Circuito Resistivo Indutivo (RL):
Resposta Natural

Objetivos

- Circuito RL de 1ª Ordem
- Definição de Resposta natural;
- Análise física:
  - Pré-carga;
  - Descarga natural;
- Constante de tempo (τ);

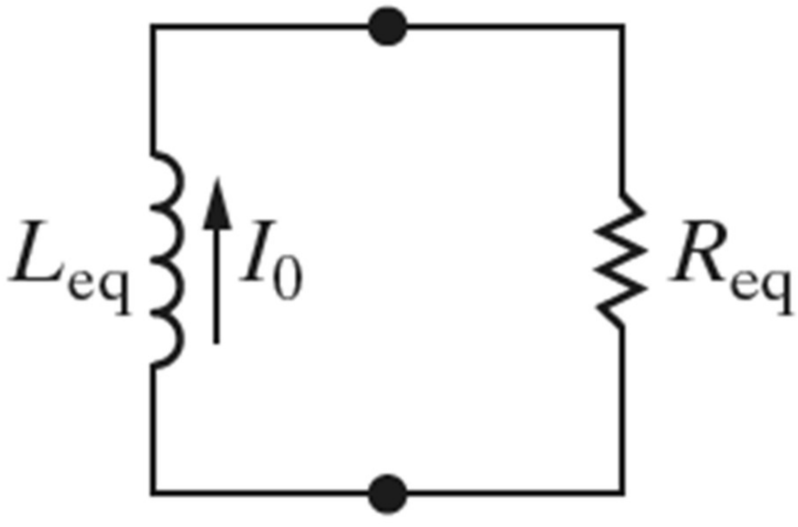
Circuito RL de 1ª Ordem

- *Um circuito é dito RL quando é composto somente por fontes, resistores e por indutores;*

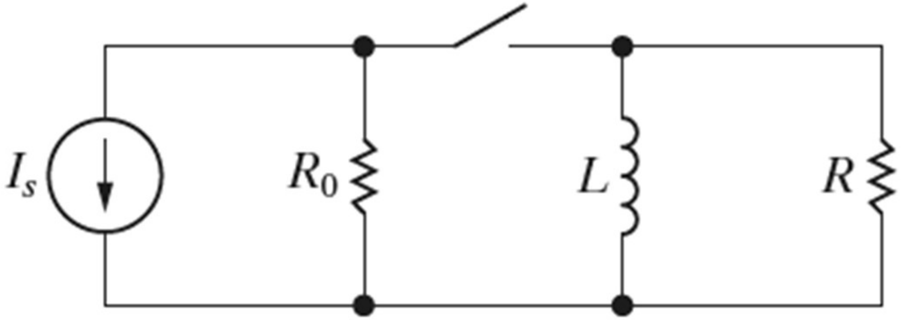
- *Um circuito elétrico é dito de 1ª ordem quando só possui um elemento armazenador de energia (EDO 1ª ordem);*

- *Eventualmente, um circuito RL de ordem superior a 1 pode ser reduzido por equivalência à 1ª ordem;*

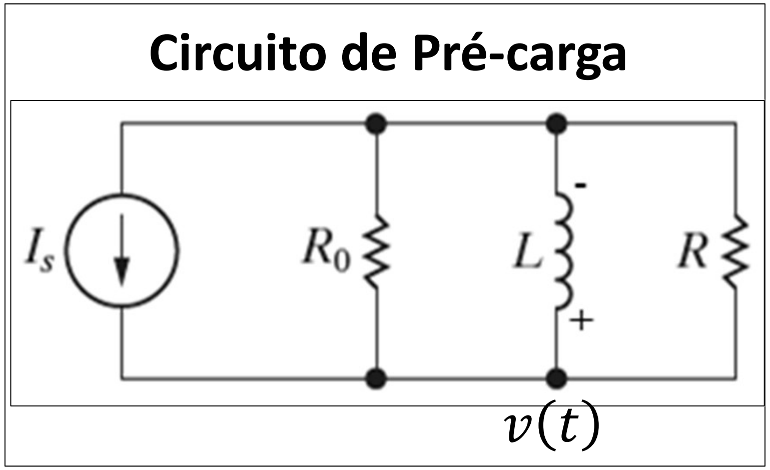
“A resposta natural de um circuito é aquela obtida quando ele opera sem a intervenção de qualquer tipo de fonte de energia.”



