Transformada de Laplace

Universidade Federal do Ceará
Campus Sobral
Engenharia Elétrica e Engenharia de Computação

Sistemas Lineares (SBL0091)

Prof. C. Alexandre R. Fernandes

Agenda

I. Introdução

- Por que usar Transformada de Laplace?
  - A Transformada de Laplace é aplicável a uma classe mais ampla de sinais e sistemas do que Transformada de Fourier (TF)
  - Obtenção de diversas propriedades de SLIT
  - A notação da Transformada Transformada de Laplace é mais simples que a da TF

I. Introdução

- Relembrando → Exponenciais complexas são auto-funções de SLIT.

  - Saída de um sistema quando a entrada é uma exponencial complexa unitária (caso contínuo):

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\ &= H(j\omega)e^{j\omega t} \end{aligned}$$

  - Resposta em frequência:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

I. Introdução

- Esta propriedade de autofunção de SLIT é de grande importância para a TF, pois dela deriva o Teorema da Convolução da TF.

- Entretanto, esta propriedade de autofunção de SLIT por ser generalizada para um tipo de sinal mais genérico: **exponencial complexa generalizada**.

- No slide anterior, vamos substituir $j\omega$ por $s=\sigma+j\omega$

$$e^{st} = e^{\sigma t}\cos(\omega t) + je^{\sigma t}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

I. Introdução

- **Exponencial complexa generalizada:**
- Parte real de e^{st} : cosseno exponencialmente amortecido
- Parte imaginária de e^{st} : seno exponencialmente amortecido

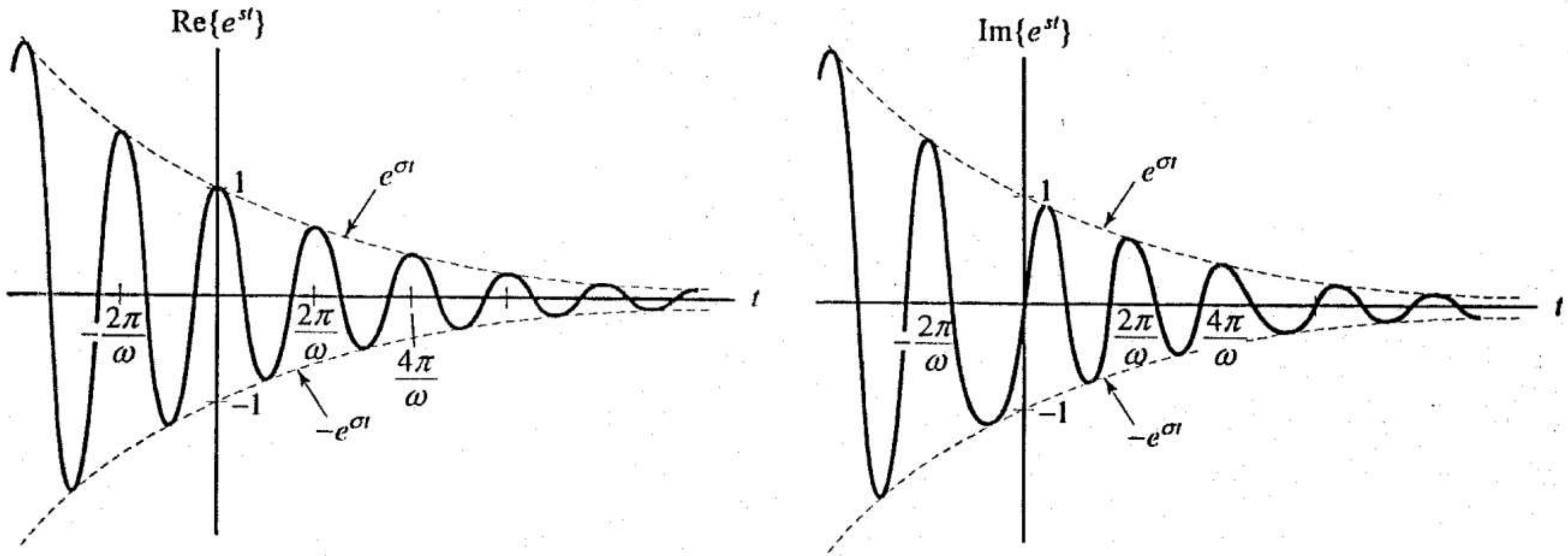


FIGURA 6.1 Partes real e imaginária da exponencial complexa e^{st}.

