UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL

Eletromagnetismo

Aula 05 – Equações de Maxwell

Prof. Acélio Luna Mesquita

Universidade Federal do Ceará – Campus Sobral

Conteúdo

- Equações de Maxwell;
- As equações de Maxwell no vácuo;
- As equações de Maxwell em baixa frequência:
  - Estática e quase-estática;
- Forma integral das equações de Maxwell

As equações de Maxwell

- Termos a serem relembrado:

$\vec{E}$: $campo\ elétrico$;

$\vec{D}$: $densidade\ de\ campo\ elétrico$;

ε: $permissividade\ elétrica$;

$\vec{H}$: $campo\ magnético$;

$\vec{B}$: $densidade\ de\ campo\ magnético$;

μ: $permeabilidade\ magnética$;

$\vec{J}$: $densidade\ de\ corrente$;

σ: $condutividade\ elétrica$;

ρ_v: $densidade\ volumétrica\ de\ cargas$;

As equações de Maxwell

- Campo magnético rotacional: Nos diz que a partir de uma taxa de variação da densidade de campo elétrico e/ou uma densidade de corrente, teremos uma campo magnético rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t}$$

- Divergente de densidade de campo magnético:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

As equações de Maxwell

- Campo elétrico rotacional: Nos diz que a partir de uma taxa de variação da densidade de campo magnético teremos uma campo elétrico rotacional.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}$$

- Divergente de densidade de campo elétrico: Sempre que houver uma distribuição volumétrica de cargas a mesma irá gerar uma densidade de campo elétrico divergente.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v$$

As equações de Maxwell

- Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

$\vec{E}: campo\ elétrico;$

$\vec{D}: densidade\ de\ campo\ elétrico;$

$\varepsilon: permissividade\ elétrica;$

$\vec{H}: campo\ magnético;$

$\vec{B}: densidade\ de\ campo\ magnético;$

$\mu: permeabilidade\ magnética;$

$\vec{J}: densidade\ de\ corrente;$

$\sigma: condutividade\ elétrica;$

$\rho_v: densidade\ volumétrica\ de\ cargas;$

As equações de Maxwell

- As eqs. de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \end{cases}$$

- Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

$\vec{E}$: *campo elétrico;*

$\vec{D}$: *densidade de campo elétrico;*

ε: *permissividade elétrica;*

$\vec{H}$: *campo magnético;*

$\vec{B}$: *densidade de campo magnético;*

μ: *permeabilidade magnética;*

$\vec{J}$: *densidade de corrente;*

σ: *condutividade elétrica;*

ρ_v: *densidade volumétrica de cargas;*

As equações de Maxwell no vácuo

- As eqs. de Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \cancelto{0}{\sigma} \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \quad \boxed{\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \cancelto{0}{\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}} \quad \boxed{\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \end{cases}$$

- Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

As equações de Maxwell estática ou quase-estática

- As eqs. de Maxwell: estática ou quase-estática

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \cancelto{0}{\dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \cancelto{0}{\dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \end{cases}$$

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E}$ ⇨ **Magnetostática**

$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$

$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0\, \mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}$

$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon}$ ⇨ **Eletrostática**

- Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

Forma integral das equações de Maxwell

- As eqs. de Maxwell expandidas:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\[2ex]
\boldsymbol{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon}} & (4)
\end{cases}
$$

Integrando (4) em um volume:

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{E}\; dv = \int_v \frac{\rho_v}{\varepsilon}\, dv$$

Do teorema da Divergência:

$$\oint_S \vec{A}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \int_v \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x,y,z)\right] dv$$

Pode-se reescrever:

Carga envolvida (q_{cenv})

$$\oint_s \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_v \rho_v\, dv$$

Finalmente:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_{env}}{\varepsilon}$$ (Lei de Gauss)

Forma integral das equações de Maxwell

- As eqs. de Maxwell expandidas:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}
$$

Realizando procedimento análogo em (2) devemos obter:

$$\oint_s \vec{H} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

(Não existe monopolo magnético)

Forma integral das equações de Maxwell

- As eqs. de Maxwell expandidas:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}
$$

Integrando (1) sobre uma superfície:

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \int_S \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Do teorema de Stokes:

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z)\right] \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \oint_l \vec{A}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Pode-se reescrever:

Corrente de condução (i_c)

$$\oint_l \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \int_S \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Corrente de deslocamento (i_d)

Finalmente:

$$\oint_l \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = i_c + i_d \quad \text{(Lei de Ampere Corrigida)}$$

Forma integral das equações de Maxwell

- As eqs. de Maxwell expandidas:

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}
$$

Através de um procedimento similar em (3):

Potencial Escalar Elétrico (V)

$$\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Fluxo magnético

Finalmente:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday)}$$

Perguntas?

Acelio.luna@ufc.br