- Universidade Federal do Ceará - Campus Sobral
- Cálculo Diferencial e Integral 1 - 2020.1
- Prof. Rui F. Vigelis
- 3ª Avaliação Progressiva:
- Nome: William Bruno Sales de Paula Lima • Matrícula: 497345

1ª)

a) $\int \sqrt[3]{x^2} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{2/3} \cdot (x^2 - x^{-1/2}) dx =$

$= \int x^{8/3} - x^{1/6} dx = \boxed{\frac{3}{11} x^{11/3} - \frac{6}{7} x^{7/6} + C}$ //

• $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

b) $\int [\sec(x) + \cos(x)]^2 dx = \int \sec^2(x) + 2 \underbrace{\sec(x) \cdot \cos(x)}_{1} + \cos^2(x) dx =$; $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$= \int \sec^2(x) dx + 2 \int dx + \int \cos^2(x) dx =$ // $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ //

$= \int \sec^2(x) dx + 2 \int dx + \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2x) dx =$ // $u = 2x \Rightarrow$ $\Rightarrow du = 2dx$ //

$= \int \sec^2(x) dx + 2 \int dx + \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos(u) du =$

$= \tan(x) + 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + C = \boxed{\tan(x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{5x}{2} + C}$ //

2ª)

a) $\displaystyle\int \frac{(2-x)^2}{(2+x)^{1/3}}\,dx = \int (2+x)^{-1/3} \cdot (2-x)^2\,dx =$

• $u = 2 + x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{du = dx}$

• $\boxed{x = u - 2}$

$= \displaystyle\int u^{-1/3} \cdot (4-u)^2\,du = \int u^{-1/3} \cdot (16 - 8u + u^2)\,du =$

$= \displaystyle\int 16u^{-1/3} - 8u^{2/3} + u^{5/3}\,du =$

$= 24u^{2/3} - \frac{24}{5}u^{5/3} + \frac{3}{8}u^{8/3} + C =$

$= 25(2+x)^{2/3} - \frac{24}{5}(2+x)^{5/3} + \frac{3}{8}(2+x)^{8/3} + C$

b) $\displaystyle\int \sec^2(x) \cdot [1+\tan(x)]^{2/3}\,dx = \int \underbrace{[1+\tan(x)]^{2/3}}_{u^{2/3}} \cdot \underbrace{\sec^2(x)\,dx}_{du} =$

• $u = 1 + \tan(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{du = \sec^2(x)\,dx}$

$= \displaystyle\int u^{2/3}\,du = \frac{3}{5}u^{5/3} + C =$

$= \frac{3}{5}[1+\tan(x)]^{5/3} + C$

4ª) Parte 1:

i) Para encontrarmos $y(x)$ vamos integrar $\frac{d^2y}{dx} = \frac{dy'}{dx}$ para encontrarmos $y'(x)$ e integrar $y' = \frac{dy}{dx}$ para encontrarmos $y(x)$.

$$y'(x) = \int dy' = \int (x+1)^{1/2} dx = \int u^{1/2} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C_1 =$$

$u = x+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow du = dx$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_1 \Rightarrow \boxed{y'(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_1}$$

ii) $$y(x) = \int y'(x) = \int \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C_1 \, dx =$$

$u = x+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow du = dx$

$$= \frac{2}{3}\int u^{3/2} du + C_1 \int dx =$$

$$= \frac{4}{15} u^{5/2} + C_1 x + C_2 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C_1 x + C_2}$$

4ª) Parte 2:

- $y(x) = \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C_1 x + C_2$

iii) No ponto (0,0):

$$0 = \frac{4}{15}(0+1)^{5/2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 + \frac{4}{15} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{4}{15}}$$

iv) No ponto (3,2):

$$2 = \frac{4}{15}\sqrt{4^5} + 3C_1 - \frac{4}{15} \Rightarrow 3C_1 + \frac{128}{15} - \frac{4}{15} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3C_1 + \frac{124}{15} = 2 \Rightarrow 3C_1 = 2 - \frac{124}{15} \Rightarrow 3C_1 = -\frac{94}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{94}{45}}$$

v) Portanto, a equação da curva $y(x)$ é:

$$\boxed{y(x) = \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} - \frac{94}{45}x - \frac{4}{15}}$$

//

5ª) • $f(x) = x^2 - x - 3$; • $g(x) = -2x^2 + 2x + 3$;

- O Primeiro passo a ser dado é descobrirmos os pontos de intersseção das funções f e g:

