x) tabelada no pontos $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Uma função $S_p(x)$ é denominada spline de grau p com nós nos pontos $x_i, i = 0, 1, \dots, n$, se satisfaz as seguintes condições:
    - Em cada subintervalo $[x_i\ , x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, (n-1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p: $S_p(x)$
    - $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem (p − 1) em [a, b].
    - Além disso, $S_p(x_i)$ = f(x_i), $i = 0, 1, \dots, n$ então será denominada spline interpolante.

Spline Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- A função spline linear interpolante de f(x), $S_1(x)$, nos nós x_0, x_1, ..., x_n pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, como

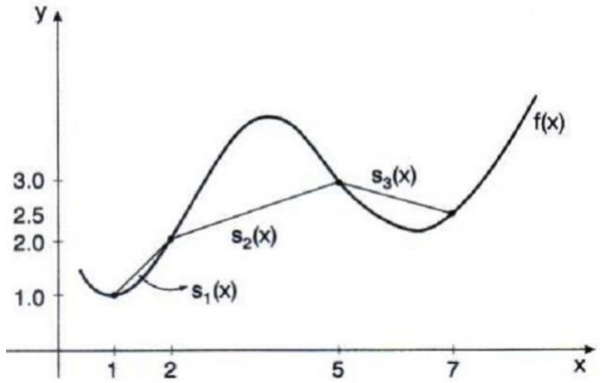
$$S_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Spline Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontrar a função spline linear que interpola a função tabelada.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	5	7
f(x)	1	2	3	2.5



$$s_1(x) = f(x_0)\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 1\,\frac{2 - x}{2 - 1} + 2\,\frac{x - 1}{2 - 1} = 2 - x + 2x - 2 = x,\ x \in [1, 2]$$

$$s_2(x) = f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 2\,\frac{5 - x}{5 - 2} + 3\,\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{2}{3}(5 - x) + x - 2 = \frac{1}{3}(x + 4),\ x \in [2, 5]$$

$$s_3(x) = f(x_2)\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3)\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = 3\,\frac{7 - x}{7 - 5} + 2.5\,\frac{x - 5}{7 - 5} = \frac{1}{2}(-0.5x + 8.5),\ x \in [5,7].$$

Spline Cúbica Linear

- A spline linear apresenta a desvantagem de ter derivada primeira descontínua nos nós.
- A spline cúbica, $S_3(x)$ possui a primeira e segunda derivadas contínuas, o que faz com que a curva $S_3(x)$ não tenha picos e nem troque abruptamente de curvatura nos nós.
- Uma spline cúbica $S_3(x)$, é uma função polinomial por partes contínua, onde cada parte, $S_k(x)$, é um polinômio de grau 3 no intervalo $[x_{k-1}\ , x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Condições
  - Supondo que f(x) esteja tabelada nos pontos $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ a função $S_3(x)$ é chamada spline cúbica interpolante de f(x) nos nós $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$ se existirem n polinômios de grau 3, $S_k(x), k = 1, 2, \ldots, n$, tais que:
    - *I.* $\mathrm{S_3(x) = S_k(x)}$ para $\mathrm{x \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, n.}$
    - *II.* $\mathrm{S_3(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n.}$
    - *III.* $\mathrm{S_k(x_k) = S_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \ldots, (n-1).}$
    - *IV.* $\mathrm{S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \ldots, (n-1).}$
    - *V.* $\mathrm{S''_k(x_k) = S''_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \ldots, (n-1).}$
  - Onde para simplicidade de notação escrevemos:

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

$$S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

- Desta forma o cálculo de $S_3(x)$ exige a determinação de 4 coeficientes para cada k, num total de 4n coeficientes:

$$a_1\,, b_1\,, c_1\,, d_1, a_2\,, b_2\,, c_2\,, d_2, \dots, a_n\,, b_n\,, c_n\,, d_n.$$

Spline Cúbica Linear

- Impondo as condições para que $S_3(x)$ seja a spline que interpole f(x) nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$ teremos:
  - $n+1$ condições para que $S_3(x)$ interpole f(x) nos nós;
  - $n-1$ condições para que $S_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$;
  - $n-1$ condições para que $S'_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$;
  - $n-1$ condições para que $S''_3(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$;

- Desta forma temos um total de $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ condições.
- Portanto temos duas condições indefinidas. Estas condições podem ser impostas de acordo com informações sobre a modelagem do problema ou mesmo algumas abordagens tradicionalmente utilizadas para simplificar o problema.

