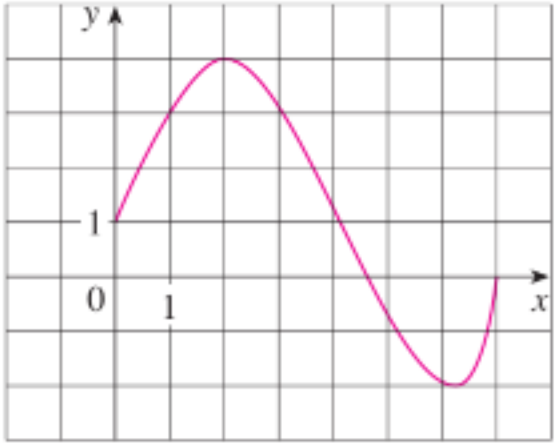
Funciones y Modelos

L. I. Igor Castañeda Quiñonez

Funciones y Modelos

- La gráfica de una función f se muestra en la figura 6.
- a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$
- b) ¿Cuál es el dominio y el rango de f?



Funciones y Modelos

- A) De la figura 6 vemos que el punto (1, 3) está en la gráfica de f, por lo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto en la gráfica que se encuentra por encima de $x = 1$ está 3 unidades por encima del eje x).
- Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra aproximadamente a 0.7 unidades por debajo del eje x, así que estimamos que $f(5) \approx -0.7$.

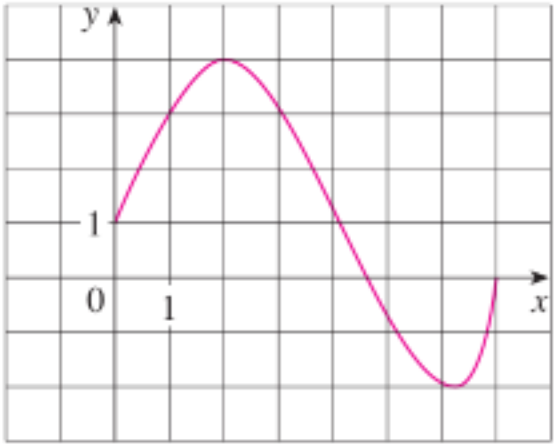


FIGURA 6

Funciones y Modelos

- B) Vemos que $f(x)$ está definida cuando $0 \leq x \leq 7$, por lo que el dominio de f es el intervalo cerrado [0, 7]. Observe que f toma todos los valores de -2 a 4, así que el rango de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$

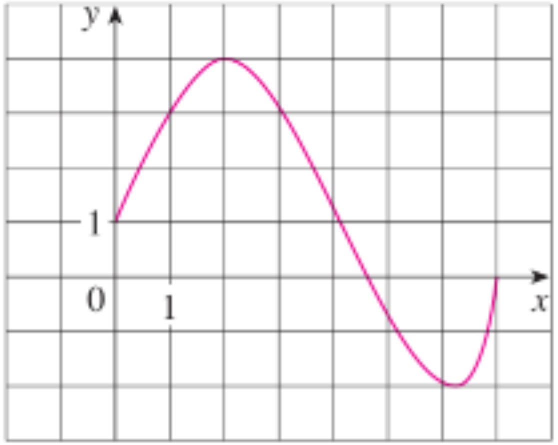


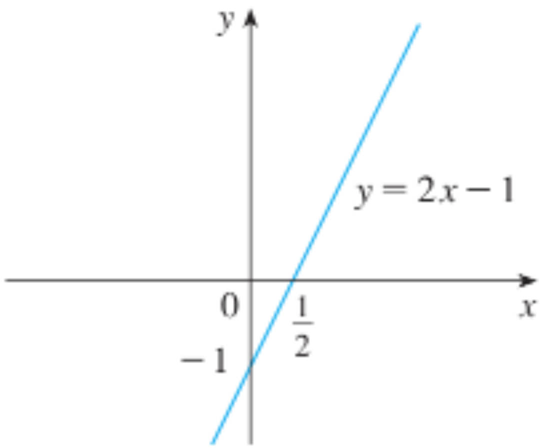
FIGURA 6

Funciones y Modelos

- Trace la gráfica y encuentre el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones:
- A) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = x^2$

