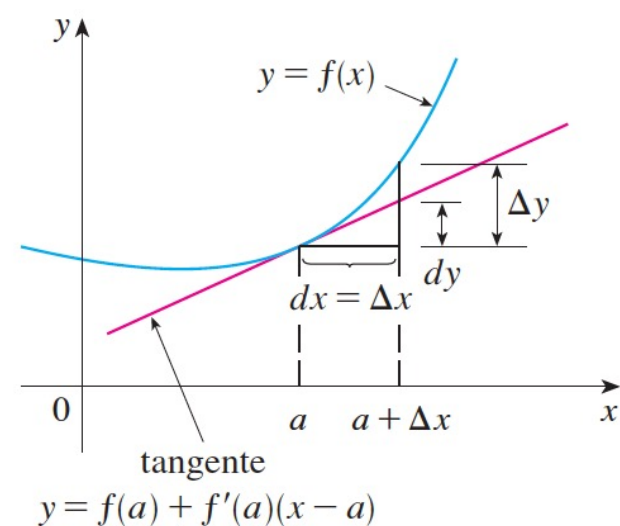


# Matemáticas para Ingeniería I

MCCT Igor Castañeda Quiñonez

# Derivadas Parciales



## ► Diferenciales

- En el caso de una función derivable de una variable,  $y = f(x)$ , definimos la diferencial  $dx$  como una variable independiente; es decir,  $dx$  puede tener el valor de cualquier número real. La diferencial de  $y$  se define entonces como

9

$$dy = f'(x)dx$$

- En la figura se muestra la relación entre el incremento  $\Delta y$  y la diferencial  $dy$ :  $\Delta y$  representa el cambio en altura de la curva  $y = f(x)$  y  $dy$  representa el cambio en altura de la tangente cuando  $x$  cambia una cantidad  $dx = \Delta x$ .
- En el caso de una función diferenciable de dos variables,  $z = f(x, y)$ , definimos las **diferenciales**  $dx$  y  $dy$  como variables independientes; es decir, pueden tomar cualquier valor. Entonces, la **diferencial**  $dz$ , también conocida como **diferencial total**, se define como

10

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

# Derivadas Parciales

- (Compare con la ecuación 9.) Algunas veces se usa la notación  $df$  en lugar de  $dz$ . Si tomamos  $dx = \Delta x = x - a$  y  $dy = \Delta y = y - b$  de la ecuación 10, entonces la diferencial de  $z$  es

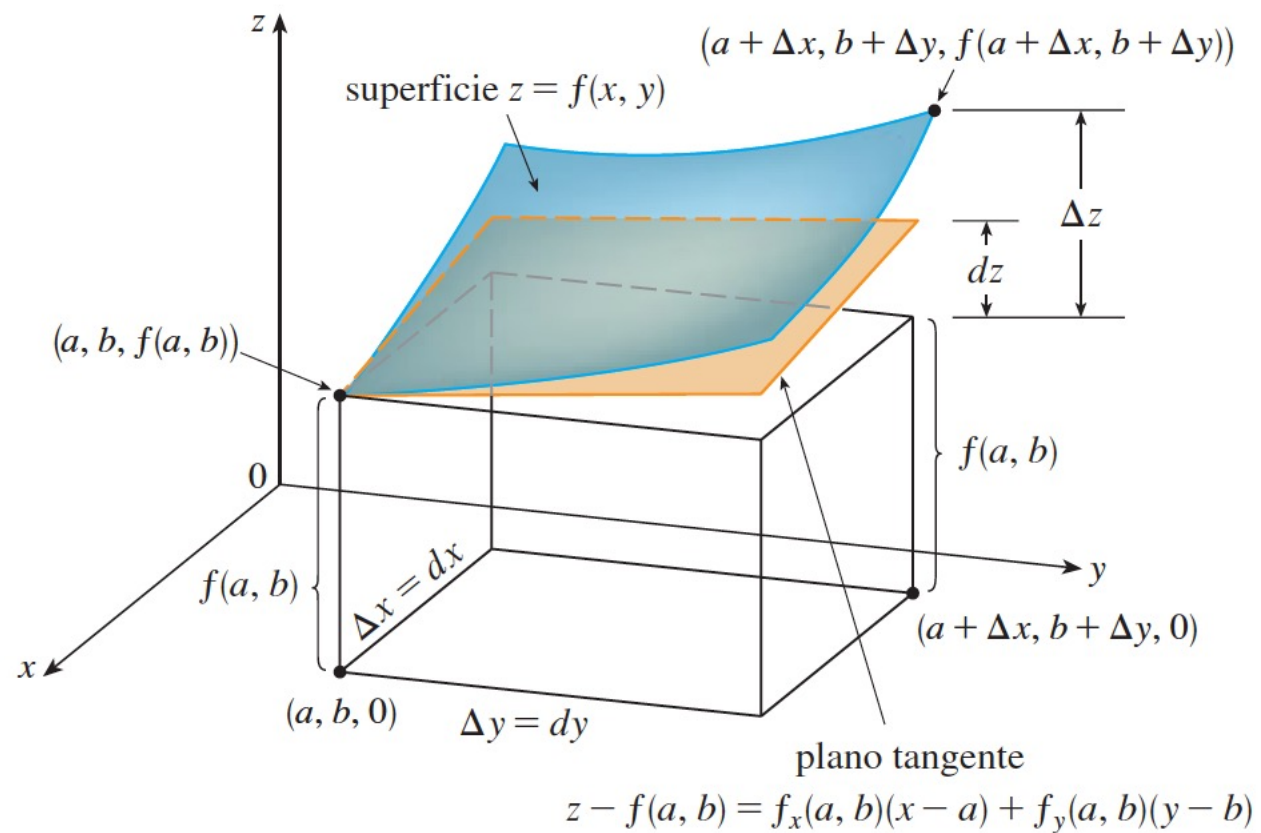
$$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

