Matemáticas para Ingeniería I

MCCT Igor Castañeda Quiñonez

Derivadas Parciales

- En el ejemplo anterior, obsérvese que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2 y y_2, cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t. Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$ donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ se sigue que w es función de s y t, y se pueden considerar las derivadas parciales de w con respecto a s y t. Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Así se pueden encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Derivadas Parciales

- Un razonamiento similar se efectúa para $\partial z/\partial s$ y así se demuestra la versión siguiente de la regla de la cadena.

3 **Regla de la cadena (caso 2)** Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función derivable de x y y, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son funciones derivables de s y t. Entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Si $z = e^x \sin y$, donde $x = st^2$ y $y = s^2t$, calcule $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.
- SOLUCION: Al aplicar el caso 2 de la regla de la cadena, obtenemos

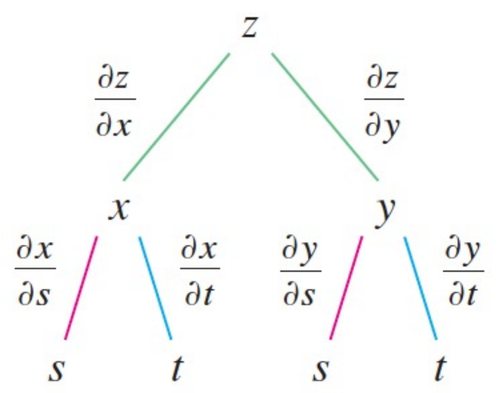
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y)(t^2) + (e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + 2ste^{st^2} \cos(s^2t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)(s^2)$$

$$= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}(s^2t) + s^2 e^{st^2} \cos(s^2t)$$

Derivadas Parciales



- El caso 2 de la regla de la cadena contiene tres tipos de variables: s y t son variables **independientes**, x y y se llaman variables **intermedias** y z es la variable **dependiente**. Observe que el teorema 3 tiene un término para cada variable intermedia, y cada uno de estos términos es similar a la regla de la cadena unidimensional de la ecuación 1.
- Para recordar la regla de la cadena, es útil dibujar el diagrama de árbol de la figura. Dibujamos ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x y y para indicar que z es una función de x y y. Luego dibujamos ramas desde x y y a las variables independientes s y t. En cada rama escribimos la derivada parcial correspondiente. Para determinar $\partial z/\partial s$ calculamos el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta s y luego sumamos los productos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

Derivadas Parciales

- De la misma manera determinamos $\partial z/\partial t$ mediante las trayectorias de z a t.
- Ahora consideramos la situación general en la cual una variable dependiente u es una función de n variables intermedias , , cada una de las cuales, a su vez, es una función de m variables independientes $x_1, \ldots, x_n$. Observe que hay n términos, uno para cada variable intermedia. La demostración es similar a la del caso 1.

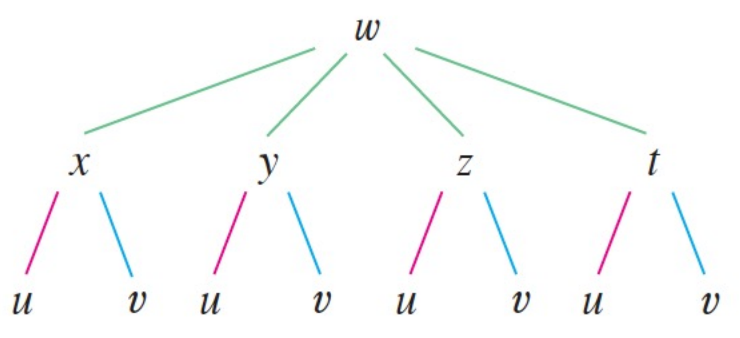
$\boxed{4}$ **Regla de la cadena (versión general)** Supongamos que u es una función derivable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y cada x_j es una función derivable de las m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Entonces u es una función de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Derivadas Parciales

