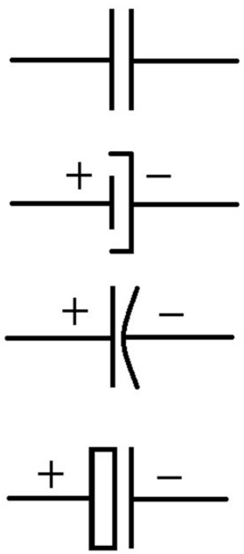
Circuitos Elétricos I:

#8 – O Capacitor

Objetivos

- O capacitor;
  - Características básicas;
  - Convenção Passiva;
  - Natureza;
- Arranjos de Capacitores:
  - Série;
  - Paralelo;

Capacitor: um elemento passivo básico



$$C = \frac{q}{V} \equiv \frac{A_s \cdot \varepsilon}{d}$$

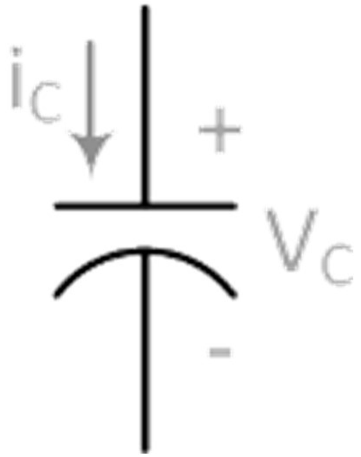
$$w = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$$

$$i_C(t) = \pm C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

Capacitor: convenção passiva

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = -C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$



- Da equação da corrente no capacitor do ponto de vista macroscópico:

$$\boldsymbol{i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \equiv C \cdot \frac{\Delta v_C}{\Delta t}}$$

- Pode-se extrair conclusões importantes:
  - Capacitor submetido a uma tensão contínua?
    - Pico de corrente limitado apenas pela impedência do caminho;
  - Capacitor submetido a uma variação brusca de tensão?
    - Passado o transitório de carga, a corrente através do capacitor se anula (circuito-aberto);

- Da equação da tensão no capacitor:

$$\boldsymbol{i_C(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} \rightarrow dv_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_C(t)dt \rightarrow v_C(t) - v_C(t_0) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t)dt}$$

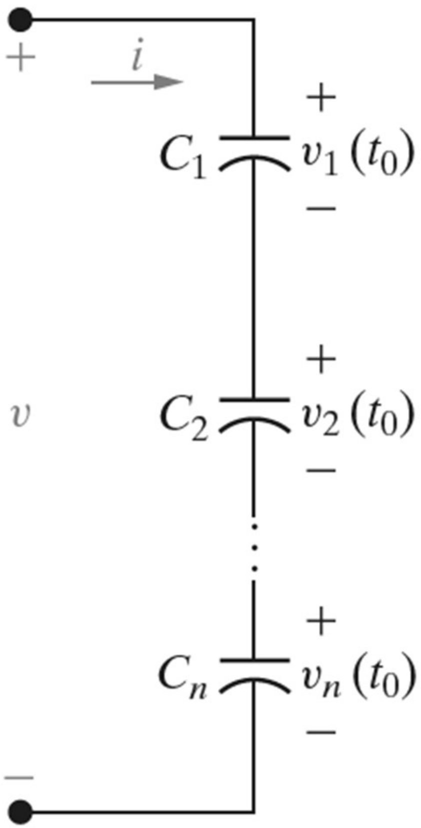
$$\boldsymbol{\rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t)dt + v_C(t_0)}$$

- Pode-se extrair conclusões importantes:
  - Capacitor submetido a uma corrente contínua I ?
    - A tensão do capacitor (de)cresce linearmente a uma taxa de $I/_C$;
  - Capacitor submetido a uma variação brusca de corrente?
    - A taxa de variação da tensão é alterada, podendo inclusive inverter o sentido de circulação;

Conclusão Final

Os Capacitores suportam variações bruscas de corrente (inclusive a inversão da corrente) através deles, mas reagem mal a variações bruscas de tensão, as quais resultam em picos elevados de corrente potencialmente danosos aos circuitos nos quais estão presentes.

Capacitor: equivalente série



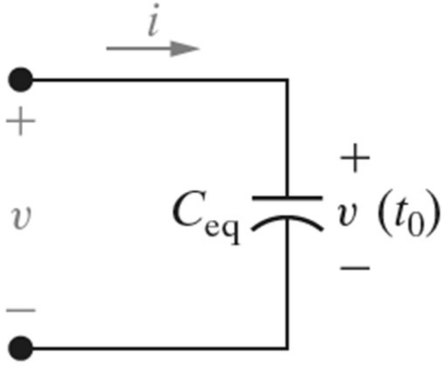
$$i)\ \begin{cases} v_1(t) = \dfrac{1}{C_1} \cdot \int i(t)dt + v_1(t_0) \\ v_2(t) = \dfrac{1}{C_2} \cdot \int i(t)dt + v_2(t_0) \\ \qquad\qquad \cdots \\ v_n(t) = \dfrac{1}{C_n} \cdot \int i(t)dt + v_n(t_0) \end{cases}$$

$$ii) v\ (t) = v_1(t) + v_2(t) + \ldots + v_n(t)$$

$$\rightarrow v(t) = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right] \cdot \int i(t)dt + [v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)]$$

$$iii)\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad e \quad v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)$$