- De este modo, en la notación de diferenciales, la aproximación lineal (Ecuación 4) se puede escribir como

$$f(x, y) \approx f(a, b) + dz$$

- La figura es el equivalente tridimensional de la figura anterior y en ella se muestra la interpretación geométrica de la diferencial  $dz$  y del incremento  $\Delta z$ :  $dz$  representa el cambio en altura del plano tangente, y  $\Delta z$  representa el cambio en la altura de la superficie  $z = f(x, y)$  cuando  $(x, y)$  pasa de  $(a, b)$  a  $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ .

# Derivadas Parciales



# Derivadas Parciales

► EJEMPLO:

- a) Si  $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ , determine la diferencial  $dz$ .
- b) Si  $x$  cambia de 2 a 2.05 y  $y$  pasa de 3 a 2.96, compare los valores de  $\Delta z$  y  $dz$ .

► SOLUCION:

- a) La definición 10 da

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (2x + 3y) dx + (3x - 2y) dy$$

- b) Si hacemos  $x = 2, dx = \Delta x = 0.05, y = 3, dy = \Delta y = -0.04$ , obtenemos

$$dz = [2(2) + 3(3)]0.05 + [3(2) - 2(3)](-0.04) = 0.65$$

# Derivadas Parciales

- El incremento de  $z$  es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(2.05, 2.96) - f(2, 3) \\ &= [(2.05)^2 + 3(2.05)(2.96) - (2.96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= 0.6449\end{aligned}$$

- Observemos que  $\Delta z \approx dz$  pero  $dz$  es más fácil de calcular.

# Derivadas Parciales

- **EJEMPLO:** El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden  $10\text{ cm}$  y  $25\text{ cm}$ , respectivamente, con un posible error en la medición de  $0.1\text{ cm}$  en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el máximo error en el volumen calculado del cono.

- El volumen  $V$  de un cono de radio en la base  $r$  y altura  $h$  es  $V = \pi r^2 h / 3$ .

- **SOLUCION:** la diferencial de  $V$  es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

- Puesto que cada error es de  $0.1\text{ cm}$  como máximo, tenemos  $|\Delta r| \leq 0.1$ ,  $|\Delta h| \leq 0.1$ . Para estimar el error más grande en el volumen, tomamos el error más grande en la medición de  $r$  y de  $h$ , entonces  $dr = 0.1$  y  $dh = 0.1$  junto con  $r = 10$ ,  $h = 25$ . Esto da

$$dV = \frac{500\pi}{3} (0.1) + \frac{100\pi}{3} (0.1) = 20\pi$$

- Por lo tanto, el error máximo en el volumen calculado es de casi  $20\pi\text{ cm}^3 \approx 63\text{ cm}^3$ .

# Derivadas Parciales

- Incrementos y diferenciales
- En este tema se generalizan los conceptos de incrementos y diferenciales a funciones de dos o más variables. Dado  $y = f(x)$  se definió la diferencial de  $y$  como
$$dy = f'(x) dx.$$
- Terminología similar se usa para una función de dos variables,  $z = f(x, y)$ . Es decir,  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son los incrementos en  $x$  y en  $y$ , y el incremento en  $z$  está dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Incremento en  $z$ .



# Derivadas Parciales

## DEFINICIÓN DE DIFERENCIAL TOTAL

Si  $z = f(x, y)$  y  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son los incrementos en  $x$  y en  $y$ , entonces las **diferenciales** de las variables independientes  $x$  y  $y$  son

$$dx = \Delta x \quad \text{y} \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente  $z$  es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

- Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, si  $w = f(x, y, z, u)$  entonces  $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z, du = \Delta u$  y la diferencial total de  $w$  es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du.$$

# Derivadas Parciales

- ▶ **EJEMPLO:** Hallar la diferencial total
- ▶ Hallar la diferencial total de cada función.

$$\text{a) } z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2 y^2 \qquad \text{b) } w = x^2 + y^2 + z^2$$

- ▶ **SOLUCION:**

- ▶ A) La diferencial total  $dz$  de  $z = 2x \sin y - 3x^2 y^2$  es

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2) dx + (2x \cos y - 6x^2 y) dy. \end{aligned}$$

Diferencial total  $dz$ .

