A noção de conjunto permite definir outro tipo de coleção, denominada **lista**, também importante na matemática discreta e na análise combinatória. **Lista** é uma coleção ordenada de objetos (chamados elementos) distintos ou não (ou seja, com ou sem repetição), pertencentes a um ou diversos conjuntos. Uma lista é representada por meio da sequência ordenada de seus elementos separados por vírgula e limitados por parênteses, ( ), ou chevrons, ⟨ ⟩: $(a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_j},...)$ ou $\langle a_{i_1}, a_{i_2},..., a_{i_j},...\rangle$, onde $a_{i_j} \in M_j$ é o j-ésimo elemento da lista. Se $M_j = M$, então a lista é representa por $(a_1, a_2, a_3,..., a_i,...)$, onde $a_i \in M$ é o i-ésimo elemento da lista, com $i = 1, 2, 3,...$ Por ser ordenada, a posição em que um elemento está na lista é relevante, tornando-o diferente dos demais (apesar de poder estar repetido). O número de objetos de uma lista é seu **tamanho**. Listas de tamanho k são denominadas de ***k*-uplas**. Uma lista de tamanho dois (*2*-upla) é chamada de **par ordenado** ou **dupla** enquanto que a de tamanho três, de **terna**. Da mesma forma que em conjuntos, uma lista que não apresenta elementos é chamada de **lista vazia** sendo representada por parênteses sem conteúdo, isto é, ( ). O tamanho k de uma lista vazia é 0 (*0*-upla).

Exemplo: a) (1, 2, 3); b) (3, 2, 1); c) (a, b, c, c, c). As listas em a) e b) representam listas diferentes (apesar de formadas pelos mesmos elementos: 1, 2 e 3) de tamanho três enquanto que a lista em c) tem tamanho cinco (apesar de apresentar elementos repetidos).

Exemplo: O conjunto de todos os pares ordenados (x, y) (listas de tamanho 2) de números reais formam o chamado **plano numérico** sendo denotado por $\boldsymbol{R}^2$. Ou seja, $\boldsymbol{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \boldsymbol{R}\}$. Cada par ordenado (x, y) forma um **ponto** P no plano numérico. Da mesma forma que cada número real pode ser representado geometricamente por um ponto do eixo numérico, cada par ordenado (x, y) pode ser associado com um ponto P de um **plano geométrico** (**espaço bidimensional**). Uma reta ou eixo numérico horizontal (chamado **eixo *x***) é escolhido para representar o primeiro número do par ordenado, ou seja, o número x, denominado de **abscissa** (ou **coordenada *x***). Da mesma forma, uma reta ou eixo numérico vertical (chamado **eixo *y***) é escolhido para representar o segundo número do par ordenado, ou seja, o número y, denominado de **ordenada** (ou **coordenada** y). O ponto de intersecção das duas retas é atribuído como a origem O e uma unidade de medida é escolhida. Tomando-se como base a origem O, um par ordenado (x, y) pode ser associado a um ponto P localizado no plano geométrico por meio do ponto de intersecção de uma reta vertical que passa pelo valor da coordenada x no eixo x com uma reta horizontal que passa pelo valor da coordenada y no eixo y. A abcissa e a ordenada de um ponto no plano geométrico são denominadas **coordenadas cartesianas** ou **coordenadas retangulares** (Fig.1.2.1a). De forma similar ao procedimento feito para o plano numérico, o conjunto de todas as ternas ordenadas (x, y, z) (listas de tamanho 3) de números reais formam o chamado **espaço numérico** sendo denotado por $\boldsymbol{R}^3$. Ou seja, $\boldsymbol{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$. Cada terna ordenada (x, y, z) forma um **ponto** P no espaço numérico que pode ser representado geometricamente por um ponto P em um **espaço geométrico** (**espaço tridimensional**). Neste espaço temos três eixos (**eixos *x*, *y*** e ***z***) mutuamente ortogonais (perpendiculares entre si) cujo ponto de intersecção é chamado de origem O e no qual foi escolhida uma unidade de medida. Os eixos x e y, x e z e os eixos y e z formam os planos xy, xz e yz. A qualquer ponto P do espaço tridimensional vai corresponder uma terna (x, y, z), chamadas coordenadas de P e denominadas respectivamente de **abscissa** (x), **ordenada** (y) e **cota** (z). Para se obter a abscissa de P, tracemos por P um plano paralelo ao plano yz; o ponto de interseção deste plano com o eixo x tem, neste eixo, uma coordenada x, que é a abcissa de P. Para se obter a ordenada de P, tracemos por P um plano paralelo ao plano xz; o ponto de interseção deste plano com o eixo y tem, neste eixo, uma coordenada y, que é a ordenada de P. Finalmente, Para se obter a cota de P, tracemos por P um plano paralelo ao plano xy; o ponto de interseção deste plano com o eixo z

tem, neste eixo, uma coordenada *z*, que é a cota de *P* (Fig.1.2.1b). Este esquema reticulado (que se assemelha a uma rede) necessário para especificar pontos no espaço bidimensional ou tridimensional é chamado **sistema de coordenadas cartesianas** ou **sistema de coordenadas retangulares**. Este sistema foi desenvolvido pelo matemático e filósofo francês e filósofo *René Descartes* (1596 – 1650).

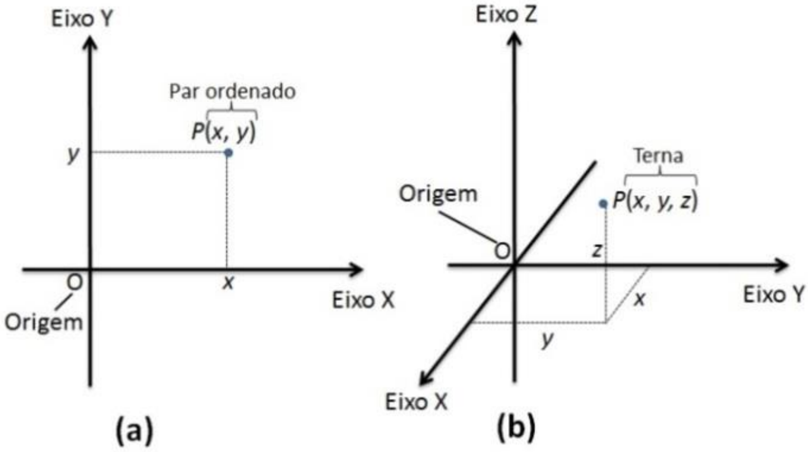

Fig. 1.2.1

Exemplo: Uma circunferência de raio *r* pode ser representada como um conjunto de pares ordenados de números reais que satisfaçam a equação $x^2 + y^2 = r^2$, ou seja:

$$\{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 = r^2, \text{ com } x, y \in \boldsymbol{R}\}$$

Da mesma forma, uma espera de raio *r* pode ser representada como um conjunto de ternas, de forma que:

$$\{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \text{ com } x, y, z \in \boldsymbol{R}\}$$

Exemplo: Listas também podem representar agrupamentos de objetos concatenados ou justapostos, já que tanto a ordem como as repetições são relevantes. O agrupamento 01001 corresponde à lista (0, 1, 0, 0, 1); a palavra “casa” pode ser representada pela lista (c, a, s, a); os números 554 e 3,1416 por (5, 5, 4) e (3, ,, 1, 4, 1, 6) respectivamente.

Exemplo: Dado um alfabeto **Σ**, uma palavra neste alfabeto pode também ser definida como uma lista de caracteres do alfabeto (já que uma palavra é uma concatenação de caracteres de **Σ**). A palavra vazia ***ε*** é uma lista vazia neste alfabeto.

