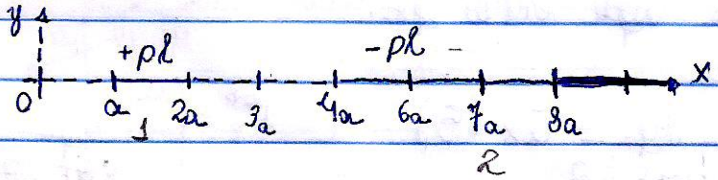
Disciplina de eletromagnetismo aplicado
1º avaliação parcial
Professor Carlos Elmano
Nome: Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435

1ª A figura abaixo apresenta duas distribuições lineares de carga. A primeira possui densidade linear $+\rho_l$ e é delimitada por $a \leq x \leq 2a$. Já a segunda possui densidade linear $-\rho_l$ e é delimitada por $4a \leq x \leq 8a$. Sendo $|\rho_l| = \rho_0 \cdot x$ (C/m), determine a intensidade do campo elétrico na origem.



De acordo com o princípio de superposição pode-se afirmar que na origem o campo elétrico será:

$$\vec{E}_o = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1)$$

Sendo E_1 e E_2 os campos produzidos pelas cargas nas distribuições de cargas 1 e 2 indicadas na figura.

Não há componentes do campo elétrico na direção do eixo y, já que o ponto estudado aqui está em perfeito alinhamento com a distribuição de carga.

Agora escolhendo um 'dl' tão pequeno de modo que podemos considerá-lo puntiforme. O campo elétrico 'dE' devido a presença da carga 'dq' contida em 'dl', como já se sabe pode ser expresso por:

② Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (2)$$

Em notação vetorial: $d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\tilde{a}x$ (3)

Mais uma vez, pelo princípio da superposição podemos afirmar que o campo elétrico será dado pela soma de todos os vetores campo elétrico $d\vec{E}$.

Assim:

$$\vec{E} = \int dE = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (4)$$

Temos aqui então que:

$$\vec{E_1} = \int_a^{2a} \frac{dq_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\tilde{a}x \quad (5) \quad e \quad \vec{E_2} = \int_{4a}^{8a} \frac{dq_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\tilde{a}x$$

onde $dq_1 = +\rho l dx$ e $dq_2 = -\rho l dx$.

Note que $r = x$, portanto, substituindo tudo em (1), temos que:

$$\vec{E_0} = \left[\int_a^{2a} \frac{\rho_0 \cancel{x} dx}{4\pi\varepsilon_0 x^{\cancel{2}}} - \int_{4a}^{8a} \frac{\rho_0 \cancel{x} dx}{4\pi\varepsilon_0 x^{\cancel{2}}}\right]\tilde{a}x$$

$$\vec{E_0} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln x\Big|_a^{2a} - \ln x\Big|_{4a}^{8a}\right]\tilde{a}x$$

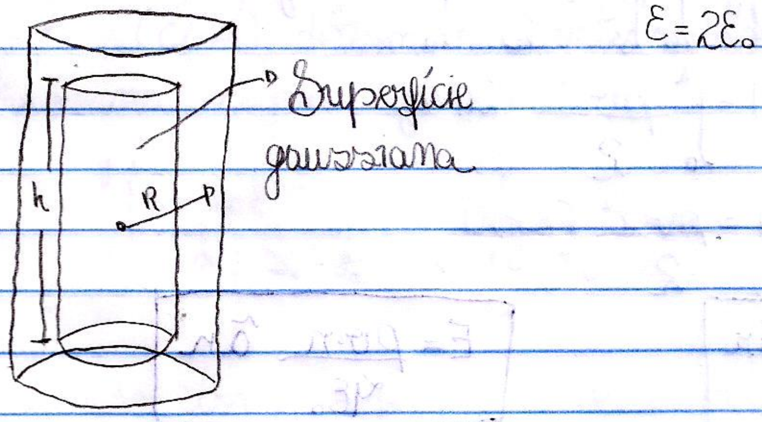
$$\vec{E_0} = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln 2 - \ln 2\right]\tilde{a}x$$

$$\boxed{\vec{E_0} = 0}$$

Então, na origem, o campo elétrico é nulo.

