3. Álgebra de conjuntos

* Diagrama de Venn

— Diagramas de Venn (John Venn [1834-1923]) → diagramas universalmente conhecidos que usam figuras geométricas, em geral representados no plano, para expressar as estruturas da teoria dos conjuntos.

— Teorema (Transitividade da continência): Seja A, B e C conjuntos quaisquer. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$

* Paradoxo de Russell

— Conjunto: é uma coleção de zero ou mais elementos distintos que não possuem qualquer ordem associada.

— Conjunto ordinário: conjunto que não pertence a si mesmo

— Teorema (paradoxo de Russell [filósofo Bertrand Russell: 1872-1970]): A seguinte definição não é um conjunto: $S = \{A \mid A$ é um conjunto ordinário$\}$

— A notação por compreensão permite definir algo que não é conjunto!

— Pelo paradoxo de Russel:

- Não existe o conjunto de todos os conjuntos

ou seja,

- Nem toda a coleção de elementos (definida por compreensão) constitui um conjunto.

— Forma de evitar o paradoxo de Russel (quando o objetivo é definir um conjunto por compreensão) → restringir que a, em $\{a \mid p(a)\}$, assuma valores em um determinado conjunto A, ou seja, $\{a \in A \mid p(a)\}$

— Consequência do paradoxo de Russel na definição de uma estrutura matemática sobre uma coleção de elementos:

- Estrutura pequena → se a coleção de elementos é um conjunto
- Estrutura grande → se a coleção de elementos não é um conjunto

— Álgebra de conjuntos → álgebra grande.

— Sobre uma álgebra pequena → deve-se considerar um dado conjunto universo U.

* Operações não reversíveis

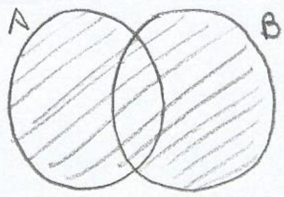
— Operação não reversível → é uma operação a partir de cujo resultado não pode-se recuperar os operandos originais.

— Operações não reversíveis sobre a álgebra de conjuntos:

- União
- Intersecção

— Definição (União): Sejam A e B conjuntos. Então:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



← diagrama de Venn de $A \cup B$

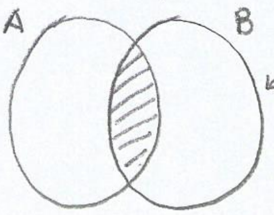
— Relacionamento da união com a lógica: $\cup$ com $\vee$

— Propriedades da união (Sejam A, B e C conjuntos):

- Elemento neutro: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
- Idempotência: $A \cup A = A$
- Comutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

— Definição (Intersecção): Sejam A e B conjuntos. Então:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



← diagrama de Venn de $A \cap B$

— Relacionamento da intersecção com a lógica: $\cap$ com $\wedge$

— Propriedades da intersecção (Sejam A, B e C conjuntos e o conjunto universo U):

- Elemento neutro: $A \cap U = U \cap A = A$
- Idempotência: $A \cap A = A$
- Comutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

— Propriedades envolvendo $\cup$ e $\cap$:

- Distributividade da $\cap$ sobre a $\cup$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Distributividade da $\cup$ sobre a $\cap$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Absorção: $A \cap (A \cup B) = A$
  $A \cup (A \cap B) = A$

* Operações reversíveis

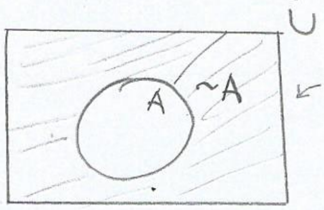
— Operação reversível → é uma operação a partir de cujo o resultado pode-se recuperar os operandos originais.

— Operações reversíveis sobre a álgebra de conjuntos:

- Complemento
- Conjunto das partes
- Produto cartesiano
- União disjunta

— Definição (complemento): Suponha o conjunto universo U. O complemento de um conjunto $A \subseteq U$ é definido por:

$$\sim A \text{ (ou } A') = \{x \in U \mid x \notin A\} \text{ ou } \{x \in U \mid \sim(x \in A)\}$$



← diagrama de Venn de $\sim A$

— Reversão do complemento: $\underbrace{\sim(\sim A)}_{\text{duplo complemento}} = A$

— Propriedade de DeMorgan:

$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$

$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

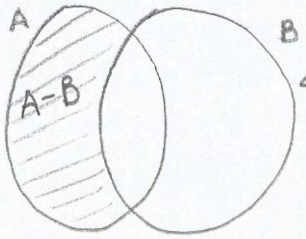
$\Rightarrow$ $A \cap B = \sim(\sim A \cup \sim B)$

$A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B)$

— Relacionamento do complemento com a lógica: $\sim$ com $\neg$

— Definição (Diferença): Sejam A e B conjuntos. A diferença dos conjuntos A e B é definida como:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$



← diagrama de Venn de $A-B$

Não é uma operação reversível!

