16.5 Parametrização de superfícies e o cálculo de áreas

Qual a área da porção do plano $y + 2z = 2$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$?

A sua resposta :

$\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

Retorno:

Resposta:

Podemos usar a parametrização explicita:

$$z = f(x, y) \qquad z = \frac{2 - y}{2}$$

Definindo os parâmetros:

$$x = rcos\theta$$

$$y = rsen\theta$$

$$\vec{\mathbf{r}}(r, \theta) = (rcos\theta)\mathbf{i} + (rsen\theta)\mathbf{j} + \left(\frac{2 - rsen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Fazendo a Derivada Parcial de r:

$$\vec{\mathbf{r}}_r = (cos\theta)\mathbf{i} + (sen\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{sen\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Fazendo a Derivada Parcial de θ:

$$\vec{\mathbf{r}}_\theta = (-rsen\theta)\mathbf{i} + (rcos\theta)\mathbf{j} - \left(\frac{rcos\theta}{2}\right)\mathbf{k}$$

Calculando o produto vetorial temos:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ cos\theta & sen\theta & -\frac{sen\theta}{2} \\ --rsen\theta & rcos\theta & -\frac{rcos\theta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-rsen\theta cos\theta}{2} + \frac{sen\theta rcos\theta}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{rsen^2\theta + rcos^2\theta}{2}\right)\mathbf{j} + \left(rcos^2\theta + rsen^2\theta\right)\mathbf{k}$$

Simplificando:

$$\vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta = \left(\frac{r}{2}\right)\mathbf{j} + (r)\mathbf{k}$$

Calculando o diferencial da área de superficie:

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| \; dr \, d\theta$$

$$d\sigma = \| \vec{\mathbf{r}}_r \times \vec{\mathbf{r}}_\theta \| = \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Calculando a área pela fórmula diferencial para área da superfície $A = \iint\limits_S \, d\sigma$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{\sqrt{5}r}{2} \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{\sqrt{5}r^2}{4} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{5}}{4} \, d\theta \\ &= \left. \frac{\sqrt{5}\theta}{4} \right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{5}\pi}{2} \end{aligned}$$

Continuar

Resumo de retenção de dados