Álgebra Linear
Aula 12

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

A atividade deverá ser entregue em um prazo de no máximo 20 min após início da aula. Lembrando que m_i é o i-ésimo dígito a partir da esquerda da sua matrícula.

Atividade 09

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ m_1 + 1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as definições e resultados apresentados na aula passada resolva.

1. Calcule o determinante usando uma linha como expansão.
2. Calcule o determinante usando uma coluna como expansão.

Gabarito

1. 0.
2. 0.

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ temos

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_1+j} (A)_{i_1,j} \det(T_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_2+j} (A)_{i_2,j} \det(T_{i_2,j}).$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ temos

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_1+j}(A)_{i_1,j}\det(T_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_2+j}(A)_{i_2,j}\det(T_{i_2,j}).$$

Proposição

Seja A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$, com $n \geq 2$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

1. Para todo $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$ temos

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_1+j}(A)_{i_1,j}\det(T_{i_1,j}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i_2+j}(A)_{i_2,j}\det(T_{i_2,j}).$$

2. Para todo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq k \leq n$ temos

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(A)_{i,j}\det(T_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+k}(A)_{j,k}\det(T_{j,k}).$$

Teorema

Seja A uma matriz quadrada, temos que $\det(A) = \det(A^T)$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

- **Expansão em cofatores ao longo da linha i**

$$\det(A) = (A)_{i,1}C_{i,1} + \cdots + (A)_{i,n}C_{i,n}.$$

Matriz menor $M_{ij}(A)$

Detonamos por $M_{ij}(A) = \det(T_{i,j})$.

Cofator da entrada $(A)_{i,j}$

Para i e j fixos denotamos por $C_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$.

Expansão em cofatores

Dado uma matriz quadrada A de tamanho $n \times n$ denominamos por

- **Expansão em cofatores ao longo da linha i**

$$\det(A) = (A)_{i,1} C_{i,1} + \cdots + (A)_{i,n} C_{i,n}.$$

- **Expansão em cofatores ao longo da coluna j**

$$\det(A) = (A)_{1,j} C_{1,j} + \cdots + (A)_{n,j} C_{n,j}.$$

Exemplo

Calcule

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Proposição

Se A é uma matriz triangular de tamanho $n \times n$ então $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} (A)_{i,i}$.

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Teorema

Se A é uma matriz quadrada com uma linha ou coluna nula então $\det(A) = 0$.

Exemplo

Calcule o determinante da matriz A a seguir e compare com o determinante da obtida após uma única operação elementar em A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k \det(A)$;

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k \det(A)$;
2. Se B é uma matriz obtida a partir de A após permutarmos duas linhas (ou colunas) então $\det(B) = -\det(A)$;

Teorema

Seja A uma matriz $n \times n$.

1. Se B é uma matriz obtida a partir de A após multiplicarmos uma linha ou coluna de A por uma constante então $\det(B) = k\det(A)$;
2. Se B é uma matriz obtida a partir de A após permutarmos duas linhas (ou colunas) então $\det(B) = -\det(A)$;
3. Se B é uma matriz obtida a partir de A após somarmos um múltiplo de uma linha (coluna) a outra linha (coluna) então $\det(B) = \det(A)$.

Exemplo

Calcule

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Pergunta

Será que o determinante preserva soma, produto e multiplicação por escalar?

Exemplo

Suponha que A e B seja matrizes quadradas de tamanhos 2×2 e 3×3 respectivamente. Para um escalar k, calcule $\det(kA)$ e $\det(kB)$.

Exemplo

Suponha que A e B seja matrizes quadradas de tamanhos 2×2 e 3×3 respectivamente. Para um escalar k, calcule $\det(kA)$ e $\det(kB)$.

Proposição

Sejam A uma matriz quadrada de tamanho $n \times n$ e k um escalar. Temos que

$$\det(kA) = k^n \det(A).$$

Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$, $\det(A+B)$, $\det(A+C)$ e $\det(B+C)$.

Exemplo

Considere as matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$, $\det(A+B)$, $\det(A+C)$ e $\det(B+C)$.

Teorema (2.3.1)

Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ que diferem em uma única linha, a r-ésima, e suponha que a r-ésima linha de C possa ser obtida através somando as entradas correspondentes nas r-ésimas linhas de A e B. Então

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

O mesmo vale para as colunas.