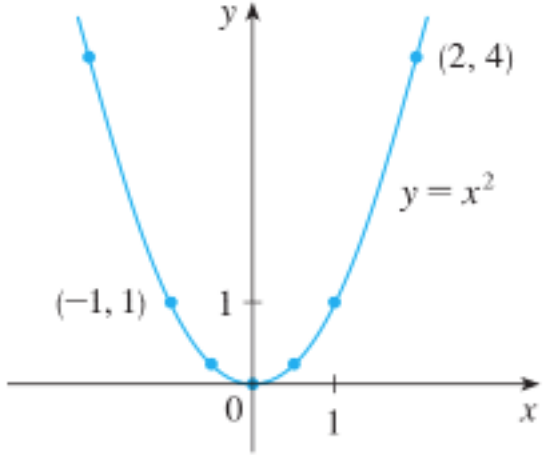
Funciones y Modelos

- La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y representa la ecuación de una recta con pendiente 2 e intersección con el eje y en $y = -1$ (recuerde que la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta es $y = mx + b$. Esto nos permite dibujar la porción de la gráfica de f en la figura . La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, así que el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. La gráfica muestra que el rango también es $\mathbb{R}$.



Funciones y Modelos

- B) Dado que $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1^2) = 1$, podemos ubicar los puntos (2, 4) y (-1, 1) junto con algunos otros puntos de la gráfica, y después unirlos para obtener la gráfica. La ecuación de la gráfica es $y = x^2$ y representa una parábola. El dominio de g es $\mathbb{R}$, y el rango consiste en todos los valores de $g(x)$, esto es, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geq 0$ para todos los números x, y todo número y en estas condiciones es positivo, así que el rango de g es $\{y|y \geq 0\} = [0, \infty)$. Esto puede verse en la figura.



Funciones y Modelos

- Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evalue $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Primero evaluamos $f(a+h)$ reemplazando x por $a+h$ en la expresion para $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 \end{aligned}$$

Funciones y Modelos

- Después sustituimos en la expresión dada y simplificamos:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(2a^2+4ah+2h^2-5a-5h+1)-(2a^2-5a+1)}{h}$$

$$= \frac{2a^2+4ah+2h^2-5a-5h+1-2a^2+5a-1}{h}$$

$$= \frac{4ah+2h^2-5h}{h} = 4a+2h-5$$

- La expresion $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se llama cociente de diferencias y se presenta frecuentemente en el calculo. Representa la razon de cambio de $f(x)$ entre $x=a$ y $x=a+h$.

Funciones y Modelos

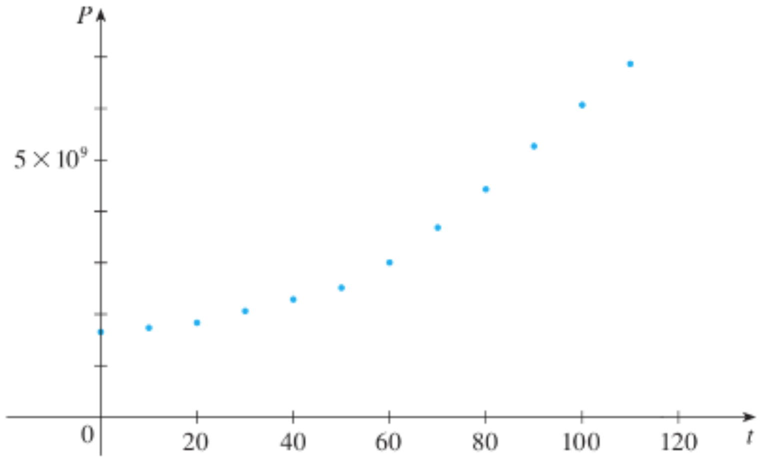
- REPRESENTACIONES DE FUNCIONES
- Hay cuatro posibles maneras de representar una función:
- ■ Verbalmente (por una descripción en palabras)
- ■ Numéricamente (por una tabla de valores)
- ■ Visualmente (por una gráfica)
- ■ Algebraicamente (por una fórmula explícita)
- Si una función puede representarse de las cuatro maneras, con frecuencia es muy útil pasar de una representación a otra a fin de disponer de información adicional de la función. (En el ejemplo 2, empezamos con formas algebraicas y de ellas obtuvimos gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más naturalmente por una forma que por otra.