- Parte real de s → fator de amortecimento exponencial
- Parte imaginária de s→ frequência do seno e cosseno

$$s = \sigma + j\omega$$

I. Introdução

- Saída de um sistema quando a entrada é uma exponencial complexa generalizada:

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{e^{st}\} \\ &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \end{aligned}$$

- Função de transferência:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

I. Introdução

- Ou seja, as exponenciais complexas generalizadas também são autofunções de SLIT:

$$y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st} \qquad\qquad H(s) = |H(s)|\, e^{j\phi(s)}$$

- Inspirado nesta propriedade, define-se a **Transformada de Laplace (TL)**:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\, dt}$$

- Note a TL é obtida substituindo-se $j\omega$ por $s = \sigma + j\omega$ na TF:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

I. Introdução

- Função de Transferência → TL da resposta ao impulso:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

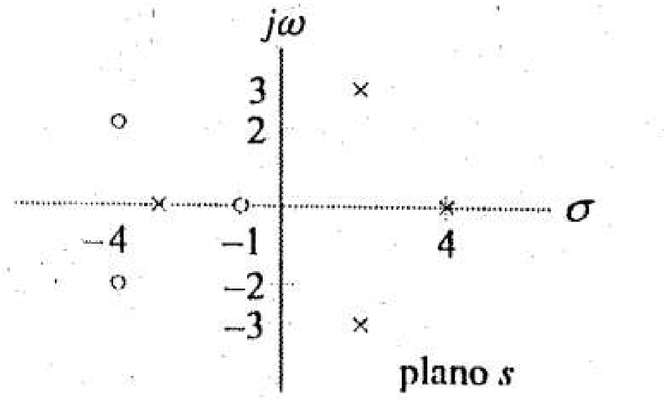
- A Função de Transferência é a forma de representar sistema no domínio da TL.
- Sistemas contínuos podem ser representados por:
  - Eq. diferencial (domínio do tempo)
  - Resposta ao impulso (domínio do tempo)
  - Reposta em frequência (domínio da frequência)
  - Função de Transferência (domínio de Laplace)

I. Introdução

- **Propriedade importante:** a TF é um caso particular da TL quando $\sigma=0$

$$X(j\omega) = X(s)\Big|_{\sigma=0}$$

- Plano s e seu eixo imaginário



I. Introdução

- Ou seja, a TF é igual a TL calculada no eixo imaginário do plano s.

- Por outro lado, a TL pode ser vista como a TF do sinal: $x(t)e^{-\sigma t}$

I. Introdução

- Transformada de Laplace Inversa (TLI):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\ ds$$

- A eq. acima mostra que o sinal x(t) é expresso como uma soma de exponenciais complexas com frequências complexas.

- Entretanto, não usaremos esta eq. para determinar a TLI, pois ela é de difícil manipulação (integral de contorno).

- Obteremos a TLI pelo método de expansão em frações parciais.

I. Introdução

- Eqs. da Transformada de Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} \, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} \, ds$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$$

II. Região de Convergência

- Relembrando → Condição para TL existir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

- A TL pode ser vista como a TF do sinal: $x(t)e^{-\sigma t}$

- Logo, a condição para TL existir é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)e^{-\sigma t}\right| dt < \infty$$

II. Região de Convergência

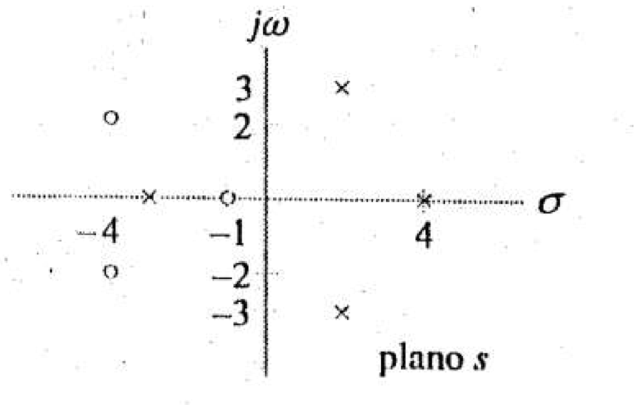
- Note que a condição para a TF existir é binária.
- Ou seja, a TF de um sinal existe ou não existe (para todas as frequências).
- Já a condição de existência da TL depende de σ.
- Ou seja, a TL pode existir para alguns valores de σ, mas não existir para outros valores de σ.
- Mas a condição de existência da TL não depende da frequência.

II. Região de Convergência

- Definição importante: Região de Convergênia (RDC) - *Region of Convergence* (ROC):