- *Circuito LC base:*



- *Topologias possíveis:*

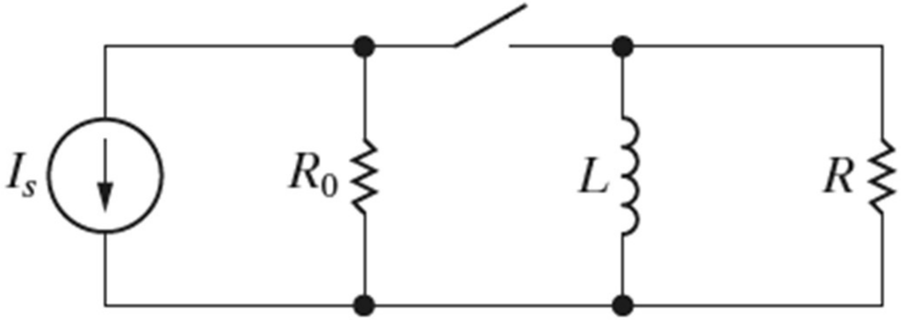


$$i)\ v(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

$$ii)\ v(t \to \infty) = 0 \to i_L(t \to \infty) = I_s$$

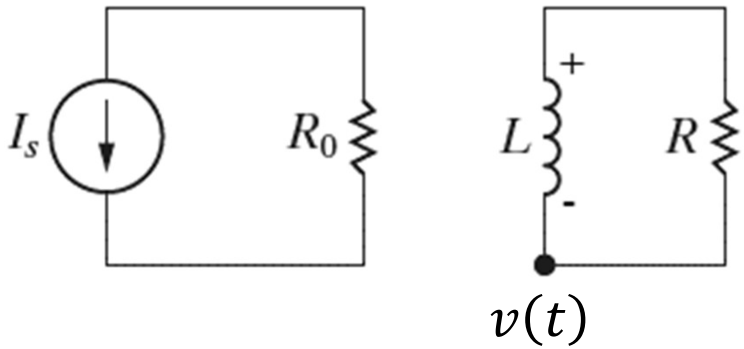
$$iii)\ E_L(t \to \infty) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (I_s)^2$$

- *Circuito LC base:*



- *Topologias possíveis:*

Circuito de Resposta Natural



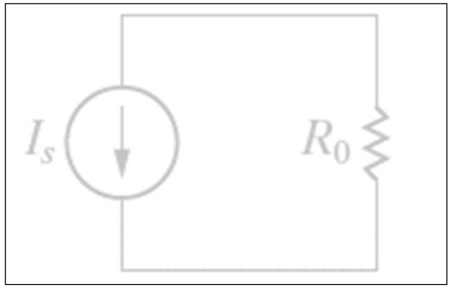
$$i)\ v(t) = -L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

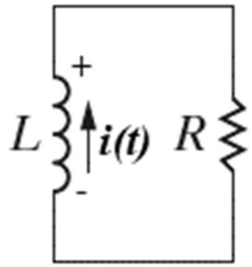
$$ii)\ v(0+) = I_s \cdot R \rightarrow i_L(t \rightarrow \infty) = 0$$

$$iii)\ E_L(t \rightarrow \infty) = 0$$

Análise Física

- Resposta natural do circuito RL:





