



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS SOBRAL
ENGENHARIAS DA COMPUTAÇÃO E ELÉTRICA
DISCIPLINA DE ELETROMAGNETISMO APLICADO
3ª AVALIAÇÃO PARCIAL (01/11/2019)
PROF. CARLOS ELMANO

810
S.P.

Nome: FRANCISCO WILLIAN SANTOS PRACIANA Mat.: 385112

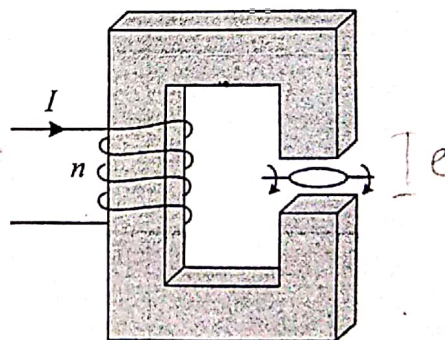
1. Uma bobina é composta por ⁷²4 espiras circulares de raio R é submetida a uma indução magnética cuja intensidade é dada por:

$$B(\rho, t) = \frac{B_0 \cdot \rho^2}{R^2} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Essa indução atravessa longitudinalmente a bobina e, como pode ser observado na equação, varia com a coordenada radial cilíndrica ρ , cuja origem é o centro da bobina, e com o tempo t . O condutor que compõe a espira possui uma seção transversal S_f e uma condutividade σ . Responda, justificando adequadamente todas as suas respostas:

- 3.0 / 1.0
1.0
0.5
0.5
- a) Quanto vale o fluxo magnético através da bobina? (1pt)
b) Quanto vale a tensão induzida na bobina? (1pt)
c) Quanto vale a corrente induzida na bobina? (1pt)
d) Quanto vale a potência dissipada por condução na bobina (deixe em função do tempo)? (1pt)

2. No circuito magnético ao lado uma bobina de 'n' espiras foi montada sobre um núcleo de material magnético com permeabilidade magnética infinita e com seção transversal quadrada de lado 2R. Por essa bobina circula uma corrente 'I'. O núcleo possui um entreferro de comprimento 'e' dentro do qual se encontra uma espira circular de raio 'R'. A espira é feita de um material com condutividade ' σ ' e área de seção transversal ' S_f '. Responda, justificando adequadamente todas as suas respostas:



Considerando que a espira seja mantida estática paralela às faces do entreferro:

- 5.0 / 1.0
1.0
1.0
1.0
1.0
- a) Quanto vale o fluxo magnético através da espira? (1pt)
b) Quanto valem a tensão e a corrente induzidas na espira? (1pt)

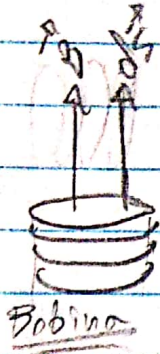
Considerando que a espira seja submetida a uma rotação com frequência angular ' ω ':

- c) Quanto vale o fluxo magnético através da espira? (1pt)
d) Quanto valem a tensão e a corrente induzidas na espira? (1pt)
e) Há perda por condução na espira? De quanto? De onde provém a energia que alimenta essa perda? (2pt)

1.

a) Φ_B na bobina?

O fluxo magnético é a quantidade de campo magnético B que passa por uma determinada área S

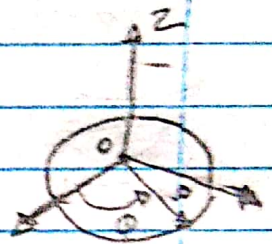


$$\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

onde, em coordenadas cilíndricas podemos escrever esta área por

$$dS = \rho \, d\rho \, d\phi, \text{ logo}$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{B_0 \rho^2}{R^2} (1 - e^{-\frac{z}{\tau}}) \rho \, d\rho \, d\phi \cdot \cos\theta$$



$$\Phi = \frac{B_0}{R^2} (1 - e^{-\frac{z}{\tau}}) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \rho^3 \, d\rho$$

$$\Phi = \frac{B_0}{R^2} (1 - e^{-\frac{z}{\tau}}) [2\pi] \left[\frac{R^4}{4} \right]$$

$$\Phi = \frac{\pi B_0 (1 - e^{-\frac{z}{\tau}}) R^2}{2} \quad \Phi = \frac{\pi B_0 (1 - e^{-\frac{z}{\tau}}) R^2}{2}$$

b) A tensão induzida na espira?

