Funciones y Modelos

L. I. Igor Castañeda Quiñonez

Límites

- El concepto de límite de una sucesión ocurre cada vez que utilizamos la representación decimal de un número real. Por ejemplo, si

$$a_1 = 3.1$$
$$a_2 = 3.14$$
$$a_3 = 3.141$$
$$a_4 = 3.1415$$
$$a_5 = 3.14159$$
$$a_6 = 3.141592$$
$$a_7 = 3.1415926$$
$$\vdots$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \pi$$

Límites

Los términos de esta sucesión son aproximaciones racionales de π.

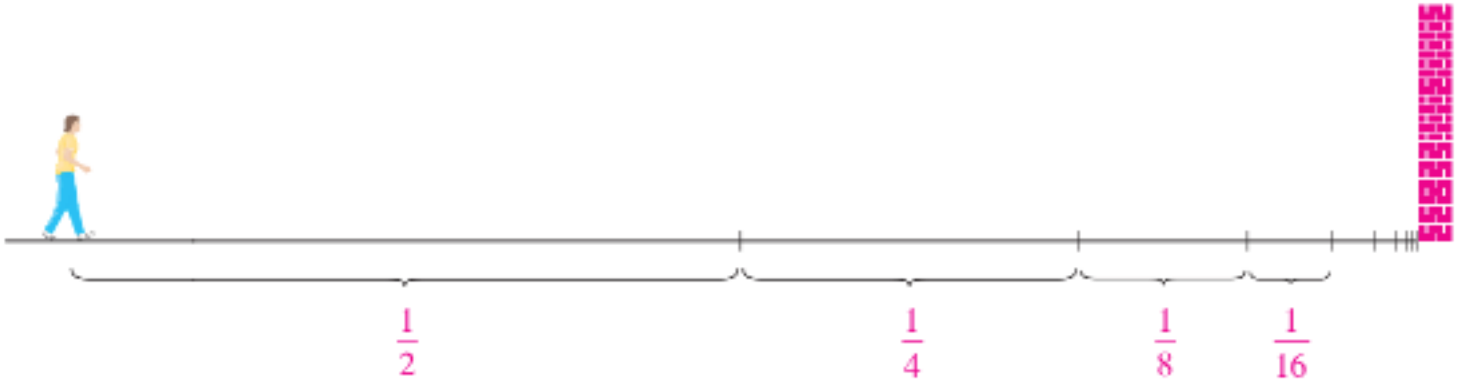
Regresemos a la paradoja de Zenón. Las posiciones sucesivas de Aquiles y la tortuga forman sucesiones $\{a_n\}$ y $\{t_n\}$, donde $a_n < t_n$ para toda n. Puede demostrarse que ambas sucesiones tienen el mismo límite

$$\lim_{n \to \infty} a_n = p = \lim_{n \to \infty} t_n$$

Es precisamente en este punto p que Aquiles alcanza a la tortuga.

Límites

- LA SUMA DE UNA SERIE
- Otra de las paradojas de Zenón, según Aristóteles, es la siguiente: “un hombre parado en una sala no puede caminar hasta la pared. Para ello, primero tendría que recorrer la mitad de la distancia, después recorrer la mitad de la distancia restante y, a continuación, recorrer la mitad de lo que falta. Este proceso puede mantenerse siempre y nunca puede ser terminado”. (Véase la figura.)



Límites

- Por supuesto, sabemos que el hombre realmente puede llegar a la pared, lo que sugiere que tal vez la distancia total puede expresarse como la suma de una infinidad de distancias cada vez más pequeñas como sigue:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

- Zenón argumentaba que no tiene sentido sumar una infinidad de números. Pero hay otras situaciones en que utilizamos implícitamente sumas infinitas. Por ejemplo, en notación decimal, el símbolo $0.\bar{3}$ = 0.3333. . . Significa

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10\,000} + \cdots$$

Límites

Más generalmente, si d_n denota el n-ésimo dígito en la representación decimal de un número, entonces

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} + \cdots$$

Por tanto, algunas sumas infinitas o series infinitas, como se les llama, tienen un significado. Pero debemos definir cuidadosamente lo que es la suma de una serie infinita.