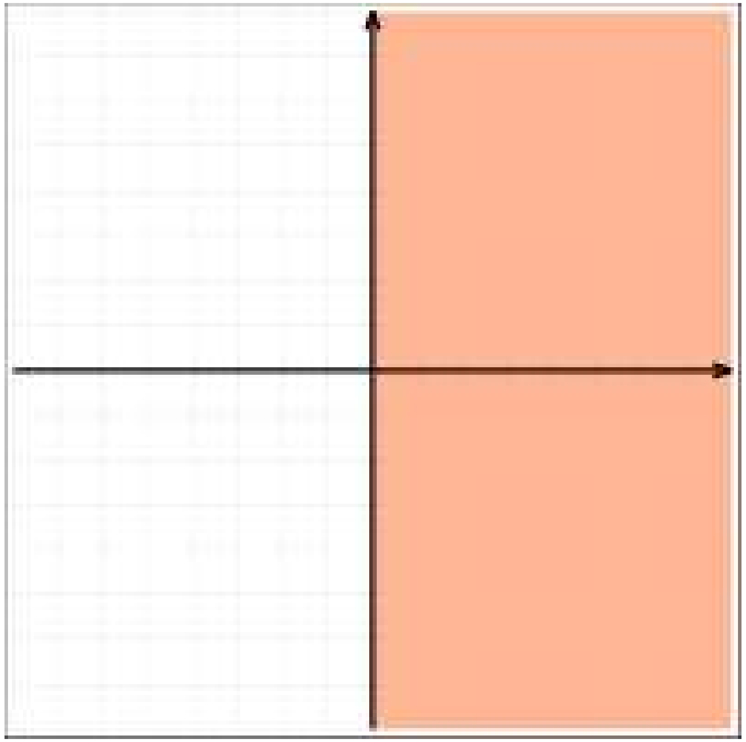
  - Intervalo de valores de σ para os quais a TL existe.

- A RDC é frequentemente representada no plano s.



II. Região de Convergência

- O plano s é dividido nos semiplanos negativo e positivo.

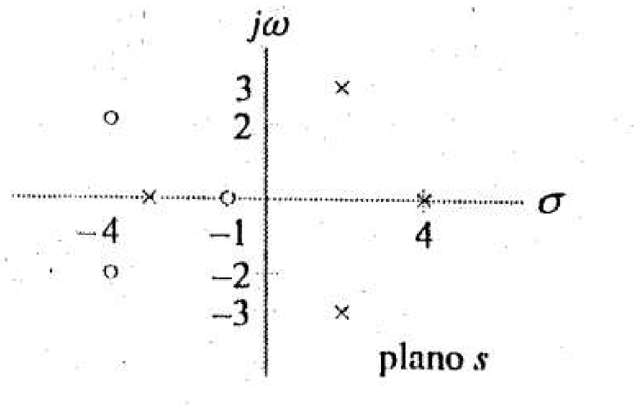


III. Polos e zeros

- É comum que a TL tenha a seguinte forma:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

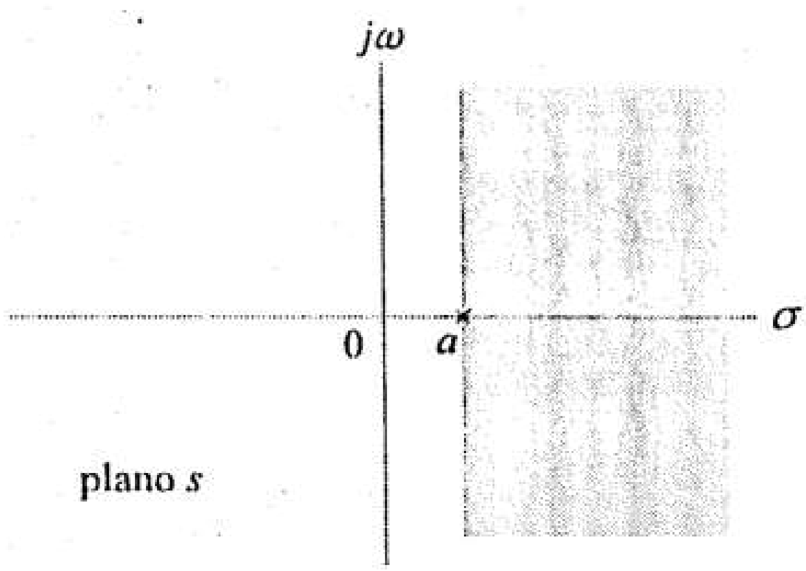
- Zeros de X(s): raízes do numerador.
- Polos de X(s): raízes do denominador.
- Diagrama de polos e zeros → representação gráfica de polos e zeros no plano s:



III. Polos e zeros

- É comum representar polos e zeros juntamento com a RDC.

- Polos, zeros e RDC possuem muitas propriedades importantes.



III. Polos e zeros

Exemplo 6.1 Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{at}u(t)$$

e descreva a RDC e as localizações de pólos e zeros no plano s. Suponha que a seja real.

Exemplo 6.2 Determine a transformada de Laplace e a RDC para o sinal

$$y(t) = -e^{at}u(-t)$$

- Dois sinais diferentes podem ter TL idênticas mas RDC diferentes.
- A expressão da TL não correspondente de maneira única ao sinal x(t) se a RDC não for especificada.

