Funciones y Modelos

L. I. Igor Castañeda Quiñonez

Funciones y Modelos

- Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante, se llama **función potencia**. Consideramos varios casos.
- i) **$a = n$, donde n es un número entero positivo**. Las gráficas de $f(x) = x^n$ para $x = 1, 2, 3, 4$ y 5 se muestran en la figura 11. (Estas son polinomiales con un sólo término.) Ya sabemos la forma de la gráfica de $y = x$ (una recta que pasa por el origen con pendiente 1) y $y = x^2$.

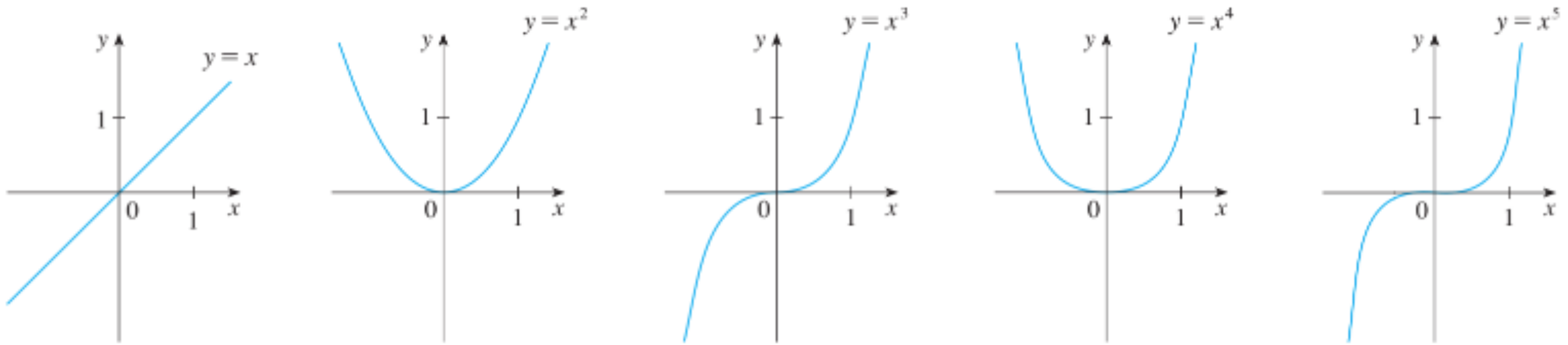
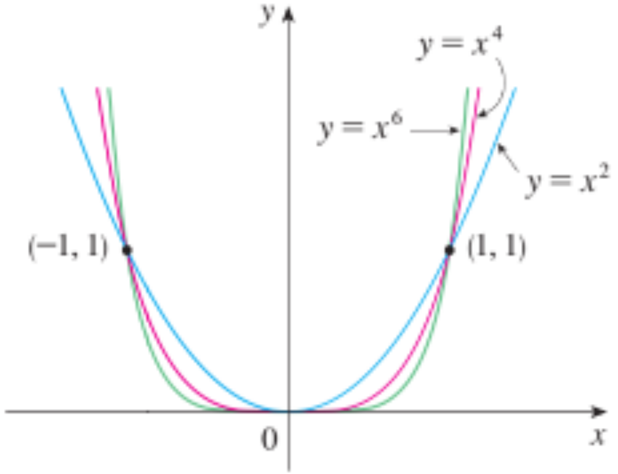
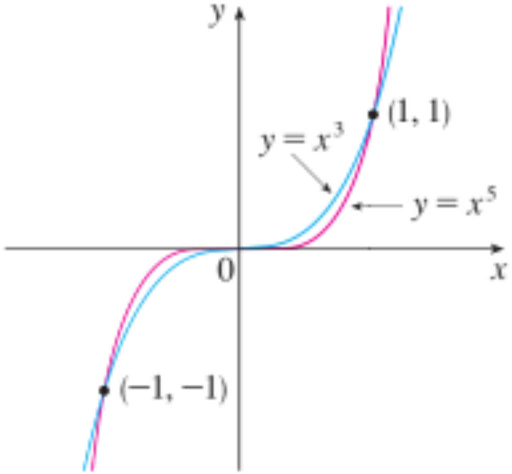