Pela Lei de Faraday, com $N=1$ espiras:

$$V_i = - \frac{d\Phi}{dt} \cdot N$$

$$V_i = -4 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi B_0 R^2 (1 - e^{-\frac{z}{\tau}})}{2} \right)$$

① continuação 1...

② continuação 1...

$$V_i = -\frac{4\pi B_0 R^2}{2} \frac{d}{dt} (1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$V_i = -2\pi B_0 R^2 [-e^{-\frac{t}{T}} \cdot (-\frac{1}{T})]$$

$$V_i = -\frac{2\pi B_0 R^2}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad V_i = -\frac{2\pi B_0 R^2}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

③ A corrente induzida na bobina
Pela lei de Ohm

$$V = R I_{ind} \rightarrow I_{ind} = \frac{V}{R}$$

onde $R = \frac{l}{\sigma S_f}$ e $l = 2\pi R \times 4$ circunferencia da espira são quatro

$$I_{ind} = \left(\frac{\sigma S_f}{2\pi R} \right) \left(-\frac{2\pi B_0 R^2}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$I_{ind} = -\frac{\sigma S_f B_0 R}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad I_{ind} = -\frac{\sigma S_f B_0 R}{4 \cdot T} e^{-\frac{t}{T}}$$

④ $P(t)$ na espira

Sabemos que $P_m = R I^2$, logo
onde $R = \frac{l}{\sigma S_f}$ e $l = 2\pi R$

$$P(t) = \frac{2\pi R}{\sigma S_f} \cdot \left(-\frac{\sigma S_f B_0 R}{4 \cdot T} e^{-\frac{t}{T}} \right)^2$$

$$P(t) = \frac{2\pi R^3 \sigma S_f}{2} \left(\frac{B_0 e^{-\frac{t}{T}}}{T} \right)^2$$

2

a) Φ_B na espira?

O fluxo é dado por $\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ onde $\vec{B} = \mu \vec{H}$

No circuito magnético, como temos uma bobina com n espiras por onde passa uma corrente I , sendo esta bobina o que gera o fluxo magnético no entreferro, então pela lei de Ampere o campo magnético é dado por

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{env}$$

$$H \int dl = I n$$

$$H l = I n$$

$$H = \frac{I n}{l}$$

Aplicando na equação do fluxo, temos

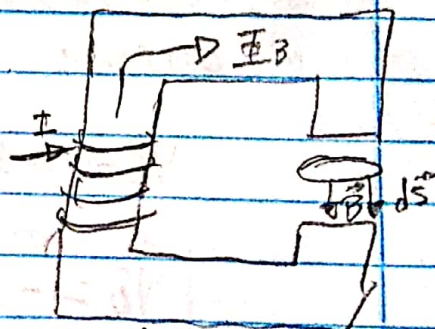
$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi = \oint B ds \cos 0^\circ$$

$$\Phi = \oint \mu_0 H ds$$

$$\Phi = \oint \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) ds$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) \oint ds$$



Como a área S é da região envolvida pela espira, ou seja, circular, então podemos usar coordenadas polares, logo

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) R^2$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) R^2 \pi$$

$$\boxed{\Phi = \mu_0 \left(\frac{I n}{l} \right) R^2 \pi}$$

2) continuação 1.:

b) Tensão e corrente induzidas na espira?

Só há tensão e, consequentemente, corrente se houver variação temporal do fluxo já que a Lei de Faraday nos diz

$$V_o = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

onde $\Phi_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ e já sabemos do item anterior que

$$\Phi_B = \mu_0 \left(\frac{IN}{e} \right) R^2 \pi$$

Considerando o mesmo sistema com mesma área da espira, do núcleo e quantidade de espiras, então o fluxo só varia se a corrente for alternada $I(t)$, logo

$$V_o = - \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \frac{I(t)N}{e} R^2 \pi \right)$$

$$V_o = - \frac{\mu_0 \cdot N \cdot R^2 \pi}{e} \cdot \frac{d(I(t))}{dt}$$

$$V_o = - \frac{\mu_0 N R^2 \pi}{e} \frac{d(I(t))}{dt}$$

e pela Lei de Ohm

$$V = R I_{ind} \rightarrow I_{ind} = V/R$$

$$\text{onde } R = \frac{l}{\sigma S_f}$$

$l \rightarrow$ circunferência da espira

$$I_{ind} = - \frac{\sigma S_f}{l} \frac{\mu_0 N R^2 \pi}{e} \frac{d(I(t))}{dt}$$

