RESOLUÇÃO DE UMA PROVA DE FÍSICA 3

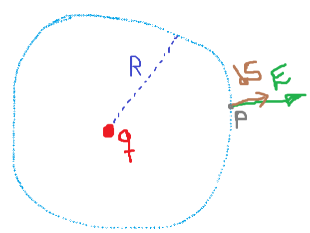
14 de Agosto de 2015

Exercício 1. Considere um número infinito de cargas idênticas (cada uma com carga q) posicionadas ao longo do eixo x a uma distância $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$ da origem. Qual o campo elétrico na origem devido a esta distribuição de carga? *Dica:* $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$

<u>**Solução**</u>

- Usa-se a lei de Gauss para calcular o campo elétrico em um ponto P a uma distância R da carga pontual interna q:

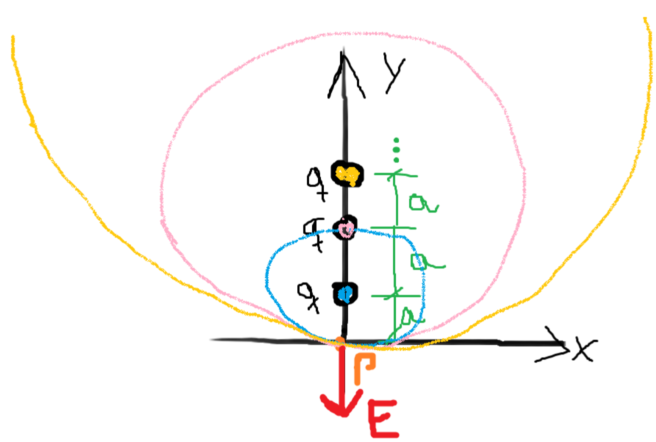
$$\oint \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



- Onde $\overrightarrow{dS}$ é conhecido como o diferencial do vetor área da superfície gaussiana. A superfície gaussiana para uma carga pontual é exatamente uma casca de esfera.

- Como $\overrightarrow{E}$ não depende de $\overrightarrow{dS}$ e $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{dS}$ então, tem-se

$$ES = E\left(4\pi R^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\left(4\pi R^2\right)\varepsilon_0}$$



- No problema, o ponto $P = (0;0)$, logo, usando a lei de Gauss para as cargas pontuais (com carga q), tem-se a seguinte tabela

Carga	Distância de P	Módulo de E
1	a	$E_1 = \frac{q}{(4\pi)\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$
2	2a	$E_2 = \frac{q}{(4\pi)\varepsilon_0}\frac{1}{4a^2}$
3	3a	$E_3 = \frac{q}{(4\pi)\varepsilon_0}\frac{1}{9a^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- Pelo princípio da superposição, o módulo do campo elétrico total da distribuição dada no problema seria
$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots = \frac{q}{(4\pi)\,\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right] = \frac{q\pi}{24\varepsilon_0 a^2}$$

- Finalmente, a direção do vetor campo elétrico no ponto $P = (0;0)$ é $-\hat{j}$, então $\overrightarrow{E_T} = -\left[\frac{q \cdot \pi}{24 \cdot \varepsilon_0 \cdot a^2}\right]\hat{j}\;\frac{N}{C}$ ♦

Exercício 2. Cargas $q, 2q\, e\, 3q$ são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado a. Uma carga Q de mesmo sinal que as outras três é colocada no centro do triângulo. Qual a força resultante sobre Q?

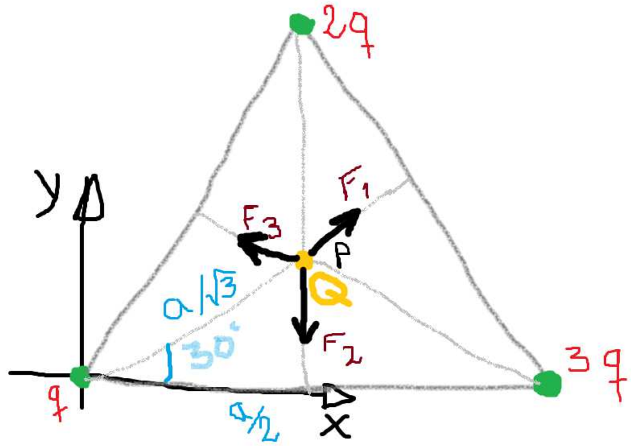
Solução

- A carga Q e as três cargas têm sinais iguais, então, as forças que atuam vão ser repulsivas.
- Seja P ponto onde se encontra a carga Q (figura), tem-se