  - Aplicando LK para malhas:

$$v_L(t) = v_R(t)$$

$$\rightarrow -L \cdot \frac{di(t)}{dt} = R \cdot i(t)$$

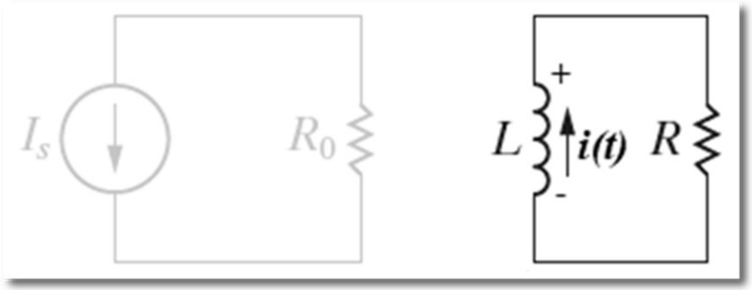
$$\rightarrow \frac{1}{i(t)} di(t) = -\frac{R}{L} dt$$

$$\rightarrow \int_{I_s}^{i(t)} \frac{1}{x} dx = -\frac{R}{L} \cdot \int_0^t d\tau$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{i(t)}{I_s}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t$$

$$\rightarrow \boxed{i(t) = I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

- Resposta natural do circuito RL:



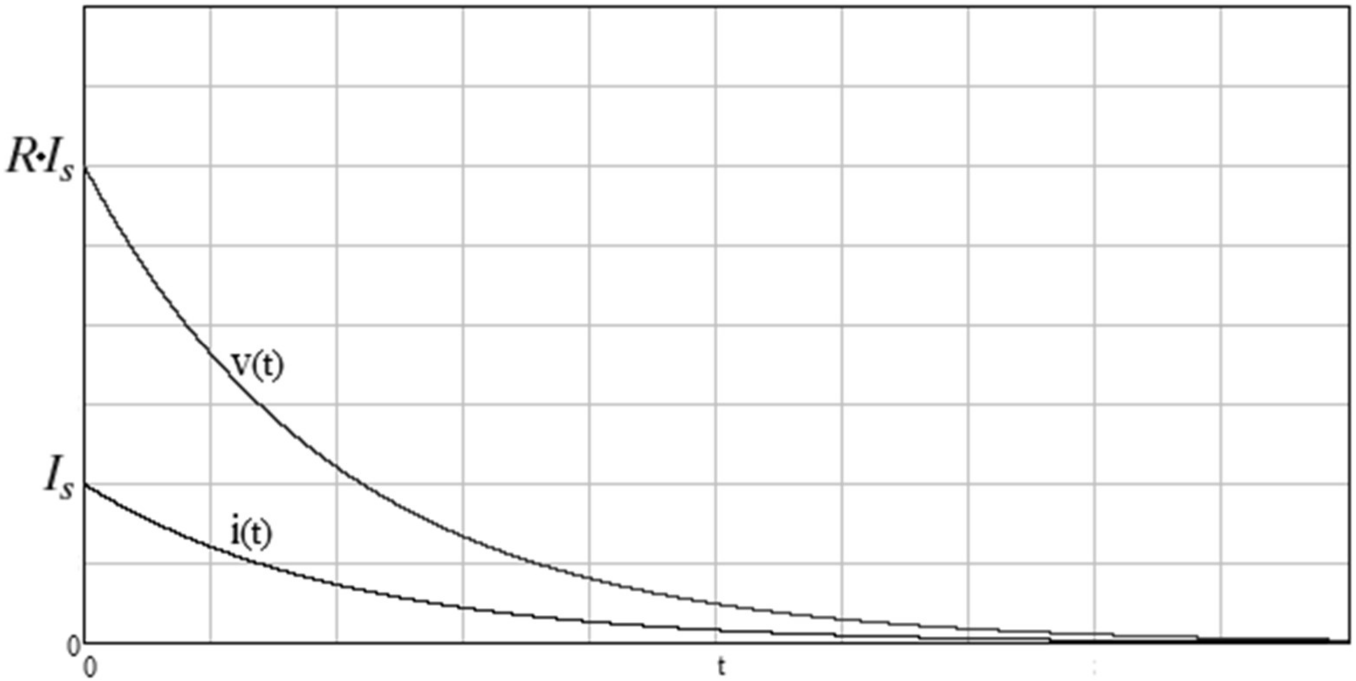
  - Aplicando a Lei de Ohm:

$$v_L(t) = v_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$\rightarrow \boxed{v_L(t) = v_R(t) = R \cdot I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Tensão x Corrente

$$v_L(t) = R \cdot I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad i(t) = I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$



$$v_L(t) = R \cdot I_s \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} \qquad i(t) = I_s \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

- *Assim como no circuito RC:*

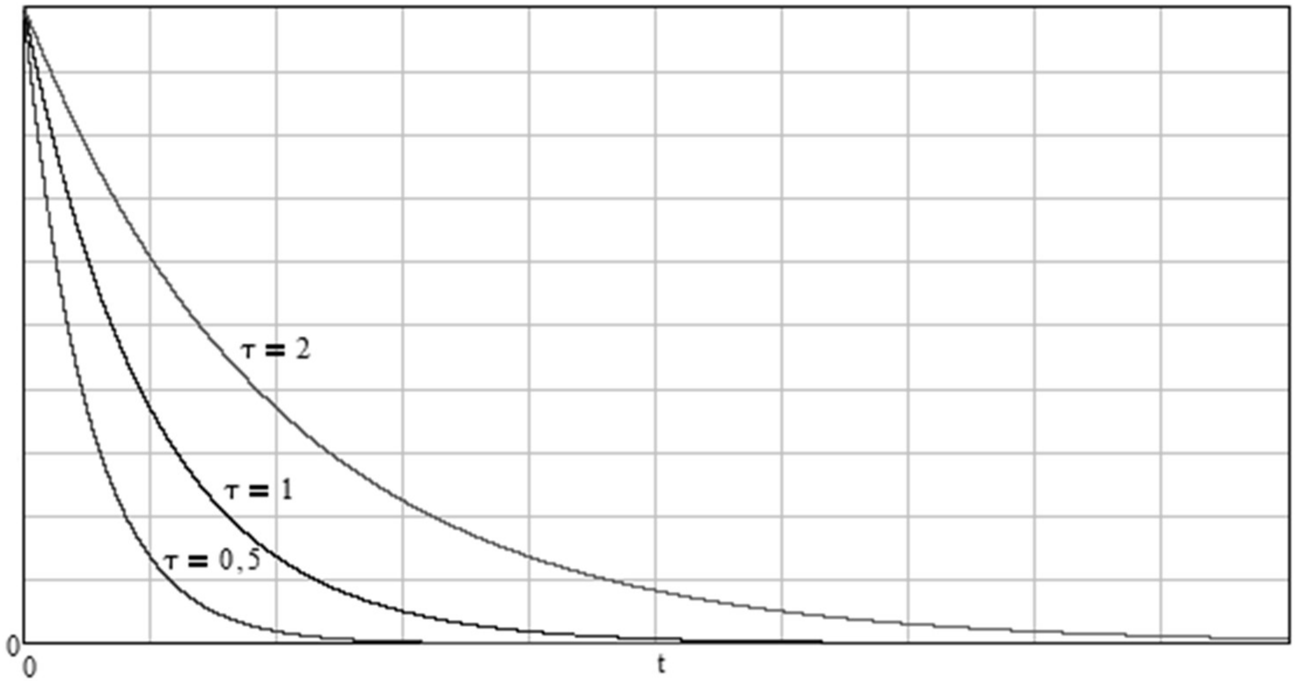
$$\rightarrow \frac{R}{L} = \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{\rightarrow \tau = \frac{L}{R}}$$

(constante de tempo do circuito)

Constante de Tempo (τ)

$$v_L(t) = R \cdot I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \qquad i(t) = I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$