Funciones y Modelos

- La representación probablemente más útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores para esbozar una gráfica (la mitad de una parábola). Debido a que un círculo tiene un radio positivo, el dominio es $\{r|r > 0\} = (0, \infty)$, y el rango $(0, \infty)$.

- Se nos da una descripción de la función en palabras: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. Vamos a medir t, así que $t = 0$ se corresponde con el año 1900. La tabla de valores de la población mundial proporciona una representación adecuada de esta función. Si se grafican estos valores, obtenemos la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) en la figura. También es una representación útil porque la gráfica nos permite disponer de todos los datos a la vez. ¿Qué pasa con una fórmula? Por supuesto, es imposible concebir una fórmula explícita que proporcione la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible encontrar una expresión para una función que se aproxime a $P(t)$.

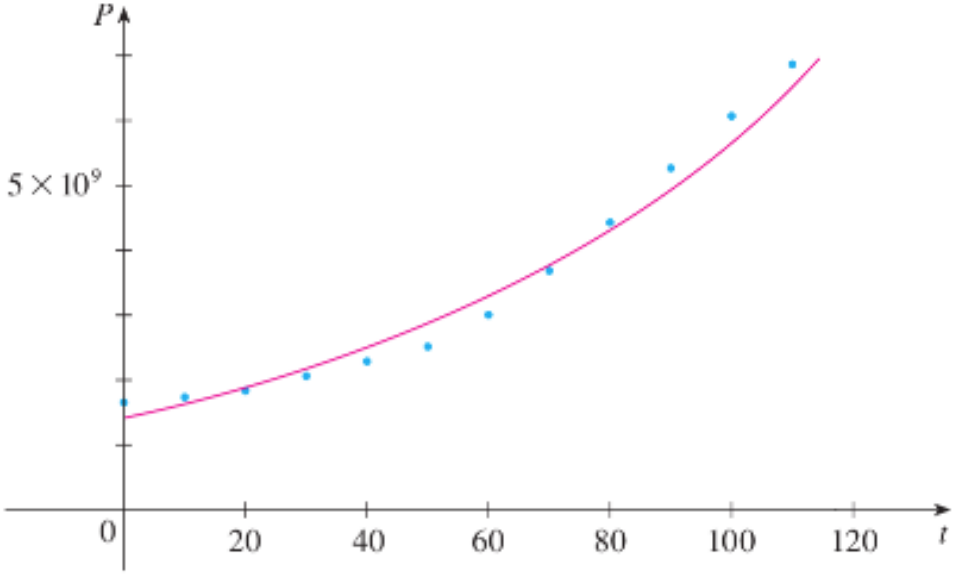
t	Población (millones)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870



$$P(t) \approx f(t) = (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

Funciones y Modelos

- La figura 10 muestra que es un “ajuste” razonablemente bueno. La función f se llama modelo matemático para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que aproxima el comportamiento de nuestra función dada. Sin embargo, veremos que las ideas del Cálculo también pueden aplicarse a una tabla de valores; una fórmula explícita no es necesaria.



Funciones y Modelos

- La función P es típica de aquellas que surgen cuando se intenta aplicar el Cálculo en el mundo real. Comenzamos con una descripción verbal de una función. A continuación, debemos ser capaces de elaborar una tabla de valores de la función; tal vez de lecturas del instrumento en un experimento científico. A pesar de que no tenemos un conocimiento completo de los valores de la función, veremos a lo largo del curso que todavía es posible realizar las operaciones del Cálculo con dicha función.
- Nuevamente la función se describe con palabras: sea $C(w)$ el costo de envío por correo de un paquete con peso w. La regla que el Servicio Postal de EU utiliza desde 2010 es la siguiente: el costo es de 88 centavos de dólar para paquetes hasta de 1 onza, más 17 centavos por cada onza adicional (o menos) hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestran en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible esbozar una gráfica.