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Funciones y Modelos

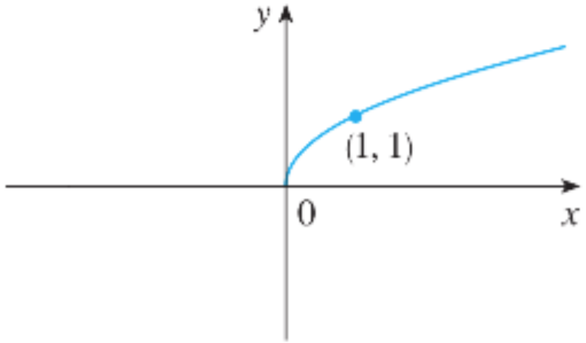
- La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, entonces $f(x) = x^n$ es una función par, y su gráfica es similar a la parábola $y = x^2$. Si n es impar, entonces $f(x) = x^n$ es una función impar, y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Observe en la figura, sin embargo, que cuando n aumenta, la gráfica de $y = x^n$ se aplana más cerca de 0 y es más pronunciada cuando $|x| \geq 1$. (Si x es pequeña, entonces x^2 es más pequeña, x^3 es aún más pequeña, x^4 es todavía más pequeña aún, y así sucesivamente.)



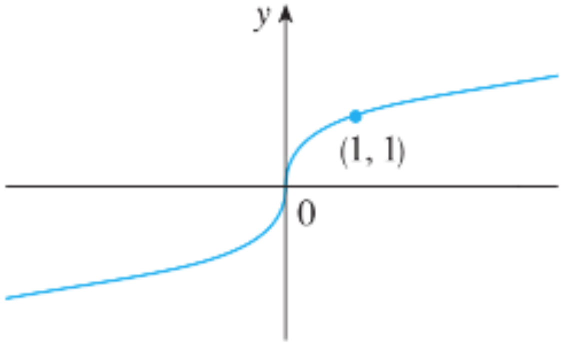


Funciones y Modelos

- ii) $a = 1\,/\,n$, donde n es un número entero positivo
- La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, con dominio en $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. Observe la figura a). Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ con dominio en $\mathbb{R}$ (Recuerde que todo número real tiene raíz cúbica) y cuya gráfica se muestra en la figura b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar $(\mathrm{n} > 3)$ es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.



a) $f(x) = \sqrt{x}$

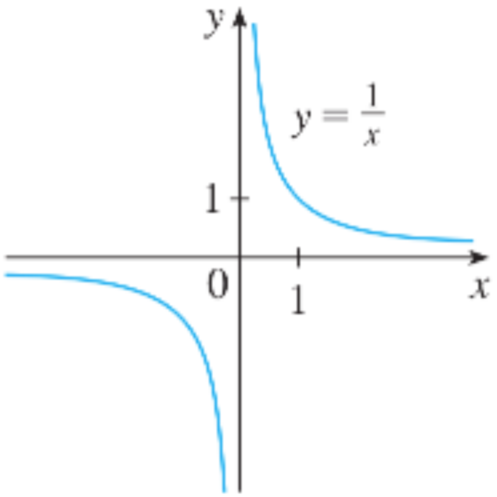


b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Funciones y Modelos

- iii) $\boldsymbol{a = -1}$
- La gráfica de la **función** recíproca $f(x) = x^{-1} = 1/x$ se muestra en la figura. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$ o $xy = 1$, y es una hipérbola con los ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en física y química en relación con la ley de Boyle, que dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