Na teoria dos conjuntos, uma lista de dois elementos (par ordenado) pode ser definida como um conjunto tal que $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Assim,

$$(x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$$

e

$$(y, x) = \{\{y\}, \{y, x\}\} \neq \{\{x\}, \{x, y\}\} = (x, y).$$

Esta definição foi formulada pelo matemático polonês *Kazimierz Kuratowski* (1896 – 1980), em 1921.

Teorema (princípio da multiplicação): *Sejam listas de k elementos (tamanho k),* com *k ≥ 1 onde há n_i possibilidades de escolha para cada i-ésimo elemento da lista (i = 1, 2, 3,...,k). Então, o número de listas de tamanho k que podemos formar será dado por:*

$$\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_i \times \ldots \times n_{k-1} \times\ n_k = n_1 n_2 \ldots n_i \ldots n_{k-1}\, n_k$$

Prova:
Seja uma lista (a_1, a_2, a_3,...,a_i,..., a_k) com n_i possibilidades de escolhas para cada elemento a_i (elemento na *i-ésima* posição na lista). Assim, na primeira posição temos n_1 possibilidades; na segunda posição, n_2 possibilidades para cada uma das n_1 possibilidades (n_1n_2 possibilidades); na *i-ésima* posição, n_i possibilidades para cada uma das $n_1n_2...n_{i-1}$ possibilidades ($n_1n_2... n_{i-1}n_i$ possibilidades). Logo, na *k-ésima* posição, teremos:

$$n_1n_2 \ldots n_i \ldots n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i \quad (cqd)$$

O símbolo "Π", que corresponde a forma maiúscula da letra grega *pi* (π na forma minúscula), é utilizado para representar o chamado **produtório**, ou seja, o produto de termos entre si. A construção geral do produtório é dada por

$$\prod_{i=j}^{i=k} F(i) \text{ ou } \prod_{i=j}^{k} F(i) = F(j)F(j+1)\ldots F(k-1)F(k)\,,$$

onde i (chamado índice do produtório) assume valores sucessivos de j (limite inferior do produtório) até k (limite superior do produtório), ou seja, $j \leq i \leq k$, com i, j, $k \in \boldsymbol{N}$. $F(i)$ representa uma expressão algébrica (uma expressão matemática que apresenta números, letras e operações) cujos $[(k-j)+1]$ valores dependem de i e que são multiplicados entre si (à medida que i varia de j até k). O índice i do produtório é uma **variável muda**, pois ela especifica o local que está sendo alterado na $F(i)$.

Exemplo: Seja $F(i) = 2i + 1$. Então,

$$\prod_{i=0}^{3} \underbrace{(2i+1)}_{F(i)} = [2(0)+1][2(1)+1][2(2)+1][2(3)+1] = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$$

Exemplo: Seja $F(i) = \frac{i+1}{i}$. Então,

$$\prod_{i=1}^{k} \underbrace{\frac{i+1}{i}}_{F(i)} = \left(\frac{1+1}{1}\right)\left(\frac{2+1}{2}\right)\ldots\left(\frac{k+1}{k}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{k-1}{k-2}\right)\left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right) = k+1$$

Exemplo: Seja $F(i) = c$, onde c é uma constante. Então,

$$\prod_{i=j}^{k} F(i) = F(j)F(j+1)\ldots F(k-1)F(k) = \underbrace{c \ldots c \ldots c}_{[(k-j)+1]\ vezes} = c^{[(k-j)+1]}$$

Exemplo: Seja $F(i) = cG(i)$, onde c é uma constante. Então,

$$\prod_{i=j}^{k} F(i) = \prod_{i=j}^{k} cG(i) = cG(j)cG(j+1)\ldots cG(k-1)cG(k) =$$

$$= \Big(\underbrace{c \ldots c \ldots c}_{[(k-j)+1]\ vezes}\Big)\ G(1)G(2)\ldots G(i)\ldots G(k-1)G(k) = c^{[(k-j)+1]} \prod_{i=j}^{k} G(i)$$

Exemplo: Seja $F(i) = G(i)H(i)$. Então,

$$\prod_{i=j}^{k} F(i) = \prod_{i=j}^{k} G(i)H(i) = G(j)H(j)G(j+1)H(j+1)\ldots G(k-1)H(k-1)G(k)H(k) =$$

$$= G(j)G(j+1)\ldots G(k-1)G(k)H(j)H(j+1)\ldots H(k-1)H(k) = \left(\prod_{i=j}^{k} G(i)\right)\left(\prod_{i=j}^{k} H(i)\right)$$

Exemplo: Seja $F(i) = \frac{G(i)}{H(i)}$. Então,

$$\prod_{i=j}^{k} F(i) = \prod_{i=j}^{k} \left[\frac{G(i)}{H(i)}\right] = \left[\frac{G(j)}{H(j)}\right]\left[\frac{G(j+1)}{H(j+1)}\right]\ldots\left[\frac{G(k-1)}{H(k-1)}\right]\left[\frac{G(k)}{H(k)}\right] =$$

$$= \frac{G(j)G(j+1)\ldots G(k-1)G(k)}{H(j)H(j+1)\ldots H(k-1)H(k)} = \frac{\prod_{i=j}^{k} G(i)}{\prod_{i=j}^{k} H(i)}$$

Se pelo menos algum n_i for igual à zero, pelo princípio da multiplicação, o número de listas de tamanho k ($k \geq 1$) será zero, pois não havendo a possibilidade de escolha para algum *i-ésimo* elemento da lista, não se pode formar listas de tamanho k. Entretanto, o princípio da multiplicação não se aplica no caso de listas de tamanho zero (não permite determinar o número de listas para $k = 0$). Quanto $k = 0$ e n_i for um número natural, teremos uma única lista possível, a lista vazia, pois há exatamente uma maneira de ordenar zero elementos.

Exemplo: Sejam os com juntos $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. O número de pares ordenados que podem ser formados, cujo primeiro elemento pertence a A e o segundo a B será o número de elemento de A, 2, vezes o número de elementos de B, 3, ou seja, 6: $(a,1)$, $(a, 2)$, $(a, 3)$, $(b, 1)$, $(b, 2)$, $(b, 3)$.

Exemplo: Queremos formar centenas, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Se C representa a centena, D a dezena e U a unidade, então associamos a cada número de três algarismos uma lista do tipo (C, D, U). Desta forma, a quantidade de centenas que podemos formar a partir dos algarismos de 0 a 9 é igual ao número de listas do tipo (C, D, U) que podem ser construídas com estes números. Como C pode assumir nove valores (o algarismo 0 não conta, pois caso contrário o número deixa de ser centena), D e U dez valores então podemos formar $9 \times 10 \times 10 = 900$ centenas.

Exemplo: Em um restaurante há 5 tipos de saladas, 8 tipos de pratos quentes e 5 tipos de sobremesas. O problema de determinar quantas possibilidades de fazer uma refeição formada por um tipo de salada, um tipo de prato quente e um tipo de sobremesa pode ser traduzido em um problema envolvendo listas. Seja a lista (*Sa*, *PQ*, *So*) que representa uma possibilidade de refeição, onde *Sa* é o tipo de salada, *PQ* é o tipo de prato quente e *Sb* o tipo de sobremesa. Como temos 5 possibilidades para *Sa*, 8 possibilidades para *PQ* e 5 possibilidades para *Sb*, então teremos ao todo $5 \times 8 \times 5 = 200$ listas ou possibilidades de refeições.