- ▶ B) La diferencial total  $dw$  de  $w = x^2 + y^2 + z^2$  es

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \\ &= 2x dx + 2y dy + 2z dz. \end{aligned}$$

Diferencial total  $dw$ .

# Derivadas Parciales

- ▶ DIFERENCIABILIDAD.
- ▶ si una función dada por  $y = f(x)$  es diferenciable, se puede utilizar la diferencial  $dy = f'(x)dx$  como una aproximación (para  $\Delta x$  pequeños) al valor  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

## DEFINICIÓN DE DIFERENCIABILIDAD

Una función  $f$  dada por  $z = f(x, y)$  es **diferenciable** en  $(x_0, y_0)$  si  $\Delta z$  puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . La función  $f$  es **diferenciable en una región  $R$**  si es diferenciable en todo punto de  $R$ .

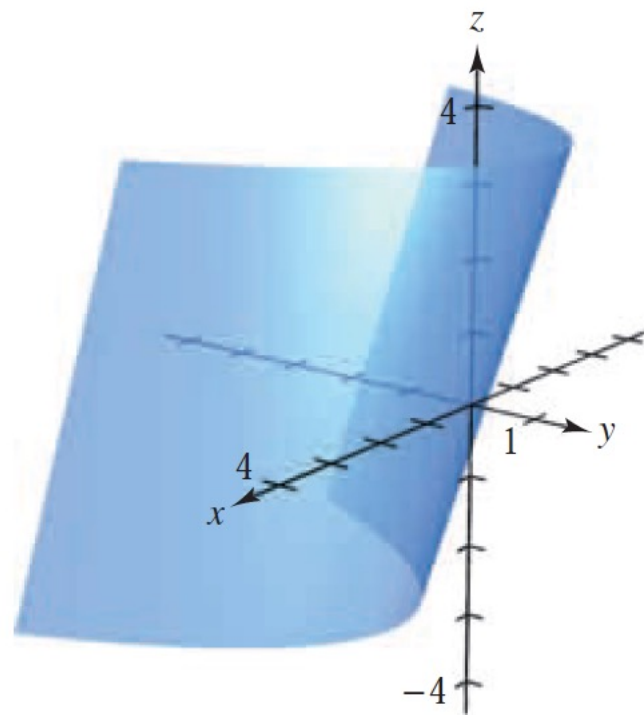
# Derivadas Parciales

- ▶ **EJEMPLO:** Mostrar que una función es diferenciable
- ▶ Mostrar que la función dada por  $f(x, y) = x^2 + 3y$  es diferenciable en todo punto del plano.
- ▶ **SOLUCION:** Haciendo  $z = f(x, y)$  el incremento de  $z$  en un punto arbitrario  $(x, y)$  en el plano es

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) && \text{Incremento de } z. \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y \\ &= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y\end{aligned}$$

# Derivadas Parciales

- donde  $\varepsilon_1 = \Delta x$  y  $\varepsilon_2 = \Delta y$ . Como  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$  se sigue que  $f$  es diferenciable en todo punto en el plano. La gráfica de  $f$  se muestra en la figura



# Derivadas Parciales

- Debe tenerse en cuenta que el término “diferenciable” se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  no garantiza que la función sea diferenciable. El teorema siguiente proporciona una condición *suficiente* para la diferenciabilidad de una función de dos variables.

## TEOREMA 13.4 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

Si  $f$  es una función de  $x$  y  $y$ , para la que  $f_x$  y  $f_y$  son continuas en una región abierta  $R$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $R$ .

# Derivadas Parciales

- ▶ **Aproximación mediante diferenciales**
- ▶ El teorema 13.4 dice que se puede elegir  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$  suficientemente cerca de  $(x, y)$  para hacer que  $\varepsilon_1 \Delta x$  y  $\varepsilon_2 \Delta y$  sean insignificantes. En otros términos, para  $\Delta x$  y  $\Delta y$  pequeños, se puede usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz.$$

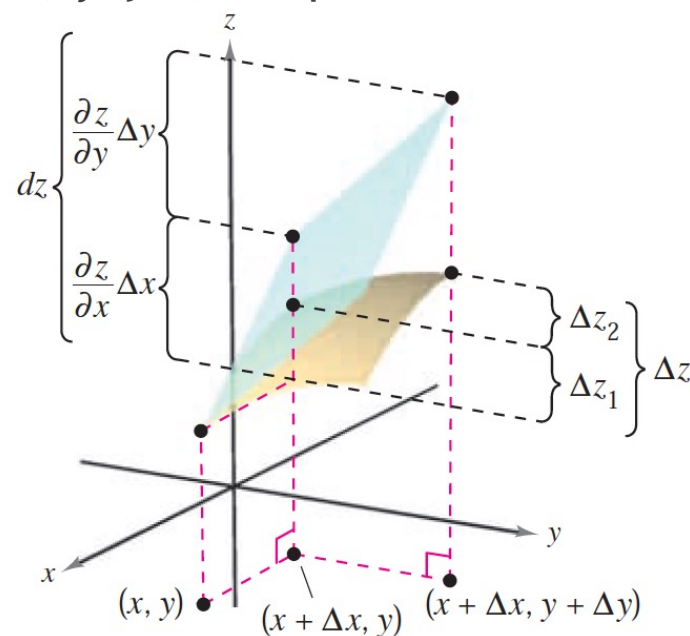
- ▶ Esta aproximación se ilustra gráficamente en la figura. Hay que recordar que las derivadas parciales  $\frac{\partial z}{\partial x}$  y  $\frac{\partial z}{\partial y}$  pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de  $x$  y de  $y$ . Esto significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$



