Álgebra Linear
Aula 14

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Teorema 3.3.2

Se $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{u}$ forem vetores de $\mathbb{R}^n$, com $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}$ pode ser escrito de maneira única na forma $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ onde w_1 é um múltiplo de $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{w}_2$ é ortogonal a $\overrightarrow{a}$.

Notações

Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{u}$ vetores com $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Denotamos por

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}\, \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}}{\| \overrightarrow{a} \|^2} \overrightarrow{a}$$

a componente vetorial de $\overrightarrow{u}$ ao longo de $\overrightarrow{a}$ e por

$$\overrightarrow{u} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}}\, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}}{\| \overrightarrow{a} \|^2} \overrightarrow{a}$$

a componente vetorial de $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{a}$.

Notações

Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{u}$ vetores com $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$. Denotamos por

$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a}$$

a componente vetorial de $\overrightarrow{u}$ ao longo de $\overrightarrow{a}$ e por

$$\overrightarrow{u} - \mathrm{proj}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|^2}\overrightarrow{a}$$

a componente vetorial de $\overrightarrow{u}$ ortogonal a $\overrightarrow{a}$.

Exemplo 5

Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = (5,3)$ como soma de múltiplos dos vetores $\overrightarrow{u} = (2,1)$ e um vetor ortogonal a $\overrightarrow{u}$.

Exemplo 6

Calcule a norma do vetor $\operatorname{proj}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{u}$.

Teorema de Pitágoras

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{a}$ são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^2$ então

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{a}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{a}\|^2.$$

Teorema de Pitágoras

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{a}$ são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^n$ então

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{a}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{a}\|^2.$$

Problema

Considere a reta

$$x + y - 1 = 0.$$

Calcule a distância do ponto $(2, 1)$ a esta reta.

Distância ponto a reta/plano

Seja $r(x) = 0$ a equação da reta/plano com vetor normal $\overrightarrow{n}$ e seja x_0 um ponto no plano/espaço. A distância D de x_0 para a reta/plano é dada por

$$D = \frac{|r(x_0)|}{\|n\|}.$$

Por falar em retas... Como representamos uma equação da reta em $\mathbb{R}^n$?

Por falar em retas... Como representamos uma equação da reta em $\mathbb{R}^n$?

Representação da Reta em $\mathbb{R}^n$

Seja L uma reta que contém o ponto x_0. Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor paralelo a L então qualquer ponto x de L pode ser escrito como

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0 = t\overrightarrow{v}$$

para algum escalar t denominado *parâmetro*.

Por falar em retas... Como representamos uma equação da reta em $\mathbb{R}^n$?

Representação da Reta em $\mathbb{R}^n$

Seja L uma reta que contém o ponto x_0. Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor paralelo a L então qualquer ponto x de L pode ser escrito como

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0 = t\overrightarrow{v}$$

para algum escalar t denominado *parâmetro*.

Se $x_1 \neq x_0$ for outro ponto da reta L então podemos escrever x como

$$\overrightarrow{x} = t\overrightarrow{x}_1 + (1-t)\overrightarrow{x}_0.$$

Por falar em retas... Como representamos uma equação da reta em $\mathbb{R}^n$?

Representação da Reta em $\mathbb{R}^n$

Seja L uma reta que contém o ponto x_0. Se $\overrightarrow{v}$ é um vetor paralelo a L então qualquer ponto x de L pode ser escrito como

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0 = t\overrightarrow{v}$$

para algum escalar t denominado *parâmetro*.

Se $x_1 \neq x_0$ for outro ponto da reta L então podemos escrever x como

$$\overrightarrow{x} = t\overrightarrow{x}_1 + (1-t)\overrightarrow{x}_0.$$

Em particular se $0 \leq t \leq 1$ dizemos que x está no segmento de reta que liga os pontos x_1 e x_0.

Seja P um plano que contém o ponto x_0. Se v_1 e v_2 são vetores não colineares e paralelos a P então qualquer ponto de do plano P pode ser escrito como

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0 = t_1 \overrightarrow{v}_1 + t_2 \overrightarrow{v}_2$$

para algum par de escalares t_1 e t_2 denominados *parâmetros*.

Considere a seguinte equação linear

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Considere a seguinte equação linear

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = b.$$

Considere a seguinte equação linear homogêneo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

Podemos reescrever essa equação como

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} = 0.$$

Teorema 3.4.3

Se A for uma matriz $m \times n$ então o conjunto de soluções do sistema linear homogêneo $Ax = 0$ consiste de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais a cada vetor linha de A.

Exemplo 7

Considere o seguinte sistema linear

$$2x + 3y + z = b_1;$$

$$x - y + 3z = b_2.$$

Obtenha o conjunto de soluções para $b = (0, 0)$ e $b = (11, 8)$.

Teorema 3.4.4

Uma solução geral de um sistema linear $Ax = b$ pode ser obtida somando uma solução específica qualquer de $AX = b$ e a solução geral de $Ax = 0$.

Exemplo 8

Considere os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não paralelos em $\mathbb{R}^3$. Encontre um vetor $\overrightarrow{w}$ que seja ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ simultaneamente.

Produto Vetorial

O produto vetorial $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ entre dois vetores em $\mathbb{R}^3$ é definido como

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$