2ª Um cilindro maciço de raio R e comprimento infinito apresenta uma densidade volumétrica de carga ρv. O material do qual o cilindro é constituído apresenta uma permissividade elétrica de $2 \cdot \varepsilon_0$ e se encontra rodeado por ar ($\varepsilon = \varepsilon_0$). Determine:

a) O campo elétrico para $0 < r \leq R$;
b) O campo elétrico para $r > R$;



a) $0 < r \leq R$

Traçando uma superfície gaussiana no interior do cilindro, temos:

Pela Lei de Gauss:

$\oint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{env}}{2\varepsilon_0}$, vemos que o cilindro possui uma densidade volumétrica de carga, logo:

$\rho v = \frac{dq}{dv}$ $\qquad dq = \rho v dv$

Passando para coordenadas cilíndricas, vemos que:

$d\vec{v} = r dr d\theta dz$, onde r é o raio da superfície

④ Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435

gaussiana, θ o ângulo no plano xy e z a distância ao longo deste eixo.

$d\vec{s} = r d\theta dz$, pois iremos calcular a área lateral que está sobre ação do campo.

$$2\varepsilon_0 \int_0^h \int_0^{2\pi} E r d\theta dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho v r dr d\theta dz$$

$$2\varepsilon_0 \cdot \int_0^h E \cdot r 2\pi dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\rho v \cdot r^2}{2} \Big|_0^r d\theta dz$$

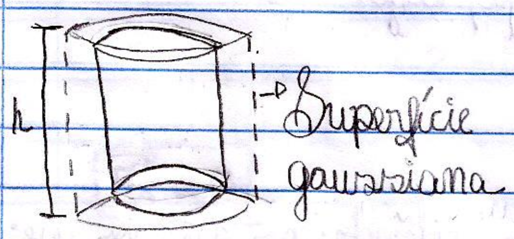
$$2\varepsilon_0 \cdot E(2\pi r h) = \int_0^h \frac{\rho v r^2}{2} \cdot 2\pi dz$$

$$2\varepsilon_0 \cdot E(2\pi r h) = \frac{\rho v \cdot r^2}{2}(2\pi h)$$

$$\boxed{E = \frac{\rho v \cdot r}{4\varepsilon_0} \hat{a}r} \qquad \boxed{E = \frac{\rho v \cdot r}{4\varepsilon_0} \hat{a}r}$$

b) $r > R$, $\varepsilon = \varepsilon_0$

Traçando uma superfície gaussiana que englobe toda a carga do cilindro, como na figura a seguir, teremos:



Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435

5

Pela Lei de Gauss:

$$\int E d\vec{S} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

Como no item anterior, temos que:

$$\begin{cases} dS = r d\theta dz \\ dv = r d\theta dz \end{cases} \quad e \quad dq = \rho v dv$$

Assim, temos:

$$\varepsilon_0 \cdot \int_0^h \int_0^{2\pi} E r d\theta dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho v r dr d\theta dz$$

$$\varepsilon_0 \int_0^h E(2\pi r) dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\rho v r^2}{2} \Big|_0^R d\theta dz$$

$$\varepsilon_0 \cdot E \cdot (2\pi r h) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\rho v R^2}{2} d\theta dz$$

