UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
Campus de Sobral
Departamento de Engenharia Elétrica
Disciplina: Variáveis Complexas SBL0095
Prof. Ailton Campos
Data: 30/03/2023 Período: 2023.1

Nome:____

1ª Lista de Exercícios

1. Fazer todos os exercícios ímpares dos capítulos 1,2 e 3 do livro texto.

2. Escreva cada um dos seguintes números na forma algébrica $x + iy$:

   a) $\dfrac{1}{i}$.
   b) $i^{4n+3}, \ n \in \mathbb{N}$.
   c) $\dfrac{4+i}{6-3i}$.
   d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$.
   e) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{25}$.

3. Encontre a parte real e a parte imaginária de

   a) $(i+1)^2 \cdot (i-1)$.
   b) $z^4 + 2z + 6$.
   c) $\dfrac{z}{z^2+1}$.
   d) $\dfrac{i^2}{i^3 - 4i + 6}$.

4. Calcule o módulo de

   a) $(2-i)^2 \cdot (4+6i)$.
   b) $(i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+3)$.
   c) $\dfrac{i+2}{i-2}$.
   d) $\dfrac{3-i}{(6+2i)^2}$.

5. Responda os seguintes itens.

   a) Resolva a equação $z^2 + z + 1 = 0$ em $z = (x, y)$ escrevendo $(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ e então resolvendo um par de equações simultaneamente em x e y.
   b) Em cada caso, esboçe o conjunto de pontos determinados pela condição dada

      i) $|z - 1 + i| = 1$.
      ii) $|z + i| \leqslant 3$.
      iii) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{4}$.
      iv) $|z| = \arg z$.
      v) $\log |z| = -2\arg z$.

6. Para qual n temos que i é uma raíz n-ésima da unidade?

7. Resolva os seguintes itens

   a) Encontre todas as seis raízes de 2.

   b) Encontre todas as raízes cúbicas de i.

   c) Encontre e esboce no plano complexo as raízes quadradas de $4i$.

   d) Encontre e esboce no plano complexo as raízes cúbicas de $1 + i$.

8. Suponha que $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, em que $z = x + iy$. Use as expressões

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } x = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

   para escrever $f(z)$ em termos de z e simplifique o resultado.

9. Mostre que

$$e^{\bar{z}} = \overline{e^{z}}.$$

10. Use as regras de derivação para encontrar $f'(z)$ se

    a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$.

    b) $f(z) = \dfrac{z - 1}{2z + 1}$.

    c) $f(z) = (2z^2 + i)^5$.

    d) $f(z) = \dfrac{(1 + z^2)^4}{z^2}$.

11. Se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for definida pelas equações

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z}, & \text{se } z \neq 0, \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

    Resolva os seguintes itens.

    a) Verifique que $u(x, y) = \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = \dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2}$.

    b) Mostre que as funções u e v acima satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$.

    c) Verifique que não existe $f'(0)$.

    A questão acima ilustra o fato que se f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann em um ponto $z = z_0$ isto não implica que exista $f'(z_0)$.

12. Escreva

$$\frac{\partial}{\partial z} \text{ e } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

    em coordenadas polares.

Bom Trabalho!!!