# Derivadas Parciales

- representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto  $(x, y, f(x, y))$ . Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables  $x$ ,  $y$  y  $z$ , la aproximación de  $\Delta z$  mediante  $dz$  se llama **aproximación lineal**.



El cambio exacto en  $z$  es  $\Delta z$ .  
Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial  $dz$ .



# Derivadas Parciales

- ▶ EJEMPLO: Uso de la diferencial como una aproximación
- ▶ Utilizar la diferencial  $dz$  para aproximar el cambio en  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  cuando  $(x, y)$  se desplaza del punto  $(1, 1)$  al punto  $(1.01, 0.97)$ . Comparar esta aproximación con el cambio exacto en  $z$ .
- ▶ SOLUCION: Se hace  $(x, y) = (1, 1)$  y  $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$  y se obtiene  $dx = \Delta x = 0.01$  y  $dy = \Delta y = -0.03$ . Por tanto, el cambio en  $z$  puede aproximarse mediante

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta y.$$

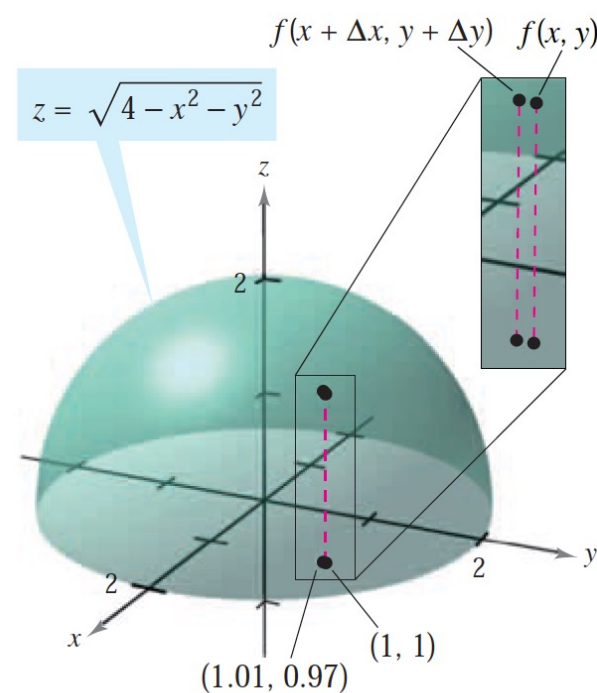
- ▶ Cuando  $x = 1$  y  $y = 1$  se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} (0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (0.01) \approx 0.0141.$$

# Derivadas Parciales

- En la figura se puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(1.01, 0.97) - f(1, 1) \\ &= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \approx 0.0137.\end{aligned}$$



Cuando  $(x, y)$  se desplaza de  $(1, 1)$  al punto  $(1.01, 0.97)$ , el valor de  $f(x, y)$  cambia aproximadamente en 0.0137

# Derivadas Parciales

- Una función de tres variables  $w = f(x, y, z)$  se dice que es diferenciable en  $(x, y, z)$  si

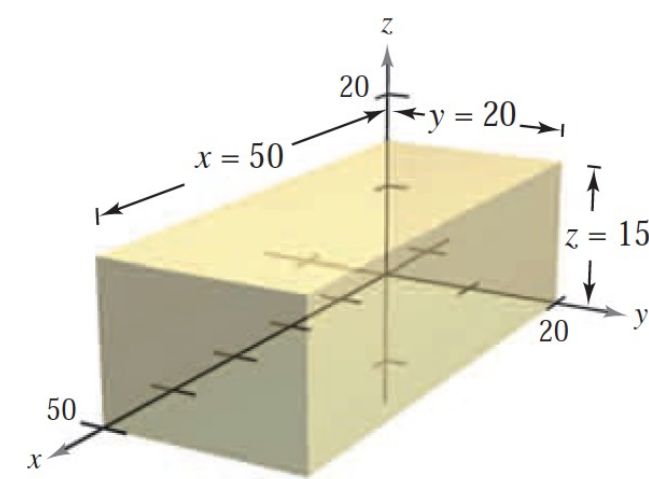
$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

- puede expresarse en la forma

$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z$$

- donde  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$ . Con esta definición de diferenciabilidad, el teorema 13.4 puede extenderse de la siguiente manera a funciones de tres variables: si  $f$  es una función de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , donde  $f$ ,  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$  son continuas en una región abierta  $R$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $R$ .