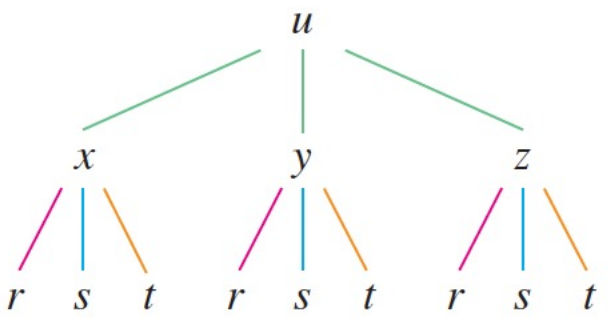
- EJEMPLO: Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.
- SOLUCION: Utilice el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, podemos escribir las expresiones necesarias:



$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

Derivadas Parciales



- EJEMPLO: Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t, y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2 s \sin t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2, s = 1$ y $t = 0$.
- SOLUCION: Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

- Cuando $r = 2, s = 1$ y $t = 0$, tenemos $x = 2, y = 2$ y $z = 0$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Si $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ y f es derivable, demuestre que t satisface la ecuación
- SOLUCION: Sea $x = s^2 - t^2$ y $y = t^2 - s^2$. Entonces, $g(s,t) = f(x,y)$ y la regla de la cadena dan

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(2s) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2t)$$

- Por lo tanto,

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = \left(2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(-2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule a) $\partial z/\partial r$ y b) $\partial^2 z/\partial r^2$
- SOLUCION: a) La Regla de la Cadena da

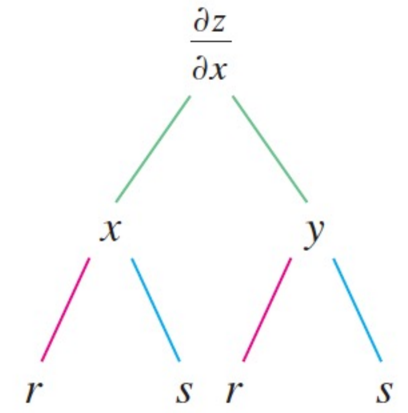
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

- B) Al aplicar la regla del producto a la expresión en el inciso a) obtenemos

$$\boxed{5} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Derivadas Parciales



- Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura), llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

- Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar derivadas parciales por sustitución
- Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.
- SOLUCION: Se comienza por sustituir $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener

$$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right).$$

- Después, para encontrar $\partial w/\partial s$ se mantiene constante y se deriva con respecto a s.

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right)$$

$$= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$

Derivadas Parciales

- De manera similar, para hallar $\partial w/\partial t$, se mantiene s constante y se deriva con respecto a t para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right)\\ &= 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right)\\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

Derivadas Parciales

- El teorema 13.7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del ejemplo anterior, sin expresar w explícitamente como función de s y t

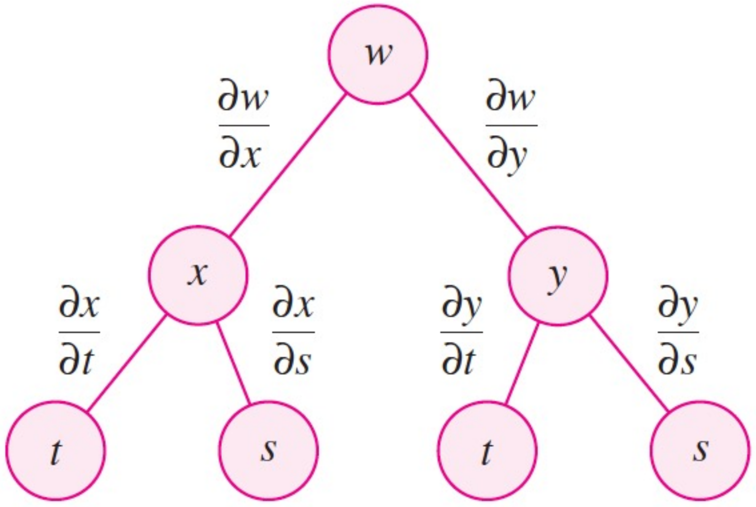
TEOREMA 13.7 REGLA DE LA CADENA: DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y. Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Derivadas Parciales

- DEMOSTRACION: Para obtener $\partial w/\partial s$, se mantiene constante t y se aplica el teorema 13.6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\partial w/\partial t$ se mantiene constante s y se aplica el teorema 13.6
- NOTA: La regla de la cadena en este teorema se muestra esquemáticamente en la figura