Regresando a la serie en la ecuación 3, denotamos por s_n la suma de los n primeros términos de la serie. Por tanto,

Límites

$$s_1 = \tfrac{1}{2} = 0.5$$

$$s_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0.75$$

$$s_3 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 0.875$$

$$s_4 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 0.9375$$

$$s_5 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} = 0.96875$$

$$s_6 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} = 0.984375$$

$$s_7 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \tfrac{1}{128} = 0.9921875$$

$$\vdots$$

$$s_{10} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{1024} \approx 0.99902344$$

$$\vdots$$

$$s_{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{16}} \approx 0.99998474$$

Límites

- Observe que como le añadimos cada vez más términos, las sumas parciales parecen ser más cercanas a 1. De hecho, se puede demostrar que si n es suficientemente grande (es decir, si se suman suficientes términos de la serie), podemos aproximar la suma parcial Sn tanto como queramos al número 1. Por tanto, parece razonable decir que la suma de la serie infinita es 1 y escribir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

- En otras palabras, la razón de que la suma de la serie sea 1 es que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1$$

Funciones y Modelos

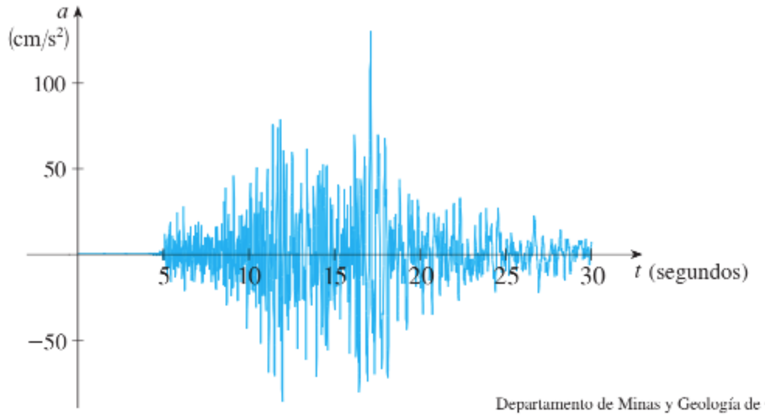
- Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:
- El área A de un círculo depende de su radio r. La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que decimos que A es una *función* de r.
- La población humana del mundo P depende del tiempo t. La tabla muestra las estimaciones de la población mundial $P(t)$ en el tiempo t, para algunos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

- Pero para cada valor del tiempo t hay un valor correspondiente de P, por lo que decimos que P es una función de t.

Funciones y Modelos

- El costo C de envío de un paquete por correo depende de su peso w. Aunque no hay alguna fórmula simple que relacione a w con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce w.
- La aceleración vertical a de suelo, medida por un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. La figura muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un determinado valor de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.



Departamento de Minas y Geología de California

Funciones y Modelos

- Cada uno de estos ejemplos describe una regla según la cual, a un número dado (r, t, w o t), se le asigna otro número (A, P, C, o a). En cada caso decimos que el segundo número es una función del primero.

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

- Usualmente consideramos funciones para los cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. Al conjunto D se le denomina dominio de la función. El número $f(x)$ es el valor de f en x y se lee "f de x". El rango de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ conforme x varía a través de todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama variable independiente. Un símbolo que representa un número en el rango de f se conoce como variable dependiente. En el ejemplo A, r es la variable independiente, y A es la variable dependiente.