# Derivadas Parciales



Volumen =  $xyz$

- **EJEMPLO: Análisis de errores**
- El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es  $\pm 0.1$  milímetros. Las dimensiones de la caja son  $x = 50$  centímetros,  $y = 20$  centímetros y  $z = 15$  centímetros, como se muestra en la figura. Utilizar  $dV$  para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.
- **SOLUCION:** El volumen de la caja está dado por  $V = xyz$  y por tanto

$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz.\end{aligned}$$

- Utilizando  $0.1$  milímetros  $= 0.01$  centímetros, se tiene  $dx = dy = dz = \pm 0.01$ , y el error propagado es aproximadamente

# Derivadas Parciales

$$\begin{aligned}dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\&= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1\,000(\pm 0.01) \\&= 2\,050(\pm 0.01) = \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.}\end{aligned}$$

- Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15\,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

- el error relativo,  $\Delta V/V$ , es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15\,000} \approx 0.14\%.$$

# Derivadas Parciales

- ▶ **EJEMPLO:** Las dimensiones de una caja rectangular son 75, 60 y 40 *cm*, y cada medida no difiere 0.2 *cm* del valor real. Mediante diferenciales estime el error más grande posible cuando el volumen de la caja se calcula a partir de esas medidas.
- ▶ **SOLUCION:** Si las dimensiones de la caja son  $x, y$  y  $z$ , entonces su volumen es  $V = xyz$  por lo que

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = yz dx + xz dy + xy dz$$

- ▶ Sabemos que  $|\Delta x| \leq 0.2$ ,  $|\Delta y| \leq 0.2$  y  $|\Delta z| \leq 0.2$ . Por lo tanto, para estimar el error más grande en el volumen, utilizamos  $dx = 0.2$ ,  $dy = 0.2$  y  $dz = 0.2$  junto con  $x = 75$ ,  $y = 60$  y  $z = 40$ :

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0.2) + (75)(40)(0.2) + (75)(60)(0.2) = 1980$$

- ▶ Por consiguiente, un error de sólo 0.2 *cm* al medir cada una de las dimensiones podría llevar a un error de ¡tanto como 1980 *cm*<sup>3</sup> en el volumen calculado! Esto parecería un gran error, pero sólo es alrededor de 1% del volumen de la caja.

# Derivadas Parciales

- Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

## TEOREMA 13.5 DIFERENCIABILIDAD IMPLICA CONTINUIDAD

Si una función de  $x$  y  $y$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ , entonces es continua en  $(x_0, y_0)$ .

- DEMOSTRACION: Sea  $f$  diferenciable en  $(x_0, y_0)$ , donde  $z = f(x, y)$ . Entonces

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y$$

- donde  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ . Sin embargo, por definición, se sabe que  $\Delta z$  está dada por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$



# Derivadas Parciales

- Haciendo  $x = x_0 + \Delta x$  y  $y = y_0 + \Delta y$  se obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0). \end{aligned}$$

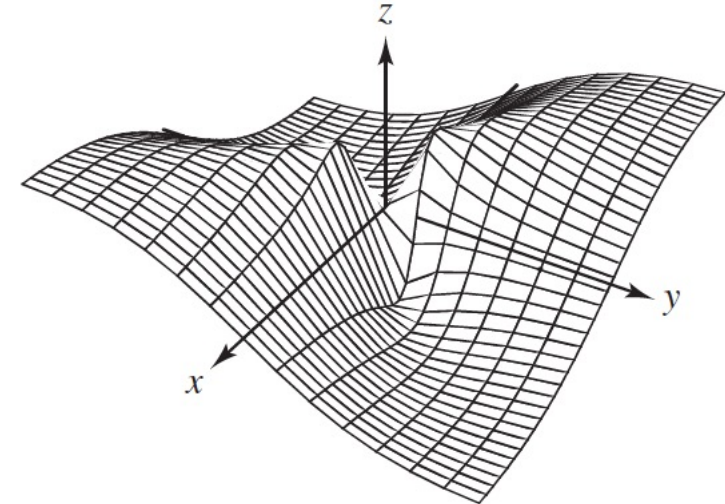
- Tomando el límite cuando  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  se obtiene

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

- lo cual significa que  $f$  es continua en  $(x_0, y_0)$ .
- Hay que recordar que la existencia de  $f_x$  y  $f_y$  no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.