Spline Cúbica Linear

- A partir da definição de cada $S_k(x)$, a **Condição I** da definição de $S_3(x)$ já está satisfeita.
- Para a **Condição II** montamos para $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ as equações:
  - $\boldsymbol{S_k(x_{\mathrm{k}}) = d_k = f(x_k)}$ onde devemos ainda acrescentar:

$$\boldsymbol{S_1(x_0) = f(x_0) \Rightarrow -a_1 {h_1}^3 + b_1 {h_1}^2 - c_1 h_1 + d_1 = f(x_0)} \textbf{[EQ. 2]}$$

onde usamos a notação $\boldsymbol{h_k = x_k - x_{k-1}}$, com $k = 1$.

- A **Condição III** é satisfeita através das $(n-1)$ equações: para $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, (\mathrm{n}-1)$, $\mathrm{S}_{k+1}(\mathrm{x}_{\mathrm{k}}) = f(x_k)$, ou seja,

$$\boldsymbol{-a_{k+1} {h_{k+1}}^3 + b_{k+1} {h_{k+1}}^2 - c_{k+1} h_{k+1} + d_{k+1} = f(x_k)} \ \textbf{[EQ. 3]}$$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Para impormos as **Condições IV e V**, precisamos das derivadas de $S_k(x)$.
  - $S'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k$
  - $S''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k$
- Observamos assim que $S''_k(x_k) = 2b_k$, e escrevendo b_k em função de $S''_k(x_k)$ temos:

$$b_k = \frac{S''_k(x_k)}{2}$$

- Da mesma forma como $S''_k(x_{k-1}) = -6a_k h_k + 2b_k$, podemos expressar a_k em função das derivadas segundas nos nós:

$$a_k = \frac{2b_k - S''_k(x_{k-1})}{6h_k} = \frac{S''_k(x_k) - S''_k(x_{k-1})}{6h_k}$$

Spline Cúbica Linear

- Impondo a condição de continuidade da derivada,

$$S''_{\mathrm{k}}(x_{k-1}) = S''_{\mathrm{k-1}}(x_{k-1})$$

Obtemos

$$a_k = \frac{S''_{\mathrm{k}}(x_k) - S''_{\mathrm{k-1}}(x_{k-1})}{6h_k}$$

- No caso $k = 1$ introduzimos assim a variável $S''_0(x_0)$ arbitrária.

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Uma vez que $d_k = f(x_k)$ e já temos as expressões para a_k e b_k , podemos usar as **[EQ. 2]** e **[EQ. 3]** e obter uma expressão para c_k também em função da derivada segunda nos nós.
  - Observamos que tirar c_k da **[EQ. 2]** e, para $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, (\mathrm{n}-1)$ usar a **[EQ. 3]** é o mesmo que, para $\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$, termos:

$$c_k = \frac{-f(x_{k-1}) - a_k {h_k}^3 + b_k {h_k}^2 + d_k}{h_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - (a_k {h_k}^2 - b_k h_k)$$

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \left\{\frac{[\mathrm{S''}_\mathrm{k}(x_k) - \mathrm{S''}_\mathrm{k}(x_{k-1})]}{6} h_k - \frac{\mathrm{S''}_\mathrm{k}(x_k)}{2} h_k\right\}$$

$$c_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{-2\mathrm{S''}_\mathrm{k}(x_k) h_k - \mathrm{S''}_{\mathrm{k}-1}(x_{k-1}) h_k}{6}$$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Se usarmos a notação $S''_k(x_k) = g_k$ e $f(x_k) = y$ teremos

$$\boldsymbol{a_k} = \frac{g_k - g_{k-1}}{6h_k}, \boldsymbol{b_k} = \frac{g_k}{2}, \boldsymbol{c_k} = \left[\frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6}\right], \boldsymbol{d_k} = y_k$$

- Assim para $k = 1, 2, \ldots, n$, podemos calcular todos os coeficientes de $S_k(x)$ em função de $g_j = S''_j(x_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$.

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Impondo agora a **Condição IV** que ainda não foi utilizada, $S'_k(x_k) = S'_{k+1}(x_k), k = 1, 2, \dots, (n-1)$, teremos:

$$S'_k(x_k) = c_k = 3a_{k+1}{h_{k+1}}^2 - 2b_{k+1}h_{k+1} + c_{k+1}$$

Donde

$$c_{k+1} = c_k - 3a_{k+1}{h_{k+1}}^2 + 2b_{k+1}h_{k+1}$$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Substituindo,

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} + \frac{2h_{k+1}g_{k+1} + g_k h_{k+1}}{6} =$$

$$= \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k g_k + g_{k-1}h_k}{6} - 3\left(\frac{g_{k+1} - g_k}{6}\right)h_{k+1} + 2\left(\frac{g_{k+1} - h_{k+1}}{2}\right)$$

- Agrupando os termos semelhantes para $k = 1, \dots, n-1$.