III. Polos e zeros

▶ **EXERCÍCIO 6.1** Determine a transformada de Laplace e a RDC de

$$x(t) = u(t-5)$$

Resposta:

$$X(s) = \frac{e^{-5s}}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$ ◀

▶ **EXERCÍCIO 6.2** Determine a transformada de Laplace, a RDC e as localizações de pólos e zeros dos $X(s)$ para

$$x(t) = e^{j\omega_o t}u(t)$$

Resposta:

$$X(s) = \frac{1}{s - j\omega_o}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

O pólo está em $s = j\omega_o$. ◀

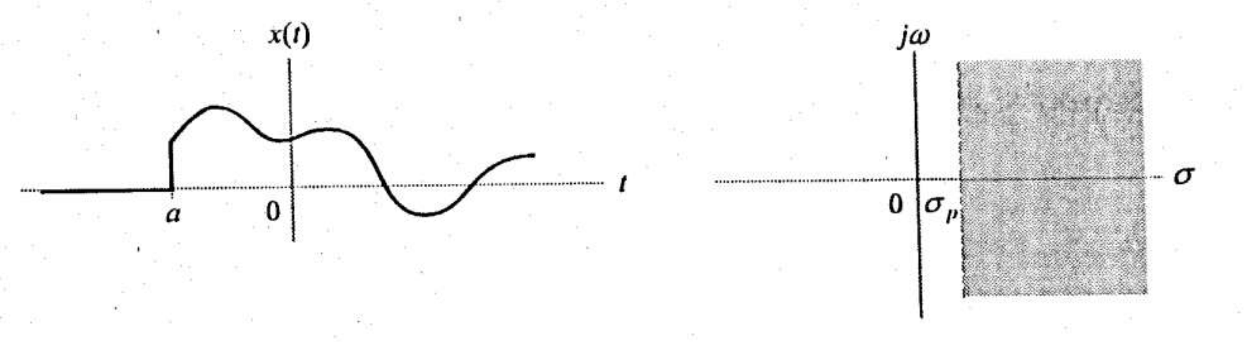
IV. Propriedades da Região de Convergência

- **Propriedade 1:** A RDC não pode conter polos

- **Propriedade 2:** A RDC consiste em faixas paralelas ao eixo imaginário no plano s.

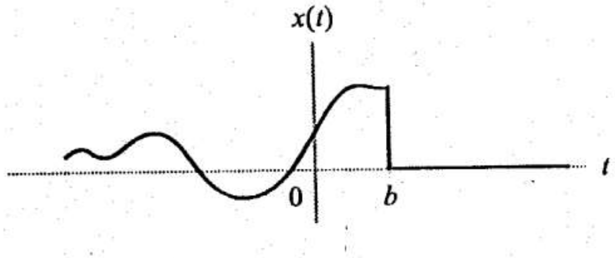
- **Propriedade 3:** Se x(t) tem duração finita, a RDC é o plano s inteiro.

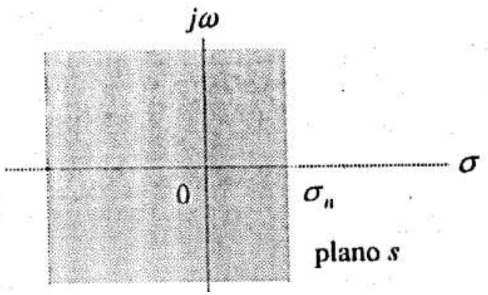
- **Propriedade 4:** Se x(t) é lateral direito, a RDC tem a forma $\sigma > \sigma_p$.



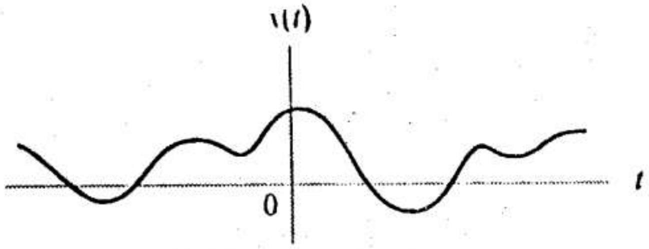
IV. Propriedades da Região de Convergência

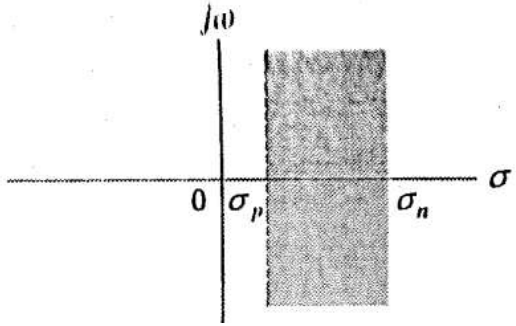
- **Propriedade 5:** Se x(t) é lateral direito, a RDC tem a forma $\sigma < \sigma_n$.





- **Propriedade 6:** Se x(t) é bilateral, a RDC tem a forma $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$.





IV. Propriedades da Região de Convergência

- **Propriedade 7:** A transformada de Fourier de x(t) existe se e somente se a RDC incluir o eixo imaginário do plano s.

- **Propriedade 8:** A RDC é inteiramente conectada.