# Derivadas Parciales



- EJEMPLO: Una función que no es diferenciable
- Mostrar que  $f_x(0, 0)$  y  $f_y(0, 0)$  existen, pero  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ , donde  $f$  está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- SOLUCION: Para mostrar que  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$  basta mostrar que no es continua en este punto. Para ver que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ , se observan los valores de  $f(x, y)$  a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a  $(0, 0)$ , como se muestra en la figura. A lo largo de la recta  $y = x$ , el límite es

$$\lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

# Derivadas Parciales

- ▶ mientras que a lo largo de  $y = -x$  se tiene

$$\lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

- ▶ Así, el límite de  $f(x, y)$  cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  no existe, y se puede concluir que  $f$  no es continua en  $(0, 0)$ . Por tanto, de acuerdo con el teorema 13.5,  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ . Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  se tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

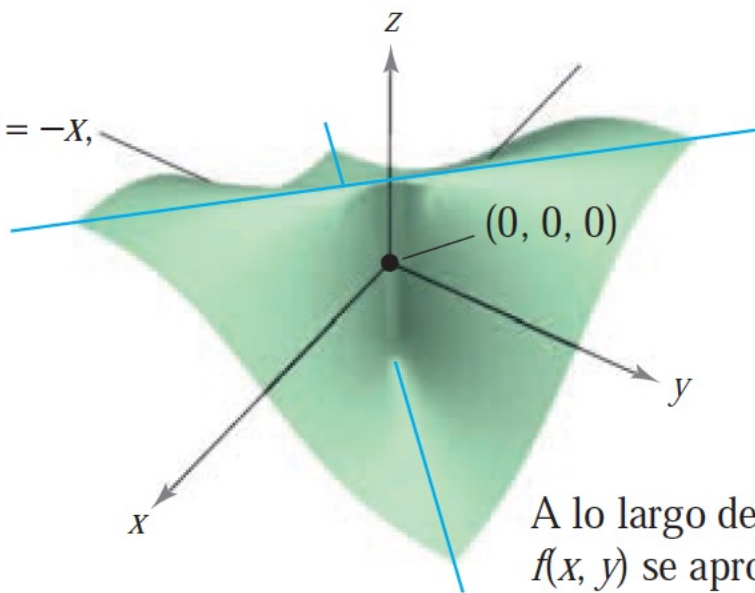
$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

- ▶ Por tanto, las derivadas parciales en  $(0, 0)$  existen.

# Derivadas Parciales

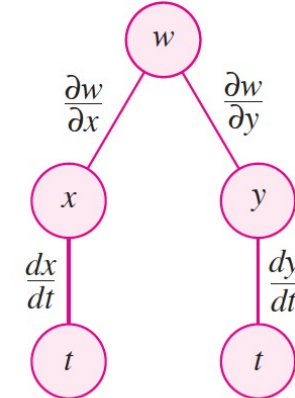
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A lo largo de la recta  $y = -x$ ,  
 $f(x, y)$  se aproxima  
o tiende a  $3/2$ .



A lo largo de la recta  $y = x$ ,  
 $f(x, y)$  se aproxima o tiende a  $-3/2$ .

# Derivadas Parciales



Regla de la cadena: una variable dependiente  $w$ , es función de  $x$  y  $y$  las que a su vez son funciones de  $t$ . Este diagrama representa la derivada de  $w$  con respecto a  $t$

- **Regla de la cadena para funciones de varias variables**
- El trabajo con diferenciales del tema anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando  $w$  es una función de  $x$  y  $y$ , donde  $x$  y  $y$  son funciones de una sola variable independiente  $t$ .

## TEOREMA 13.6 REGLA DE LA CADENA: UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Sea  $w = f(x, y)$ , donde  $f$  es una función derivable de  $x$  y  $y$ . Si  $x = g(t)$  y  $y = h(t)$ , donde  $g$  y  $h$  son funciones derivables de  $t$ , entonces  $w$  es una función diferenciable de  $t$ , y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Ver figura 13.39.

# Derivadas Parciales

- Recuerde que la regla de la cadena para funciones de una variable da la regla para derivar una función compuesta: si  $y = f(x)$  y  $x = g(t)$ , donde  $f$  y  $g$  son funciones derivables, entonces  $y$  es indirectamente una función derivable de  $t$  y

1

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

- Para funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión (teorema 2) se relaciona con el caso donde  $z = f(x, y)$  y cada variable  $x$  y  $y$  es a su vez una función de la variable  $t$ . Esto significa que  $z$  es indirectamente una función de  $t$ ,  $z = f(g(t), h(t))$ , y la regla de la cadena da una fórmula para derivar  $z$  como una función de  $t$ . Supongamos que  $f$  es derivable (definición 14.4.7). Recuerde que éste es el caso cuando  $f_x$  y  $f_y$  son continuas (teorema 14.4.8).

