

#### Conteúdo

- Eqs. De Maxwell;
  - Leitura das Eqs. de Maxwell;
- As Eqs. De Maxwell no vácuo;
- Eqs. de Maxwell em Baixa Frequência:
  - Estática e quasi-estática;
- Forma Integral das Eqs. de Maxwell;



# As Eqs. de Maxwell

As eqs. de Maxwell:

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0
\end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{v} & (4) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{v}}{\varepsilon}$$

Relações constitutivas:

$$\left\{ egin{aligned} ec{D} &= arepsilon \cdot ec{E} \ ec{B} &= \mu \cdot ec{H} \ ec{J} &= \sigma \cdot ec{E} \end{aligned} 
ight.$$

É: campo elétrico;

 $\vec{D}$ : densidade de campo elétrico;

ε: permissividade elétrica;

 $\vec{H}$ : campo magnético;

 $\vec{B}$ : densidade de campo magnético;

μ: permeabilidade magnética;

 $\vec{J}$ : densidade de corrente;

 $\sigma$ : condutividade elétrica;

 $\rho_v$ : densidade volumétrica de cargas;



### As Eqs. de Maxwell no Vácuo

• As eqs. de Maxwell:

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} & (1) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{b} \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} & (3) \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_v & (4) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} & \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0
\end{cases}$$

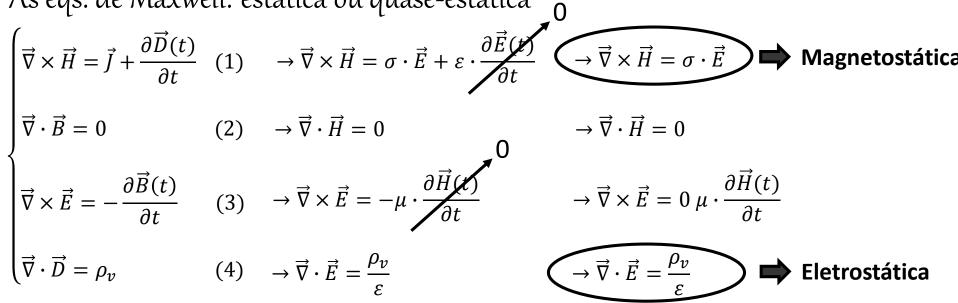
Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \end{cases}$$
$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$



### As Eqs. de Maxwell em Baixa Frequência

• As eqs. de Maxwell: estática ou quase-estática



Relações constitutivas:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \end{cases}$$
$$\vec{I} = \sigma \cdot \vec{E}$$

Prof. Elmano – Eletromagnetismo Aplicado - UFC Campus Sobral



As eqs. de Maxwell expandidas:

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}$$
 (3)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{4}$$

Integrando (4) em um volume:

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \ dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_{\mathcal{V}}}{\varepsilon} \ dv$$

Do teorema da Divergência:

$$\oint_{S} \vec{A}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \int_{v} \left[ \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{A}(x, y, z) \right] dv$$

Pode-se reescrever: Carga envolvida ( $q_{cenv}$ )  $\oint_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{v} dv$ 

Finalmente:

$$\oint_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{q_{env}}{\varepsilon} \quad \text{(Lei de Gauss)}$$



As eqs. de Maxwell expandidas:

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{v}}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\nu}}{\varepsilon} \tag{4}$$

Realizando procedimento análogo em (2) devemos obter:

$$\oint_{S} \vec{H} \cdot \vec{dS} = 0$$
 (Não existe monopolo magnético)



As eqs. de Maxwell expandidas:

$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{4}$$

Integrando (1) sobre uma superfície:

$$\int_{S} \left[ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H} \right] \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{S} \sigma \cdot \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{dS} + \int_{S} \varepsilon \cdot \frac{\partial \overrightarrow{E}(t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Do teorema de Stokes:

$$\int_{S} \left[ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}(x, y, z) \right] \cdot \overrightarrow{dS} \equiv \oint_{l} \overrightarrow{A}(x, y, z) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Pode-se reescrever: Corrente de condução (i<sub>c</sub>)  $\oint_{l} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{S} \sigma \cdot \vec{E} \cdot \vec{dS} + \int_{S} \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} \cdot \vec{dS}$ 

Corrente de deslocamento (i<sub>d</sub>)

Finalmente:

$$\oint_{l} \vec{H} \cdot \overrightarrow{dl} = i_{c} + i_{d}$$
 (Lei de Ampere Corrigida)



As eqs. de Maxwell expandidas:

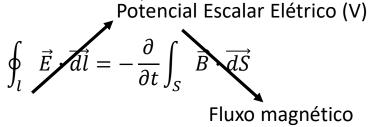
$$\begin{cases}
\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} & (1) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 & (2) \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t} & (3) \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} & (4)
\end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}(t)}{\partial t}$$
 (3)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{v}}{\varepsilon} \tag{4}$$

Através de um procedimento similar em (3):



Finalmente:

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial \Phi_{m}(t)}{\partial t} \quad \text{(Lei de Faraday)}$$