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} (\cos(30°) ; \sin(30°)) = \frac{3Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (\cos(30°) ; \sin(30°))$$

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{Q(2q)}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} (0; -1) = \frac{6Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (0; -1)$$

$$\overrightarrow{F_3} = \frac{Q(3q)}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} (-\cos(30°) ; \sin(30°)) = \frac{9Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (-\cos(30°) ; \sin(30°))$$



- Utilizando o princípio da superposição no ponto onde está localizada a carga Q, a força elétrica resultante $\left(\overrightarrow{F}\right)$ é

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} &= \frac{3Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (\cos(30°) ; \sin(30°)) + \frac{6Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (0; -1) + \\
&\quad + \frac{9Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} (-\cos(30°) ; \sin(30°)) \\
&= \frac{Qq}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2} \left[3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right) + 6(0; -1) + 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= -\left[\frac{3\sqrt{3}(Qq)}{4 \centerdot \pi \centerdot \varepsilon_0 \centerdot a^2}\right] \hat{i}\, N \qquad \blacklozenge
\end{aligned}$$

Exercício 3. Um disco circular horizontal de raio a está uniformemente carregado com densidade superficial de carga σ. Qual é o campo e o potencial elétrico num ponto do eixo vertical que atravessa o disco em seu centro, a uma distância D do centro?

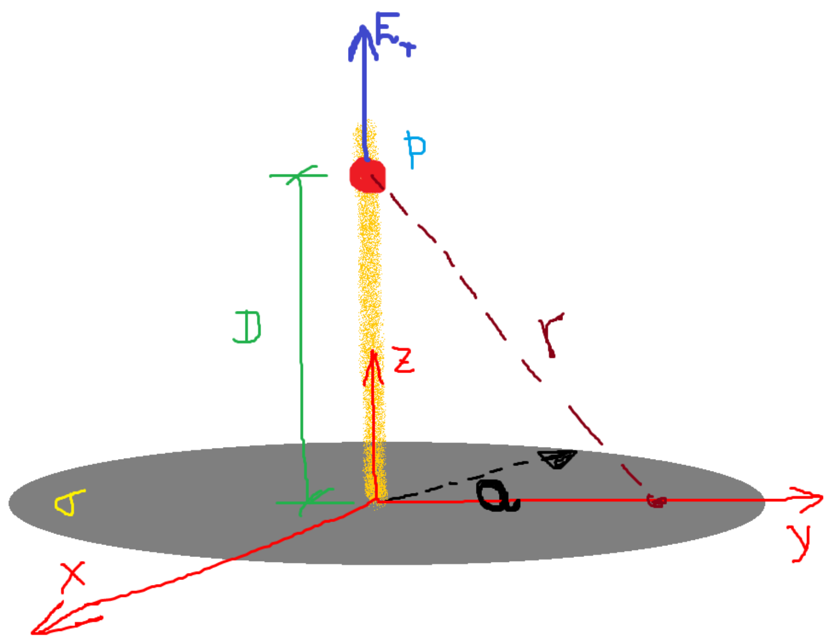
Solução

- Sabe-se que o potencial produzido por uma carga deslocada desde o infinito a uma distância r de uma distribuição uniforme de carga $\mathrm{d}q$ é (I é o intervalo de integração ainda não definido)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_I \frac{\mathrm{d}q}{r} \tag{1}$$

- A densidade superficial do disco carregado é $\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}A}$, onde a área do disco é igual a $A = \pi y^2 \Rightarrow \mathrm{d}A = 2\pi \centerdot y \centerdot \mathrm{d}y$. Seguidamente, tem-se

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}A = 2\sigma \centerdot \pi \centerdot y \centerdot \mathrm{d}y \tag{2}$$



- A geometria da superfície é simétrica, em consequência só tem-se campo elétrico na direção $\hat{k}$, também pode-se concluir que

$$\sqrt{z^2 + y^2} = r \tag{3}$$

- Substituindo as expressões 2 e 3 em 1 tem-se ($I = [0; a]$)

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a \frac{y \centerdot \mathrm{d}y}{\sqrt{z^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_0^a \frac{2y \centerdot \mathrm{d}y}{\sqrt{z^2+y^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+a^2} - z\right]$$

- Sabe-se que

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{z^2+a^2} - z\right]\right)\hat{k} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[z\left(z^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]\hat{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{(z^2+a^2)}}\right]\hat{k}$$

