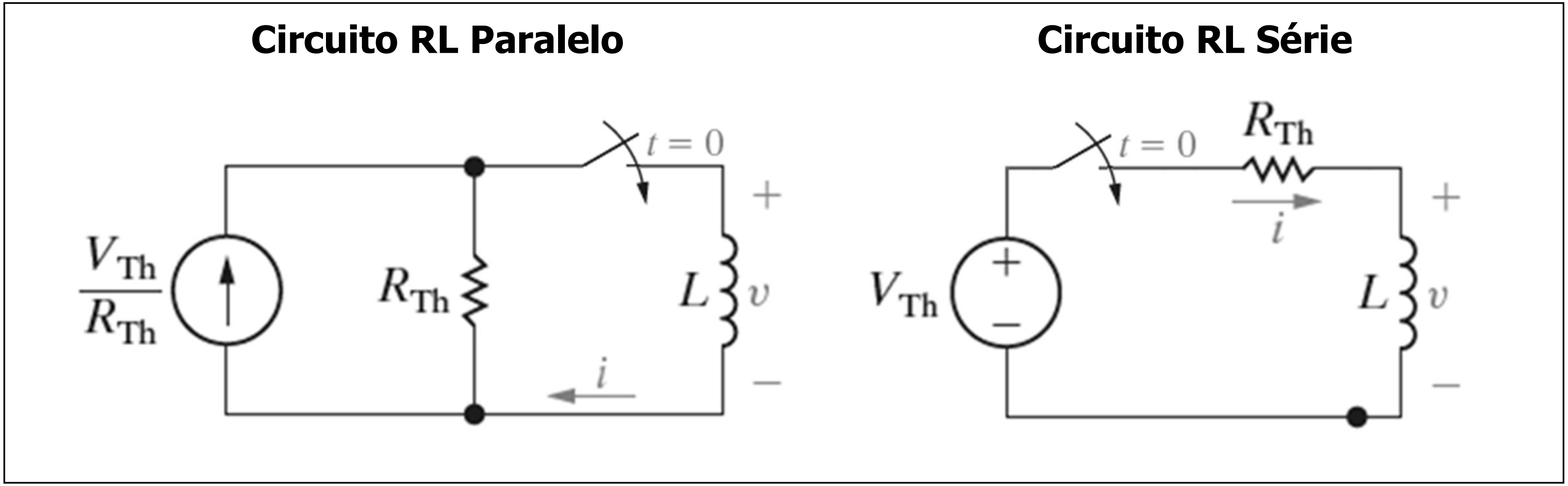
Circuito Resistivo Indutivo (RL):
Resposta Forçada

Objetivos

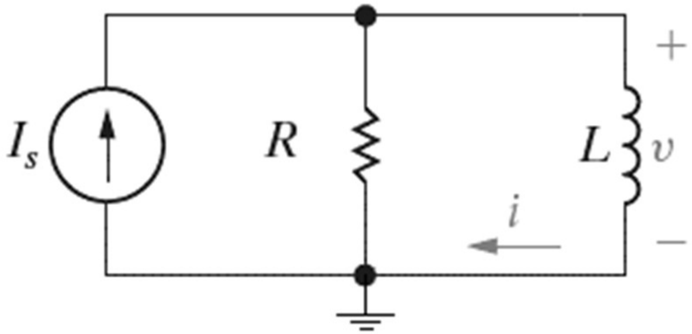
- Tipos de Degrau;
- Circuito RL Forçado Paralelo:
  - Corrente no indutor;
  - Corrente no resistor;
  - Tensão no circuito;
- Circuito RL Forçado Série:
  - Corrente no circuito;
  - Tensão no resistor;
  - Tensão no indutor;

Tipos de Degrau

- *Há dois tipos de degraus que podem ser aplicados a um circuito RL de 1ª ordem: o degrau de tensão e o degrau de corrente;*



- Corrente no indutor:



$Aplicando\ correntes\ de\ malha\ para\ t > 0$:

$$\rightarrow \quad (i(t) - I_s) \cdot R + v(t) = 0$$

$$\rightarrow -I_s \cdot R + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = \frac{I_s \cdot R - R \cdot i(t)}{L}$$

$$\rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot (i(t) - I_s)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{i(t) - I_s} di(t) = -\frac{R}{L} dt$$