La regla de la cadena: dos variables independientes

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Regla de la cadena con dos variables independientes
- Utilizar la regla de la cadena para encontrar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, dada

$$w = 2xy$$

$$\text{donde } x = s^2 + t^2 \text{ y } y = s/t.$$

- SOLUCION: Nótese que estas mismas derivadas parciales fueron calculadas en el ejemplo 3. Esta vez, usando el teorema 13.7, se puede mantener constante t y derivar con respecto a s para obtener

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2. \\
&= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} \\
&= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}.
\end{aligned}$$

Derivadas Parciales

- De manera similar, manteniendo s constante se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituir } y \text{ por } (s/t) \text{ y } x \text{ por } s^2 + t^2. \\
&= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2} \\
&= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2} \\
&= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.
\end{aligned}$$

Derivadas Parciales

- La regla de la cadena del teorema 13.7 también puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es una función diferenciable de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada x_i es una función diferenciable de m variables $t_1, t_2, \ldots, t_m$, entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- se obtiene lo siguiente.

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Regla de la cadena para una función de tres variables
- Hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ si $s = 1$ y $t = 2\pi$, dada la función

$$w = xy + yz + xz$$

- Donde $x = s\cos t$, $y = s\sin t$ y $z = t$.
- SOLUCION: Por extensión del teorema 13.7, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t) + (y + x)(0) \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\operatorname{sen} t).\end{aligned}$$

Derivadas Parciales

- Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, se tiene $x = 1, y = 0$ y $z = 2\pi$. Así, $\frac{\partial w}{\partial s} = (0 + 2\pi)(1) + (1 + 2\pi)(0) = 2\pi$. Y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= (y + z)(-s \operatorname{sen} t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)$$

- y si $s = 1$ y $t = 2\pi$, se sigue que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1)$$

$$= 2 + 2\pi.$$

Derivadas Parciales

- Derivación implícita
- La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F\big(x, f(x)\big) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Derivadas Parciales

- Pero $\frac{dx}{dx} = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

- Para deducir esta ecuación, suponemos que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, que se demuestra en cálculo avanzado, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si F se define sobre un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas sobre el disco, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

Derivadas Parciales

- Se concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$ donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x. Para hallar dy/dx se podría recurrir a las técnicas vistas anteriormente. Sin embargo, se verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

- se puede aplicar el teorema 13.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}.$$

Derivadas Parciales

- Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f, se sabe que $\frac{dw}{dx} = 0$ y se tiene

$$F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

- Ahora, si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que $\frac{dx}{dx} = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

- Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

Derivadas Parciales

TEOREMA 13.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

- Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar una derivada implícitamente
- Hallar dy/dx, dada la ecuación $y^3 + y^4 - 5y - x^2 + 4 = 0$.
- Solución: Se comienza por definir una función F.

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

- Después, usando el teorema 13.8, se tiene

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

- por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
- SOLUCION: La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

- de modo que la ecuación 6 da como resultado

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

- Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Derivadas Parciales

- Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

- así que esta ecuación se transforma en
$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

- Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Derivadas Parciales

- Una vez más, una versión del **teorema de la función implícita** da condiciones en las cuales la suposición es válida. Si F está definida dentro de una esfera que contiene (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera, entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por la ecuación 7.

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.
- SOLUCION: Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 7, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar derivadas parciales implícitamente
- Encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.
- SOLUCION: Para aplicar el teorema 13.8, sea