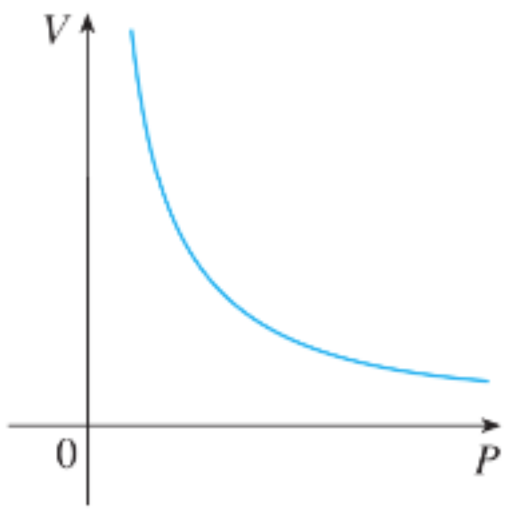
$$V = \frac{C}{P}$$



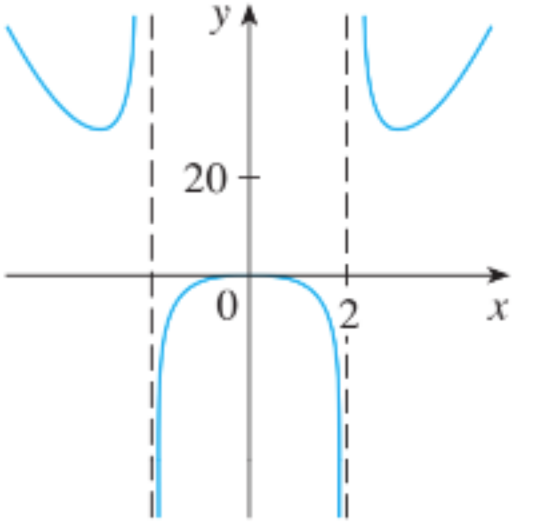
Funciones y Modelos

- donde C es una constante. Así, la gráfica de V en función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura.

$$V = \frac{C}{P}$$



Funciones y Modelos



- FUNCIONES RACIONALES
- Una **función racional** f es un cociente de dos funciones polinomiales:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- donde P y Q son polinomiales. El dominio consiste en todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo simple de una función racional es $f(x) = 1/x$ cuyo dominio es $\{x|x \neq 0\}$: esta es la función recíproca graficada en la figura. La función

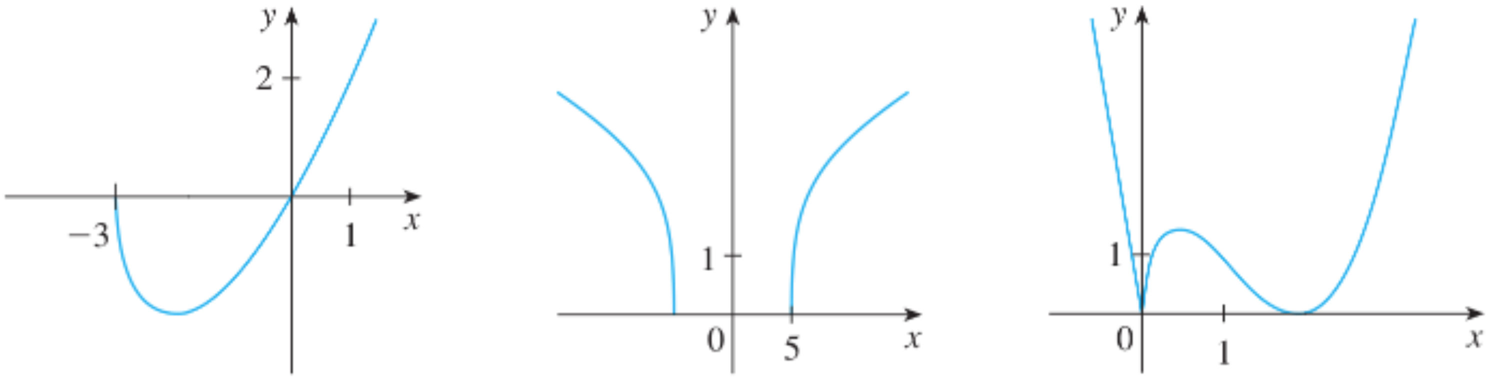
$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

- es una función racional con dominio $\{x|x \neq \pm 2\}$. La gráfica se muestra en la figura

Funciones y Modelos

- FUNCIONES ALGEBRÁICAS
- Una función f se llama *función algebráica* si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con las polinomiales. Cualquier función racional es automáticamente una función algebraica. Aquí hay dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$



a) $f(x) = x\sqrt{x + 3}$ b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ c) $h(x) = x^{2/3}(x - 2)^2$

Funciones y Modelos

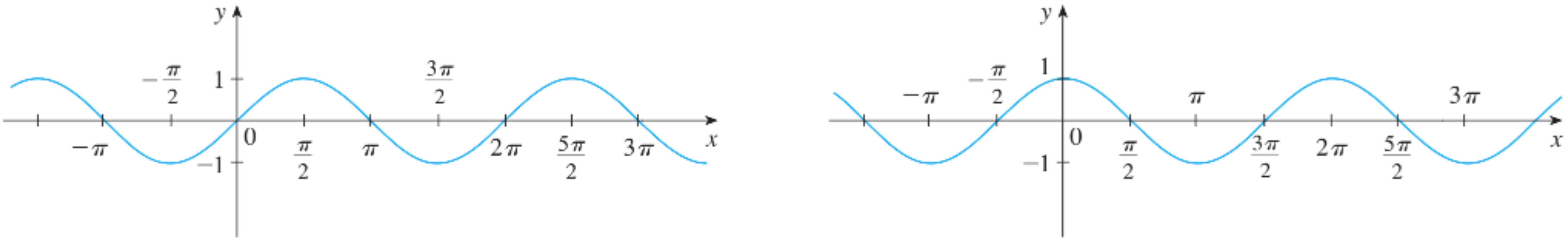
- Un ejemplo de una función algebraica se produce en la teoría de la relatividad. La masa de una partícula con velocidad v