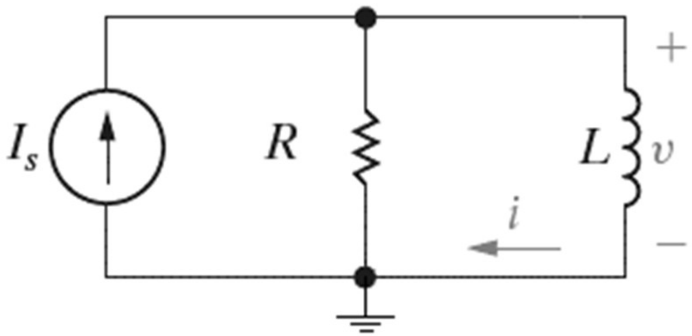
$Integrando$:

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{1}{x - I_s} dx = -\frac{R}{L} \cdot \int_0^t dy$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{i(t) - I_s}{i(0) - I_s}\right) = -\frac{R}{L} \cdot t$$

$$\boxed{\rightarrow i(t) = [i(0) - I_s] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + I_s}$$

- Corrente no resistor:

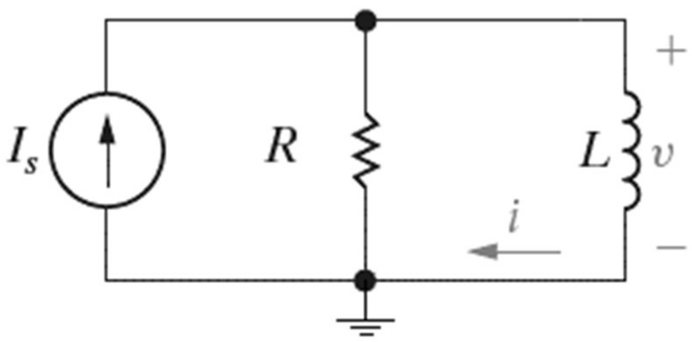


$Pela\ Lei\ de\ Kirchhoff\ para\ correntes, a\ corrente\ em\ R\ para\ t > 0$ é:

$$i_R(t) = I_s - i(t)$$

$$\boxed{\rightarrow i_R(t) = [I_s - i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

- Tensão no circuito:



$Pela\ Lei\ de\ Kirchhoff\ para\ correntes, a\ corrente\ em\ R\ para\ t > 0$ é:

$$i_R(t) = I_s - i(t)$$

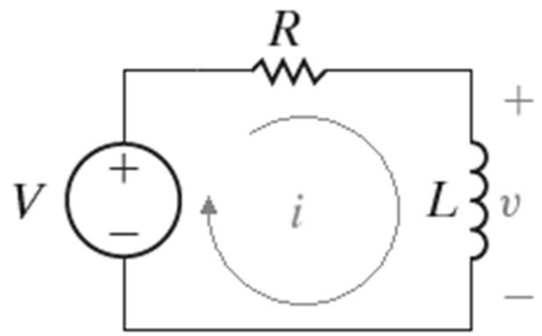
$$\rightarrow \boxed{i_R(t) = [I_s - i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

$Naturalmente, a\ tensão\ no\ arranjo\ para\ t > 0$ é:

$$v(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = R \cdot [I_s - i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

- Corrente no circuito:



$Aplicando\ conrrentes\ de\ malha\ para\ t > 0$:

$$\rightarrow \quad -V + i(t)\cdot R + v(t) = 0$$

$$\rightarrow -V + i(t)\cdot R + L\cdot\frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$\rightarrow L\cdot\frac{di(t)}{dt} = -(i(t)\cdot R - V)$$

$$\rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}\cdot\left(i(t) - \frac{V}{R}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{i(t) - \frac{V}{R}}di(t) = -\frac{R}{L}dt$$

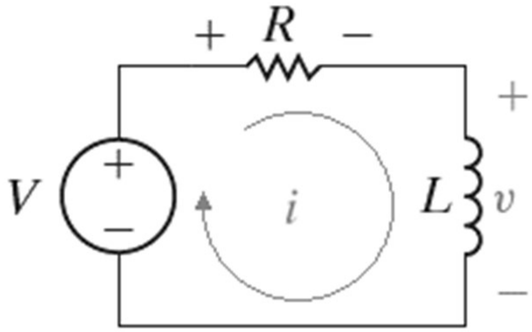
$Integrando$:

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{1}{x - \frac{V}{R}}dx = -\frac{R}{L}\cdot\int_{0}^{t} dy$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{i(t) - \frac{V}{R}}{i(0) - \frac{V}{R}}\right) = -\frac{R}{L}\cdot t$$

$$\boxed{\rightarrow i(t) = \left[i(0) - \frac{V}{R}\right]\cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} + \frac{V}{R}}$$

