CAPÍTULO 21

Fórmulas de integración de Newton-Cotes

Las *fórmulas* de *Newton-Cotes* son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx \tag{21.1}$$

donde $f_n(x)$ = un polinomio de la forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

donde n es el grado del polinomio. Por ejemplo, en la figura 21.1*a*, se utiliza un polinomio de primer grado (una línea recta) como una aproximación. En la figura 21.1*b*, se emplea una parábola con el mismo propósito.

La integral también se puede aproximar usando un conjunto de polinomios aplicados por pedazos a la función o datos, sobre segmentos de longitud constante. Por ejemplo, en la figura 21.2, se usan tres segmentos de línea recta para aproximar la integral.

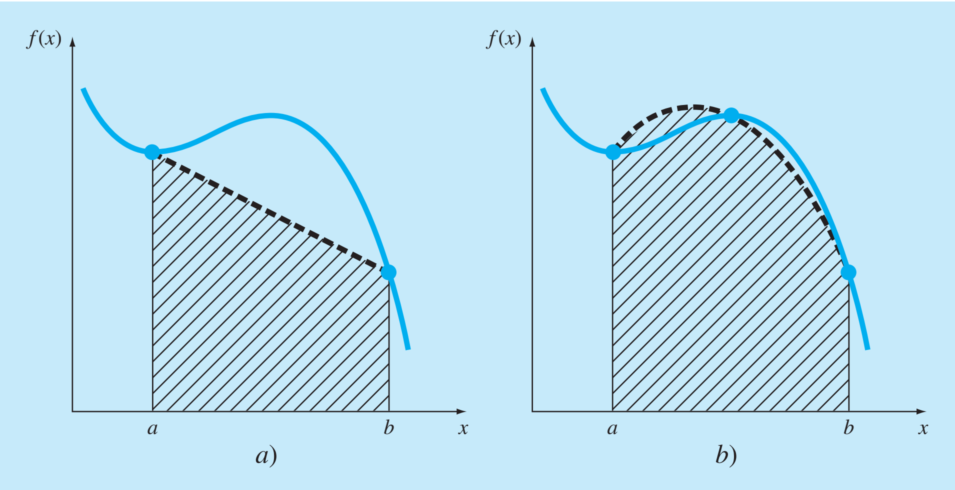


FIGURA 21.1
La aproximación de una integral mediante el área bajo *a*) una sola línea recta y *b*) una parábola.

Aunque pueden utilizarse polinomios de grado superior con los mismos propósitos. Con este antecedente, reconocemos que el "método de barras" de la figura PT6.6 emplea un conjunto de polinomios de grado cero (es decir, constantes) para aproximar la integral.

Existen formas cerradas y abiertas de las fórmulas de Newton-Cotes. Las *formas cerradas* son aquellas donde se conocen los datos al inicio y al final de los límites de integración (figura 21.3*a*). Las *formas abiertas* tienen límites de integración que se extienden más allá del intervalo de los datos (figura 21.3*b*). En este sentido, son similares a la extrapolación que se analizó en la sección 18.5. Por lo general, las formas abiertas de Newton-Cotes no se usan para integración definida. Sin embargo, se utilizan para evaluar

FIGURA 21.2
La aproximación de una integral mediante el área bajo tres segmentos de línea recta.

