UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

Iniciado em	quinta, 1 Out 2020, 08:45
Estado	Finalizada
Concluída em	quinta, 1 Out 2020, 09:23
Tempo empregado	37 minutos 27 segundos
Avaliar	**8,00** de um máximo de 10,00(**80**%)

Questão **1**

Incorreto

Atingiu 0,00 de 2,00

Calcule a integral $\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} \sin(y)\cos(x)\,dx + \cos(y)\sin(x)\,dy + \,dz$

Resposta: -1

Resposta:

A forma diferencial de $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ é exata em um domínio convexo, se e somente se :

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \,df$$

Onde:

$$M\,dx = sen(y)\;cos(x)\;dx$$

$$N\,dy = cos(y)\;sen(x)\;dy$$

$$P\,dz = 1\,dz$$

Calculando os diferenciais da integral acima temos:

$$\frac{\partial\,M}{\partial y} = \frac{\partial\;sen(y)\;cos(x)}{\partial y} = cos(x)\;cos(y)$$

$$\frac{\partial\,M}{\partial z} = \frac{\partial\;sen(y)\;cos(x)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\,N}{\partial x} = \frac{\partial\;sen(x)\;cos(y)}{\partial x} = cos(x)\;cos(y)$$

$$\frac{\partial\,N}{\partial z} = \frac{\partial\;sen(x)\;cos(y)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial\,P}{\partial x} = \frac{\partial\;(1)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\,P}{\partial y} = \frac{\partial\;(1)}{\partial y} = 0$$

Logo observamos que a condição é satisfeita e o diferencial de $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ definida inicialmente é exata.

$$\vec{\mathbf{F}}(x) = sen(y)\;cos(x)\mathbf{i} + sen(x)\;cos(y)\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\,x} = M\; = sen(y)\;cos(x)$$

Derivando em relação a x , temos:

$$f(x,y,z) = sen(x)\;sen(y) + g(y,z)$$

Derivando em relação a y , temos:

$$f_y(x,y,z) = sen(x)\;cos(y) + g_y(y,z)$$

$$f_y(x,y,z) = N\; = sen(x)\;cos(y)$$

Assim temos que $g(y,z) = 0$. Então integrando em relação a y, temos:

$$f(x,y,z) = sen(x)\ sen(y) + h(z)$$

Derivando em relação a z:

$$f_z(x,y,z) = h'(z) = 1$$

Derivando em relação a z, temos:

$$f_z(x,y,z) = h(z) = z + C$$

Logo,

$$f(x,y,z) = sen(x)\ sen(y) + z + C$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = f(0,1,1) - f(1,0,0)$$

$$(0+1) - (0+0) = 1$$

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,0,0)} sen(y)\ cos(x)\ dx + cos(y)\ sen(x)\ dy\ + dz = 1$$

A resposta correta é: 1.

Questão **2**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

O campo $\vec{\mathbf{F}} = y\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$ é conservativo.

Escolha uma opção:

- Verdadeiro
- Falso ✓

Solução:

$\vec{\mathbf{F}}$ é conservativo se, e somente se,

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial z}$, $\dfrac{\partial M}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial z} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$.

Encontrando M , N e P:

$M = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $N = \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + z$ e $P = \dfrac{\partial f}{\partial z} = -y$;

Calculando as derivadas parciais de P em relação a y, M em relação a z e N em relação a z:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\dfrac{\partial M}{\partial z} = 1$ e $\dfrac{\partial N}{\partial z} = 0$;

Como $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial z}$, $\dfrac{\partial M}{\partial z} \neq \dfrac{\partial P}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial z} \neq \dfrac{\partial M}{\partial y}$, então o campo é não conservativo.

A resposta correta é 'Falso'.

Questão **3**

Correto

Atingiu 2,00 de 2,00

Encontre o trabalho realizado por $\vec{\mathbf{F}} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x2y^2\mathbf{j}$ para mover uma partícula uma vez em sentido anti-horário ao redor da fronteira da região "triangular" no primeiro quadrante delimitada superiormente pelo eixo x, a reta $x = 1$ e a curva $y = x^3$.

