Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral

Cálculo Diferencial e Integral I – 2021.1 (SBL0057)
Prof. Rui F. Vigelis

2a Avaliação Progressiva – 2a Chamada

Nome:____

1. Ache a equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ que é perpendicular à reta $4y - x + 3 = 0$.

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{dy/dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -4$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1 = -4$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 - x_0 + 3 = 0$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = -4(x - 1)$$

$$y = -4x + 4$$

2. Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{1+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\Big)$;

$$\frac{-\operatorname{sen} x(1+\operatorname{sen} x) - (1+\cos x)\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = -\frac{1+\cos x+\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$$

(b) $\dfrac{d}{dx}[(\operatorname{cotg} x + x\sec x)^{10}]$.

$$10(\operatorname{cotg} x + x\sec x)^9(-\operatorname{cosec}^2 x + \sec x + x\sec x\operatorname{tg} x)$$

3. Seja $y = f(x)$, com $x \in \mathbb{R}$, a função dada implicitamente pela equação $y^3 - xy^2 + 2x - 1 = 0$. Suponha que f seja derivável.

(a) Mostre que $f'(x) = \dfrac{f^2(x) - 2}{3f^2(x) - 2xf(x)}$;

$$y^3 - xy^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y^2y' - y^2 - 2xyy' + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2 - 2}{3y^2 - 2xy}$$

(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

$$x = 0 \Rightarrow y^3 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1^2 - 2}{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1} = -\frac{1}{3}$$

$$(y - 1) = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 1$$

4. Determine os valores de x em que a função $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 6$ tem valores extremos relativos, indicando qual desses valores é máximo ou mínimo.

$$f'(x) = 12(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 12(x + 2)(x + 1)(x - 1)$$

$$f''(x) = 12(3x^2 + 4x - 1)$$

$$f''(-2) = 36 > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo relativo em } x = -2$$

$$f''(-1) = -24 < 0 \Rightarrow f \text{ tem máximo relativo em } x = -1$$

$$f''(1) = 72 > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo relativo em } x = 1$$

5. Ache os extremos absolutos da função $f(x) = x(x + 3)^{2/3}$ no intervalo $[-4, -1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+3)^{2/3} + x\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{2}{3}-1} \\ &= \frac{x+3}{(x+3)^{1/3}} + \frac{1}{3}\frac{2x}{(x+3)^{1/3}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{5x+9}{(x+3)^{1/3}} \end{aligned}$$

$$\text{pontos críticos: } -\frac{9}{5} \text{ e } -3$$

$$f(-4) = -4$$

$$f(-1) = -\sqrt[3]{4} = -1.5874$$

$$f\left(-\frac{9}{5}\right) = -\frac{9}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{36}{25}} = -2.0326$$

$$f(-3) = 0$$

$$\Rightarrow f(-3) = 0 \text{ é máximo absoluto}$$

$$\Rightarrow f(-4) = -4 \text{ é mínimo absoluto}$$

6. Use o Teorema de Rôlle para mostrar que a equação $\text{sen}(x) + 2x + 1 = 0$ possui uma única solução real.

$$f(x) = \text{sen}(x) + 2x$$

$$f(-\pi/2) = -\pi < 0 \text{ e } f(\pi/2) = \pi{+}2 > 0 \Rightarrow \text{pelo TVI, } f(x) \text{ possui ao menos uma raiz}$$

$$\text{se } x_0 < x_1 \text{ com } f(x_0) = f(x_1) = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{pelo Teo. de Rôlle, existe } x_2 \in (x_0, x_1) \text{ tal que } f'(x_2) = 0$$

$$\text{porém, } f'(x) = \cos(x) + 2 > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{essa contradição implica que } f(x) \text{ possui uma única raiz real}$$