Podemos observar que o problema da contagem do número de agrupamentos de k elementos ordenados que podem ser formados com determinados objetos (com e sem repetição) está associado ao número de listas possíveis (de tamanho k) a partir de um ou mais conjuntos. Convém lembrar que um agrupamento de elementos de um conjunto pode ser formado pela concatenação (ou justaposição) dos elementos deste conjunto.

Seja um conjunto com n elementos. Utilizando o princípio da multiplicação, o número de agrupamentos ordenados de k ($k \geq 1$) elementos que podemos formar com este conjunto (número de listas de tamanho k a partir de um conjunto de tamanho n) será dado por:

$$\prod_{i=1}^{k} n = \underbrace{nnnnnn\,...}_{k\ vezes} = n^k$$

Exemplo: Em ciência da computação e **teoria da informação** (estuda a quantificação, armazenamento e comunicação da informação), um bit (do inglês, "**bi**nary digi**t**") é a menor unidade de informação que pode ser armazenada ou transmitida, podendo assumir dois valores: 0 e 1. O termo bit foi introduzido em 1946 pelo matemático e estatístico americano *John Wilder Tukey* (1915 – 2000). Uma sequência de bits de comprimento n é uma concatenação de 0´s e 1´s (...01001101...) que pode ser tratada como uma lista de tamanho n. Consequentemente, podemos construir 2^n sequências de bits de comprimento n. Assim, se $n = 3$, teremos $2^3 = 8$ sequências de 3 bits, que podem ser representados pela justaposição de 0 e 1: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, e 111; ou ainda, na forma de listas: (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), e (1, 1, 1). Em particular, uma sequência de 8 bits ($n = 8$) é chamada de **byte** (1 byte = 8 bits). Logo, com 1 byte podem ser formadas $2^8 = 256$ listas (ou agrupamentos) diferentes de comprimento igual a 8 bits. Também é comum a utilização de múltiplos do byte como o kilobyte (KB) = 1024 bytes, megabyte (MB) = 1024 KB, gigabyte (GB) = 1024 MB e o terabyte (TB) = 1024 GB.

Seja N um conjunto de n elementos. Denominam-se **arranjos de *n* elementos, tomados *k* a *k*** ($k \leq n$) do conjunto N, aos agrupamentos de tamanho k, ordenados e sem repetição, formados com os elementos de N. O conjunto destes arranjos será denotado por $A(n, k)$. Cada arranjo (elemento) do conjunto $A(n, k)$ pode ser representado, de forma única, por uma lista de tamanho k, sem repetição, formada a partir do conjunto N. Desta forma, o conjunto de arranjos $A(n, k)$ pode ser associado ao conjunto de listas de tamanho k, sem repetição, que podemos formar a partir de um conjunto N de n elementos.

Exemplo: O conjunto de arranjos de 2 elementos (tamanho 2) que podemos formar com os números 0 e 1 (conjunto {0, 1}) é $A(2, 2) = \{01, 10\}$ (na forma de justaposições ou concatenações de 0´s e 1´s) ou $A(2, 2) = \{(0, 1), (1,0)\}$ (na forma de listas de 0´s e 1´s).

O número total de arranjos de n elementos, tomados k a k, (ou seja, a potência $|A(n, k)|$ de $A\ (n, k)$) pode ser determinado por meio da contagem do número de listas sem repetição de tamanho k, formadas a partir de um conjunto de n elementos. Quando não admitimos repetições, então temos $n - i$ possibilidades de escolhas para cada elemento $a_{(1+i)}$ da lista (elemento na $(1 + i)$-*ésima* posição da lista), com $i = 0, 1, 2,..., k - 1$. Então, utilizando-se o princípio da multiplicação, teremos:

$$|A(n,k)| = \underbrace{n(n-1)(n-2)\,...\,[n-(k-1)]}_{k\ vezes} = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\,, \text{com } 1 \leq k \leq n$$

Exemplo: O número de arranjos de 2 elementos (tamanho 2) que podemos formar com os números 0 e 1 é $|A(2, 2)| = 2 \times 1 = 2$ arranjos.

Exemplo: O número de arranjos de 4 elementos (tamanho 4) que podemos formar com as letras a, b, c, d, e, f será dado por: $|A(6, 4)| = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ arranjos.

Exemplo: Quantos números ímpares de 4 algarismos, não repetidos, podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9? Para que um número de 4 algarismos seja ímpar, deve terminar em 1, 3, 5, 7 ou 9. Sendo assim, para cada um destes algarismos finais (que são em número de 5), temos arranjos de 8 algarismos (pois um dos ímpares está fixo na última posição para que o número seja ímpar) agrupados 3 a 3 (pois uma das posições é fixa, restando 3). Sendo assim, teremos $5 \times |A(8, 3)| = 5 \times (8 \times 7 \times 6) = 1680$ arranjos.

Quando $k = n$, os arranjos são chamados de **permutações de *n* elementos**. O conjunto destas permutações será denotado por $P(n)$. Então, a potência do conjunto $P(n)$ (número de permutações), será:

$$|P(n)| = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots 1}_{n\ vezes} = \prod_{i=0}^{n-1}(n-i) = n! = \prod_{i=1}^{n} i\,,\text{com } n \geq 1$$

onde a quantidade $n!$ é chamada de fatorial do número inteiro positivo n. Da definição de fatorial, temos que:

$$1! = |P(1)| = 1$$

e

$$n! = |P(n)| = n\,\underbrace{(n-1)(n-2)\ldots 1}_{(n-1)!} = n(n-1)!$$

Logo, $1! = 1(1-1)! = 1(0!)$ e assim, $0! = 1$. Desta forma, podemos definir o valor de $n!$ de forma mais geral, para todo o $n \in \boldsymbol{N}$ como:

$$n! = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i\,,\text{para } n \geq 1 \\ 1,\text{para } n = 0 \end{cases}$$

A partir da definição de $n!$ (para $n \geq 0$), podemos convencionar um valor para a situação de $j > k$ em

$$\prod_{i=j}^{k} F(i)$$

Como neste caso não ha valores possíveis para i com $j \leq i \leq k$, considera-se que não é realizado nenhum produto (produto de nenhum número) e o produtório é denominado de **produtório vazio** ou também **produto vazio** (ver *Scheinerman*, *2006* e *Graham*, *1995*). Por definição, com base no fato de que $0! = 1$, é atribuído o valor 1 ao produtório vazio. Ou seja:

$$\prod_{i=j,j>k}^{k} F(i) = 1\,,$$

Exemplo: Seja $F(i) = i$. Então,

$$\prod_{i=1}^{0} F(i) = \prod_{i=1}^{0} i = 1$$

Assim, $n!$ pode ser definido através da incorporação do conceito de produtório vazio, obtendo-se:

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i\,,\text{para } n \geq 0$$

Se o conjunto for vazio ($n = 0$) então $P(0)$ será formado por apenas um elemento, a lista vazia ($P(0) = \{(\ )\}$), e consequentemente, $|P(0)| = 1 = 0!$. Assim, $n!$ pode ser definido em termos do número de permutações que podemos formar com os elementos de um conjunto de tamanho n:

$$|P(n)| = n!\,,\text{com } n \in \boldsymbol{N}$$

Exemplo: Seja o conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$. O número de permutações que podemos formar com os elementos deste conjunto, ou seja, |P(6)| = 6! = 720 permutações.

Exemplo: Anagramas são diferentes disposições de letras de uma palavra, gerando novas palavras. O número de anagramas que podemos formar com a palavra CRAVO é |P(5)| = 5! = 120 anagramas.