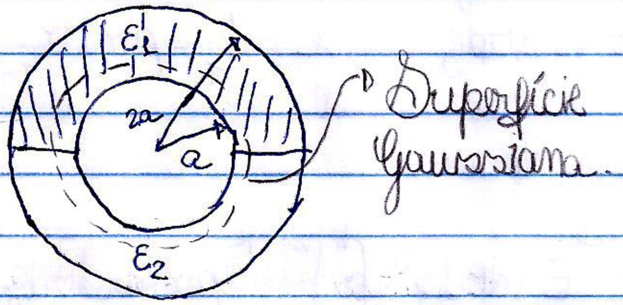
$$\varepsilon_0 \cdot E (2\pi r h) = \frac{\rho v \cdot R^2}{2} \cdot 2\pi h$$

$$\boxed{E = \frac{\rho v \cdot R^2}{2\varepsilon_0 r}} \qquad \boxed{E = \frac{\rho v \cdot R^2}{2\varepsilon_0 r}}$$

(6) Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367735

3ª A figura abaixo mostra um capacitor cilíndrico. Determine a capacitância desse capacitor:

a) Se $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$;
b) Se $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{3} = \varepsilon_0$;



a) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$

Para a situação inicial, vemos que o capacitor apresenta uma única permissividade elétrica.

Como representado na figura acima, traçando uma superfície gaussiana e calculando o campo elétrico temos:

$$\int \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}, \text{ onde } d\vec{S} = r\, d\phi\, dz$$

Assim, teremos:

$$\iint E r\, d\phi\, dz = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad E \cdot \int_0^h \int_0^{2\pi} r\, d\phi\, dz = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \int_0^L 2\pi r\, dz = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad E(2\pi r h) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \therefore \quad E = \frac{q}{2\pi r h \varepsilon_0} (-\hat{a}_r) \quad (1)$$

Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435 (7)

Calculando o potencial elétrico, teremos:

$$V = -\int_{a}^{2a} \frac{q}{2\pi r h \varepsilon_0} \cdot (-\hat{a}r)\, dr(\hat{a}r) \therefore V = \frac{q}{2\pi h \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{2a}{a}\right) \quad (2)$$

Sabendo que $q = C \cdot V$, logo temos:

$$\cancel{q} = C \cdot \frac{\cancel{q}}{2\pi h \varepsilon_0} \ln(2) \therefore \boxed{C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \cdot h}{\ln(2)}} \quad \boxed{C = \frac{2\pi \varepsilon_0 \cdot h}{\ln(2)}}$$

b) $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2}{3} = \varepsilon_0$, logo $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_0$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$

Como na situação da figura anterior, traçaremos uma superfície gaussiana para o campo elétrico, no entanto o campo produzido por cada parte com base na eq (1) é:

$$E_1 = \frac{q}{\frac{2\pi r h \varepsilon_1}{2}} (-\hat{a}r), \quad E_2 = \frac{q}{\frac{2\pi r \varepsilon_2}{2}} (-\hat{a}r)$$

Assim, encontrando o potencial elétrico, temos:

$$V_1 = \int_{a}^{2a} \frac{q_1}{\pi r h \varepsilon_1} = \frac{q_1 \ln(2)}{\pi h \varepsilon_0}$$

$$V_2 = \int_{a}^{2a} \frac{q_2}{\pi r h \varepsilon_2} = \frac{q_2 \ln(2)}{3\pi h \varepsilon_0}$$

(8) Juliana Damasceno Batista - matrícula: 367435

Sabendo que para cada parte do capacitor, teremos:

$$\begin{cases} q_1 = C_1 V_1 & (3) \\ q_2 = C_2 V_2 & (4) \end{cases}$$

Como os dielétricos estão associados em paralelo, temos:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1 \ln(2)}{\pi h \varepsilon_0} = \frac{q_2 \ln(2)}{3 \pi h \varepsilon_0} \therefore q_1 = \frac{q_2}{3} \qquad q_2 = 3q_1$$

Para a carga total do sistema, temos:

$$q = q_1 + q_2 = q_1 + 3q_1 = 4q_1$$

Assim, pela fórmula $q = C \cdot V$, teremos:

$$4q_1 = \frac{C \cdot q_1 \cdot \ln(2)}{\pi h \varepsilon_0} \therefore \boxed{C = \frac{4\pi h \cdot \varepsilon_0}{\ln(2)}}$$