- Finalmente, o campo elétrico resultante a uma distância D, $(D > 0)$ do centro do disco é

$$\overrightarrow{E_T} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{D}{\sqrt{(D^2 + a^2)}}\right]\hat{k}\,\frac{N}{C} \qquad \blacklozenge$$

e o potencial é

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{D^2 + a^2} - D\right] V \qquad \blacklozenge$$

Exercício 4. Uma carga q move-se a partir do repouso uma distância Δx entre duas placas paralelas infinitas que tem densidade de carga σ e $-\sigma$. O campo elétrico no interior das placas aponta na direção $\hat{\imath}$. Qual a variação da energia cinética durante este movimento?

Solução

- Sabe-se que a variação da energia cinética é $\Delta K = W = -\Delta U = -q\Delta V = q \int_{x_i}^{x_f} \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}x}$.
- Como $\overrightarrow{E} // \overrightarrow{\mathrm{d}x}$ e para o interior de duas placas paralelas infinitas tem-se $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, então

$$\Delta K = qE \int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}x = qE\,(x_f - x_i) = qE\Delta x$$

- Finalmente, a variação da energia cinética é $\Delta K = qE\Delta x = \frac{\sigma q}{\varepsilon_0}\Delta x$ J ♦

Exercício 5. Em uma certa região no espaço o potencial elétrico é $V = a\left(2x^2z^2 - 3x^3y + 2yzx^2\right)$. Onde a é uma constante. Qual o campo elétrico em um ponto P com coordenadas $(1;2;3)$ m?

Solução

- Sabe-se que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\left[\frac{\partial}{\partial x} V\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} V\,\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} V\,\hat{k}\right]$
- Logo, substituindo a função potencial elétrico (V) tem-se

$$\overrightarrow{E} = -a\left[\left(4xz^2 - 9x^2y + 4xyz\right)\,\hat{i} + \left(-3x^3 + 2zx^2\right)\,\hat{j} + \left(4x^2z + 2yx^2\right)\,\hat{k}\right]$$

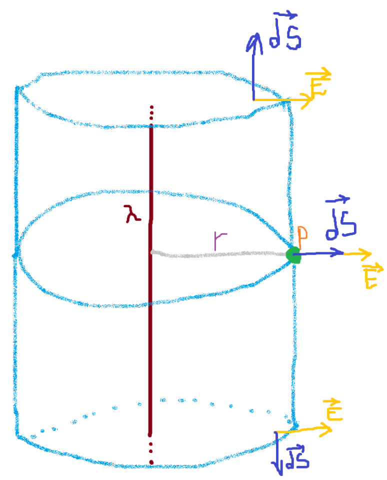
- O campo elétrico é igual a $\overrightarrow{E} = a\left(9x^2y - 4xz^2 - 4xzy\,;\,3x^3 - 2zx^2\,;\,-4x^2z - 2yx^2\right)$
- Finalmente, o campo elétrico no ponto $P = (1;2;3)$ é $\overrightarrow{E_P} = -a\,(42\,;\,3\,;\,16)\,\frac{N}{C}$ ♦

Exercício 6. Um fio infinitamente longo e isolante tem uma densidade de carga uniforme λ. Use a lei de Gauss para determinar o campo elétrico a uma distância r do fio.

Solução

- A lei de Gauss é enunciada assim

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



- Onde $\vec{dS}$ é conhecido como o diferencial do vetor área da superfície gaussiana. A superfície gaussiana para um fio infinitamente longo é exatamente uma casca cilíndrica.

- O vetor campo elétrico é perpendicular ao vetor diferencial de superfície no topo e na base da superfície gaussiana (casca cilíndrica), em consequência o fluxo é zero em dita região.

- Sabe-se que a distribuição de carga ao longo do fio é constante, por isso $\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l} \Rightarrow \lambda \Delta l = \Delta q$.

- Para os lados da superfície gaussiana tem-se que $\vec{E} // \vec{dS}$ onde o campo é constante, então para um cilindro de carga interna Δq e altura Δl tem-se

$$E \int dS = E \left(2\pi \cdot r \cdot \Delta l\right) = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \Delta l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

- Finalmente, a direção do campo elétrico $\vec{E}$ será sempre paralela ao vetor unitário em direção do raio da base da superfície gaussiana: $\hat{r}$. Então $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \hat{r} \, \frac{N}{C}$ ⧫