Exemplo: Suponhamos que queremos determinar o número de anagramas da palavra CATARATA. Vemos que temos as letras A e T repetidas 4 e 2 vezes respectivamente. Se as letras A´s e as letras T´s forem tratadas como letras diferentes, ou seja, $CA_1T_1A_2RA_3T_2A_4$ então teríamos |P(8)| = 40320 anagramas (ou palavras) diferentes com estas letras. Entretanto, os A´s quando permutados (|P(4)|), não formam um novo anagrama. Sendo assim, devemos dividir |P(8)| por |P(4)|. O mesmo acontece com os T´s (|P(2)|). Ou seja, precisamos ainda dividir o resultado da divisão por |P(4)| também por |P(2)|. Assim, o número de anagramas da palavra CATARATA será dado por:

$$\frac{|P(8)|}{|P(4)||P(2)|} = \frac{8!}{4!\,2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{1680 \times 4!}{2 \times 4!} = \frac{1680}{2} = 840$$

De uma forma geral, o número de anagramas de uma palavra com n letras será dado por:

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!},$$

no qual k = número de letras diferentes e n_i = número de vezes que a i-ésima letra aparece na palavra (com $1 \le n_i \le n$)

Os matemáticos francês *Abraham de Moivre* (1667 – 1754) e escocês *James Stirling* (1692 – 1970) estabeleceram uma aproximação para $n!$, chamada de **fórmula (ou aproximação) de *Moivre – Stirling*** (mais conhecida como **fórmula de *Stirling***):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

onde, o símbolo "~" significa que a razão do termo da esquerda pelo termo da direita de "~" tende a 1 (→ 1), ou seja, se aproxima indefinidamente de 1 quando n cresce indefinidamente (n tende ao infinito, $n \to \infty$). A expressão da direita é chamada de **desenvolvimento assintótico** de $n!$, pois a fórmula de *Moivre – Stirling* tende para $n!$ quando $n \to \infty$. Desta forma,

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \to 1, \text{para } n \to \infty$$

ou ainda,

$$n! \to \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{para } n \to \infty$$

A fórmula de *Moivre – Stirling* é muito utilizada no cálculo de $n!$ quando n assume valores elevados reduzindo o número de operações a serem realizadas e consequentemente, o tempo de computação. Assim, em cálculos aproximados:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \text{quando } n \gg,$$

onde, o símbolo "≈" significa "aproximadamente igual a..." e "≫" significa "valores muito elevados de...".

Esta aproximação assintótica foi primeiramente formulada, de forma parcial, pelo matemático francês *Abraham de Moivre* (1667 – 1754), na seguinte forma:

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = Cn^n n^{\frac{1}{2}} e^{-n} = C(n^{n+\frac{1}{2}})e^{-n},$$

onde C era uma constante real, não nula, desconhecida. Posteriormente, Stirling determinou C como sendo $\sqrt{2\pi}$ completando assim, a demonstração (ver *Pearson, 1994*).

Exemplo: Seguem abaixo alguns fatoriais calculados exatamente pela definição de fatorial e aproximadamente pela fórmula de *Moivre – Stirling*. Também foi determinado o erro percentual relativo (e_r), uma forma de determinar o erro cometido na aproximação, de modo que:

$$e_r(\%) = \left(\frac{valor\ exato - valor\ pela\ fórmula\ de\ Stirling}{valor\ exato}\right) \times 100$$

a) 1! = 1 ≈ 0.922 (*Moivre – Stirling*), e_r = 7,80%;
b) 5! = 120 ≈ 118,019 (*Moivre – Stirling*), e_r = 1,65%;
c) 10! = 3628800 ≈ 3598695.618 (*Moivre – Stirling*), e_r = 0,82%
O erro percentual relativo vai se tornando menor à medida que *n* cresce.

Exemplo: Avaliar 50! pela fórmula de *Moivre – Stirling*.

$50! \approx \sqrt{2\pi 50}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}$. Então $log(50!) = log\left(\sqrt{2\pi 50}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\right)$, com *log* sendo igual ao logaritmo na base 10. Foi escolhida esta base, pois é inteira (e consequentemente exata) e não um número irracional como *e*, que não pode ser representado exatamente por uma sequência de números. Assim,

$$log(50!) = log\left(\sqrt{100\pi}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\right) = log\left[\sqrt{100}\sqrt{\pi}\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\right] = log(\sqrt{100}\sqrt{\pi}) + log\left[\left(\frac{50}{e}\right)^{50}\right] =$$

$$log(\sqrt{100}) + log(\sqrt{\pi}) + 50log\left[\left(\frac{50}{e}\right)\right] = \frac{1}{2}log(100) + \frac{1}{2}log(\pi) + 50(log\ 50\ - log\ e) =$$

$$\frac{1}{2}log(100) + \frac{1}{2}log(\pi) + 50\log 50 - 50\log e = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(0{,}4972) + 50(1{,}6990) -$$

$50(0{,}4343) = 64{,}4836$. Ou seja, $log(50!) = 64{,}4836$.

Então,

$$10^{log(50!)} = 10^{64{,}4836} \Leftrightarrow 50! = 10^{64+0{,}4836} = 10^{64}10^{0{,}4836} \approx 3{,}045 \times 10^{64}$$

Logo, $50! \approx 3{,}045 \times 10^{64}$

Seja $S = \{1, 2, ..., n\}$, $n \in \boldsymbol{N}$. O conjunto $P(n)$ das permutações dos elementos de *S* é normalmente denotado por S_n. Assim, S_n pode ser representado por um conjunto de listas:

$$S_n = \{(i_1, i_2, ..., i_j, ..., i_n) \,/\, i_j \in S, \text{ e } i_u \neq i_v \text{ para } u \neq v\}$$

Uma maneira usual de se representar cada permutação de S_n é por meio de uma matriz de números naturais, com duas linhas e *n* colunas ($2 \times n$), onde na primeira linha temos representados os elementos de *S* sequenciados em ordem crescente de 1 até *n* e na segunda linha, as diferentes permutações com estes elementos:

$$\pi_k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & j & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_j & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

onde $1 \leq k \leq n!$, $i_j \in S$, $(i_1, i_2, ..., i_j, ..., i_n) \in S_n$ e $i_u \neq i_v$ para $u \neq v$.

Exemplo: Seja $S = \{1, 2\}$. O conjunto S_2 formado pelas permutações dos elementos de *S* pode ser representado como:

S_2 = {(1, 2), (2, 1)} ou $S_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}\right\}$

Com $\pi_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ e $\pi_2 = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$

Exemplo: Seja S = {1, 2, 3}. O conjunto S_3 formado pelas permutações dos elementos de S pode ser representado como:

S_3 = {(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3)}

ou

$$S_2 = \{\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4,\ \pi_5,\ \pi_6\}$$

Com $\pi_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \pi_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix},$

$\pi_5 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ e $\pi_6 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

Podemos também expressar |A (n, k)| em termos de fatoriais:

$$|A(n,k)| = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)] =$$
$$= [n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)]\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

E assim,

$$|A(n,k)| = \frac{n!}{(n-k)!},\ \text{com } 0 \leq k \leq n$$

Há somente um arranjo de tamanho zero (que corresponde à lista vazia) que pode ser formado a partir de um conjunto de n elementos, ou seja, |A (n, 0)| = 1. Este valor pode ser obtido corretamente por meio da expressão de |A (n, k)| em termos de fatoriais:

$$|A(n,0)| = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$$

Exemplo: O número de arranjos de dois elementos que podem ser formados a partir de um conjunto de 9 elementos é dado por:

$$|A(9,2)| = 9 \times 8 = 72 \text{ ou } |A(9,2)| = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 9 \times 8 = 72$$

É comum também a utilização do termo permutação ao invés de arranjo na denominação de um agrupamento ordenado de objetos distintos (ver *Spiegel*, *1978; Gersting*, *2001;* e *Rosen, 2010*). Neste caso, para $k = n$ não há nenhuma denominação específica para estes agrupamentos. A nomenclatura adotada aqui é utilizada com o objetivo de diferenciar arranjos com $k \neq n$ de arranjos com $k = n$ (ver *Vilenkin, 1971*; *Hazzan, 1977*; *Yablonsky, 1986*; e *Lovász, 2013*).