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)$$

Spline Cúbica Linear

- Que é um sistema linear com $n -\ 1$ equações e $n\ + 1$ incógnitas e pode ser reescrito na forma $Ax\ =\ b$ onde $x\ =\ (g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n)^T$

$$A = \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n+1)}$$

$$b = 6 \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_3} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}_{(n-1) \times 1}$$

Spline Cúbica Linear

- Para podermos resolver este sistema, de forma única, teremos de impor algumas condições. Uma vez na posse da solução, podemos determinar a_k, b_k, c_k, d_k para cada $S_k(x)$.
  1. $S''_3(x_0) = g_0 = 0$ e $S''_3(x_n) = g_n = 0$, que é chamada de spline natural.
     - Esta escolha é equivalente a supor que os polinômios cúbicos nos intervalos extremos ou são lineares ou próximos de funções lineares.
  2. $g_0 = g_1, \; g_n = g_{n-1}$
     - Essa escolha é equivalente a supor que as cúbicas são aproximadamente parábolas, nos extremos.
  3. $S'_3(x_0) = A$ e $S'_3(x_n) = B$
     - $S'_1(x_0) = 3a_1h^2 - 2b_1h + c_1 = A$
     - $S'_n(x_n) = c_n = B$

Spline Cúbica Linear

- Exemplo
  - Encontrar uma aproximação para f(0,25) por spline cúbica natural, interpolante através da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	–0.5571	–4.1987	–9.0536

Temos 4 subdivisões do intervalo [0, 2.0], donde n = 4, e portanto temos de determinar $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$ resolvendo, para $1 \leq k \leq 3$ $(n - 1 = 3)$, o sistema:

No nosso exemplo, $h_k = h = 0.5$. Assim,

$$hg_{k-1} + 4hg_k + hg_{k+1} = \frac{6}{h}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \begin{cases} hg_0 + 4hg_1 + hg_2 = \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Spline Cúbica Linear

- Exemplo
  - Encontrar uma aproximação para f(0,25) por spline cúbica natural, interpolante através da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	–0.5571	–4.1987	–9.0536

Como queremos a spline cúbica natural $g_0 = g_4 = 0$, e então o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{cases} hg_0 + 4hg_1 + hg_2 = \frac{6}{h}(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = \frac{6}{h}(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 + hg_4 = \frac{6}{h}(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4hg_1 + hg_2 = (6/h)(y_2 - 2y_1 + y_0) \\ hg_1 + 4hg_2 + hg_3 = (6/h)(y_3 - 2y_2 + y_1) \\ hg_2 + 4hg_3 = (6/h)(y_4 - 2y_3 + y_2) \end{cases}$$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontrar uma aproximação para f(0,25) por spline cúbica natural, interpolante através da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	–0.5571	–4.1987	–9.0536

Como queremos a spline cúbica natural $g_0 = g_4 = 0$, e então o sistema a ser resolvido será:

$$\begin{pmatrix} 4h & h & 0 \\ h & 4h & h \\ 0 & h & 4h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \frac{6}{h} \begin{pmatrix} y_2 - 2y_1 + y_0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \end{pmatrix}$$

e, substituindo os valores de h e de y_i, $0 \leq i \leq 4$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.3636 \\ -14.6748 \\ -14.5598 \end{pmatrix}$$

$g_3 = -6.252$
$g_2 = -4.111$
$g_1 = -6.6541$

Spline Cúbica Linear

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

- Exemplo
  - Encontrar uma aproximação para f(0,25) por spline cúbica natural, interpolante através da tabela:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	3	1.8616	–0.5571	–4.1987	–9.0536

Levando estes valores em a_k, b_k, c_k e d_k encontramos $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$ e $s_4(x)$. Como queremos uma aproximação para f(0.25), $f(0.25) \approx s_1(0.25)$ e $s_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$ onde,

$$a_1 = \frac{g_1 - g_0}{6h} = \frac{-6.6541}{3} = -2.2180 \qquad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{2hg_1 + g_0 h}{6} = -3.3858$$

$$b_1 = \frac{g_1}{2} = -3.3270 \qquad d_1 = y_1 = 1.8616$$

$$s_1(0.25) = -2.2180\,(-0.25)^3 - 3.3270\,(0.25)^2 - 3.3858\,(-0.25) + 1.8616 = 2.5348.$$

$$f(0.25) \approx s_1(0.25) = 2.5348.$$