Complemento

* Definição (divisível): Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é divisível por b ($b|a$) se $\exists\, c \in \mathbb{Z};\ a = bc$

* Definição (par): Seja $a \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é par se $2|a$ (ou $\exists\, x \in \mathbb{Z};\ a = 2.x$)

* Definição (ímpar): Seja $a \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é ímpar se $\exists\, x \in \mathbb{Z};\ a = 2x+1$

* Prova direta ($p \Rightarrow q$)

— Proposição: a soma de dois inteiros pares é par

ou

Se $2|x \wedge 2|y$ então $|\,2|(x+y)$

ou

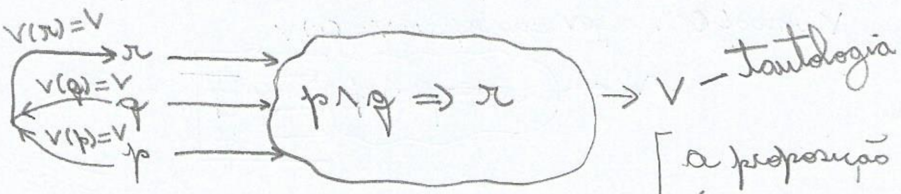
$$p \leftarrow \underbrace{\boxed{2|x} \wedge \overset{q}{\boxed{2|y}}}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{\overset{r}{\boxed{2|(x+y)}}}_{\text{conclusão}}\ ?$$

- Prova: Seja $2|x$ e $2|y$. Então $\exists\, a$ e $b \in \mathbb{Z};\ x = 2a$ e $y = 2b$.
  $x+y = 2a+2b = (a+b).2 = 2c,\ c \in \mathbb{Z}$. Logo,
  $\exists\, c \in \mathbb{Z};\ x+y = 2.c \Rightarrow 2|x+y$ cqd

$p \wedge q \to r$ é uma tautologia ou seja, $p \wedge q \Rightarrow r$, pois

p	q	$p \wedge q$	r	$p \wedge q \to r$
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	F	F	V

{ esta opção é impossível de acontecer conforme a prova direta pois se $V(p) = V \wedge V(q) = V$ então "obrigatoriamente" $V(r) = V$. e assim, $p \wedge q \to r$ é uma tautologia, ou seja, $p \wedge q \Rightarrow r$



[a proposição é um teorema pois é sempre verdadeira]

— Proposição: Seja $x \in \mathbb{Z}$. Então $2|x \iff x+1$ é ímpar

- Prova: $(p \leftrightarrow q) \iff (p \to q) \wedge (q \to p)$

$(\Rightarrow)$ Seja $x \in \mathbb{Z}$ e $2|x$. Então $\exists\, a \in \mathbb{Z};\ x = 2a$.

$x+1 = 2a+1 \Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{Z};\ y = 2a+1$, com $y = 2x+1$. Logo, y é ímpar (por definição) e assim, $x+1$ é ímpar cqd

$(\Leftarrow)$ Seja $x+1$ ímpar. Então $\exists\, b \in \mathbb{Z};\ x+1 = 2b+1$.

$x+1-1 = 2b+1-1$

$x = 2b$ e assim, $\exists\, b \in \mathbb{Z};\ x = 2b \Rightarrow 2|x$ (x é par) cqd.

Logo, $2|x \iff x+1$ é ímpar cqd {a proposição é um teorema, pois sempre é verdadeiro}

* Contra-exemplo

— Proposição: Sejam a e $b \in \mathbb{Z}$. Se $a|b$ e $b|a$, então $a = b$

- Prova: Seja $a = 5$ e $b = -5$. Então $\underbrace{5|-5}_{\substack{V(p)=V\\ \downarrow\\ p\,=\,a|b}}$ e $\underbrace{-5|5}_{\substack{V(q)=V\\ \downarrow\\ q\,=\,b|a}}$ mas $\underbrace{5 \neq -5}_{F}$

A proposição é falsa! Não é uma tautologia e assim, não é um teorema

* Contraposição $(p \to q \iff \neg q \to \neg p)$

— Proposição: Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $\underbrace{n! > (n+1)}_{p} \to \underbrace{n > 2}_{q}$

- Prova:

$\neg q \to \neg p$: $\underbrace{n \leq 2}_{\neg q} \to \underbrace{n! \leq (n+1)}_{\neg p}$

$n \leq 2$	$n! \leq (n+1)$
0	$0! \leq (0+1) \Rightarrow 1 \leq 1$ (V)
1	$1! \leq (1+1) \Rightarrow 1 \leq 2$ (V)
2	$2! \leq (2+1) \Rightarrow 2 \leq 3$ (V)

} Logo, $n \leq 2 \Rightarrow n! \leq (n+1)$ e assim, $n! > (n+1) \Rightarrow n > 2$

* Redução ao absurdo ($p \to q \Leftrightarrow (p \land \neg q) \to F$)

— Proposição: Nenhum inteiro é ao mesmo tempo par e ímpar.

Se $\underbrace{a \in \mathbb{Z}}_{p} \Rightarrow \underbrace{\nexists\,(\text{a par e a ímpar})}_{q}$?

$\neg q = \exists\,(\text{a par e a ímpar})$

Seja $\underbrace{a \in \mathbb{Z} \text{ e a par e ímpar}}_{p \land \neg q}$. Então $\exists\, x, y \in \mathbb{Z}$; $a = 2x$ e $a = 2y+1$

Logo, $2x = 2y+1$

$2(x-y) = 1 \Rightarrow x - y = \frac{1}{2}$ é F pois como x e $y \in \mathbb{Z}$, $x - y \neq \frac{1}{2}$

Assim, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nexists\,(\text{a par e ímpar})$. cqd