Seja um conjunto de n elementos. Denominam-se **combinações de *n* elementos, tomados *k* a *k*** (0 ≤ k ≤ n), aos agrupamentos de tamanho k, não ordenados e sem repetição, formados com os elementos deste conjunto. Pela definição, uma combinação nada mais é que um subconjunto de tamanho k, do conjunto de tamanho n dado. O conjunto destas combinações será denotado por C(n, k). Assim, o número de combinações de k elementos (|C(n, k)|) formadas com elementos pertencentes a um dado conjunto é igual ao número de subconjuntos de tamanho k que podemos formar a partir deste conjunto.

Exemplo: Seja o conjunto $\{a, b, c\}$. As combinações de dois elementos que podemos formar com os elementos deste conjunto são: $C(3, 2) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Os elementos de $C(3, 2)$ são os únicos subconjuntos de tamanho dois que podemos formar a partir do conjunto $\{a, b, c\}$. Assim, $|C(3, 2)| = 3$.

Dado um conjunto de n elementos, para cada combinação de k elementos, podem ser formadas $|P(k)|$ permutações. Então, o número de arranjos de n elementos, tomados k a k ($k \leq n$) será dado por:

$$|A(n,k)| = |C(n,k)||P(k)|$$

Assim,

$$|C(n,k)| = \frac{|A(n,k)|}{|P(k)|} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Exemplo: Em um voo de uma companhia aérea, há 7 lugares vagos. Um grupo de 12 pessoas quer embarcar neste voo. O número de maneiras possível que estas pessoas têm de ocupar estes lugares é dado por:

$$|C(12,7)| = \frac{12!}{7!\,(12-7)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!\,5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5!} = \frac{95040}{120} = 792$$

Exemplo: Seja um hexágono, conforme Fig. 1.2.2. O número de diagonais (segmentos de reta que une dois vértices, com exceção dos lados), é determinado como segue. O número de segmentos de reta unindo dois vértices é dado por:

$$|C(6,2)| = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = 15$$

Nesses segmentos, além das diagonais, estão sendo contados também os lados do hexágono (que são seis segmentos de resta). Assim, o número de diagonais é dado por:

$$|C(6,2)| - 6 = 15 - 6 = 9$$

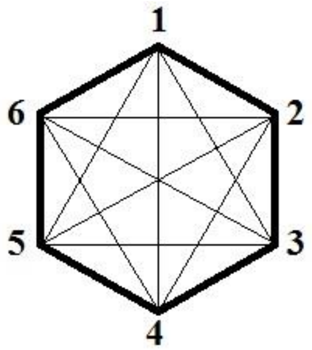

Fig. 1.2.2

Exemplo: Deseja-se formar uma comissão acadêmica formada de 6 membros, sendo 4 professores e 2 alunos. Para esta comissão temos como candidatos, 15 professores e 10 alunos. O número de possibilidades de composição da comissão pode ser determinado da seguinte forma:

Professores:

$$|C(15,4)| = \frac{15!}{4!\,(15-4)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11!}{4!\,11!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4!} = \frac{32760}{24} = 1365$$

Alunos:

$$|C(10,2)| = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2!\,8!} = \frac{10 \times 9}{2!} = 45$$

Número de comissões possíveis: $|C(15,8)|\,|C(30,2)| = 61425$

Da definição de $|C(n, k)|$ podemos obter também que:

$$|C(n,n-k)| = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = |C(n,k)|$$

E ainda que:

$$|C(n,k-1)| + |C(n,k)| = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)k!} =$$

$$\frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,(k-1)!\,k} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$\frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,k!} + \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)(n-k)!\,k!} =$$

$$\frac{n!\,k}{(n-k+1)!\,k!} + \frac{(n-k+1)n!}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{n!\,k + (n-k+1)n!}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{(n-k+1)!\,k!} =$$

$$\frac{n!\,(n+1)}{(n-k+1)!\,k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = |C(n+1,k)|$$

Assim,

$$|C(n+1,k)| = |C(n,k-1)| + |C(n,k)|,$$

ou como é também comumente expressa,

$$|C(n,k)| = |C(n-1,k-1)| + |C(n-1,k)|$$

Esta relação é conhecida como **relação de *Stifel*** em homenagem ao matemático alemão *Michael Stifel* (1487 – 1567), ou ainda, como **relação de *Pascal*,** em homenagem ao físico e matemático francês *Blaise Pascal* (1623 – 1662). Ambos trabalharam com esta relação em épocas diferentes.

Exemplo: Sejam $n = 5$ e $k = 2$. Então, $|C(5, 5 - 2)| = |C(5, 3)| = |C(5, 2)|$. De fato,

$$|C(5,3)| = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\,2!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$$

$$|C(5,2)| = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{2!\,3!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$$

Assim, $|C(5, 5 - 2)| = |C(5, 3)| = |C(5, 2)| = 10$ (*cqd*).

Exemplo: $|C(5, 3)| = |C(4, 2)| + |C(4, 3)|$. De fato,

$$|C(5,3)| = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\,2!} = \frac{5\times4}{2!} = 10$$

$$|C(4,2)| = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4\times3\times2!}{2!\,2!} = \frac{4\times3}{2!} = 6$$

$$|C(4,3)| = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4\times3!}{3!\,1!} = \frac{4\times3!}{3!} = 4$$

Assim, $|C(5, 3)| = |C(4, 2)| + |C(4, 3)| = 10$ (*cqd*)

Utilizando-se a relação de *Stifel*, podem-se dispor $|C(n, k)|$ na forma de uma tabela triangular infinita mais conhecida como **triângulo de *Pascal*** (Fig. 1.2.3), em homenagem a *Blaise Pascal*. O triângulo de Pascal também é chamado de **triângulo aritmético** ou ainda **triângulo combinatório**. Em cada célula da tabela, é representado o número de combinações |C(n, k)| onde n é o número da linha e k o da coluna da célula na tabela. Assim, dada certa linha n, a soma de um elemento da coluna k com o elemento da coluna $k + 1$, desta linha, resultará em um elemento da linha $n + 1$ e da coluna $k + 1$. Ou seja,

$$|C(n, k)| + |C(n, k + 1)| = |C(n + 1, k + 1)| \text{(relação de } \textit{Stifel}\text{)},$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

|C(3,2)| + |C(3,3)| = |C(4,3)|

Fig. 1.2.3

Historicamente, o triângulo de *Pascal* não foi uma descoberta de *Blaise Pascal*. O triângulo aritmético já era conhecido pelo matemático chinês *Yang Hui* (1238 — 1298), por volta de 1250, sendo chamado de **triângulo *Yang Hui***. O matemático italiano *Tartaglia* (1500 – 1557), pseudônimo de *Niccolò Fontana*, escreveu sobre o triângulo aritmético em seu livro *General Tratato di numeri et misure* (1556), sendo conhecido então como **triângulo de *Tartaglia*** pelos italianos. O matemático francês *Blaise Pascal* melhorou a interpretação do triângulo aritmético em seu livro *Traité du triangle arithmétique*, publicado só depois de sua morte em 1665. Em 1739, o uso da denominação triângulo de *Pascal* para o triângulo aritmético, apareceu na obra *Triangulum arithmeticum pascalianum*, do matemático inglês *Abrahan Moivre* (1667 – 1754). Devido à influência desta obra, a partir de então, popularizou-se o uso de triângulo de *Pascal* em diversos países da Europa.