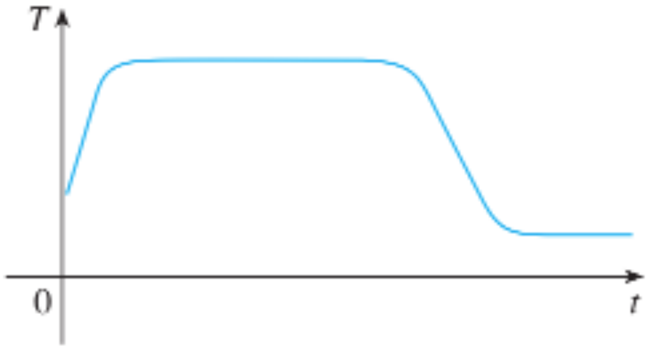
w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.88
$1 < w \leq 2$	1.05
$2 < w \leq 3$	1.22
$3 < w \leq 4$	1.39
$4 < w \leq 5$	1.56
$\vdots$	$\vdots$

Funciones y Modelos

- Al abrir un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado saliendo el agua. Dibuje un esbozo de gráfica de T como una función del tiempo t que ha transcurrido desde que fue abierto el grifo.

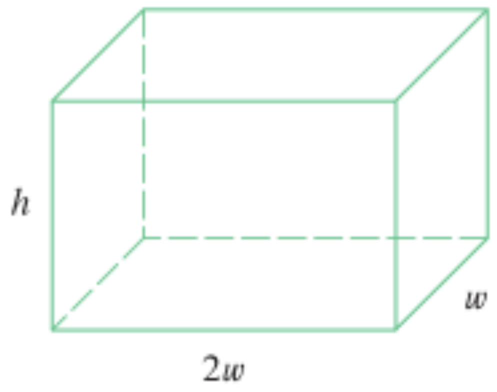
Funciones y Modelos

- La temperatura inicial del agua corriente es cercana a la temperatura ambiente porque el agua ha permanecido en las tuberías. Cuando empieza a salir el agua desde el tanque de agua caliente, T aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua caliente en el tanque. Cuando el tanque se drena, T disminuye hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto nos permite hacer el esbozo de T en función de t en la figura 11.



Funciones y Modelos

- El siguiente ejemplo inicia con una descripción verbal de una función en una situación física, y hay que obtener una fórmula algebraica explícita. La capacidad para hacer esto es una habilidad útil para resolver problemas de Cálculo en los que se piden los valores máximo o mínimo de cantidades.
- Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de $10m^3$. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales como una función del ancho de la base.



Funciones y Modelos

- Dibujamos un diagrama como el de la figura e introducimos la notación w y $2w$ para el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h para la altura. El área de la base es $w(2w) = 2w^2$, por lo que el costo en dólares de los materiales para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen área wh, y los otros dos tienen área $2wh$, por lo que el costo de los materiales para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. El costo total es, por tanto,

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

- Para expresar C sólo como una función de w, necesitamos eliminar h y para hacerlo utilizamos el hecho de que el volumen es de $10m^3$. Por tanto,

$$w(2w)h = 10$$

- Esto da,

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Funciones y Modelos

- Sustituyendo en la expresión para C, tenemos

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

- Por tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

- expresa C como una función de w.