Constante de Tempo (τ)

$$v_L(t) = R \cdot I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = I_s \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	$3{,}6788 \times 10^{-1}$	6τ	$2{,}4788 \times 10^{-3}$
2τ	$1{,}3534 \times 10^{-1}$	7τ	$9{,}1188 \times 10^{-4}$
3τ	$4{,}9787 \times 10^{-2}$	8τ	$3{,}3546 \times 10^{-4}$
4τ	$1{,}8316 \times 10^{-2}$	9τ	$1{,}2341 \times 10^{-4}$
5τ	$6{,}7379 \times 10^{-3}$	10τ	$4{,}5400 \times 10^{-5}$

Regime Permanente

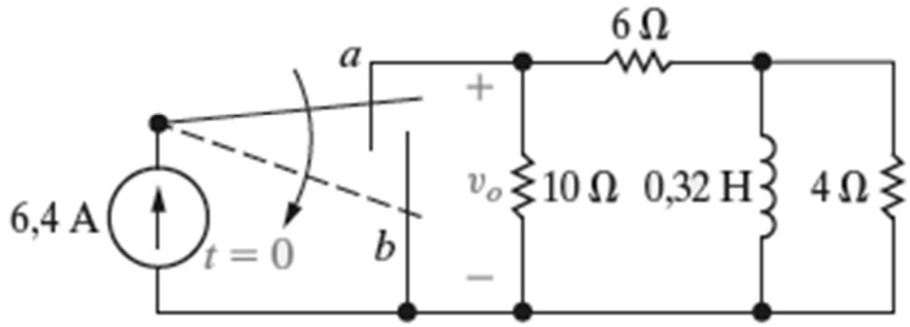
Exemplo

7.2 Em $t = 0$, a chave, no circuito mostrado, passa instantaneamente da posição a para a posição b.

a) Calcule v_o para $t \geq 0^+$.

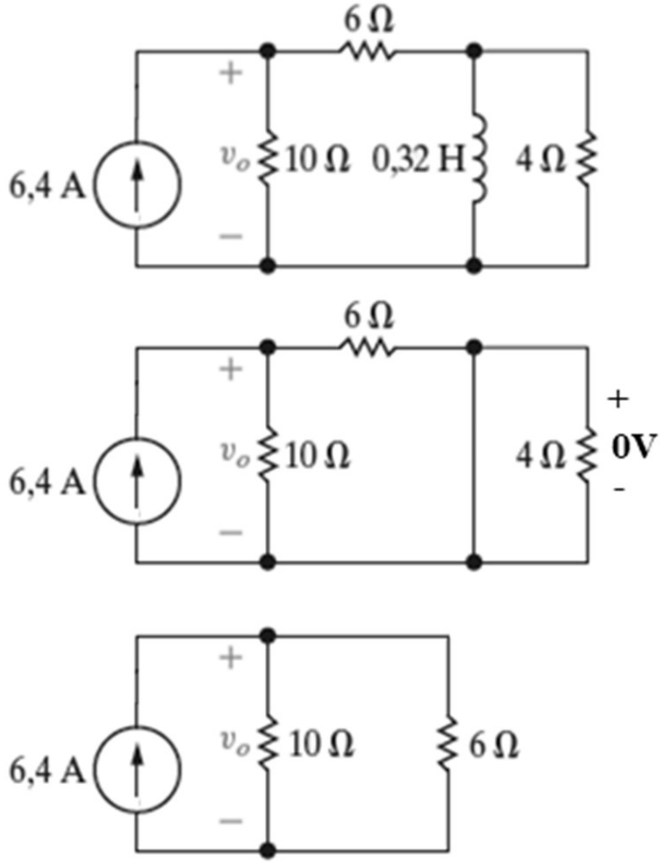
b) Qual percentagem da energia inicial armazenada no indutor é dissipada no resistor de 4 Ω?

Resposta: (a) $-8e^{-10t}$ V, $t \geq 0$; (b) 80%.