- *Tensão no resistor:*



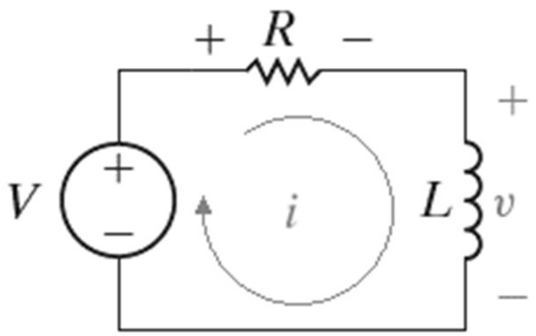
Pela Lei de Ohm, a tensão em R para t > 0 é:

$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$\rightarrow v_R(t) = R \cdot \left(\left[i(0) - \frac{V}{R} \right] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{V}{R} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{v_R(t) = V - [V - R \cdot i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

- *Tensão no indutor:*



$Pela\ Lei\ de\ Kirchhoff\ para\ tensões, a\ corrente\ no\ indutor\ para\ t > 0$ é:

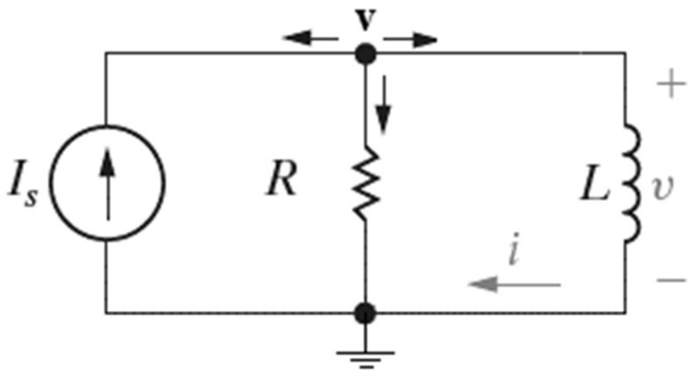
$$V = v_R(t) + v(t)$$

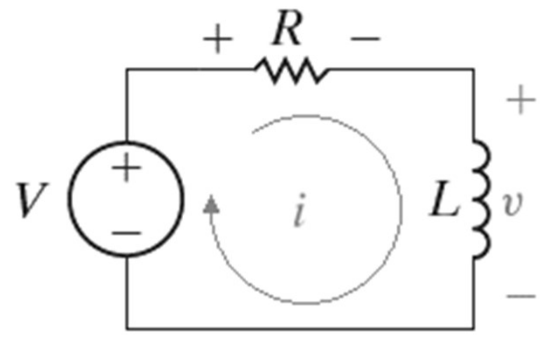
$$\rightarrow v(t) = V - v_R(t)$$

$$\rightarrow v(t) = V - \left(V - [V - R \cdot i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = [V - R \cdot i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Resumo da ópera





$$i(t) = [i(0) - I_s] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + I_s$$

$$v(t) = R \cdot [I_s - i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i_R(t) = [I_s - i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$i(t) = \left[i(0) - \frac{V}{R}\right] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{V}{R}$$

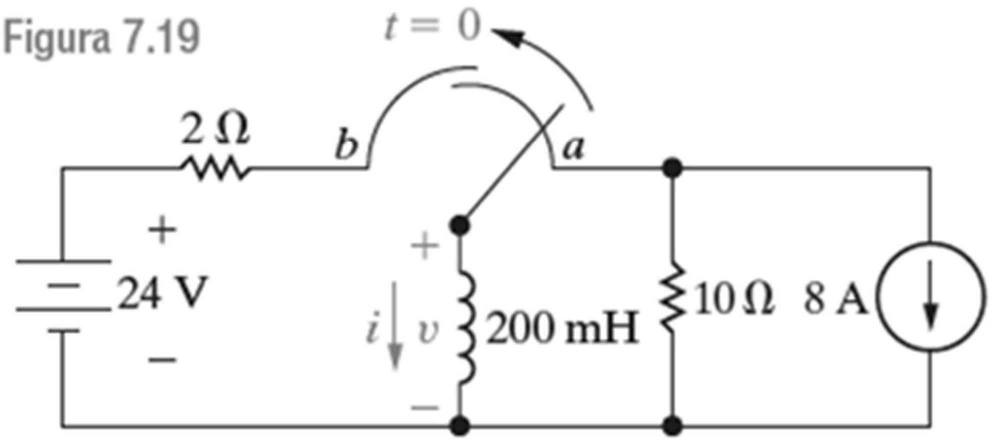
$$v(t) = [V - R \cdot i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$v_R(t) = V - [V - R \cdot i(0)] \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