Funciones y Modelos

- Es útil pensar en una función como una máquina (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, cuando x entra en la máquina, que se acepta como una entrada, la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos pensar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas, y en el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 2
Diagrama de una función f como una máquina

Funciones y Modelos

- Las funciones preprogramadas en una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, el comando raíz cuadrada en su calculadora computa esa funcion. Oprima la tecla etiquetada $\sqrt{\ }$ (o $\sqrt{x}$) e introduzca la entrada x; si $x < 0$, entonces x no esta en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparecerá una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así el comando $\sqrt{x}$ en la calculadora no es exactamente el mismo que la función matemática f definida por $f(x) = \sqrt{x}$

Funciones y Modelos

- Otra forma de imaginar una función es con un **diagrama de flechas** como en la figura. Cada flecha conecta a un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$, está asociada con a y así sucesivamente.
- El método más común para la visualización de una función es con su gráfica. Si f es una función con dominio D, entonces su **gráfica** es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

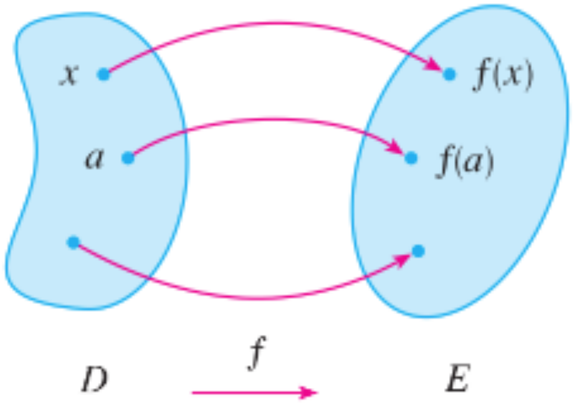


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Funciones y Modelos

- (Observe que estos son pares de entrada-salida). En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado tales que y $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.
- La gráfica de una función f nos da una imagen visual útil del comportamiento o "historia de vida" de una función. Dado que la coordenada y de cualquier punto (x, y) en el gráfico es $y = f(x)$, podemos leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica por encima del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f permite también tener una imagen visual del dominio de f en el eje x y su rango en el eje y como en la figura 5.

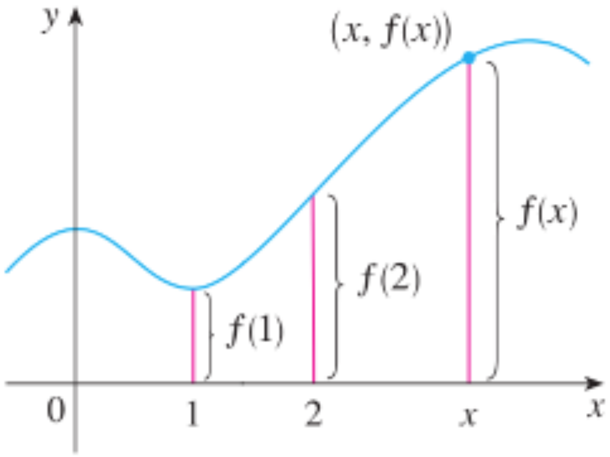


FIGURA 4

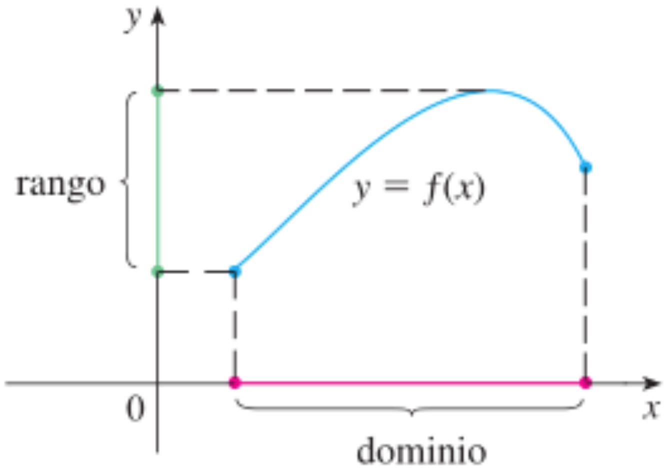


FIGURA 5