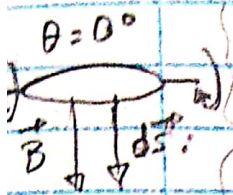
$$I_{ind} = - \frac{\sigma S_f \mu_0 N R^2 \pi}{e l} \frac{d(I(t))}{dt}$$

Caso I constante, não há tensão induzida nem corrente induzida

Se I da bobina constante não há V_i nem I_{ind}

2) continuidade 2 ... 1

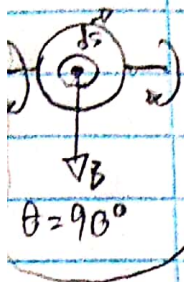
Espira girando com freq. angular ω
 a) $\Phi(t)$ na espira?



Sabendo que o fluxo é dado por

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \oint B \, dS \cos \theta$$



Para este caso o ângulo entre o vetor \vec{B} e $d\vec{S}$ (elemento de área da espira normal à área) não vai ser sempre o mesmo porque a espira gira, podemos escrever o ângulo como

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

onde θ_0 é um ângulo inicial que consideraremos com sendo zero $\theta_0 = 0$

e ωt é a fase do ângulo. Portanto:

$$\theta = \omega t$$

logo

$$\Phi = \oint B \, dS \cos(\omega t)$$

$$\Phi = \oint \mu_0 H \, dS \cos(\omega t)$$

A área S da espira e o campo magnético não mudam, logo

$$\Phi = \oint \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) dS \cos(\omega t)$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \cos(\omega t) \oint dS$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \cos(\omega t) \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \pi R^2 \cos(\omega t)$$

$$\Phi = \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \pi R^2 \cos(\omega t)$$

② continua qão 3...

d) V_i e I na espira
Pela lei de Faraday, temos que

$$V_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

$$V_i = - \frac{d}{dt} \left(\mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \pi R^2 \cos(\omega t) \right)$$

$$V_i = + \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \pi R^2 \omega \sin(\omega t)$$

Agora sabendo a tensão induzida pode-se calcular a corrente induzida pela lei de Ohm

$$V_i = R I_{ind}$$

$$I_{ind} = \frac{V_i}{R}$$

onde $R = \frac{l}{\sigma S_f}$ e l é a circunferência da espira, logo $l = 2\pi R$, Portanto

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 NI \pi R^2 \omega \sin(\omega t)}{e} \cdot \frac{\sigma S_f}{2\pi R}$$

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 NI R \omega \sin(\omega t) \sigma S_f}{2e}$$

$$V_i = \mu_0 \left(\frac{NI}{e} \right) \pi R^2 \omega \sin(\omega t)$$

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 NI R \omega \sin(\omega t) \sigma S_f}{2e}$$

2) Continuação 4..)

e) Perdas por condução ?

Como a espira não é ideal e possui resistência interna então há perdas por condução, pois há dissipação de potência ao circular uma corrente.

Sabendo que $P_m = R I_{efc}^2$

Como a corrente é ^{alternada e} sinusoidal usaremos a corrente eficaz

$$I_{efc} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{onde } I_0 \text{ é amplitude}$$

$$I_{efc} = \frac{\omega_0 N I R W \delta \sigma_f}{2e}$$

Logo, a resistência é dada por $R = \frac{\rho}{\delta \sigma_f}$ ^{circ. da espira}

$$P_m = \left(\frac{2\pi R}{\delta \sigma_f} \right) \left(\frac{\omega_0 N I R W \delta \sigma_f}{2e} \right)^2$$

$$P_m = 2\pi R^3 \delta \sigma_f \left(\frac{\omega_0 N I W}{2e} \right)^2$$

Essa Energia que alimenta essa perda vem da circulação de corrente em um material não ideal (com resistência interna)

$$P_m = 2\pi R^3 \delta \sigma_f \left(\frac{\omega_0 N I W}{2e} \right)^2$$