Escolha uma:

- a. $\frac{2}{31}$
- b. $\frac{2}{39}$
- c. $\frac{2}{37}$
- d. $\frac{2}{35}$
- e. $\frac{2}{33}$ ✓

Sua resposta está correta.

Resposta:

Sendo $\vec{\mathbf{F}}$ um campo conservativo do tipo $\vec{\mathbf{F}} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ de derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}\, ds = \oint_C Mdx + Ndy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\, dx\, dy$$

.

Aplicando o Teorema de Green com a fórmula Circulação Rotacional Tangencial, onde

Onde M corresponde os componentes em $\mathbf{i}$ e N os componentes em $\mathbf{j}$. Assim:

$$M = 2xy^3$$

$$N = 4x^2y^2$$

Para as derivadas parciais teremos:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2$$

Da curva C obtemos as variações de x e y onde:

$$0 < x < 1$$

$$0 < y < x^3$$

Substituindo os dados na fórmula de Circulação Rotacional e resolvendo a integral obtemos:

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{T}}\, ds = \int_0^1 \int_0^{x^3} 8xy^2 - 6xy^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^3} 2xy^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2xy^3}{3}\Big|_0^{x^3}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x(x^3)^3}{3}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^{10}}{3}\, dx$$

$$= \frac{2x^{11}}{33}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{33}$$

A resposta correta é: $\frac{2}{33}$

.

Questão **4**
Correto
Atingiu 2,00 de 2,00

Utilize a fórmula da área do teorema de Green $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ para encontrar a área do astroide $\vec{\mathbf{r}}(t) = \left(\cos^3 t\right)\mathbf{i} + \left(\sin^3 t\right)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Escolha uma:

a. $\frac{3\pi}{2}$

b. $\frac{5\pi}{8}$

c. $\frac{5\pi}{2}$

d. $\frac{3\pi}{8}$ ✓

e. $\frac{7\pi}{2}$

Sua resposta está correta.

Solução:

i) Derivando x e y temos:

$M = x = \cos^3 t \rightarrow dx = -3\cos^2 t\ \sin t$

$N = y = \sin^3 t \rightarrow dy = 3\sin^2 t \cos t$

ii) De acordo com o Teorema de Green faz-se necessário respeitar o seguinte formato:

$Mdy - Ndx$

Realizando a substituição, obtemos:
$\cos^3 t\,(3\sin^2 t\cos t) - \sin^3 t\,(-3\sin^2 t\ \sin t)$.

iii) Simplificando:
$3\sin^2 t\ \cos^4 t + 3\cos^2 t\ \sin^4 t = 3\sin^2 t\ \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 3\sin^2 t\ \cos^2 t$

iv) Dado que a área da região R é $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$, temos que após as devidas substituições a integral é:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t\,tdt = \frac{1}{2}\left[3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(4t)}{8}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{8}\left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi}\cos(4t)dt\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{8}(t+\sin(4t))\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Resposta = $\frac{3\pi}{8}$

A resposta correta é: $\frac{3\pi}{8}$

.

Questão **5**
Correto
Atingiu 2,00 de 2,00

Utilize a fórmula da área do teorema de Green $\frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ para encontrar a área da região delimitada pela circunferência $\vec{\mathbf{r}}(t) = (acos(t))\mathbf{i} + (asen(t))\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Escolha uma:

- a. πa^2 ✓
- b. $3\pi a^2$
- c. $1,5\pi a^2$
- d. $1,2\pi a^2$
- e. $2\pi a^2$

Sua resposta está correta.
SOLUÇÃO:
- Sabendo que $M = x = a\cos(t)$ e $N = y = a\sin(t)$, calculamos as derivadas de x e y. Logo, temos que
$x = -a\sin(t)\,dt$
$x = b\cos(t)\,dt$
$Area = \int_C xdy - ydx$
- Fazendo a substituição
$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2(t) + a^2\sin^2(t))dt$
- Resolvendo a integral, temos que a área da região delimitada é
$=\pi a^2$

A resposta correta é: πa^2

.