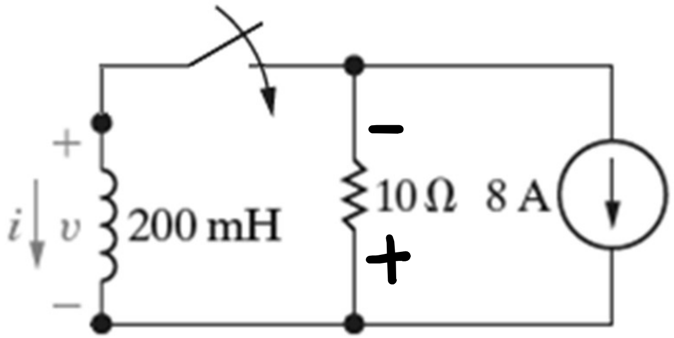
Exemplo

7.5 Suponha que a chave no circuito mostrado na Figura 7.19 esteja na posição a por um longo tempo e, em $t = 0$, ela passe para a posição b. Determine (a) $i(0^+)$; (b) $v(0^+)$; (c) τ, $t > 0$; (d) $i(t)$, $t \geq 0$ e (e) $v(t)$, $t \geq 0^+$.

Figura 7.19



Circuito 1: chave na posição ‘a’ e degrau de corrente



Antes da chave fechar:

$$i(0-) = 0 \rightarrow i(0+) = 0$$

Portanto, depois que a chave fecha:

$$v(0+) = -10 \cdot 8 \equiv -80V$$

A constante de tempo é dada por:

$$\tau = \frac{L}{R} \equiv 20ms$$

Pela dinâmica de transferência de corrente entre o resistor e o indutor, podemos afirmar que:

$$i_R(t) = 8 \cdot e^{-50\cdot} \ A$$

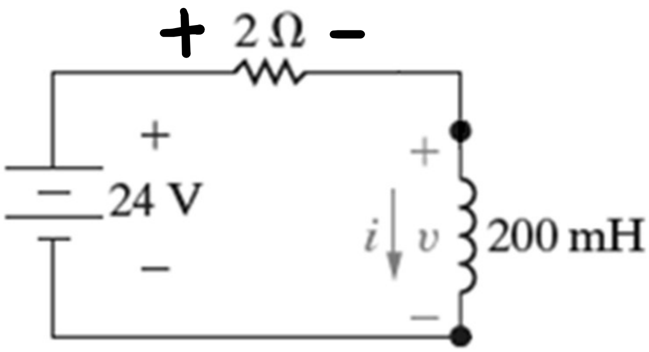
Da LKC podemos concluir que:

$$8 + i(t) = i_R(t) \rightarrow i(t) = 8 \cdot e^{-50\cdot t} - 8\ A$$

Naturalmente, a tensão v(t) é dada por:

$$v(t) = -v_R(t) \cdot i_R(t) \rightarrow v(t) = -80 \cdot e^{-50\cdot t}\ V$$

Circuito 2: chave na posição 'b' e degrau de tensão



Do circuito anterior:

$$i(0-) = -8A \rightarrow i(0+) = -8A$$

A constante de tempo é dada por:

$$\tau = \frac{L}{R} \equiv 100ms$$

Portanto, imediatamente após a comutação da chave:

$$v_R(0+) = -8 \cdot 2 \equiv -16V$$

Por LKT:

$$-24 + v_R(0+) + v(0+) = 0$$

$$\rightarrow v(0+) = 24 - v_R(0+) \equiv 40V$$

Como no regime permanente a tensão no indutor deve se anular, podemos afirmar que:

$$v(t) = 40 \cdot e^{-10 \cdot t}\ A$$

Por LKT novamente:

$$-24 + v_R(t) + v(t) = 0$$

$$\rightarrow v_R(t) = 24 - v(t) \equiv 24 - 40 \cdot e^{-10 \cdot t}\ V$$

Finalmente:

$$i(t) = {}^{v_R(t)}\!/_{R} \rightarrow i(t) = 12 - 20 \cdot e^{-10 \cdot t}\ A$$