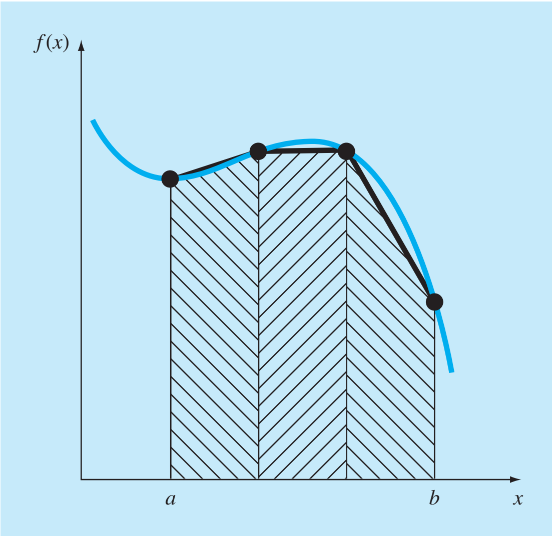
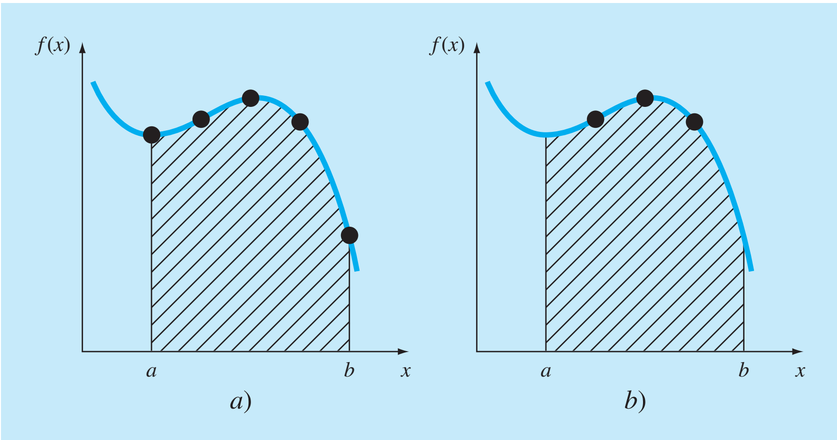


FIGURA 21.3
La diferencia entre las fórmulas de integración *a*) cerradas y *b*) abiertas.



integrales impropias y para obtener la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Este capítulo enfatiza las formas cerradas. No obstante, al final del mismo se presenta brevemente una introducción a las fórmulas abiertas de Newton-Cotes.

21.1 LA REGLA DEL TRAPECIO

La *regla del trapecio* es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton-Cotes. Corresponde al caso donde el polinomio de la ecuación (21.1) es de primer grado:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

Recuerde del capítulo 18 que una línea recta se puede representar como [véase ecuación (18.2)]

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{21.2}$$

El área bajo esta línea recta es una aproximación de la integral de $f(x)$ entre los límites a y b:

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right] dx$$

El resultado de la integración (véase el cuadro 21.1 para detalles) es

$$\boxed{I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}} \tag{21.3}$$

que se denomina *regla del trapecio.*

Cuadro 21.1 Obtención de la regla del trapecio

Antes de la integración, la ecuación (21.2) se puede expresar como

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a}$$

Agrupando los últimos dos términos:

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a}$$

o

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

la cual puede integrarse entre $x = a$ y $x = b$ para obtener:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}x\Big|_a^b$$

Este resultado se evalúa para dar:

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}(b - a)$$

Ahora, como $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$,

$$I = [f(b) - f(a)]\frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

Multiplicando y agrupando términos se tiene:

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

que es la fórmula para la regla del trapecio.

Geométricamente, la regla del trapecio es equivalente a aproximar el área del trapecio bajo la línea recta que une $f(a)$ y $f(b)$ en la figura 21.4. Recuerde que la fórmula para calcular el área de un trapezoide es la altura por el promedio de las bases (figura 21.5*a*). En nuestro caso, el concepto es el mismo, pero el trapezoide está sobre su lado (figura 21.5*b*). Por lo tanto, la integral aproximada se representa como

$$I \cong \text{ancho} \times \text{altura promedio} \tag{21.4}$$

FIGURA 21.4
Representación gráfica de la regla del trapecio.

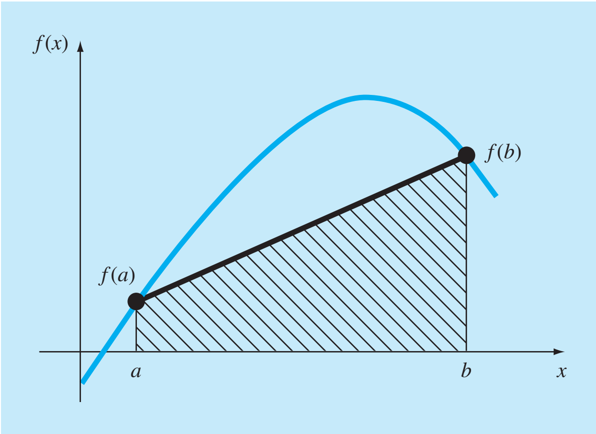
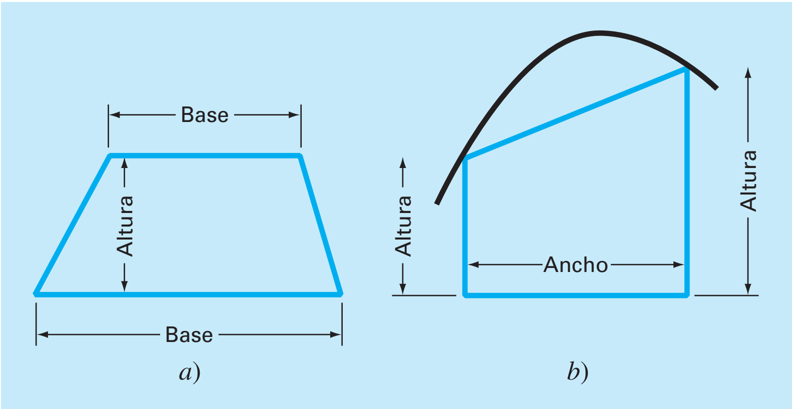