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

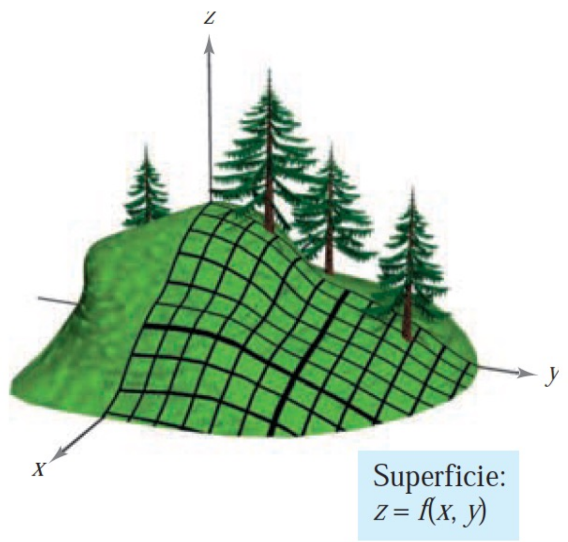
- Entonces

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

- Con lo que

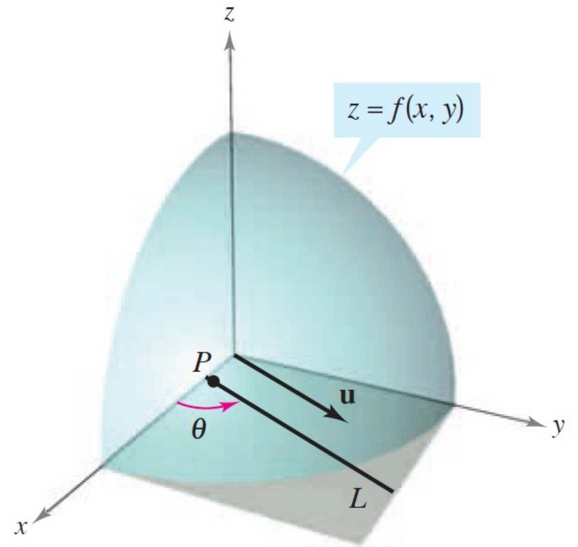
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

Derivadas Parciales

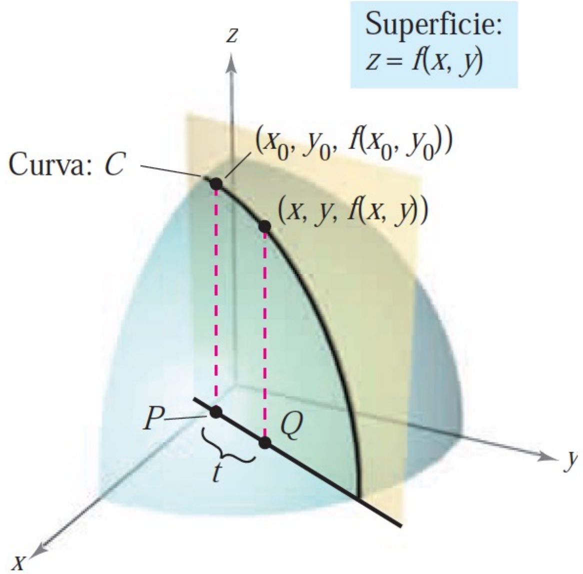


- **Derivadas direccionales y gradientes**
- Suponer que se está en la colina de la figura y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z. Si la colina está representada por $z = f(x, y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$ y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$. En este tema se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.
- Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f como se muestra en la figura. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$



Derivadas Parciales



- donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a $\boldsymbol{u}$, como se muestra en la figura. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$ en la dirección de u se define como la pendiente de la curva C en ese punto.
- De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

- Y,

$$y = y_0 + t\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Derivadas Parciales

- de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q hay un punto correspondiente en la superficie.

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \qquad \text{Punto sobre } P.$$
$$(x, y, f(x, y)) \qquad \text{Punto sobre } Q.$$

- Como la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &= \sqrt{(t\cos\theta)^2+(t\operatorname{sen}\theta)^2}\\ &= |t|\end{aligned}$$

- Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

Derivadas Parciales

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}} f$, es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

- Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite. Una fórmula "de trabajo" más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

Derivadas Parciales

TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

- DEMOSTRACION: Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ y sea $y = y_0 + t\sin\theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)\,x'(t) + f_y(x, y)\,y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

- Si $t = 0$, entonces $x = x_o$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$$