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

- Donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0x10^5$ km/s es la velocidad de la luz en el vacio.

Funciones y Modelos

- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
- La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan más adelante. En Cálculo, por convención, siempre se utilizan medidas en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando utilizamos la función $f(x) = \sin x$, se sobreentiende que $\sin x$ significa el seno de un ángulo cuya medida en radianes es x. Así, las gráficas de las funciones seno y coseno son como se muestra en la figura



a) $f(x) = \text{sen } x$ b) $g(x) = \cos x$

Funciones y Modelos

- Observe que para las funciones seno y coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Por tanto, para todos los valores de x, tenemos

$$\boxed{-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

- O bien en términos de valor absoluto,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

- También, los ceros de la función seno se producen en los múltiplos enteros de π; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{cuando} \qquad x = n\pi \qquad \text{donde} \qquad n \text{ es un entero}$$

- Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas con periodo 2π. Esto significa que, para todos los valores de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

Funciones y Modelos

- El carácter periódico de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las olas del mar, resortes en vibración y las ondas de sonido. Por ejemplo, en el ejemplo, veremos que un modelo razonable para el número de horas de luz solar en Filadelfia t días de después del 1 de enero viene dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

- La función tangente está relacionada con las funciones seno y coseno por la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Funciones y Modelos

- y su gráfica se muestra en la figura. Está indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$ Su rango es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son los recíprocos de las funciones seno, coseno y tangente.

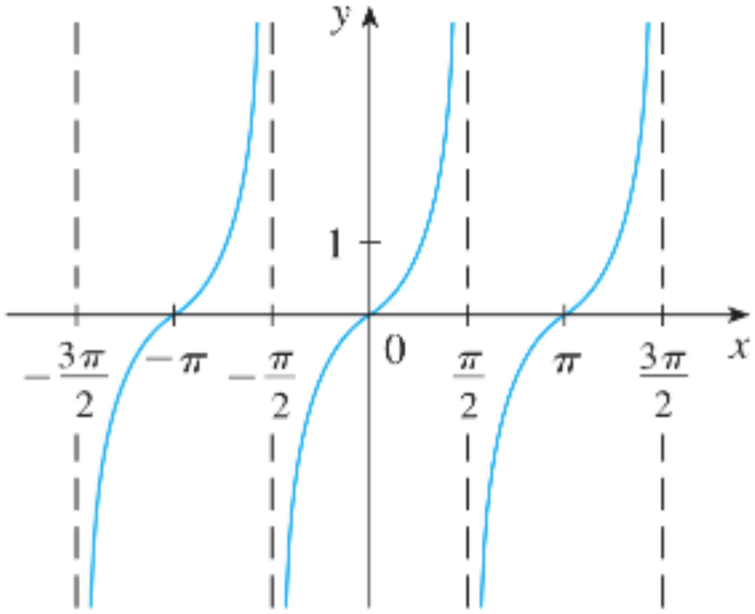
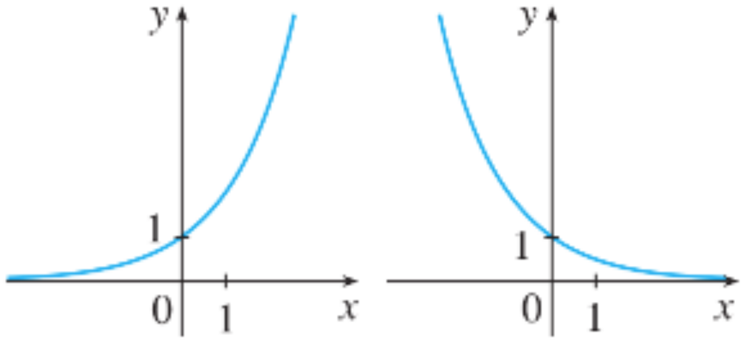