— $A - B = A \cap \sim B$

— Definição (conjunto das partes, conjunto potência): Suponha um conjunto A. O conjunto das partes de A ou conjunto potência de A é definido como:

$$P(A) \text{ ou } 2^A = \{ X \mid X \subseteq A \}$$

— Número de elementos de $P(A)$ ($|P(A)|$) $= 2^n$, onde n = número de elementos de A ($|A|$)

— $\emptyset \subseteq A$, para todo A

— Possibilidade de $P(A)$: Seja $P(A) = \{ P_1, P_2, \ldots \}$. Então,

$\bigcup P_i = A$ (união de todos os elementos de $P(A)$)

— Definição (sequência finita): Uma sequência de n componentes denominada n-upla ordenada, consiste de n objetos (não necessariamente distintos) em uma ordem fixa. Notação: $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

— Par ordenado: $\langle x, y \rangle$ ou $\langle x_1, x_2 \rangle$

— $\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle$ se, e somente se, $x = a$ e $y = b$

— Definição (produto cartesiano): Sejam A e B conjuntos. O produto cartesiano dos conjuntos A e B é definido como:

$$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \text{ e } b \in B \}$$

— $A \times A = A^2$; $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

— Relativamente ao produto cartesiano:

- Não comutatividade → $B \times C \neq C \times B$
- Não associatividade → $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$

— Propriedades do produto cartesiano (suponha A, B e C conjuntos):

- Distributividade sobre a união: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- Distributividade sobre a intersecção: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \cap C)$

— Reversibilidade do produto cartesiano $A \times B$: O primeiro operando (respectivamente, o segundo operando) é o conjunto constituído por todos os elementos da primeira (respectivamente, da segunda) componente dos pares do produto cartesiano.

— Definição (União Disjunta): Sejam A e B conjuntos. A união disjunta dos conjuntos A e B é definida por:

$$A + B \text{ (ou } A \dot{\cup} B) = \{\langle a, A\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, B\rangle \mid b \in B\}$$

ou

$$= \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle b, 1\rangle \mid b \in B\}$$

ou

$$= \{a_A \mid a \in A\} \cup \{b_B \mid b \in B\}$$

— Reversibilidade da união disjunta → como cada elemento possui uma identificação de qual conjunto é originário (por definição), então os operandos podem ser reconstruídos.

* Relação entre lógica e álgebra de conjuntos

— Conectivos lógicos X operações sobre conjuntos

• idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$A \cap A = A$
	$p \vee p \Leftrightarrow p$	$A \cup A = A$
• comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge q$	$A \cap B = B \cap A$
	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$A \cup B = B \cup A$
• associativa	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
• distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- negação/complemento: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ $\quad \sim\sim A = A$
  $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $\quad A \cap \sim A = \emptyset$
  $p \vee \neg p \Leftrightarrow V$ $\quad A \cup \sim A = U$

- De Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ $\quad \sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\quad \sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

- elemento neutro: $p \wedge V \Leftrightarrow p$ $\quad A \cap U = A$
  $p \vee F \Leftrightarrow p$ $\quad A \cup \emptyset = A$

- elemento absorvente: $p \wedge F \Leftrightarrow F$ $\quad A \cap \emptyset = \emptyset$
  $p \vee V \Leftrightarrow V$ $\quad A \cup U = U$

- absorção: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $\quad A \cap (A \cup B) = A$
  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $\quad A \cup (A \cap B) = A$

— Relações lógicas x relações sobre conjuntos:

- implicação/continência: $p \Rightarrow q$ $\quad A \subseteq B$
- equivalência/igualdade: $p \Leftrightarrow q$ $\quad A = B$

$A = \{x \mid p(x)\}$ e $B = \{x \mid q(x)\}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in U, p(x) \Rightarrow q(x)$

$A = B \Leftrightarrow \forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow q(x)$

— $A = U \Leftrightarrow \forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow V$

— $A = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow F$