- Relembrando as 2 TL mais importantes::

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{A_k}{s - d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) > d_k$$

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A_k}{s - d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) < d_k$$

IV. Propriedades da Região de Convergência

- Exemplos:

Exemplo 6.12 Considere os dois sinais

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(-t)$$

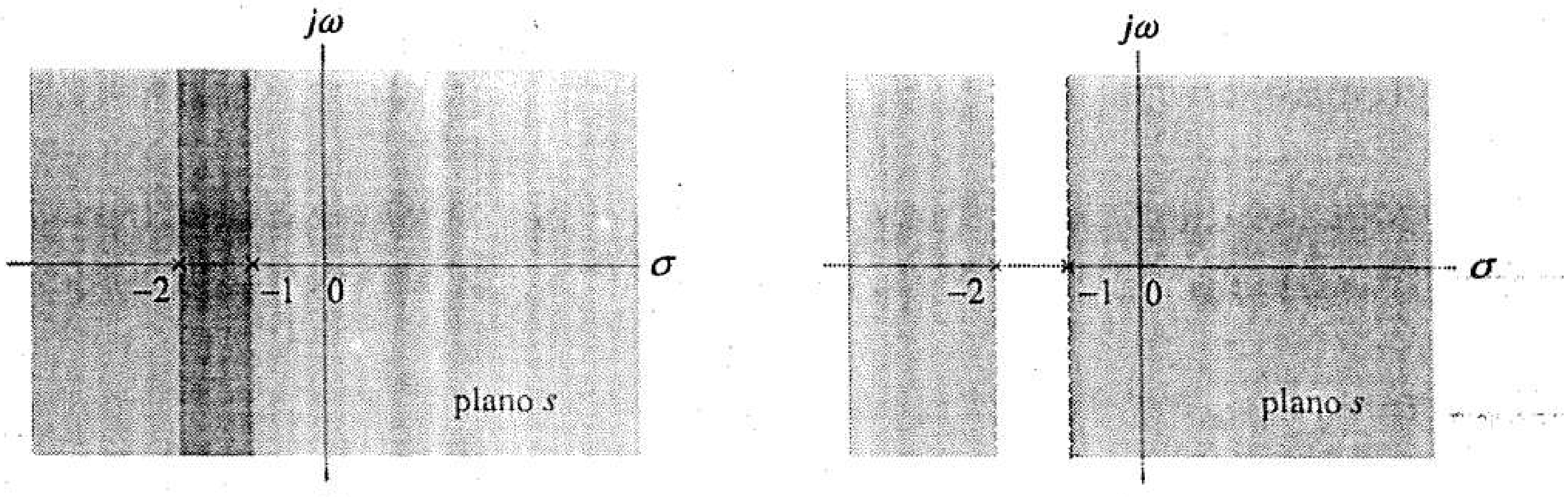
e

$$x_2(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$$

Identifique a RDC de cada sinal.

IV. Propriedades da Região de Convergência

- Exemplos:



(a) (b)

IV. Propriedades da Região de Convergência

- Exemplos:

▶ **Exercício 6.9** Descreva a RDC do sinal

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

para $b > 0$ e $b \leq 0$.

Resposta: Para $b > 0$ a RDC é a região $-b < \sigma < b$. Para $b \leq 0$ a RDC é o conjunto vazio.

V. Propriedades da Transformada de Laplace

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$$y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s)$$

- Linearidade:

$$ax(t) + by(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} aX(s) + bY(s)$$ RDC de pelo menos $R_x \cap R_y$,

- Deslocamento no Tempo:

$$x(t-\tau) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-s\tau} X(s)$$ RDC não muda

V. Propriedades da Transformada de Laplace

- Deslocamento no domínio s:

$$e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - s_0)$$

RDC deslocada de s_0

- Convolução:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)Y(s)$$

RDC de pelo menos $R_x \cap R_y$,

- Diferenciação no domínio do tempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$$ com RDC no mínimo R_x

V. Propriedades da Transformada de Laplace

- Integração no domínio do tempo:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X(s)}{s} \quad \text{com RDC } R_x \cap \mathrm{Re}(s) > 0$$

- Exemplo:

Exemplo 6.14 Encontre a transformada de Laplace de

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-3(t-2)}u(t-2)\right)$$

V. Propriedades da Transformada de Laplace

- Exemplos:

$$x(t) = e^{-t}u(t) * \text{sen}(3\pi t)u(t)$$

$$x(t) = \frac{d}{dt}\{tu(t)\}$$

Sinal	*Transformada*	*RDC*
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$\delta(t-\tau), \quad \tau > 0$	$e^{-s\tau}$	para todos s
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[\text{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{s^3+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at}\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at}\text{sen}(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

VI. Inversão da Transformada de Laplace

- Como mencionado anteriormente, não usaremos a fórmula da TL inversa.

- A eq. da TL inversa requer o entendimento de integração de contorno.

- Usaremos o método da **expansão em frações parciais**.