- De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$

Derivadas Parciales

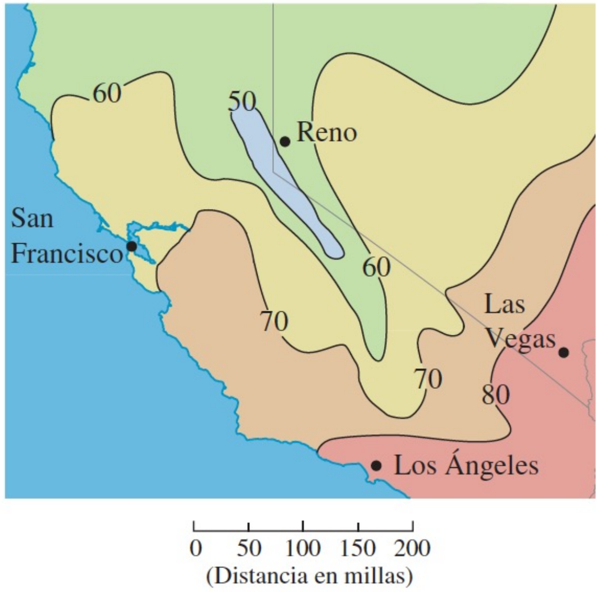
- Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por $\boldsymbol{u}$, como se muestra en la figura. Dos de éstas son las derivadas parciales
- 1. En la dirección del eje x positivo $(\theta = 0)$: $\boldsymbol{u} = \cos 0\, \boldsymbol{i} + \sin 0\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$

$$D_{\mathbf{i}}\, f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \operatorname{sen} 0 = f_x(x, y)$$

- 2. En la dirección del eje y positivo $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$: $\boldsymbol{u} = \cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$

$$D_{\mathbf{j}}\, f(x, y) = f_x(x, y) \cos\frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

Derivadas Parciales



- En el mapa del clima de la figura, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional*, que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas Parciales

- Derivadas direccionales
- Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

$$\boxed{1} \qquad f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

Derivadas Parciales

- Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\boldsymbol{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\boldsymbol{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

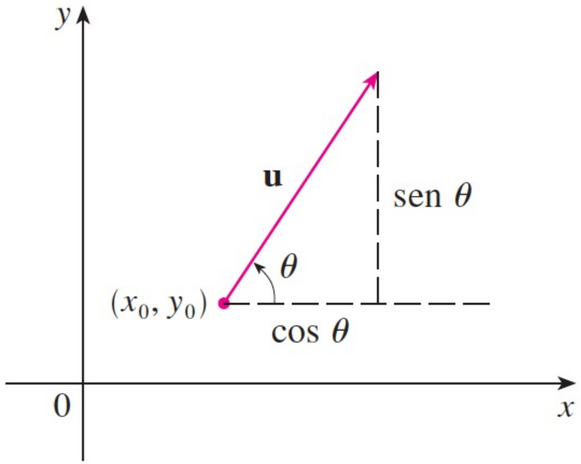
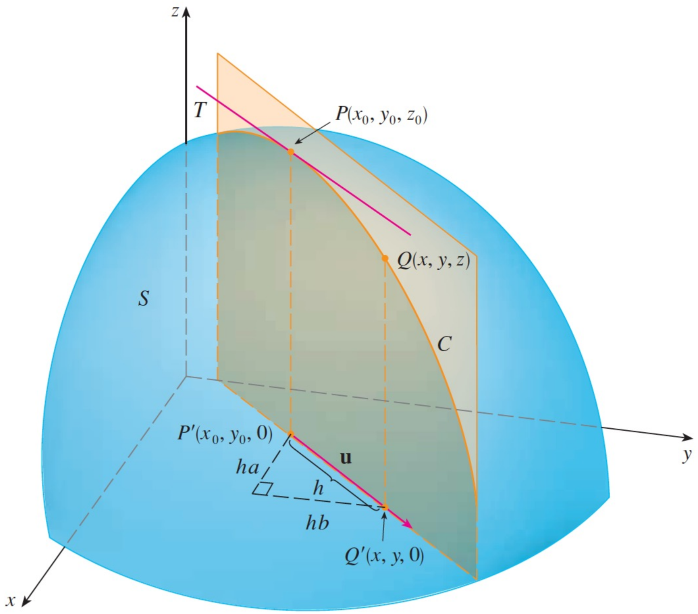


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$



Derivadas Parciales

- Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\boldsymbol{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

- para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\boldsymbol{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

Derivadas Parciales

$\boxed{2}$ **Definición** La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

- Al comparar la definición 2 con las ecuaciones 1, observamos que si $u = i = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_i f = f_x$ y si $u = j = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_j f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.