Exemplo

- *Pré-carga:*



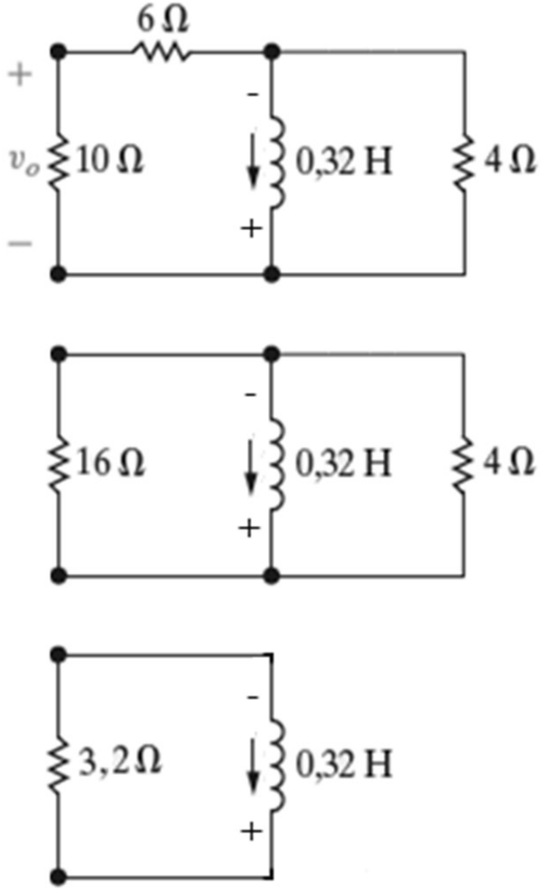
$$i)R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6}} \rightarrow R_{eq} = \frac{60}{16} \rightarrow R_{eq} = 3{,}75\Omega$$

$$ii)\ v_o = R_{eq} \cdot 6{,}4 \rightarrow v_o = 24V$$

$$iii)\ i_L = i_{6\Omega} \rightarrow i_L = \frac{24}{6} \rightarrow i_L = 4A$$

Exemplo

- Circuito de Resposta Natural:



$$i)\ R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}} \rightarrow R_{eq} = \frac{64}{20} \rightarrow R_{eq} = 3{,}2\Omega$$

$$ii)\ \tau = \frac{L}{R} \rightarrow \tau = 0{,}1s$$

$$iii)\ i_L(t) = i_L(0)\cdot e^{-\frac{1}{\tau}\cdot t} \rightarrow i_L(t) = 4\cdot e^{-10\cdot t}A$$

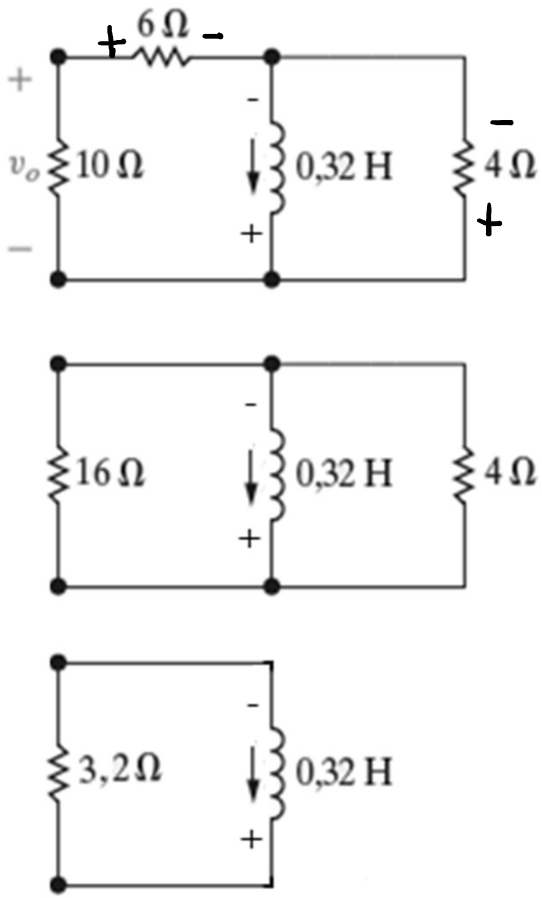
$$iv)\ v_L(t) = i_L(t)\cdot 3{,}2 \rightarrow v_L(t) = 12{,}8\cdot e^{-10\cdot t}V$$