Funciones y Modelos

- Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Funciones y Modelos

- a) Debido a que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como un número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geq 0$. Esto es equivalente a $x \geq -2$, por lo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.
- B) como

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

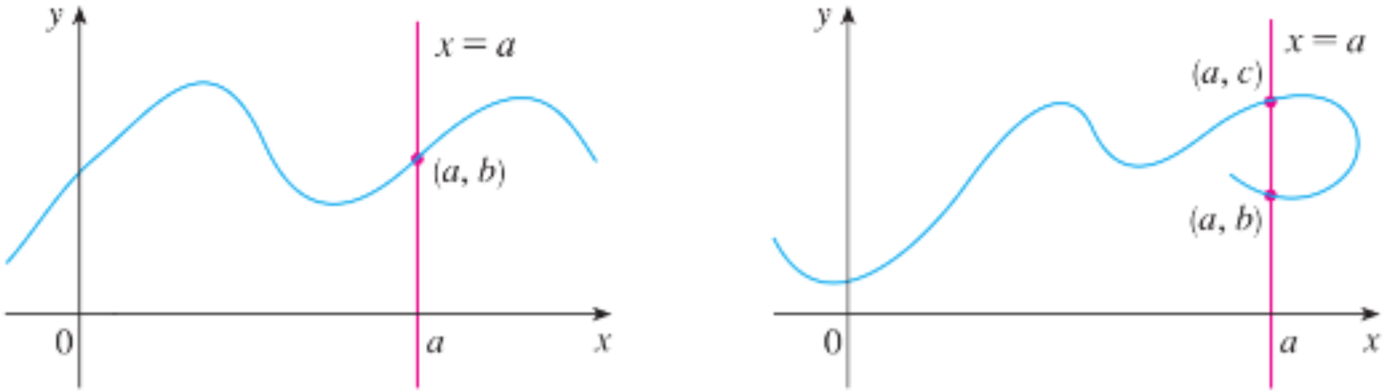
y no se permite la división entre 0, vemos que $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

- que también puede escribirse en notación de intervalos como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

Funciones y Modelos



- La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esta pregunta se contesta con la siguiente prueba.

La prueba de la vertical Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si no hay recta vertical que intercepte la curva más de una vez.

- La razón de la validez de la prueba de la vertical puede verse en la figura 13. Si cada recta vertical $x = a$ intercepta una curva sólo una vez, en (a, b), entonces se define exactamente un valor funcional para $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ intercepta la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), entonces la curva no puede representar una función debido a que una función no puede asignar dos valores diferentes de a.

Funciones y Modelos

- Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que se muestra en la figura 14 a) no es la gráfica de una función de x porque, como puede ver, hay rectas verticales que intersectan a la parábola dos veces. La parábola, sin embargo, contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Note que la ecuación $x = y^2 - 2$ implica que $y^2 = x + 2$, así que $y = \pm\sqrt{x+2}$. Por tanto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = -\sqrt{x+2}$ (veanse las figuras 14 b y c). Si invertimos los roles de x y y, entonces la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define a x como una función de y (con y como la variable independiente y x como la variable dependiente), y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función de h.

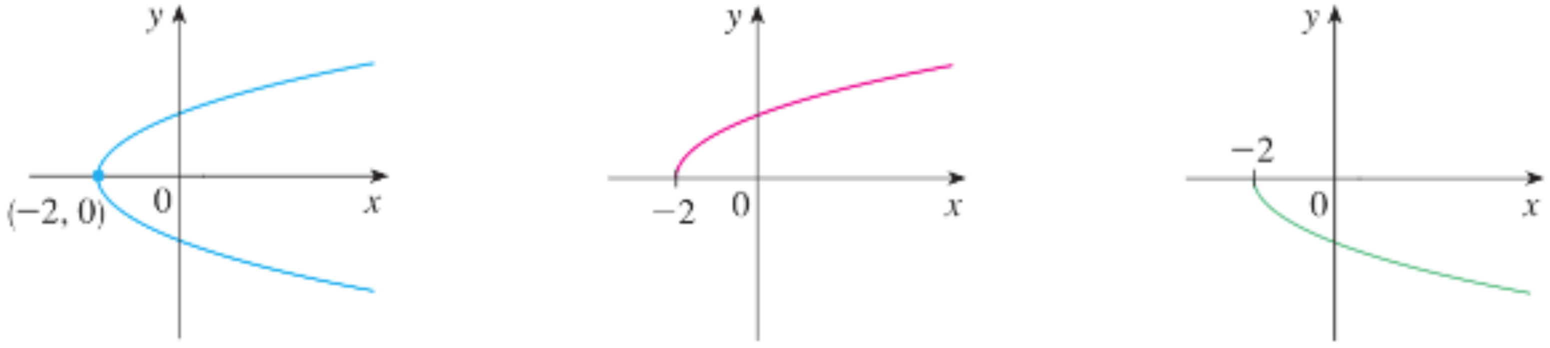
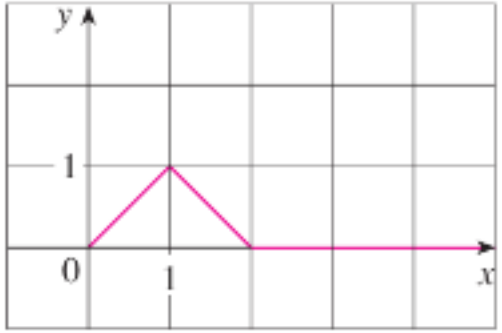