Capacitor: equivalente série



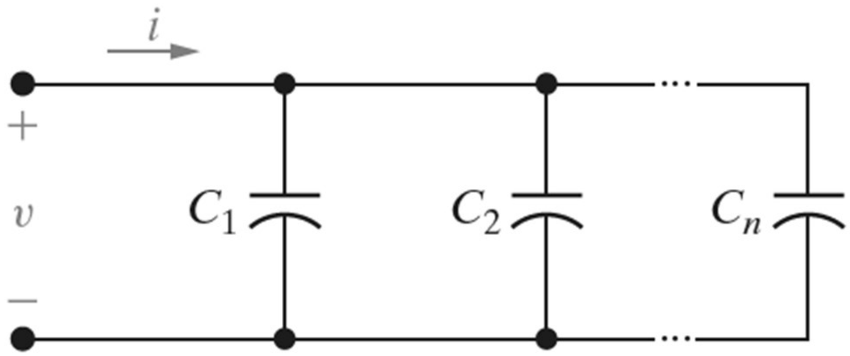
$$i)\ \begin{cases} v_1(t) = \dfrac{1}{C_1} \cdot \int i(t)dt + v_1(t_0) \\ v_2(t) = \dfrac{1}{C_2} \cdot \int i(t)dt + v_2(t_0) \\ \qquad\qquad \cdots \\ v_n(t) = \dfrac{1}{C_n} \cdot \int i(t)dt + v_n(t_0) \end{cases}$$

$$ii)v\ (t) = v_1(t) + v_2(t) + \ldots + v_n(t)$$

$$\rightarrow v(t) = \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right] \cdot \int i(t)dt + [v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)]$$

$$iii)\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad e \quad v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0)$$

Capacitor: equivalente paralelo



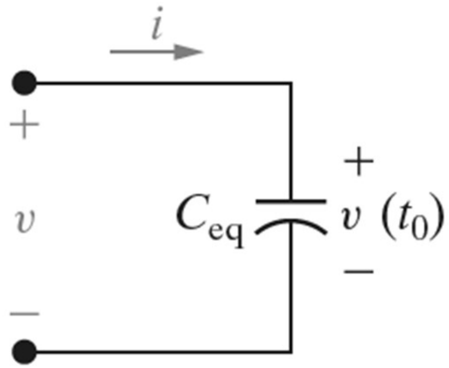
$$i)\ \begin{cases} i_1(t) = C_1 \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \\ i_2(t) = C_2 \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \qquad \cdots \\ i_n(t) = C_n \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \end{cases}$$

$$ii)\, i\ (t) = i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_n(t)$$

$$\rightarrow i(t) = [C_1 + C_2 + \cdots + C_n] \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$iii)\ C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Capacitor: equivalente paralelo



$$
i)\ \begin{cases} i_1(t) = C_1 \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \\ i_2(t) = C_2 \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \\ \qquad \cdots \\ i_n(t) = C_n \cdot \dfrac{dv(t)}{dt} \end{cases}
$$

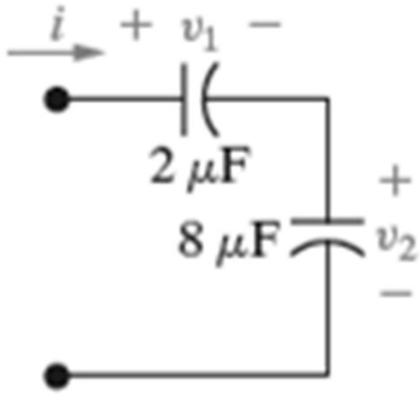
$$ii)\ i\ (t) = i_1(t) + i_2(t) + \ldots + i_n(t)$$

$$\rightarrow i(t) = [C_1 + C_2 + \cdots + C_n] \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

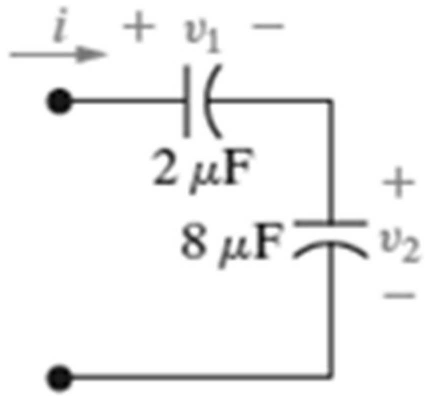
$$iii)\ C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Exemplo

6.5 A corrente nos terminais dos dois capacitores mostrados é $240e^{-10t}\mu A$ para $t \geq 0$. Os valores iniciais de v_1 e v_2 são -10 V e -5 V, respectivamente. Calcule a energia total armazenada nos capacitores à medida que $t \to \infty$. (*Sugestão:* não combine os capacitores em série – determine a energia armazenada em cada um para, então, somá-las.)