O número de combinações |C(n,k)| aparece com o nome de **coeficiente binomial**, na expressão do chamado **binômio de *Newton***, em homenagem ao físico e matemático inglês *Isaac Newton* (1643 – 1727). O binômio de *Newton* é um método para desenvolver a n-ésima potência de um binômio:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^{n-0}y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^{n-n}y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k,$$

onde o coeficiente binomial $\binom{n}{k} = \ |C(n,k)|$

Um **monômio** é a designação matemática ao que é composto por um único termo sem que haja operações de subtração ou soma. Um **binômio**, por sua vez, é uma expressão algébrica formada pela soma ou pela diferença de dois termos ou monômios.

Apesar da denominação binômio de *Newton*, o que realmente era o objeto de estudos de *Newton* foram regras que valem para $(x+y)^n$ quando o expoente n é fracionário ou inteiro negativo.

O símbolo "Σ", que corresponde à forma maiúscula da letra grega *sigma* (σ na forma minúscula), foi introduzido por *Leonard Euler* para representar o chamado **somatório**, ou seja, a soma de termos entre si. A contrução geral do produtório é dada por

$$\sum_{i=j}^{i=k} F(i) \text{ ou} \sum_{i=j}^{k} F(i) = \ F(j) + F(j+1) + \cdots + F(k-1) + F(k)\,,$$

onde i (chamado índice do somatório) assume valores sucessivos de j (limite inferior do somatório) até k (limite superior do somatório), ou seja, $j \leq i \leq k$, com $i, j, k \in \boldsymbol{N}$. O índice i do somatório é uma variável muda, pois ela especifica o local do número que está sendo alterado. $F(i)$ representa uma expressão algébrica cujos $[(k - j) + 1]$ valores dependem de i e são somados entre si (à medida que i varia de j até k). Se $j > k$, a definição do somatório não se aplica e convenciona-se como tendo o valor igual à zero (ver *Gersting, 2001*). Então,

$$\sum_{i=j, j>k}^{k} F(i) = 0\,,$$

Exemplo: Seja $F(i) = 2i + 1$. Então,

$$\sum_{i=0}^{3} F(i) = \sum_{i=0}^{3} 2i + 1 = [2(0) + 1] + [2(1) + 1] + [2(2) + 1] + [2(3) + 1] =$$

$$= 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Exemplo: Seja $F(i) = \frac{i}{i(i+1)}$. Então,

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{k} \frac{i}{i(i+1)} = \sum_{i=j}^{k} \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{(i+1)}\right] = \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{(j+1)}\right] + \left[\frac{1}{(j+1)} - \frac{1}{(j+2)}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{(j+2)} - \frac{1}{(j+3)}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}\right] + \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}\right] = \frac{1}{j} - \frac{1}{k+1}$$

Exemplo: Sejam $F(i)$ e $j \leq k \leq l$. Então,

$$\sum_{i=j}^{l} F(i) = F(j) + F(j+1) + \cdots + F(k) + F(k+1) + \cdots + F(l) = \sum_{i=j}^{k} F(i) + \sum_{i=k+1}^{l} F(i)$$

Exemplo: Seja $F(i) = c$, onde c é uma constante. Então,

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{k} c = \underbrace{c + \cdots + c + \cdots + c}_{[(k-j)+1]\ vezes} = [(k-j)+1]c$$

Exemplo: Seja $F(i) = cG(i)$, onde c é uma constante. Então,

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{k} cG(i) = cG(j) + cG(j+1) + \cdots + cG(k-1) + cG(k) = c\sum_{i=j}^{k} G(i)$$

Exemplo: Seja $F(i) = G(i) + H(i)$. Então,

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{k} [G(i) + H(i)] = G(j) + H(j) + G(j+1) + H(j+1) + \cdots + G(k-1) +$$

$$+H(k-1) + G(k) + H(k) = G(j) + G(j+1) + \cdots + G(k-1) + G(k) + H(j) + H(j+1) +$$

$$+H(k-1) + H(k) = \sum_{i=j}^{k} G(i) + \sum_{i=j}^{k} H(i)$$

Exemplo: Seja $\sum_{i=j}^{k} F(i)$ e seja $i = m + j$, onde m é uma variável muda. Então,

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{i=k} F(i) = \sum_{m+j=j}^{m+j=k} F(m+j) = \sum_{m=j-j}^{m=k-j} F(m+j) = \sum_{m=0}^{k-j} F(m+j)$$

O resultado final pode ser expresso novamente em termos da variável muda i, e assim:

$$\sum_{i=j}^{k} F(i) = \sum_{i=0}^{k-j} F(i+j)$$

Exemplo: Seja $\sum_{i=j}^{k} F(i)$ e seja $i = m - j$, onde m é uma variável muda. Então,

$$\sum_{i=0}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{i=k} F(i) = \sum_{m-j=0}^{m-j=k} F(m-j) = \sum_{m=0+j}^{m=k+j} F(m-j) = \sum_{m=j}^{k+j} F(m-j)$$

O resultado final pode ser expresso novamente em termos da variável muda i, e assim:

$$\sum_{i=0}^{k} F(i) = \sum_{i=j}^{k+j} F(i-j)$$

Para entendermos o significado da presença do coeficiente binomial no binômio de *Newton*, podemos associar a cada termo do desenvolvimento de $(x + y)^n$ com cada um dos subconjuntos do conjunto { }, quando $n = 0$ e do conjunto $\{1, 2,..., n\}$ quando $n \geq 1$, com $n \in \boldsymbol{N}$. Esta associação é feita identificando a posição que y (ou x) ocupa em cada termo do desenvolvimento. O coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ indica o número de termos no qual y (ou x) aparece k vezes no desenvolvimento de $(x + y)^n$. De fato:

Para $(x + y)^0$, temos (Tabela 1.2.1):

$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$

Tabela 1.2.1

Termo		*Subconjuntos de { }*	*N°de Subconjuntos de tamanho k*
1	y não ocupa nenhuma posição no termo	∅	$k = 0$, $\binom{0}{0}$=1

Para $(x + y)^1$, temos (Tabela 1.2.2):

$(x+y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$

Tabela 1.2.2

Termo		*Subconjuntos de {1}*	*N°de Subconjuntos de tamanho k*
x	y não ocupa nenhuma posição no termo	∅	$k = 0$, $\binom{1}{0}$=1
y	y ocupa a primeira e única posição no termo	{1}	$k = 1$, $\binom{1}{1}$=1

Para $(x + y)^2$, temos (Tabela 1.2.3):

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = xx + xy + yx + yy = 1x^2 + 2xy + 1y^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{1}x^0y^2$

Tabela 1.2.3

Termo		*Subconjuntos de {1, 2}*	*N°de Subconjuntos de tamanho k*
xx	*y* não ocupa nenhuma posição no termo	∅	$k = 0, \binom{2}{0}=1$
yx *xy*	*y* ocupa a primeira posição no termo *y* ocupa a segunda posição no termo	{1} {2}	$k = 1, \binom{2}{1}=2$
yy	*y* ocupa a primeira e a segunda posição no termo	{1, 2}	$k = 2, \binom{2}{2}=1$