# Derivadas Parciales

**2 Regla de la cadena (caso 1)** Suponga que  $z = f(x, y)$  es una función derivable de  $x$  y  $y$ , donde  $x = g(t)$  y  $y = h(t)$  son funciones diferenciables de  $t$ . Entonces  $z$  es una función derivable de  $t$  y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

- DEMOSTRACIÓN Un cambio de  $\Delta t$  en  $t$  produce cambios de  $\Delta x$  en  $x$  y  $\Delta y$  en  $y$ . Éstos, a su vez, producen un cambio de  $\Delta z$  en  $z$ , y de acuerdo con la definición de 14.4.7 tenemos

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$



# Derivadas Parciales

- donde  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  cuando  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ . [Si las funciones  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  no están definidas en  $(0, 0)$ , podemos definir que son 0 allí.] Al dividir ambos miembros de esta ecuación entre  $\Delta t$ , tenemos

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

- Si ahora hacemos  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$  porque  $g$  es derivable y, por lo tanto, continua. De igual manera,  $\Delta y \rightarrow 0$ . A su vez, esto significa que  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

# Derivadas Parciales

- Como se escribe a menudo  $\partial z/\partial x$  en lugar de  $\partial f/\partial x$ , podemos volver a escribir la regla de la cadena en la forma

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



# Derivadas Parciales

- ▶ EJEMPLO: Regla de la cadena con una variable independiente
- ▶ Sea  $w = x^2y - y^2$ , donde  $x = \sin t$  y  $y = e^t$ . Hallar  $dw/dt$  cuando  $t = 0$ .
- ▶ SOLUCION: De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t \\ &= 2(\sin t)(e^t)(\cos t) + (\sin^2 t - 2e^t)e^t \\ &= 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}.\end{aligned}$$

- ▶ Cuando  $t = 0$  se sigue que

$$\frac{dw}{dt} = -2.$$

# Derivadas Parciales

- La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo anterior, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar  $dw/dt$  expresando primero  $w$  como función de  $t$ ,

$$\begin{aligned}w &= x^2y - y^2 \\&= (\operatorname{sen} t)^2(e^t) - (e^t)^2 \\&= e^t \operatorname{sen}^2 t - e^{2t}\end{aligned}$$

- y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \operatorname{sen} t \cos t + e^t \operatorname{sen}^2 t - 2e^{2t}$$

- La regla de la cadena en el teorema 13.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada  $x_i$  es una función derivable de una sola variable  $t$ , entonces para  $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- Se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

# Derivadas Parciales

- La regla de la cadena proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo anterior, se podrían haber usado técnicas para una sola variable para encontrar  $dw/dt$  expresando primero  $w$  como función de  $t$ ,

$$\begin{aligned}w &= x^2y - y^2 \\&= (\operatorname{sen} t)^2(e^t) - (e^t)^2 \\&= e^t \operatorname{sen}^2 t - e^{2t}\end{aligned}$$

- y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \operatorname{sen} t \cos t + e^t \operatorname{sen}^2 t - 2e^{2t}$$

# Derivadas Parciales

- La regla de la cadena en el teorema 13.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada  $x_i$  es una función derivable de una sola variable  $t$ , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Se tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

# Derivadas Parciales

- ▶ EJEMPLO: Si  $z = x^2y + 3xy^4$ , donde  $x = \sin 2t$  y  $y = \cos t$ , determine  $dz/dt$  cuando  $t = 0$ .

- ▶ SOLUCION: La regla de la cadena da

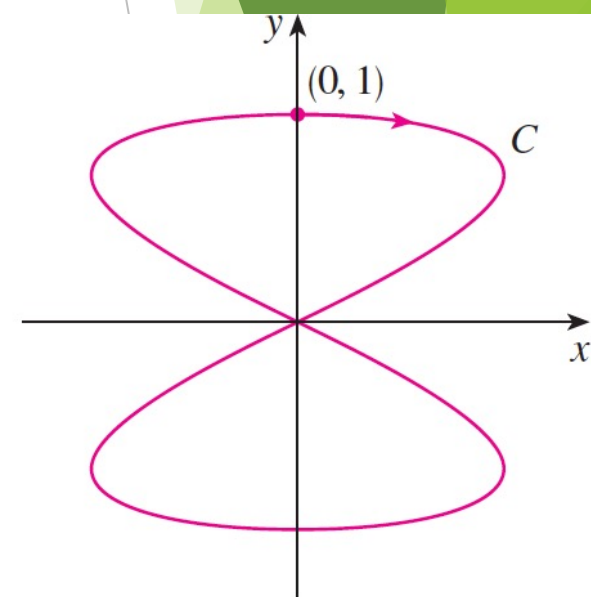
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= (2xy + 3y^4)(2 \cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)\end{aligned}$$

- ▶ No es necesario escribir las expresiones para  $x$  y  $y$  en términos de  $t$ . Simplemente observe que cuando  $t = 0$  tenemos  $x = \sin 0 = 0$  y  $y = \cos 0 = 1$ . Por lo tanto,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = (0 + 3)(2 \cos 0) + (0 + 0)(-\sin 0) = 6$$

# Derivadas Parciales

- La derivada del ejemplo anterior se puede interpretar como la razón de cambio de  $z$  con respecto a  $t$  cuando el punto  $(x, y)$  se desplaza por la curva  $C$  cuyas ecuaciones paramétricas son  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$  (véase figura). En particular, cuando  $t = 0$ , el punto  $(x, y)$  es  $(0, 1)$  y  $\frac{dz}{dt} = 6$  es la razón del incremento cuando uno se desplaza por la curva  $C$  que pasa por el punto  $(0, 1)$ . Si, por ejemplo,  $z = T(x, y) = x^2y + 3xy^4$  representa la temperatura en el punto  $(x, y)$ , entonces la función compuesta  $z = T(\sin 2t, \cos t)$  representa la temperatura en los puntos sobre  $C$  y la derivada  $dz/dt$  representa la razón a la cual la temperatura cambia a lo largo de  $C$ .