- Nos casos trabalhos nesta disciplina, a TL terá o seguinte formato:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

VI. Inversão da Transformada de Laplace

- Expansão em frações parciais - caso: N >M

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

  - Fatorizarão do denominador:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^{N} (s - d_k)}$$

  - Se os polos forem distintos, pode ser expandida na forma:

$$X(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - d_k}$$

VI. Inversão da Transformada de Laplace

- Expansão em frações parciais - caso: N >M
  - A inversa de cada termo pode ser obtida por inspeção usando:

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{A_k}{s-d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) > d_k$$

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A_k}{s-d_k} \quad \text{com RDC } \mathrm{Re}(s) < d_k$$

  - A escolha de qual dos dois pares de TL vai ser usado depende da RDC.
  - Não estudaremos o caso em que há polos iguais nem o caso em que N<=M.

VI. Inversão da Transformada de Laplace

- Expansão em frações parciais - caso: N >M
  - As contantes A_k são encontradas usando-se o métodos dos resíduos:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^{N}(s - d_k)}$$

  - Para o polo d_k:

$$A_k = X(s)\,(s - d_k)\big|_{s=d_k}$$

VI. Inversão da Transformada de Laplace

- Expansão em frações parciais - 1º caso: N >M

Exemplo 6.15 Encontre a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{-5s-7}{(s+1)(s-1)(s+2)} \quad \text{com RDC } -1 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Exercício 6.10 Repita o exemplo anterior se a RDC for $-2 < \mathrm{Re}(s) < -1$.

VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Eq. de um Sistema LTI no domínio de Laplace:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- A função de transferência H(s) é uma alternativa ao uso da resposta ao impulso h(t) e da convolução.

VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Eq. diferenciais e função de transferência:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

  - Usando a propriedade da diferenciação no domínio do tempo:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Eq. diferenciais e função de transferência:

Exemplo 6.16 Encontre a função de transferência do sistema LTI descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+3\frac{d}{dt}y(t)+2y(t)=2\frac{d}{dt}x(t)-3x(t)$$

Solução: Aplique a equação (6.30), obtendo

$$H(s)=\frac{2s-3}{s^2+3s+2}$$

VII. Análise de Sistemas por Transformada

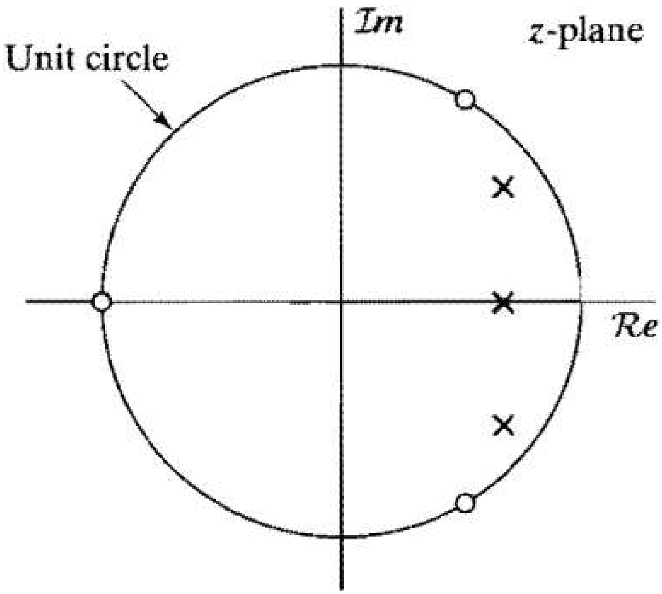
- Forma fatorada (ou ZPK):

$$H(s) = \frac{(b_M / a_N) \prod_{k=1}^{M} (s - c_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - d_k)}$$

- Um sistema (ou sinal) é completamente determinado pelos polos, zeros e o ganho.

VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Todos os zeros e polos complexos (parte imaginária não nula) ocorrem aos pares conjugados:



VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Estabilidade e TL:
  - A reposta em frequência de um sistema LTI só existe se a RDC incluir o eixo imaginário do plano s.
  - Entretanto, já estudamos anteriormente:

    reposta em frequência existe $\Leftrightarrow$ sistema estável

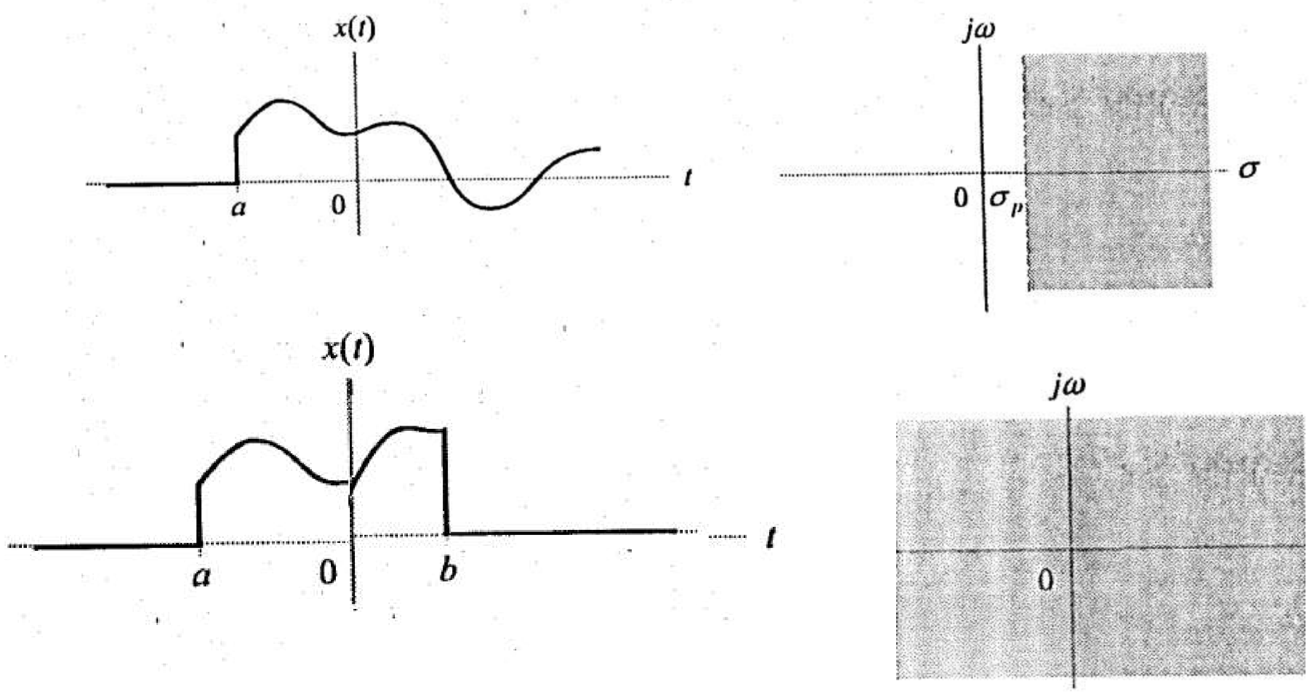
  - Logo:

    sistema estável $\Leftrightarrow$ a RDC inclui o eixo imaginário

VII. Análise de Sistemas por Transformada

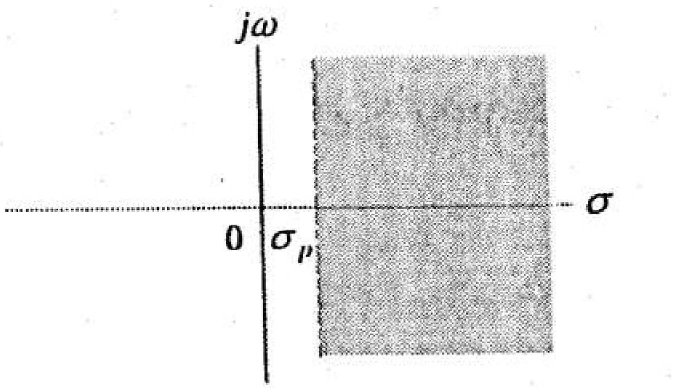
- Causalidade e TL:[
  - Para um sistema ser causal, sua resposta ao impulso h(t) não deve possuir componente não nulos para t<0.

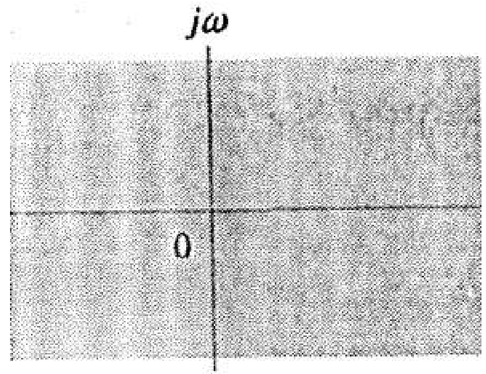
  - Ou seja, h(t) deve ser lateral direita ou de duração finita.



VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Causalidade e TL:
  - Ou seja, para um sistema ser causal, a RDC de ser:
    - De um polo para a direita.
    - Plano s inteiro.





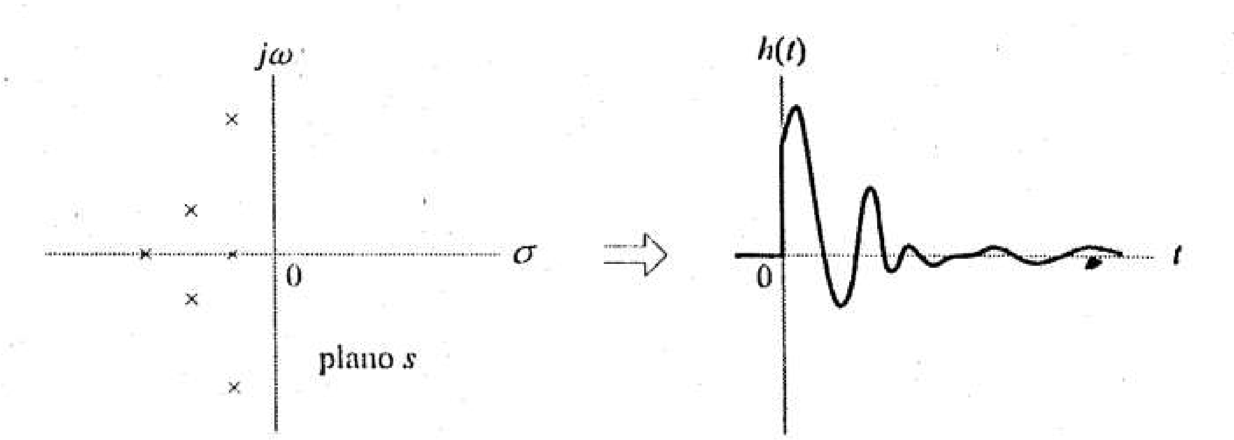
VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Causalidade e estabilidade:
  - Para um sistema LTI ser estável e causal:
    - A RDC inclui o eixo imaginário
    - A RDC de ser de um polo para a direita OU plano s inteiro.