FIGURA 21.5
a) La fórmula para calcular el área de un trapezoide: altura por el promedio de las bases. *b*) Para la regla del trapecio, el concepto es el mismo pero ahora el trapezoide está sobre su lado.



o

$$I \cong (b - a) \times \text{altura promedio} \tag{21.5}$$

donde, para la regla del trapecio, la altura promedio es el promedio de los valores de la función en los puntos extremos, o $[f(a) + f(b)]/2$.

Todas las fórmulas cerradas de Newton-Cotes se expresan en la forma general de la ecuación (21.5). De hecho, sólo difieren respecto a la formulación de la altura promedio.

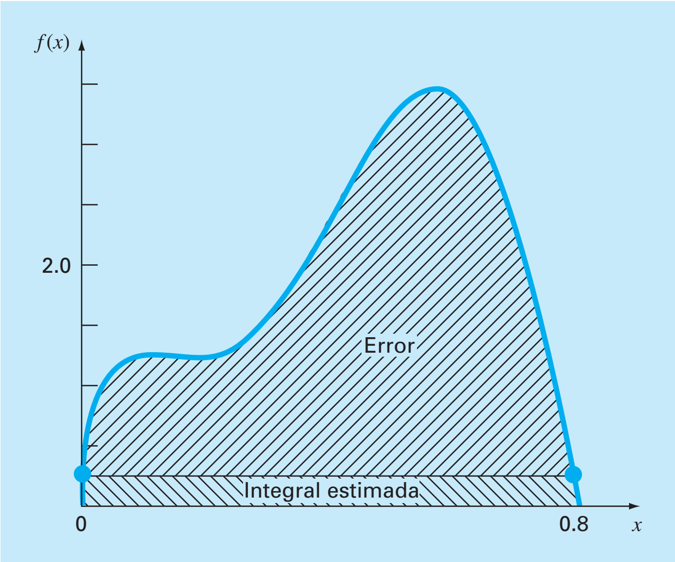
21.1.1 Error de la regla del trapecio

Cuando empleamos la integral bajo un segmento de línea recta para aproximar la integral bajo una curva, obviamente se tiene un error que puede ser importante (figura 21.6). Una estimación al error de truncamiento local para una sola aplicación de la regla del trapecio es (cuadro 21.2)

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b - a)^3 \tag{21.6}$$

donde ξ está en algún lugar en el intervalo de a a b. La ecuación (21.6) indica que si la función sujeta a integración es lineal, la regla del trapecio será exacta. De otra manera, para funciones con derivadas de segundo orden y de orden superior (es decir, con curvatura), puede ocurrir algún error.

FIGURA 21.6
Representación gráfica del empleo de una sola aplicación de la regla del trapecio para aproximar la integral de $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ de $x = 0$ a 0.8.



Cuadro 21.2 Obtención y error estimado de la regla del trapecio

Una manera alternativa para obtener la regla del trapecio consiste en integrar el polinomio de interpolación hacia adelante de Newton-Gregory. Recuerde que para la versión de primer grado con el término del error, la integral será (cuadro 18.2)

$$I = \int_a^b \left[f(a) + \Delta f(a)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 \right] dx \qquad \text{(C21.2.1)}$$

Para simplificar el análisis, considere que si $\alpha = (x - a)/h$, entonces

$$dx = h\, d\alpha$$

Debido a que $h = b - a$ (para un segmento de la regla del trapecio), los límites de integración a y b corresponden a 0 y 1, respectivamente. Por lo tanto, la ecuación (C21.2.1) se expresará como

$$I = h\int_0^1 \left[f(a) + \Delta f(a)\alpha + \frac{f''(\xi)}{2}\alpha(\alpha-1)h^2 \right] d\alpha$$