Para $(x + y)^3$, temos (Tabela 1.2.4):

$$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = (xx+xy+yx+yy)(x+y) = xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy = x^3+3x^2y+3y^2x+y^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

Tabela 1.2.4

Termo		*Subconjuntos de {1, 2, 3}*	*N°de Subconjuntos de tamanho k*
xxx	*y* não ocupa nenhuma posição no termo	∅	$k = 0, \binom{3}{0}=1$
yxx *xyx* *xxy*	*y* ocupa a primeira posição no termo *y* ocupa a segunda posição no termo *y* ocupa a terceira posição no termo	{1} {2} {3}	$k = 1, \binom{3}{1}=3$
yyx *yxy* *xyy*	*y* ocupa a primeira e a segunda posição no termo *y* ocupa a primeira e a terceira posição no termo *y* ocupa a segunda e a terceira posição no termo	{1, 2} {1, 3} {2, 3}	$k = 2, \binom{3}{2}=3$
yyy	*y* ocupa a primeira, a segunda e a terceira posição no termo.	{1, 2, 3}	$k = 3, \binom{3}{3}=1$

Assim, repetindo-se este processo para todo $n \in \mathbf{N}$, obtemos a expressão do binômio de Newton.

O desenvolvimento do binômio de Newton (também chamado de **Teorema binomial**) pode ser demonstrado formalmente através do procedimento de **demonstração por indução finita**.

Demonstração por indução finita é uma técnica utilizada para demonstrar a veracidade de afirmações declarativas em matemática envolvendo números naturais (ou um subconjunto dos números naturais). Esta demonstração se baseia no **teorema (**ou **princípio** como também é chamado**) da indução finita**:

Sejam N” e N’ subconjuntos de **N** *tal que* $N'' \subseteq N'$ *e* $N' = \{n \in \mathbf{N} \,/\, n \geq n_0,\ n_0 \in \mathbf{N}\}$. *Se* $(n_0 \in N'')$ *e* $(\forall k \in N'' \Rightarrow k + 1 \in N'')$ *então* $N'' = N'$.

De fato, suponhamos por contradição, que $N'' \neq N'$ e seja X o conjunto dos números naturais que são elementos de N' mas não são elementos N''. Se $N'' \neq N'$ então $X \neq \emptyset$. Pelo princípio da boa ordenação, X tem um elemento mínimo x, com $x \notin N''$. Como por hipótese, $n_0 \in N''$, então $n_0 \notin X$ e consequentemente $x \neq n_0$. Logo, $x \geq n_0 + 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq n_0$. Assim, $x - 1 \in N'$. Além disto, como x é o menor elemento que não está em N'' então $x - 1 \in N''$. Pela hipótese de que $k \in N'' \Rightarrow k + 1 \in N''$ teremos que $x - 1 \in N'' \Rightarrow (x - 1) + 1 \in N'' \Rightarrow x \in N''$ o que é uma contradição, pois se $N'' \neq N'$ então $x \notin N''$. Logo, $N'' = N'$ (*cqd*).

Este princípio pode ser utilizado em demonstrações de afirmações envolvendo números pertencentes a um subconjunto N' de $\boldsymbol{N}$. Seja uma afirmação matemática declarativa definida $\forall n \in N' \subseteq \boldsymbol{N}$, chamada de $A(n)$, tal que $N' = \{n \in \boldsymbol{N} \ / \ n \geq n_0,\ n_0 \in \boldsymbol{N}\}$. A demonstração da veracidade de $A(n)$ por indução finita apresenta duas etapas:

1) **Base da indução**: Verificamos se a afirmação matemática declarativa $A(n)$ para o primeiro elemento de N', ou seja, $A(n_0)$, é verdadeira. Se não for, então $A(n)$ é falsa e a demonstração está finalizada.

2) **Passo da Indução**: Caso $A(n_0)$ seja verdadeira, suponhamos que $\exists N'' \subseteq N'$ tal que $\forall k \in N''$, $A(k)$ é verdadeira (chamada de **hipótese da indução**). Desta forma, $N'' \neq \varnothing$ pois $n_0 \in N''$ (sendo n_0 seu menor elemento). Será que $A(k+1)$ também será verdadeira? Ou seja, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$? Se esta afirmação for falsa então $N'' \neq N'$ e $A(n)$ não é verdadeira para todo $n \in N'$ e a demonstração está finalizada. Caso contrário, ou seja, se $A(k) \Rightarrow A(k+1)$ então $N'' = \{n_0, n_0+1, n_0+2,...\} = N'$ e assim, $A(n)$ é verdadeira $\forall\ n \in N'$ e a demonstração fica finalizada.

Exemplo: Mostrar, por indução finita, que se n pertencer ao conjunto dos números naturais positivos ($\boldsymbol{N}^*$), então:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ ou seja,}$$

$$A(n)\colon \sum_{i=1}^{n} (3i - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

1) Base da indução. Seja $n_0 = 1$ (primeiro elemento de $\boldsymbol{N^*}$). Então,

$$A(n_0)\colon \sum_{i=1}^{1} (3i - 2) = 1 = \frac{1[3(1) - 1]}{2} = 1$$

Assim, $A(n_0)$ é verdadeira.

2) Passo da indução: Suponhamos que $\exists N'' \subseteq \boldsymbol{N^*} \ / \ \forall\ k \in N''$, a afirmação

$$A(k)\colon \sum_{i=1}^{k} (3i - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

seja verdadeira. Desta forma $n_0 = 1 \in N''$. Será que $A(k) \Rightarrow A(k+1)$? Ou seja,

$$A(k)\colon \sum_{i=1}^{k} (3i - 2) = \frac{k(3k-1)}{2} \Rightarrow A(k+1)\colon \sum_{i=1}^{k+1} (3i - 2) = \frac{(k+1)[3(k+1) - 1]}{2} ?$$

Tomando-se o lado esquerdo da igualdade de $A(k+1)$, teremos:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (3i - 2) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (3i - 2)}_{\frac{k(3k-1)}{2}} + [3(k+1) - 2] = \frac{k(3k-1)}{2} + 3k + 1 = \frac{3k^2 - k}{2} + 3k + 1 =$$

$$\frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

Mas, tomando o lado direito da igualdade de $A(k+1)$, teremos:

$$\frac{(k+1)[3(k+1) - 1]}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{3k^2 + 2k + 3k + 2}{2} = \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (3i - 2)$$

O lado esquerdo e direito são iguais e, assim, $\forall\ k \in N''$, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Logo, $N'' = \boldsymbol{N^*}$ e consequentemente, $A(n)$ é verdadeira (*cqd*).

Exemplo: Mostrar, por indução finita, que se

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6), \text{com } a_1 = 2 \text{ e } n \in \boldsymbol{N}^*,$$

então, $a_{n+1} > a_n$, ou seja, a_n cresce a medida que n aumenta. A equação acima é chamada de **equação (ou relação) de recorrência**, pois o valor de a_{n+1} é determinado a partir de um valor anterior (a_n).

A afirmação que queremos demonstrar é:

$$A(n): a_{n+1} > a_n, n \in \boldsymbol{N}^*$$

1) Base da indução. Seja $n_0 = 1$ (primeiro elemento de $\boldsymbol{N^*}$). Então,

$$A(1): a_2 > a_1 \Leftrightarrow\ a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 6) = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4 > a_1 = 2$$

Assim, $A(n_0)$ é verdadeira.

