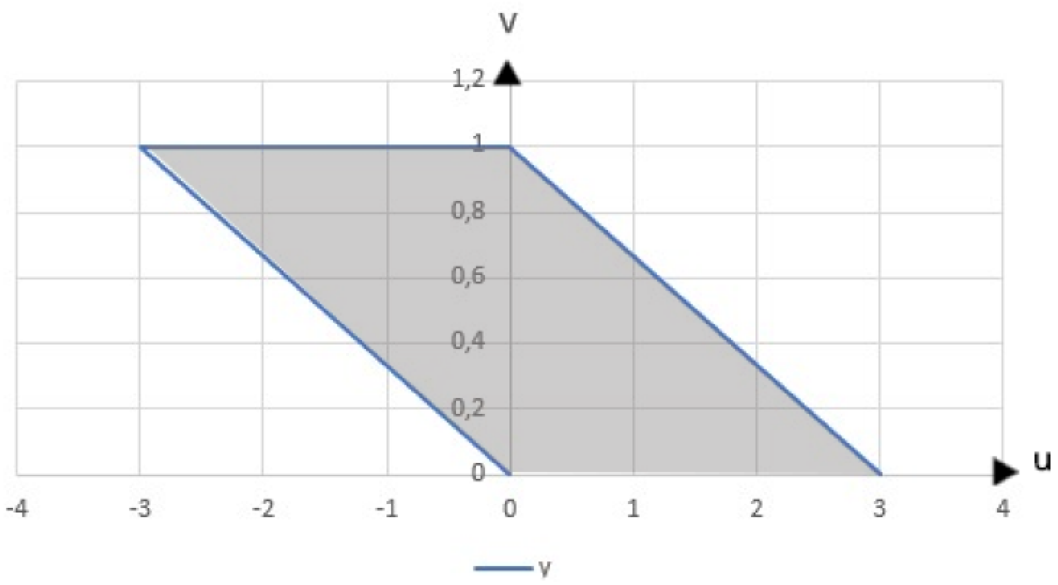
15.8 Jacobiano - Substituição em integrais múltiplas

Encontre a imagem pela transformação $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ do paralelogramo R no plano xy com fronteiras $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ e $y = x + 1$. Esboce no seu caderno a região transformada no plano uv. Depois compare com figura abaixo.



Agora, resolva o sistema $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ para x e y em termos de u e v . Em seguida, encontre o valor do jacobiano $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,y)}$.

A sua resposta :

-1

Retorno:

Primeira Solução:

Resolvendo as equações $u = 2x - 3y$ e $v = x + y$ para x e y temos:

$x = -u - 3v \ \ (1)$

$y = -u - 2v \ \ (2)$

Substituindo x da equação (1) pelo valor das fronteiras $x = -3$ encontramos

$-u - 3v = -3$

$u + 3v = 3$

para $x = 0$

$-u - 3v = 0$

$u + 3v = 0$

substituindo y da equação (2) pelo valor das fronteiras $y = x$, temos:

$-u - 3v = -u - 2v$

Resolvendo a equação acima, trazemos $-u - 2v$ para a esquerda e somamos com $-u - 3v$,obtendo $-v = 0$, entao mutiplicamos por (-1) temos

$v = 0$

quando $y = x + 1$

$-u - 3v + 1 = -u - 2v$

Pegamos $-u - 2v$ levamos para o lado esquerdo e somamos com $-u - 3v + 1$ resultando em $-v + 1 = 0$, levando o 1 para direita e multiplicando os dois lado da equação por -1 obtemos

$v = 1$

Dessa forma para $v = 0$ e $u + 3v = 3$ encontramos $u = 3$ e quando $v = 1$ encontramos $u = 0$ assim encontramos as coordenadas $(3, 0)$ e $(0, 1)$.

Quando temos $v = 0$ e $u + 3v = 0$ obtemos $u = 0$ e quando $v = 1$ e $u + 3v = 0$ obtemos $u = -3$, então temos as coordenadas $(0, 0)$ e $(-3, 1)$.

Segunda Solução:

Primeiro resolvemos o sistema para x e y em termos de u e v.

$x = -u - 3v$

$y = -u - 2v.$

Para resolver o jacobiano iremos derivar x e y em relação a (u, v), respectivamente.

$\frac{\partial(x)}{\partial(u,v)} = -1 - 3$

$\frac{\partial(y)}{\partial(u,v)} = -1 - 2$

Então a partir da definição do jacobiano

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Resolvemos

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Resposta: Jacobiano = -1.

Continuar