Conteúdo

- Eqs. De Maxwell;
  - Leitura das Eqs. de Maxwell;
- As Eqs. De Maxwell no vácuo;
- Eqs. de Maxwell em Baixa Frequência:
  - Estática e quasi-estática;
- Forma Integral das Eqs. de Maxwell;

As Eqs. de Maxwell

- *As eqs. de Maxwell:*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \end{cases}$$

$\vec{E}: campo\ elétrico;$

$\vec{D}: densidade\ de\ campo\ elétrico;$

$\varepsilon: permissividade\ elétrica;$

$\vec{H}: campo\ magnético;$

$\vec{B}: densidade\ de\ campo\ magnético;$

$\mu: permeabilidade\ magnética;$

$\vec{J}: densidade\ de\ corrente;$

$\sigma: condutividade\ elétrica;$

$\rho_v: densidade\ volumétrica\ de\ cargas;$

- *Relações constitutivas:*

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

As Eqs. de Maxwell no Vácuo

- *As eqs. de Maxwell:*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \cancelto{0}{\sigma \cdot \vec{E}} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \cancelto{0}{\dfrac{\rho_v}{\varepsilon}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$$

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

- *Relações constitutivas:*

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

As Eqs. de Maxwell em Baixa Frequência

- *As eqs. de Maxwell: estática ou quase-estática*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}}}_{0} \qquad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} \Rightarrow \textbf{Magnetostática} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \qquad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}}}_{0} \qquad \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0\, \mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \quad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \qquad \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} \Rightarrow \textbf{Eletrostática} \end{cases}$$

- *Relações constitutivas:*

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \\ \vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \end{cases}$$

Forma Integral das Eqs. de Maxwell

- *As eqs. de Maxwell expandidas:*

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}
$$

Integrando (4) em um volume:

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \; dv = \int_v \frac{\rho_v}{\varepsilon} \, dv$$

Do teorema da Divergência:

$$\oint_S \vec{A}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \int_v \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z)\right] dv$$

Pode-se reescrever:

Carga envolvida (q_{cenv})

$$\oint_s \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_v \rho_v \, dv$$

Finalmente:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_{env}}{\varepsilon}$$ (Lei de Gauss)

Forma Integral das Eqs. de Maxwell

- *As eqs. de Maxwell expandidas:*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4) \end{cases}$$

Realizando procedimento análogo em (2) devemos obter:

$$\oint_s \vec{H} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

(Não existe monopolo magnético)

- *As eqs. de Maxwell expandidas:*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4) \end{cases}$$

Integrando (1) sobre uma superfície:

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \int_S \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Do teorema de Stokes:

$$\int_S \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}(x,y,z)\right] \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \oint_l \vec{A}(x,y,z) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Pode-se reescrever:

$$\oint_l \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = \underbrace{\int_S \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}}_{\text{Corrente de condução } (i_c)} + \underbrace{\int_S \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}}_{\text{Corrente de deslocamento } (i_d)}$$

Finalmente:

$$\oint_l \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = i_c + i_d$$ (Lei de Ampere Corrigida)

Forma Integral das Eqs. de Maxwell

- *As eqs. de Maxwell expandidas:*

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \dfrac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \dfrac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho_v}{\varepsilon} & (4) \end{cases}$$

Através de um procedimento similar em (3):

$$\underbrace{\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}}_{\text{Potencial Escalar Elétrico (V)}} = -\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}}_{\text{Fluxo magnético}}$$

Finalmente:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday)}$$