Exemplo



$$i)\ i(t) = 240 \times 10^{-6} \cdot e^{-10 \cdot t}$$

$$ii)\ v_1(0) = -10V$$

$$iii)\ v_2(0) = -5V$$

$$iv)\ v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt + v_c(0)$$

$$v)\ v_1(t) = \frac{1}{2 \times 10^{-6}} \cdot \int_0^t 240 \times 10^{-6} \cdot e^{-10 \cdot x} dx - 10$$

$$\rightarrow\ v_1(t) = \frac{240 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-6}} \cdot \int_0^{-10 \cdot t} e^u \frac{du}{-10} - 10$$

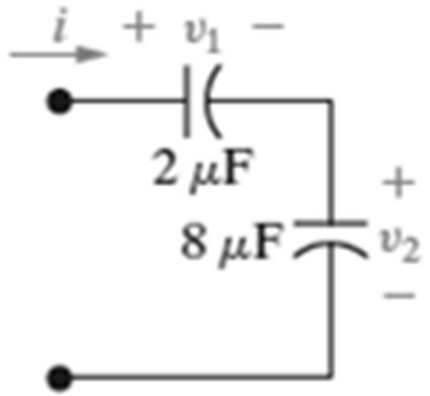
$$\rightarrow\ v_1(t) = 120 \cdot \frac{1}{-10} \cdot \int_0^{-10 \cdot t} e^u du - 10$$

$$\rightarrow\ v_1(t) = -12 \cdot [e^u]_0^{-10 \cdot t} - 10$$

$$\rightarrow\ v_1(t) = -12 \cdot (e^{-10 \cdot t} - 1) - 10$$

$$\rightarrow\ \boldsymbol{v_1(t) = -12 \cdot e^{-10 \cdot t} + 2}$$

Exemplo



$i)\ i(t) = 240 \times 10^{-6} \cdot e^{-10\cdot}$

$ii)\ \boldsymbol{v_1(t) = -12 \cdot e^{-10\cdot t} + 2}$

$iii)\ v_2(0) = -5V$

$iv)\ v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt + v_c(0)$

$$vi)\ v_2(t) = \frac{1}{8 \times 10^{-6}} \cdot \int_0^t 240 \times 10^{-6} \cdot e^{-10\cdot}\ dx - 5$$

$$\rightarrow\ v_2(t) = \frac{240 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-6}} \cdot \int_0^{-10\cdot t} e^u \frac{du}{-10} - 5$$

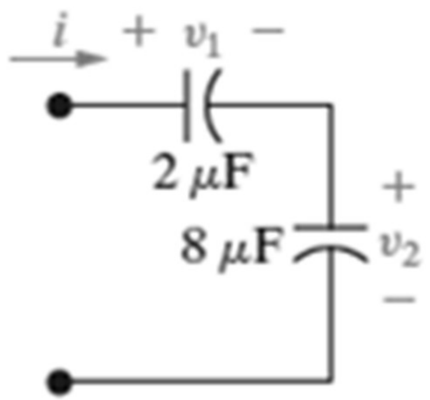
$$\rightarrow\ v_2(t) = 30 \cdot \frac{1}{-10} \cdot \int_0^{-10\cdot t} e^u du - 5$$

$$\rightarrow\ v_2(t) = -3 \cdot [e^u]_0^{-10\cdot t} - 5$$

$$\rightarrow\ v_2(t) = -3 \cdot (e^{-10\cdot t} - 1) - 5$$

$$\rightarrow\ \boldsymbol{v_2(t) = -3 \cdot e^{-10\cdot t} - 2}$$

Exemplo



$i)\ i(t) = 240 \times 10^{-6} \cdot e^{-10 \cdot t}$

$ii)\ \boldsymbol{v_1(t) = -12 \cdot e^{-10 \cdot t} + 2}$

$iii)\ \boldsymbol{v_2(t) = -3 \cdot e^{-10 \cdot t} - 2}$

$$iv)\ v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt + v_c(0)$$

$vii)\ Naturalmente, quando\ t \to \infty$:

$$v_1(\infty) \to 2V \quad e \quad v_2(\infty) \to -2V$$

$viii)\ Portanto, a\ energia\ final\ em\ cada\ capacitor$ é:

$$\to\ U_1(\infty) = \frac{1}{2} \cdot 2 \times 10^{-6} \cdot (2)^2 \equiv 4\mu J$$

$$\to\ U_2(\infty) = \frac{1}{2} \cdot 8 \times 10^{-6} \cdot (-2)^2 \equiv 16\mu J$$

$ix)\ Portanto, a\ energia\ final\ total$ é:

$$U_T(\infty) = 4\mu J + 16\mu J \equiv 20\mu J$$

Exercícios Propostos

- Nilson 10ª. Edição: 6.21, 6.31, 6.32 e 6.33;
- PDF no SIGAA;