Álgebra Linear
Aula 12

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Teorema (3.1.1)

Se $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ e α e β escalares, então:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$;
2. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$;
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;
4. $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = (-\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$;
5. $\alpha(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{u} + \alpha\overrightarrow{v}$;
6. $(\alpha + \beta)\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}$;
7. $\alpha(\beta\overrightarrow{v}) = (\alpha\beta)\overrightarrow{v}$;
8. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.

Exemplo 2

Descubra qual o vetor $\overrightarrow{x}$ abaixo para que a igualdade seja verdade

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}.$$

Exemplo 3

É possível escrever o vetor $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ em função dos vetores $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0, 1)$?

Exemplo 3

É possível escrever o vetor $\overrightarrow{v} = (1,2)$ em função dos vetores $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$?

Combinação Linear

Um vetor $\overrightarrow{w}$ em $\mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_r$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tais que

$$w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r.$$

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$.

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$.

Norma de um vetor

A norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é definida como

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Exemplo 4

Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{v} = (3, 4)$.

Norma de um vetor

A norma de um vetor $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é definida como

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Teorema (3.2.1)

Se $\overrightarrow{v}$ for um vetor em $\mathbb{R}^n$ e α um escalar então

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$;
2. $\|\overrightarrow{v}\| = 0$ se e somente se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
3. $\|\alpha\overrightarrow{v}\| = |\alpha|\|\overrightarrow{v}\|$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetor unitário

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é unitário se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

Normalização de um vetor

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ em $\mathbb{R}^n$. O vetor normalizado de $\overrightarrow{v}$ é definido como $\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$.

Propriedade

Temos que $\|\frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetor unitário

Dizemos que um vetor $\overrightarrow{v}$ é unitário se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

Vetores canônicos

Para um $n > 0$ fixo. Denotamos por $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ os vetores canônicos de $\mathbb{R}^n$ no qual o vetor e_i é igual ao vetor linha da i-ésima linha da matriz identidade I_n.

Distância entre pontos Vs Norma de vetores

Sejam A e B pontos do $\mathbb{R}^n$. A distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B é definida como a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Distância entre pontos Vs Norma de vetores

Sejam A e B pontos do $\mathbb{R}^n$. A distância $d(A, B)$ entre os pontos A e B é definida como a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Distância entre pontos

Temos que

$$d(A, B) = \sqrt{(B_1 - A_1)^2 + \cdots + (B_n - A_n)^2}.$$

Exemplo 5

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 0)$.

Exemplo 5

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (1, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 0)$.

Exemplo 6

Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ e $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2)$.

Produto Interno entre Vetores

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. O produto interno entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é definido como

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|u\|\|v\| \cos\theta = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$