  - **Conclusão:** Para um sistema LTI ser estável e causal, ele deve se enquadrar em uma das 2 situações:
    - h(t) duração finita: não possui polos
    - h(t) lateral direita: RDC de um **polo com parte real negativa** pra direita

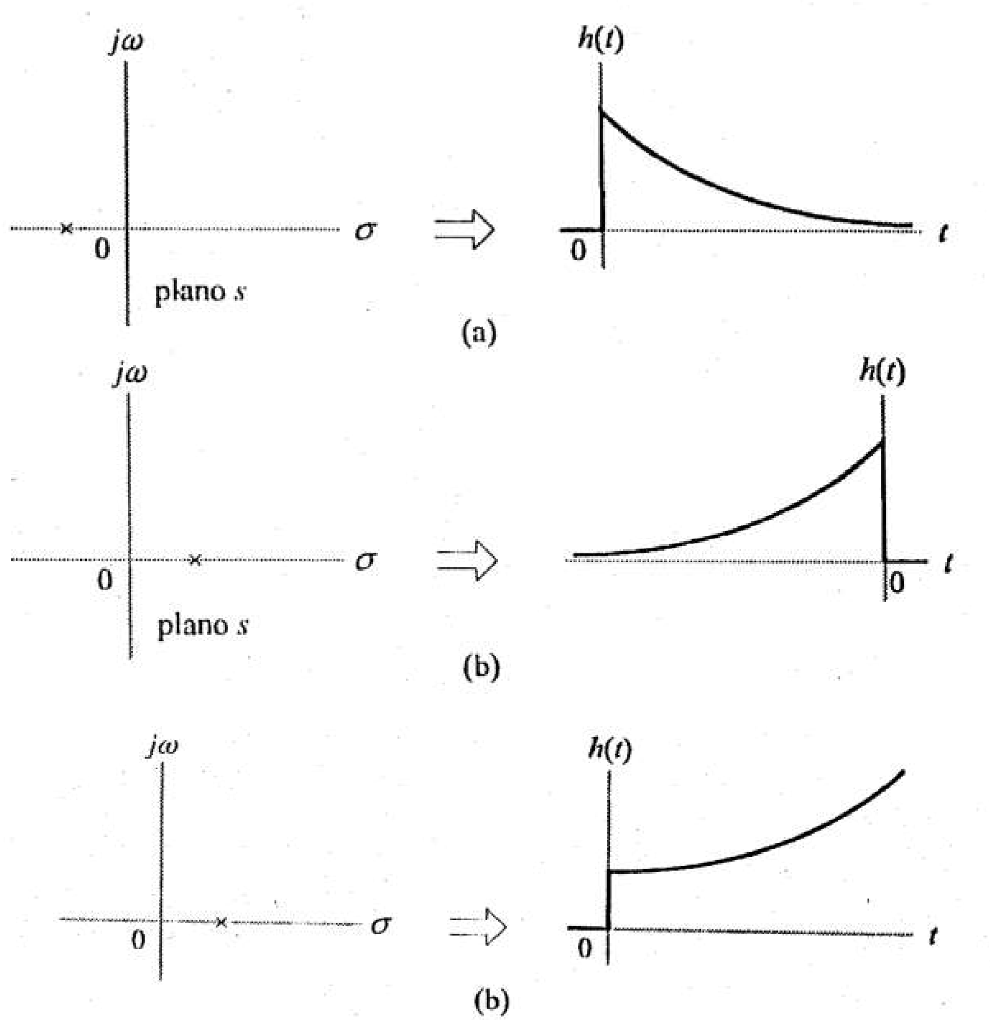
VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Causalidade e estabilidade:
  - **Conclusão:** Para um sistema LTI ser estável e causal, todos os polos devem estar no semiplano esquerdo.



VII. Análise de Sistemas por Transformada

- Causalidade e estabilidade:



VII. Análise de Sistemas por Transformada

Exemplo 6.19 Um sistema tem a função de transferência

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-2}$$

Encontre a resposta ao impulso supondo que (a) o sistema é estável e (b) o sistema é causal. Este sistema pode ser tanto estável como causal?