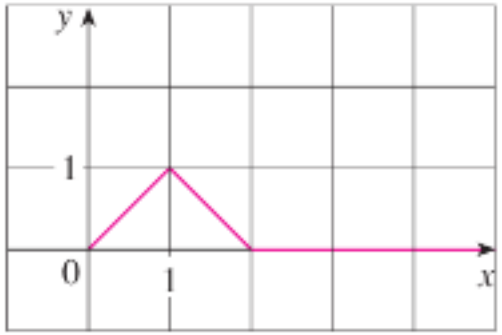
FIGURA 14 a) $x = y^2 - 2$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = -\sqrt{x+2}$

Funciones y Modelos

- Encuentre una fórmula para la función f graficada en la figura.



Modelos y Funciones



- La recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$ tiene pendiente $m = 1$ e intersección con el eje y en $b = 0$, por lo que su ecuación es $y = x$. Así, por la parte de la gráfica de f que une a $(0, 0)$ con $(1, 1)$, tenemos

$$f(x) = x \qquad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

- La recta que une a $(1, 1)$ y $(2, 0)$ tiene pendiente $m = -1$, por lo que su forma punto pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \text{ o bien } y = 2 - x$$

- Así tenemos

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si } 1 < x \leqslant 2$$

Forma Punto – Pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- También vemos que la gráfica de f coincide con el eje x para $x > 2$. Reuniendo esta información, tenemos la siguiente fórmula en tres secciones para f:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

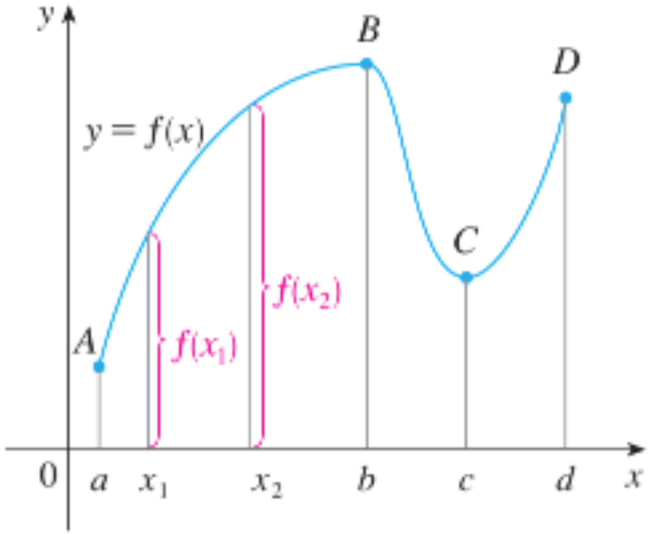
Funciones y Modelos

- **SIMETRÍA**
- Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio, entonces f es una **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica respecto al eje

Funciones y Modelos



- FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES
- La gráfica que se muestra en la figura sube desde A hasta B, desciende de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, decreciente Sobre $[b, c]$ y creciente nuevamente sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números entre a y b con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Utilizamos esta propiedad para definir una función creciente.

Una función f se llama *creciente* sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Funciones y Modelos

- En la definición de una función creciente, es importante darse cuenta de que la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ debe cumplirse para todo par de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.
- Podemos ver en la figura que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.