UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

Eletromagnetismo

Aula 02 – Gradiente, divergente e rotacional

Prof. Acélio Luna Mesquita

Universidade Federal do Ceará – Campus Sobral

Operador nabla $(\vec{\nabla})$

- O operador vetorial nabla é definido em coordenadas cartesianas como:

$$\nabla = \frac{\partial(\hat{a}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{a}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\hat{a}_z)}{\partial z}$$

Operador nabla $(\vec{\nabla})$

- Seja '$\vec{A}(x, y, z)$' uma função vetorial e B(x, y, z) uma função escalar, o operador nabla pode realizar três tipos de operação:
- Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z)$$

- Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z)$$

- Gradiente:

$$\vec{\nabla} B(x, y, z)$$

Gradiente

- O **gradiente** (ou **vetor gradiente**) é um vetor que indica o sentido e a direção na qual, por deslocamento a partir do ponto especificado, obtém-se o maior incremento possível no valor de uma grandeza a partir da qual se define um campo escalar para o espaço em consideração.
- A exemplo, a partir do gradiente do potencial elétrico determina-se o campo elétrico; e a partir do gradiente da energia potencial determina-se o campo de força associado.

Gradiente

- Dado um campo escalar $f = f(x,y)$ (ou $f = f(x,y,z)$) seu gradiente é o campo vetorial:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Gradiente

- Propriedades do gradiente:
- A) é perpendicular as curvas de nível de $f = f(x,y)$
- B) aponta para a direção e sentido de maior variação de f

Exemplo

- Faça o gradiente da função *f = f*(*x,y,z*) $= x^3y + xe^{3z}$:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x^3y + xe^{3z})}{\partial x}, \frac{\partial f(x^3y + xe^{3z})}{\partial y}, \frac{\partial f(x^3y + xe^{3z})}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = (3x^2y + e^{3z}, x^3, 3xe^{3z})$$

Gradiente

- Decida se o campo $X(x,y) = (2x, 3xy)$ é um campo gradiente

$$X(x,y) = (2x, 3xy) = ?? = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- Para alguma função f

Gradiente

- Temos que resolver o sistema

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3xy$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x \Rightarrow f(x, y) = x^2 + g(y)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3xy \Rightarrow f(x, y) = \frac{3}{2}xy^2 + h(x)$$

Gradiente

- Comparando as duas expressões anteriores concluímos que o sistema é impossível.
- Assim o campo $X(x,y) = (2x,3xy)$ não é um campo gradiente.

Gradiente

- Decida se o campo $X(x,y) = (2x, 3y)$ é um campo gradiente

$$X(x,y) = (2x, 3y) = ?? = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- Para alguma função f

Gradiente

- Temos que resolver o sistema

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3y$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x \Rightarrow f(x, y) = x^2 + g(y)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 3y \Rightarrow f(x, y) = \frac{3}{2} y^2 + h(x)$$

Gradiente

- Comparando as duas expressões anteriores concluímos que:

$$g(x) = x^2 + c \quad \text{e} \quad h(y) = \frac{3}{2}y^2 + c$$

- Assim o campo $X(x,y) = (2x,3y)$ é o gradiente de

$$f(x,y) = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + c$$

Divergente

- **O que é o divergente de um campo vetorial ?**

O divergente de um campo vetorial é um escalar que representa o fluxo do vetor característico do campo por unidade de volume.

Divergente

- Significado Físico/Geométrico:

- O divergente de um campo $\vec{\mathrm{F}}$ calculado num ponto P mede a quantidade da grandeza descrita por $\vec{\mathrm{F}}$ que “sai” de um elemento de volume em torno de P por unidade de tempo.

