Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia da Computação e Engenharia Elétrica

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre Rolim Fernandes

2a Lista de exercícios para AP3

1) Encontre as Transformadas de Laplace dos sinais abaixo e as respectivas regiões de convergência. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) $x(t) = e^{2t}u(t-1)$

b) $x(t) = e^{t}\frac{d}{dt}(tu(t))$

Solução:

a)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}u(t-1)e^{-st}dt = \int_{1}^{\infty} e^{(2-s)t}dt = \frac{1}{2-s}e^{(2-s)t}|_{1}^{\infty}$$

Se $\mathrm{Re}\{s\} < 2 \implies \mathrm{Re}\{2-s\} > 0 \implies X(s)$ não existe

Se $\mathrm{Re}\{s\} > 2 \implies \mathrm{Re}\{2-s\} < 0:$

$$X(s) = 0 - \frac{1}{2-s}e^{(2-s)} = \frac{e^{(2-s)}}{s-2}, \quad \text{RDC:} \quad \sigma > 2$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

Da tabela:

$$e^{2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-2}, \quad \sigma > 2$$

Usando a propriedade do deslocamento no tempo (olhar Tabela):

$$e^{2(t-1)}u(t-1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{-s}}{s-2}, \quad \sigma > 2$$

Multiplicando dos dois lados por e^2:

$$x(t) = e^{2t}u(t-1) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^{2-s}}{s-2}, \quad \sigma > 2$$

b)

Da tabela:

$$tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s^2}, \quad \sigma > 0$$

Usando a propriedade da diferenciação no tempo (olhar Tabela):

$$\frac{d}{dt}(tu(t)) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s}, \quad \sigma > 0$$

Usando a propriedade do deslocamento no domínio s (olhar Tabela):

$$x(t) = e^t\frac{d}{dt}(tu(t)) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-1}, \quad \sigma > 1$$

SOLUÇÃO ALTERNATIVA:

$$\frac{d}{dt}(tu(t)) = \frac{dt}{dt}u(t) + \frac{du(t)}{dt}t = u(t) + \delta(t)t = u(t) + \delta(t)0 = u(t)$$

.

Logo, $x(t) = e^t u(t)$. Olhando na Tabela:

$$X(s) = \frac{1}{s-1}, \quad \sigma > 1$$

2) Um sistema tem entrada e resposta ao impulso dadas respectivamente por: $x(t) = e^{-2t}u(t)$ e $h(t) = e^{3t}u(t)$. Usando Tranformada de Laplace, determine a saída $y(t)$ no domínio do tempo. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

Solução:

Da tabela:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2$$

$$h(t) = e^{3t}u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

Usando a propriedade da Convolução (olhar Tabela)

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) = X(s)H(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s-3)}, \quad \sigma > -2 \quad \cap \quad \sigma > 3 \quad = \quad \sigma > 3$$

Usando expansão em frações parciais:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s-3}$$

$$A_1 = Y(s)(s+2)|_{s=-2} = \frac{-1}{5}$$

$$A_2 = Y(s)(s-3)|_{s=3} = \frac{1}{5}$$

$$Y(s) = \frac{-1/5}{s+2} + \frac{1/5}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

Da tabela:

$$y(t) = -1/5e^{-2t}u(t) + 1/5e^{3t}u(t)$$

3) Um sistema linear e invariante no tempo é representado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{9}{2}\frac{d}{dt}y(t) - \frac{5}{2}y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t) - 4x(t).$$

É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine a Função de Transferência deste sistema.

b) Determine a resposta ao impulso deste sistema sabendo que ele é estável.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula:

$$H(s) = \frac{3s - 4}{s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{5}{2}}$$

b) Calculano os polos:

$s^2 - \frac{9}{2}s - \frac{5}{2} = 0$, $\Delta = \frac{81}{4} + \frac{20}{2} = \frac{121}{4}$, $x_1 = \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = 5$, $x_2 = \frac{9}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{3s - 4}{(s - 5)(s + \frac{1}{2})}$$

Usando expansão em frações parciais:

$$H(s) = \frac{A_1}{s - 5} + \frac{A_2}{s + \frac{1}{2}}$$

$$A_1 = H(s)(s - 5)|_{s=5} = \frac{11}{5.5} = 2$$

$$A_2 = H(s)(s + \frac{1}{2})|_{s=-\frac{1}{2}} = \frac{-1.5 - 4}{-0.5 - 5} = 1$$

$$H(s) = \frac{2}{s - 5} + \frac{1}{s + \frac{1}{2}}$$

Dado que o sistema é estável, a RDC deve conter a circunferência de raio unitário, ou seja, a RDC é $-\frac{1}{2} < \sigma < 5$.