FIGURA 19

$y = \tan x$

Funciones y Modelos

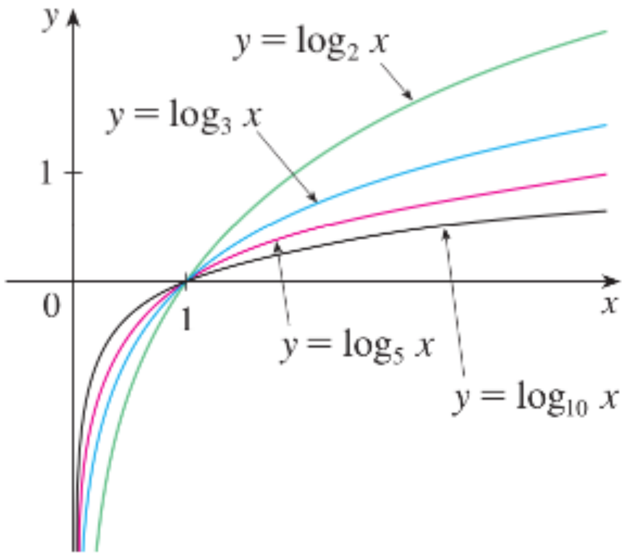
- FUNCIONES EXPONENCIALES
- Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0,5)^x$ se muestran en la figura. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $(0, \infty)$.
- Las funciones exponenciales serán estudiadas en detalle en el curso, y veremos que son útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como el crecimiento de una población $(si\ a > 1)$ y la desintegración radiactiva $(si\ a < 1)$.



a) $y = 2^x$ b) $y = (0.5)^x$

Funciones y Modelos

- FUNCIONES LOGARÍTMICAS
- Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las funciones inversas de las funciones exponenciales, que estudiaremos más adelante. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con diferentes bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el rango es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.



Funciones y Modelos

- Clasifique las siguientes funciones como uno de los tipos de funciones que hemos discutido.

a) $f(x) = 5^x$

b) $g(x) = x^5$

c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Funciones y Modelos

- A) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)
- B) $g(x) = x^5$es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerarse como una función polinomial de grado 5.
- C) $h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ es una función algebráica.
- D) $u(t) = 1 - t - 5t^4$ es una función polinomial de grado 4.

Funciones y Modelos

Desplazamientos vertical y horizontal Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, desplace verticalmente c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x) - c$, desplace verticalmente c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x - c)$, desplace horizontalmente c unidades a la derecha la gráfica de $y = f(x)$
$y = f(x + c)$, desplace horizontalmente c unidades a la izquierda la gráfica de $y = f(x)$

- TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES
- Mediante la aplicación de ciertas transformaciones de la gráfica de una función dada, podemos obtener las gráficas de algunas funciones relacionadas. Esto nos dará la posibilidad de esbozar rápidamente a mano las gráficas de muchas funciones. También nos permitirá expresar ecuaciones para las gráficas dadas. Consideremos primero las **traslaciones.** Si c es un número positivo, entonces la gráfica $y = f(x) + c$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada verticalmente hacia arriba una distancia de c unidades (ya que cada coordenada y se incrementa por el mismo número c). Por otro lado, si $g(x) = f(x - c)$ donde $c > 0$, entonces el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). Así, la gráfica de $y = f(x - c)$ es la gráfica de $y = f(x)$, desplazada c unidades a la derecha