**FIGURA 1**

La curva  $x = \sin 2t$ ,  $y = \cos t$

# Derivadas Parciales

- ▶ EJEMPLO: La presión  $P$ , en kilopascales, el volumen  $V$  (en litros) y la temperatura  $T$  (en kelvin), de un mol de un gas ideal, están relacionados mediante la ecuación  $PV = 8.31T$ . Determine la razón a la cual la presión cambia cuando la temperatura es de  $300^\circ K$  y se incrementa a razón de  $0.1^\circ K/s$  y el volumen es de  $100 L$  y se incrementa a razón de  $0.2 L/s$ .

- ▶ SOLUCION: Si  $t$  representa el tiempo que transcurre en segundos, entonces en el instante dado  $T = 300$ ,  $\frac{dT}{dt} = 0.1$ ,  $V = 100$ ,  $dV/dt = 0.2$ . Puesto que

$$P = 8.31 \frac{T}{V}$$

- ▶ con la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V} \frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2} \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{8.31}{100} (0.1) - \frac{8.31(300)}{100^2} (0.2) = -0.04155 \end{aligned}$$

- ▶ La presión disminuye a razón de casi  $0.042 kPa/s$ .

# Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Aplicación de la regla de la cadena a velocidades o ritmos de cambio relacionados
- Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x_1 = 4 \cos t \quad y \quad y_1 = 2 \sin t$$

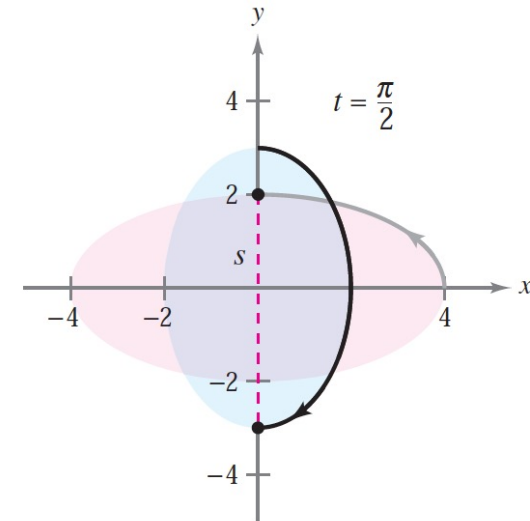
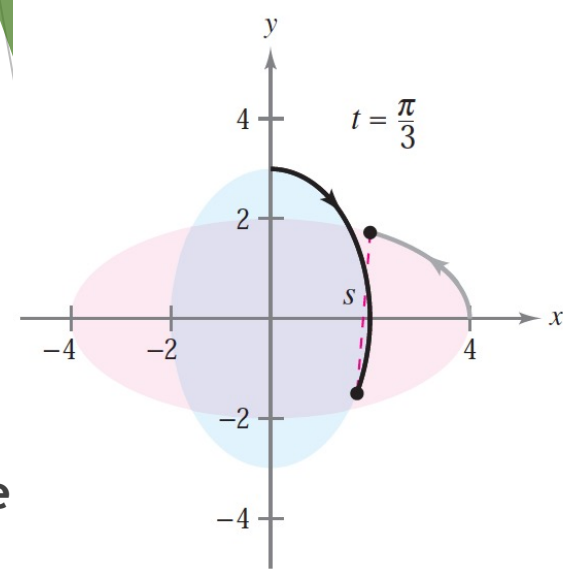
Primer objeto.

$$x_2 = 2 \sin 2t \quad y \quad y_2 = 3 \cos 2t$$

Segundo objeto.

- ¿A qué velocidad o ritmo cambia la distancia entre los dos objetos cuando  $t = \pi$ ?
- SOLUCION: En la figura se puede ver que la distancia  $s$  entre los dos objetos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$





# Derivadas Parciales

- y que cuando  $t = \pi$ , se tiene  $x_1 = -4, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 3$  y

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5.$$

- Cuando  $t = \pi$ , las derivadas parciales de  $s$  son las siguientes.

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

# Derivadas Parciales

- Cuando  $t = \pi$ , las derivadas de  $x_1, y_1, x_2$  y  $y_2$  son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4 \operatorname{sen} t = 0 \quad \frac{dy_1}{dt} = 2 \cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cos 2t = 4 \quad \frac{dy_2}{dt} = -6 \operatorname{sen} 2t = 0.$$

- Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, se sabe que la distancia cambia a una velocidad o ritmo

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) \\ &= \frac{22}{5}. \end{aligned}$$