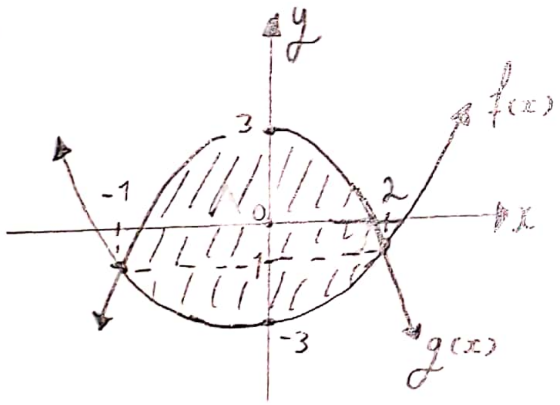
i) $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - x - 3 = -2x^2 + 2x + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 2x^2 - x - 2x - 3 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 2 \text{ e} \\ x_2 = -1 \end{bmatrix}$

Pontos de intersseção de f e g.

ii)



- A área a ser calculada é a área sombreada A do esboço do gráfico de f e g. Como $g(x) \geq f(x)$ $\forall x \in [-1, 2]$, então:

$$A = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-1}^{2} [(-2x^2 + 2x + 3) - (x^2 - x - 3)]\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} [-2x^2 + 2x + 3 - x^2 + x + 3]dx = \int_{-1}^{2} -3x^2 + 3x + 6\,dx =$$

$$= -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \Big]_{-1}^{2} = (-8 + 6 + 12) - \left(1 + \frac{3}{2} - 6\right) = \frac{27}{2} \text{ u.a}$$

6ª) • $y_1 = x^3$; • $y_2 = 2x + 21$; • $y_3 = -x$;

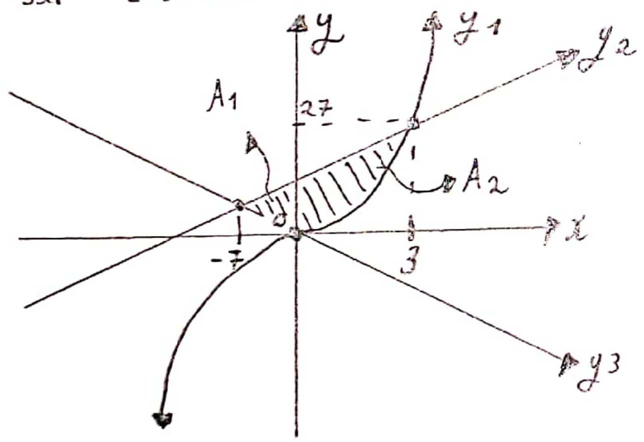
i) Novamente encontraremos os pontos de interseção das três curvas:

a) $y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow x^3 = 2x + 21 \Rightarrow x^3 - 2x = 21 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$

b) $y_1(x) = y_3(x) \Rightarrow x^3 = -x \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$

c) $y_2(x) = y_3(x) \Rightarrow 2x + 21 = -x \Rightarrow 3x = -21 \Rightarrow \boxed{x = -7}$

ii) Fazemos o gráfico das funções para visualizar a área A_T a ser calculada:



- A área total a ser calculada A_T está sombreada, e é igual a soma de A_1 com A_2: $A_T = A_1 + A_2$.
- Observe que para A_1, $y_2(x) \geq y_3(x)$ $\forall x \in [-7, 0]$ e para A_2, $y_2(x) \geq y_1(x)$ $\forall x \in [0, 3]$.

iii)

$$A_1 = \int_{-7}^{0} [y_2(x) - y_3(x)]\,dx = \int_{-7}^{0} [2x + 21 - (-x)]\,dx = \int_{-7}^{0} 3x + 21\,dx = \frac{3}{2}x^2 + 21x \Big]_{-7}^{0} =$$

$$= 0 - \left(\frac{147}{2} - 147\right) = 147 - \frac{147}{2} = \boxed{\frac{147}{2}\ u.a}$$

$$A_2 = \int_{0}^{3} [y_2(x) - y_1(x)] = \int_{0}^{3} -x^3 + 2x + 21\,dx = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 21x \Big]_{0}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{81}{4} + 9 + 63\right) - 0 = -\frac{81}{4} + 72 = \frac{-81 + 288}{4} = \boxed{\frac{207}{4}\ u.a}$$

$$A_T = A_1 + A_2 = \frac{147}{2} + \frac{207}{4} \Rightarrow \boxed{A_T = \frac{501}{4}}$$