Si se supone que para una h pequeña, el término $f''(\xi)$ es aproximadamente constante, entonces el resultado de la integración es:

$$I = h\left[\alpha\, f(a) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(a) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4} \right) f''(\xi)h^2 \right]_0^1$$

y tomando los límites de integración

$$I = h = \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{12} f''(\xi)h^3$$

Como $\Delta f(a) = f(b) - f(a)$, el resultado puede escribirse como

$$I = \underbrace{h = \frac{f(a) + f(b)}{2}}_{\text{Regla del trapecio}} \underbrace{- \frac{1}{12} f''(\xi)h^3}_{\text{Error de truncamiento}}$$

Así, el primer término es la regla del trapecio y el segundo es una aproximación para el error.

EJEMPLO 21.1 Aplicación simple de la regla del trapecio

Planteamiento del problema. Con la ecuación (21.3) integre numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

desde $a = 0$ hasta $b = 0.8$. Recuerde de la sección PT6.2 que el valor exacto de la integral se puede determinar en forma analítica y es 1.640533.

Solución. Al evaluar la función en los límites

$$f(0) = 0.2$$

$$f(0.8) = 0.232$$

sustituyendo en la ecuación (21.3) se tiene

$$I \cong 0.8\,\frac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$$

la cual representa un error de

$$E_t = 1.640533 - 0.1728 = 1.467733$$

que corresponde a un error relativo porcentual de $\varepsilon_t = 89.5\%$. La razón de este error tan grande es evidente en la gráfica de la figura 21.6. Observe que el área bajo la línea recta no toma en cuenta una porción significativa de la integral que está por encima de la línea.

En situaciones reales, tal vez no conozcamos previamente el valor verdadero. Por lo tanto, se requiere una estimación del error aproximado. Para obtener dicha estimación se calcula la segunda derivada de la función en el intervalo, derivando dos veces la función original:

$$f''(x) = -400 + 4\,050x - 10\,800x^2 + 8\,000x^3$$

El valor promedio de la segunda derivada se calcula mediante la ecuación (PT6.4):

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_0^{0.8} (-400 + 4\,050x - 10\,800x^2 + 8\,000x^3)\,dx}{0.8 - 0} = -60$$

que se sustituye en la ecuación (21.6) y el resultado es

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60(0.8)^3 = 2.56$$

que es del mismo orden de magnitud y signo que el error verdadero. Sin embargo, de hecho, existe una discrepancia, ya que en un intervalo de este tamaño, el promedio de la segunda derivada no es necesariamente una aproximación exacta de $f''(\xi)$. Así, indicamos que el error es aproximado mediante la notación E_a, y no exacto usando E_t.

21.1.2 La regla del trapecio de aplicación múltiple

Una forma de mejorar la precisión de la regla del trapecio consiste en dividir el intervalo de integración de a a b en varios segmentos, y aplicar el método a cada uno de ellos (figura 21.7). Las áreas de los segmentos se suman después para obtener la integral en todo el intervalo. Las ecuaciones resultantes se llaman *fórmulas de integración*, *de aplicación múltiple* o *compuestas.*

La figura 21.8 muestra el formato general y la nomenclatura que usaremos para obtener integrales de aplicación múltiple. Hay $n + 1$ puntos igualmente espaciados $(x_0, x_1, x_2,..., x_n)$. En consecuencia, existen n segmentos del mismo ancho:

$$h = \frac{b - a}{n} \tag{21.7}$$

Si a y b se designan como x_0 y x_n, respectivamente, la integral completa se representará como