Divergente

- Dado o campo vetorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

- O divergente de $\vec{F}$ é o campo escalar

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergente

- Exemplo

$$\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} + (x^4 + 5zx - 2y)\vec{j} + (x + 2y + z^3)\vec{k}$$

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Divergente

- Exemplo

$$\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} + (x^4 + 5zx - 2y)\vec{j} + (x + 2y + z^3)\vec{k}$$

$$div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = 3x\vec{i} + (x^4 + 5zx - 2y)\vec{j} + (x + 2y + z^3)\vec{k}$$

$$div\vec{F} = 3 - 2 + 3z^2$$

$$\therefore 1 + 3z^2$$

Divergente

- Exemplo: campo radial

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x,y,z)$$

Divergente

- Exemplo: campo radial

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x,y,z)$$

$$\nabla \cdot \vec{r} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1+1+1 = 3$$

Rotacional

- Rotacional de um campo vetorial no plano.
- Sendo:

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (P,Q)$$

- O rotacional de F é:

$$Rot\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k}$$

Rotacional

- Exemplo:
- Sendo: $\vec{F}(x,y) = x\vec{j} = (0,x)$

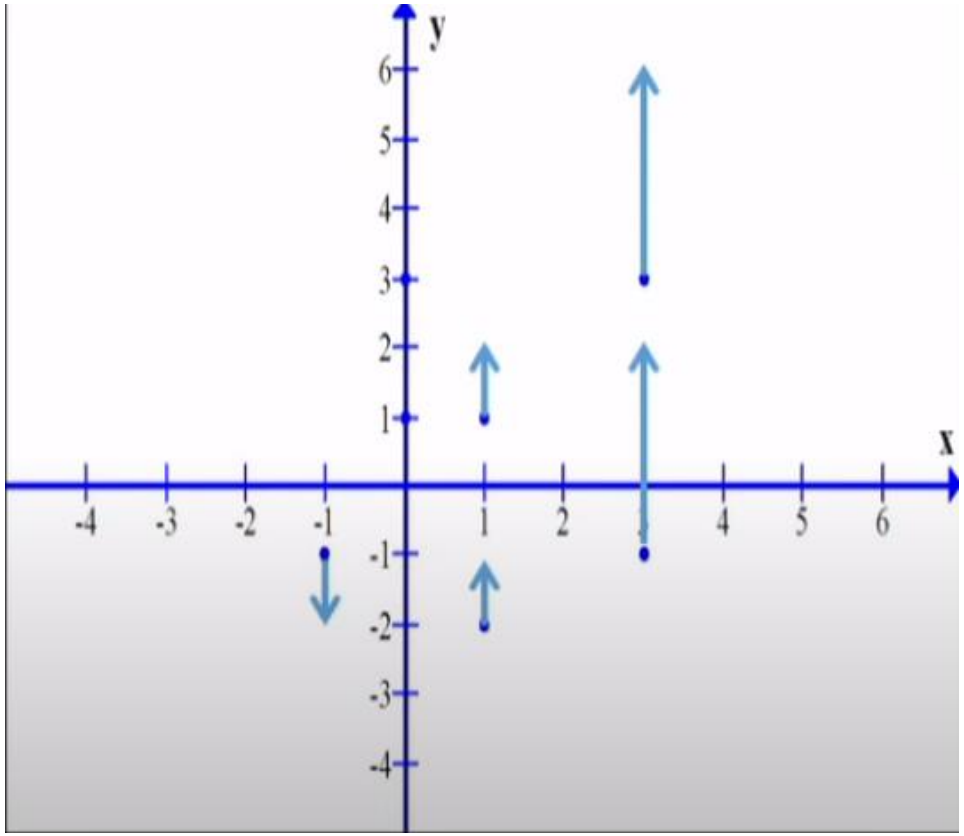
$$Rot\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\vec{k} = (1-0)\vec{k}$$

$$\therefore \vec{k}$$

Rotacional

$$\vec{X}(x,y) = (0, x)$$

$$\vec{X}(x,y) = x\vec{j}$$



Rotacional

- Exemplo:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

- Mostrar que rot$\vec{F}$=0

Rotacional

- Exemplo:

