Álgebra Linear
Aula 11

Josefran de Oliveira Bastos

Universidade Federal do Ceará

Teorema 2.3.4

Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Teorema 2.3.4

Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Corolário 2.3.5

Se A for invertível, então

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Exemplo

Calcule associando os cofatores de uma linha a linha diferente.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemplo

Calcule associando os cofatores de uma linha a linha diferente.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Proposição

Sejam A uma matriz $n \times n$. Para todo $i, j \in [n] = \{1, \ldots, n\}$, com $i \neq j$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} C_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ki} C_{kj} = 0.$$

Definição 8.1

Se A é uma matriz $n \times n$ qualquer então denominamos a matriz

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^T$$

como a matriz adjunta de A.

Teorema 2.3.6

Se A é uma matriz invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Exemplo 8.8

Calcule a inversa da matriz a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.3.7

Se $Ax = b$ for um sistema de n equações e n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$ então o sistema tem uma única solução. Essa solução é

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

para todo $i \in [n]$, onde A_i é a matriz obtida substituindo a i-ésima coluna de A pela matriz coluna b.

Exemplo 8.9

Resolva o seguinte sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ -\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Motivação

Quais informações são necessárias para representar os itens a seguir?

- A grandeza física Força;
- O movimento de um objeto;
- Movimento retilíneo de um ponto em um plano;

Vetores

Vetores são grandezas que possuem direção, sentido e magnitude/comprimento.

Vetores

Vetores são grandezas que possuem direção, sentido e magnitude/comprimento.

Notações

Usualmente denotaremos por uma letra minúscula com uma seta em cima para representar vetores ($\overrightarrow{v}$) e por letras gregas $\alpha, \beta, \ldots$ para representar escalares.

Exemplo 1

Sejam $A = (2,2)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exemplo 1

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Exemplo 1

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final.

Exemplo 1

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

- A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ também é chamada de n-upla de $\mathbb{R}^n$;

Exemplo 1

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 0)$. Represente os vetores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são iguais se possuem mesma direção, sentido e comprimento.

Representação de Vetores

Note que se o ponto inicial de um vetor for a origem então o vetor fica unicamente determinado por seu ponto final. Assim, denotaremos por $\overrightarrow{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ o vetor de $\mathbb{R}^n$.

- A sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ também é chamada de n-upla de $\mathbb{R}^n$;
- Também podemos representar vetores por matrizes colunas ou matrizes linhas.

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$;

Soma de Vetores

Dado dois vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ o vetor soma $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ pode ser obtido da seguinte forma: fixamos o vetor $\overrightarrow{v}$ com início em um ponto A e então o vetor $\overrightarrow{w}$ no "final" do vetor $\overrightarrow{v}$. Seja B o ponto que está no "final" do vetor $\overrightarrow{w}$. Assim, temos $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$.

Soma de Vetores

Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Temos

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n).$$

Propriedades da Soma

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{z}$ vetores do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Temos

1. $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}$;
2. $\overrightarrow{v} + (\overrightarrow{w} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) + \overrightarrow{z}$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos que $\alpha\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção de $\overrightarrow{v}$, comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\overrightarrow{v}$ e, se $\alpha > 0$ então possui mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$, se $\alpha < 0$ então possui sentido inverso. Caso $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\alpha = 0$ definimos $\alpha\overrightarrow{v} = 0$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos que $\alpha\overrightarrow{v}$ é um vetor com mesma direção de $\overrightarrow{v}$, comprimento $|\alpha|$ vezes o comprimento de $\overrightarrow{v}$ e, se $\alpha > 0$ então possui mesmo sentido que $\overrightarrow{v}$, se $\alpha < 0$ então possui sentido inverso. Caso $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\alpha = 0$ definimos $\alpha\overrightarrow{v} = 0$.

Multiplicação por escalar

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um escalar e $\overrightarrow{v}$ em $\mathbb{R}^n$ um vetor. Temos

$$\alpha\overrightarrow{v} = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n).$$