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

Sustituyendo la regla del trapecio en cada integral se obtiene

$$I = h\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \tag{21.8}$$

o, agrupando términos,

$$I = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{21.9}$$

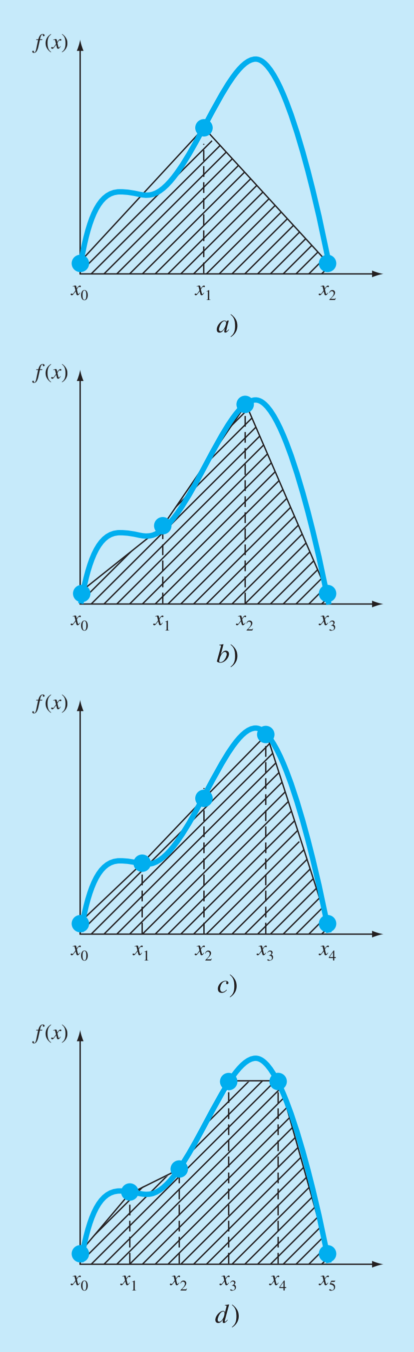


FIGURA 21.7
Ilustración de la regla del trapecio de aplicación múltiple. *a*) Dos segmentos, *b*) tres segmentos, *c*) cuatro segmentos y *d*) cinco segmentos.

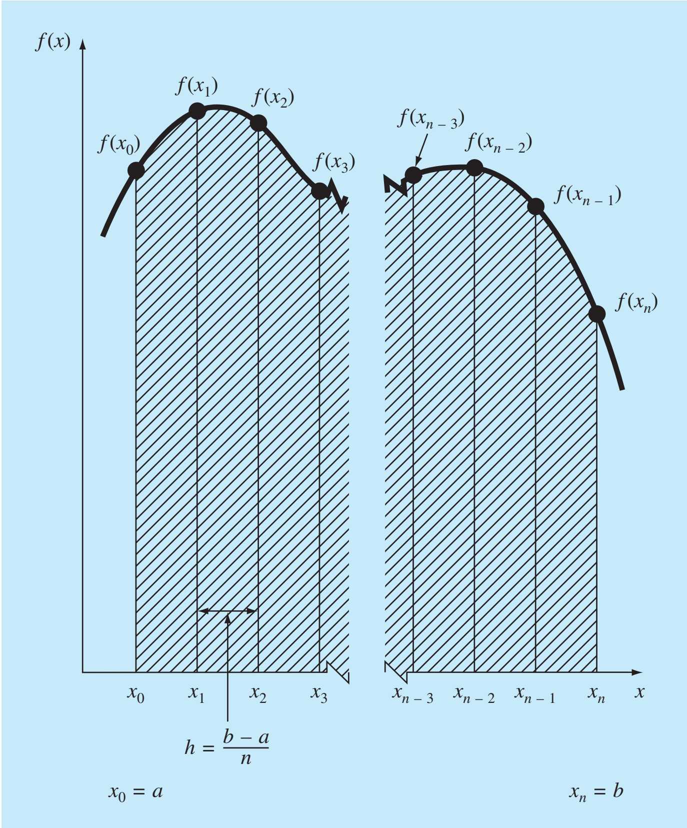


FIGURA 21.8
Formato general y nomenclatura para integrales de aplicación múltiple.

o, usando la ecuación (21.7) para expresar la ecuación (21.9) en la forma general de la ecuación (21.5),

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Ancho}} \underbrace{\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n}}_{\text{Altura promedio}} \tag{21.10}$$

Como la sumatoria de los coeficientes de $f(x)$ en el numerador dividido entre $2n$ es igual a 1, la altura promedio representa un promedio ponderado de los valores de la función. De acuerdo con la ecuación (21.10), a los puntos interiores se les da el doble de peso que a los dos puntos extremos $f(x_0)$ y $f(x_n)$.

Se tiene un error con la regla del trapecio de aplicación múltiple al sumar los errores individuales de cada segmento, así

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \tag{21.11}$$