Assim, a RDC associada a $\frac{2}{s-5}$ é $\sigma < 5$ e a RDC associada a $\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$ é $-\frac{1}{2} < \sigma$

Da tabela:

$$h(t) = -2e^{5t}u(-t) + e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

4) Um sistema linear e invariante no tempo possui a seguinte Função de Transferência:

$$H(s) = \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 3)}.$$

É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine uma equação diferencial que respresente este sistema.

b) Trace o diagrama de polos e zeros deste sistema.

c) Determine a região de convergência deste sistema supondo que ele que ele é estável.

d) Determine a região de convergência deste sistema supondo que ele que ele é causal.

e) Este sistema pode ser estável e causal? Justifiue sua resposta.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula:

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s - 3}.$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 2\frac{d}{dt}y(t) - 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + 2x(t).$$

b)

Zeros: $s = -2$

Polos: $s = -1$ e $s = 3$

Não vou desenhar, mas você deveria desenhar o diagrama de polos e zeros de acordo com os polos e zeros acima indicados.

c) Se o sistema é estável, então a RDC deve conter a circunferência de raio unitário, ou seja, $-1 < \sigma < 3$.

d) Se o sistema é causal, então a RDC deve ser do polo de maior parte real para a direita, ou seja, $\sigma > 3$.

e) O sistema não pode ser estável e causal ao mesmo tempo pois possui um polo no semiplano direito (polo com parte real positiva).

5) Um sistema causal linear e invariante no tempo é representado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}y(t) - 3y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t).$$

Sabendo que a entrada deste sistema é dada por: $x(t) = e^{-t}u(t)$, responda às questões abaixo. É permitido usar os resultados das tabelas em anexo.

a) Determine a Função de Transferência $H(s)$ deste sistema e sua RDC.

b) Determine a Transformda de Laplace $X(s)$ da entrada e sua RDC.

c) Determine a Transformda de Laplace $Y(s)$ da saída e sua RDC.

d) Determine o sinal de saída $y(t)$.

Solução:

a) Usando os resultados estudados em sala de aula (sistema causal):

$$H(s) = \frac{s+1}{s-3}, \quad \sigma > 3$$

b) Da tabela:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \sigma > -1$$

c) Usando a propriedade da convolução:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+1}{s-3}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{s-3}$$

A RDC de $Y(s)$ seria igual à interceção das RDC de $X(s)$ e $H(s)$ caso não tivesse havido cancelamento de polos. No entanto o polo em $s = -1$ de $X(s)$ foi cancelado com o zero em $s = -1$ de $H(s)$.

Se não tivesse ocorrido o cancelamento de polo de $X(s)$, a RDC de $Y(s)$ seria $RDC_y = RDC_x \cap RDC_H = \{\sigma > -1\} \cap \{\sigma > 3\} = \{\sigma > 3\}$.

Entretanto, como houve o cancelamento de polos em $s = -1$, nós devemos desconsiderar este polo para o cálculo da RDC. Assim, temos: $RDC_y = \{\sigma > 3\}$.

d) Da tabela:

$y(t) = e^{3t}u(t)$

Tabelas auxiliares

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{A_k}{s-d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) > d_k$$

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A_k}{s-d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) < d_k$$

Sinal	*Transformada*	*RDC*
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\delta(t-\tau), \quad \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	para todos s
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$[\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_1^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$[\mathrm{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{s^3+\omega_1^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at}\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at}\mathrm{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$

D.2 Propriedades da Transformada de Laplace

Sinal	Transformada Unilateral	Transformada Bilateral	RDC
$x(t)$	$X(s)$	$X(s)$	R_x
$y(t)$	$Y(s)$	$Y(s)$	R_y
$ax(t)+by(t)$	$aX(s)+bY(s)$	$aX(s)+bY(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$ se $x(t-\tau)u(t)=x(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R_x
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s-s_o)$	$X(s-s_o)$	$R_x - \mathrm{Re}\{s_o\}$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{\lvert a\rvert}$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$X(s)Y(s)$	No mínimo $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)-x(0^+)$	$sX(s)$	No mínimo R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^+} x(\tau)\,d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	No mínimo $R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\}>0\}$