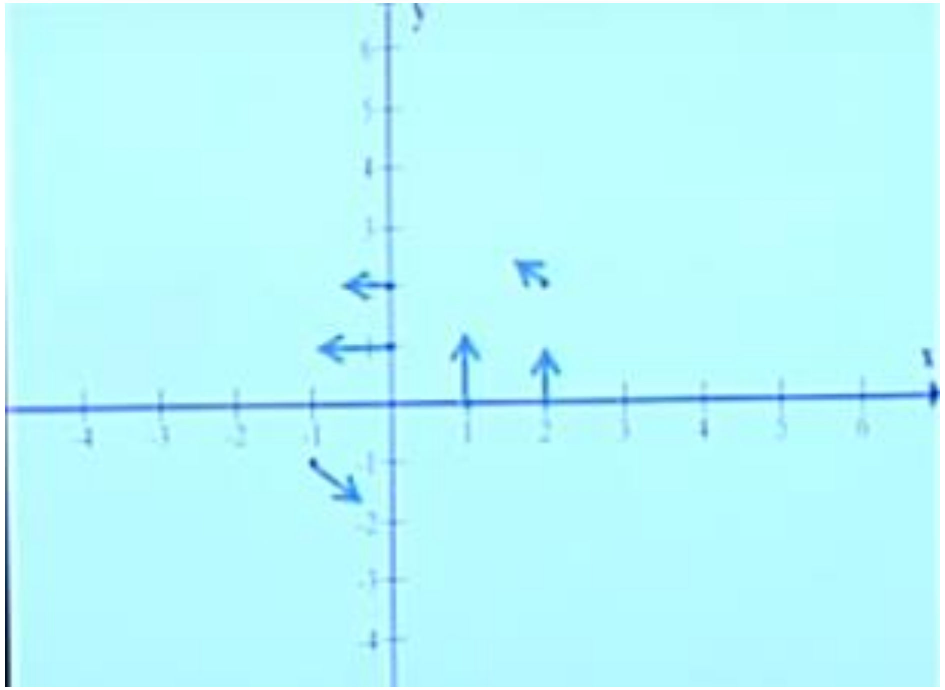
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1 \cdot (x^2 + y^2) - (-y) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Logo

$$Rot\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = 0\vec{k} = \vec{0}$$

Rotacional



Rotacional

- No exemplo anterior o campo $\vec{F}$ é perpendicular ao campo radial $\vec{r}$ em todos os pontos:

$$\left(\vec{F} / \vec{r}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\,y = 0$$

Rotacional

- O rotacional de um campo vetorial no espaço $\mathbb{R}^3$
- Sendo

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

- O rotacional de $\vec{F}$ é

$$Rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Rotacional

- Exemplo
- Sendo:

$$\vec{F}(x, y) = x^2 z\vec{i} + (x + 3zy)\vec{j} + y^3 z^2 \vec{k}$$

- O rotacional de $\vec{F}$ é?

Rotacional

- O rotacional de $\vec{F}$ é?

$$Rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 z & x+3zy & y^3 z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3y^2z^2 - 3y)\vec{i} + (x^2)\vec{j} + \vec{k}$$

Rotacional

- Teorema: seja f=f(x,y) um campo escalar de classe c². Então o rotacional do gradiente de f é nulo, isto, é:

$$rot(\vec{\nabla} f(x,y)) = 0$$

Rotacional

- Como $Rot\vec{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$ segue

$$rot\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial \frac{\partial}{\partial x}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial}{\partial x}}{\partial y} \right) \vec{k} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

Rotacional

- O teorema vale em duas ou três variáveis.
- O significado é que todo campo gradiente é irrotacional, isto é, tem rotacional nulo.
- É uma condição necessária para um campo ser gradiente.
-

Rotacional

- O divergente do rot é zero.
- O significado físico deste teorema é que todo campo rotacional é incompressível.

$$incompressível \Leftrightarrow div\vec{F} = 0$$

Perguntas?

Aceliou.luna@ufc.br