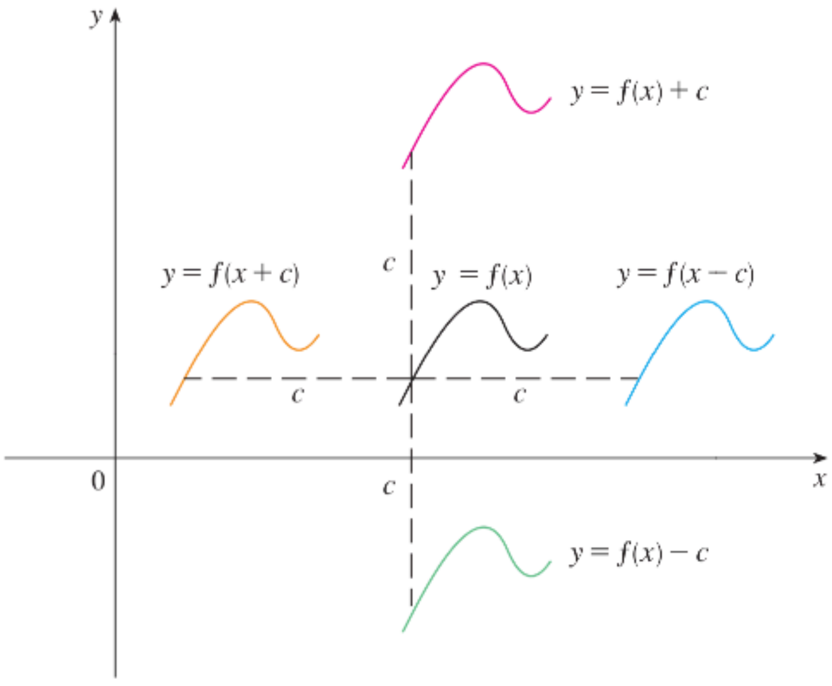


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

Funciones y Modelos

- Ahora consideremos las transformaciones por estiramiento y reflexión. Si $c > 1$, entonces la gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ alargada verticalmente por un factor de c (porque cada coordenada y, se multiplica por el número c). La gráfica de $y = -f(x)$ es la gráfica $y = f(x)$ reflejada en relación con el eje x porque el punto (x, y) se reemplaza por el punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y el siguiente cuadro, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

Alargamientos y reflexiones vertical y horizontal Supongamos que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alargar verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = (1/c)f(x)$, comprimir verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(cx)$, comprimir horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = f(x/c)$, alargar horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.
$y = -f(x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje x
$y = f(-x)$, reflejar la gráfica de $y = f(x)$ sobre el eje y

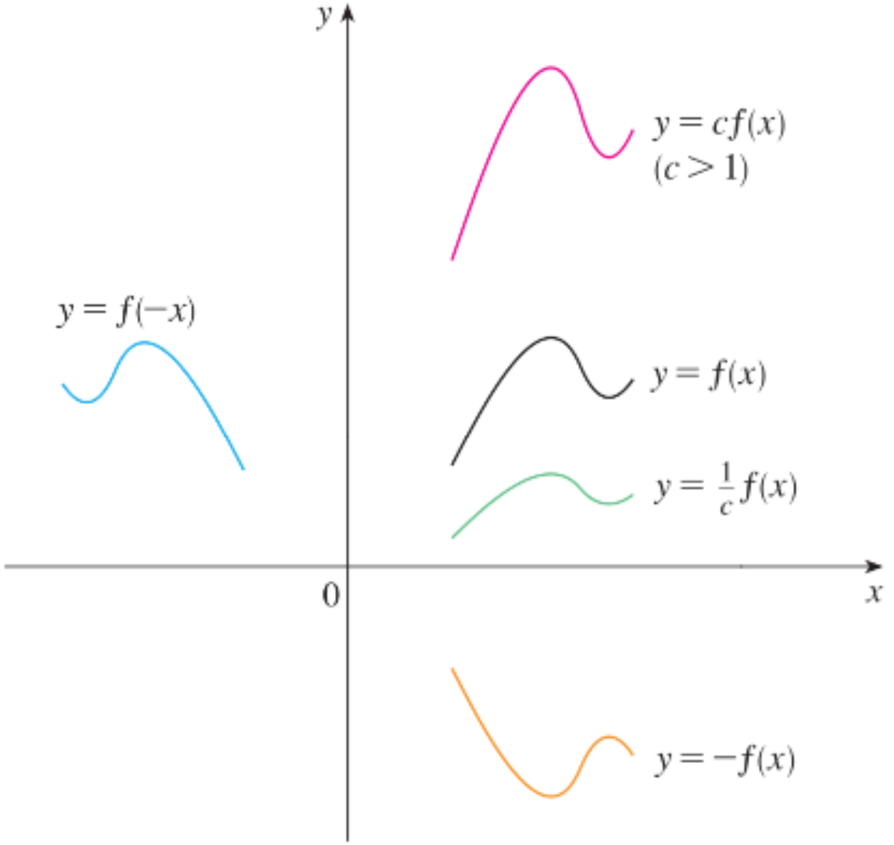


FIGURA 2
Estiramiento y reflexión de la gráfica de f

Funciones y Modelos

- La figura ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = \cos x$ multiplicamos la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga verticalmente por un factor de 2.