$$v)\ i_{16\Omega}(t) = \frac{v_L(t)}{16} \rightarrow\ i_{16}\ \ (t) = 0{,}8\cdot e^{-10\cdot t}A$$

$$vi)\ v_o(t) = -i_{16\Omega}(t)\cdot 10 \rightarrow v_o(t) = -8\cdot e^{-10\cdot t}V$$

Exemplo

- Circuito de Resposta Natural:



$$vii)\ v_{6\Omega}(t) = i_{16\Omega}(t) \cdot 6 \rightarrow v_{6\Omega}(t) = 4{,}8 \cdot e^{-10\cdot t} V$$

$$viii)\ i_{4\Omega}(t) = i_L(t) - i_{16}\ \ (t) = 4 \cdot e^{-10\cdot t} - 0{,}8 \cdot e^{-10\cdot t}$$

$$\rightarrow i_{4\Omega}(t) = 3{,}2 \cdot e^{-10\cdot t} A$$

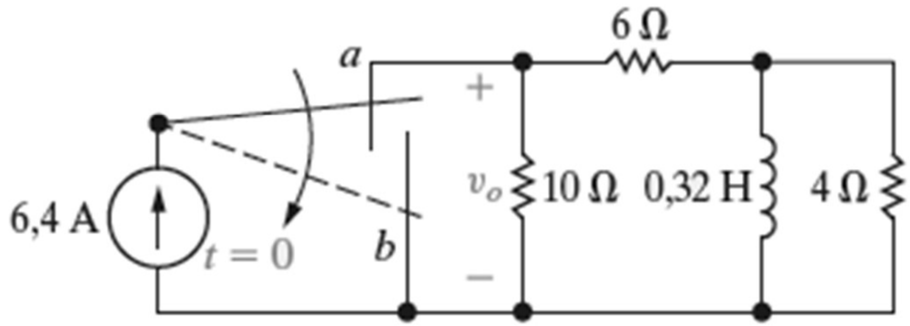
Exemplo

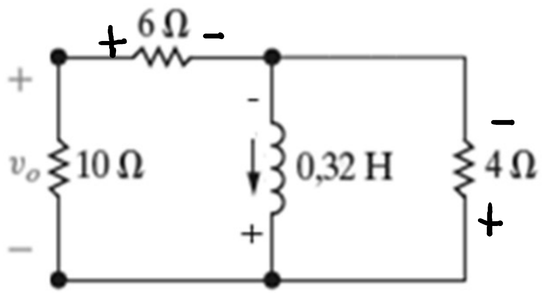
7.2 Em $t = 0$, a chave, no circuito mostrado, passa instantaneamente da posição a para a posição b.

a) Calcule v_o para $t \geq 0^+$.

b) Qual percentagem da energia inicial armazenada no indutor é dissipada no resistor de 4 Ω?

Resposta: (a) $-8e^{-10t}$ V, $t \geq 0$; (b) 80%.





$$iv)\ v_L(t) = 12{,}8 \cdot e^{-10 \cdot t} V$$

$$viii)\ i_{4\Omega}(t) = 3{,}2 \cdot e^{-10 \cdot t} A$$

$$v)\ i_{16\Omega}(t) = 0{,}8 \cdot e^{-10 \cdot t} A$$

$$P_{4\Omega}(t) = 40{,}96 \cdot e^{-20 \cdot t} W$$

$$\rightarrow W_{4\Omega}\ (t) = \int P_{4\Omega}(t) dt\ J$$