2) Passo da indução: Suponhamos que $\exists N'' \subseteq \boldsymbol{N^*}$ / $\forall\ k \in \boldsymbol{N^*}$, a afirmação

$$A(k): a_{k+1} > a_k, k \in \boldsymbol{N}^*$$

seja verdadeira. Desta forma $n_0 = 1 \in N''$. Será que $A(k) \Rightarrow A(k+1)$? Ou seja,

$$A(k): a_{k+1} > a_k \Rightarrow A(k+1): a_{(k+1)+1} > a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+2} > a_{k+1}?$$

Seja $a_{k+1} > a_k$. Então,

$$a_{k+1} > a_k$$

$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(a_{k+1} + 6)}_{=a_{k+2}} > \underbrace{\frac{1}{2}(a_k + 6)}_{a_{k+1}}$$

$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Assim, $\forall\ k \in N''$, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Logo, $N'' = \boldsymbol{N^*}$ e consequentemente, $A(n)$ é verdadeira (*cqd*).

Exemplo: Mostrar, por indução finita, que

$$2^{2n} - 1 \text{ é divisível por 3, para } n \in \boldsymbol{N}^*$$

A afirmação que queremos demonstrar é:

$$A(n): 2^{2n} - 1 \text{ é divisível por 3, para } n \in \boldsymbol{N}^*$$

1) Base da indução. Seja $n_0 = 1$ (primeiro elemento de $\boldsymbol{N^*}$). Então,

$$2^{2(1)} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \text{ que é divisível por 3}$$

Logo, $A(n_0)$ é verdadeira.

2) Passo da indução: Suponhamos que $\exists N'' \subseteq \boldsymbol{N^*}$ / $\forall\ k \in \boldsymbol{N^*}$, a afirmação

$$A(k): 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por 3, para } k \in \boldsymbol{N}^*$$

seja verdadeira. Desta forma $n_0 = 1 \in N''$. Será que $A(k) \Rightarrow A(k+1)$? Ou seja,

$$A(k): 2^{2k} - 1 \text{ é divisível por } 3 \Rightarrow A(k+1): 2^{2(k+1)} - 1 \text{ é divisível por } 3?$$

Se $2^{2k} - 1$ é divisível por 3 então, $\exists a \in \boldsymbol{Z}$ / $2^{2k} - 1 = 3a \Leftrightarrow 2^{2k} = 3a + 1$. Assim,

$$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k+2} - 1 = \underbrace{2^{2k}}_{3a+1} 2^2 - 1 = 4(3a+1) - 1 = 12a + 4 - 1 = 12a + 3 =$$

$= 3(4a+1) = 3b$, com $b \in \boldsymbol{Z}$.

Assim, $\exists b \in \boldsymbol{Z}$ / $2^{2(k+1)} = 3m$ o que faz com que $2^{2(k+1)}$ seja divisível por 3. Desta forma, $\forall\ k \in N''$, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Logo, $N'' = \boldsymbol{N^*}$ e consequentemente, $A(n)$ é verdadeira (*cqd*).

Teorema Binomial (binômio de Newton): *Sejam x e y* $\in \boldsymbol{R}$ *e n* $\in \boldsymbol{N}$. *Então:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Prova (por indução finita):
Seja a afirmação sobre números inteiros:

$$A(n): (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, n \in \boldsymbol{N}$$

Queremos verificar se $A(n)$ é verdadeira $\forall n \in \boldsymbol{N}$.

1) Base da indução. Seja $n_0 = 0$ (primeiro elemento de $\boldsymbol{N}$). Então,

$$A(n): (x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$$

Logo, $A(n_0)$ é verdadeira.

2) Passo da indução: Suponhamos que $\exists N'' \subseteq \boldsymbol{N}$ / $\forall j \in N''$, a afirmação:

$$A(j): (x+y)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k \text{ (hipótese da indução)}$$

(

seja verdadeira. Desta forma $n_0 = 0 \in N''$. Será que $A(k) \Rightarrow A(k+1)$? Ou seja,

$$A(j): (x+y)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k \Rightarrow A(j+1): (x+y)^{j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} x^{(j+1)-k} y^k ?$$

Então,

$$(x+y)^{j+1} = (x+y)^1 (x+y)^j = (x+y) \underbrace{\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k}_{pois\ A(j) é\ verdadeita} =$$

$$x \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k + y \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^{k+1} =$$

$$x^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} x^{j+1-k} y^k \right) + y^{j+1} + \left(\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} x^{j-k} y^{k+1} \right) =$$

$$x^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} x^{j+1-k} y^k \right) + y^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k-1} x^{j-(k-1)} y^{(k-1)+1} \right) =$$

$$x^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} x^{j+1-k} y^k \right) + y^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k-1} x^{j-k+1} y^k \right) =$$

$$x^{j+1} + y^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \left\{ \binom{j}{k} + \binom{j}{k-1} \right\} x^{j+1-k} y^k \right) =$$

$$x^{j+1} + y^{j+1} + \left(\sum_{k=1}^{j} \binom{j+1}{k} x^{j+1-k} y^k \right) = \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} x^{(j+1)-k} y^k$$

que é igual ao desenvolvimento do binômio de Newton de $(x + y)^{j+1}$. Logo,

$$A(j): (x+y)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^{j-k} y^k \Rightarrow A(j+1): (x+y)^{j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} \binom{j+1}{k} x^{(j+1)-k} y^k$$

Desta forma, $\forall j \in N''$, $A(j) \Rightarrow A(j+1)$. Logo, $N'' = \boldsymbol{N}$ e consequentemente, $A(n)$ é verdadeira. Assim o desenvolvimento do binômio de Newton é válido para $\forall n \geq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ (*cqd*).

Exemplo: O desenvolvimento por meio de binômio de Newton de $(x + a)^5$ será:

$$(x+a)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} a^k = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1} x^5 a^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} x^4 a^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} x^3 a^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} x^2 a^3 +$$

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{10} x^3 a^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} x^2 a^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} x^1 a^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} x^0 a^5 =$$

$$x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Como k varia de o até 0 até n, então o desenvolvimento do binômio de Newton apresenta $n+1$ termos T_i, $1 \leq i \leq n + 1$. Assim,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} T_{k+1} \text{, onde } T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Onde a expressão para o $(k+1)$-*ésimo* termo T_{k+1} é chamado de **termo geral do binômio de Newton**.

Exemplo: No desenvolvimento por meio de binômio de Newton de $(x + a)^5$, determinar o terceiro termo.
O termo geral do binômio de Newton de $(x + a)^5$ será dado por:

$$T_{k+1} = \binom{5}{k} x^{5-k} a^k$$

Assim o terceiro termo será determinado por:

$$T_3\text{(terceiro termo)}=T_{2+1} = \binom{5}{2} x^{5-2}a^2 = \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} x^3a^2 = 10x^3a^2$$

Exemplo: Determinar o termo independente de x no desenvolvimento por meio de binômio de Newton de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$.

O termo geral do binômio de Newton de $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ será dado por:

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} x^{6-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = T_{k+1} = \binom{6}{k} x^{6-k}(x^{-1})^k = \binom{6}{k} x^{6-k}x^{-k} = \binom{6}{k} x^{6-2k}$$

Assim, o temo independente de x ocorrerá quando $6 - 2k = 0$, ou seja, para $k = 3$ (no quarto termo). Logo,

$$T_4=T_{3+1} = \binom{6}{3} x^{6-2(3)} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3!} =$$

$$= \frac{6\times4\times5}{6} = 20$$