Derivadas Parciales

- Derivación implícita
- La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita. Suponemos que una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ define a y en forma implícita como una función derivable de x, es decir, $y = f(x)$, donde $F\big(x, f(x)\big) = 0$ para toda x en el dominio de f. Si F es derivable, aplicamos el caso 1 de la regla de la cadena para derivar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ con respecto a x. Puesto que tanto x como y son funciones de x obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Derivadas Parciales

- Pero $\frac{dx}{dx} = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$ resolvemos para dy/dx y obtener

6

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

- Para deducir esta ecuación, suponemos que $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como una función de x. El **teorema de la función implícita**, que se demuestra en cálculo avanzado, proporciona condiciones en las cuales es válida esta suposición. Establece que si F se define sobre un disco que contiene (a, b), donde $F(a, b) = 0$, $F_y(a, b) \neq 0$, y F_x y F_y son continuas sobre el disco, entonces la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función de x cerca del punto (a, b) y la derivada de esta función está dada por la ecuación 6.

Derivadas Parciales

- Se concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Supóngase que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$ donde se supone que $y = f(x)$ es función derivable de x. Para hallar dy/dx se podría recurrir a las técnicas vistas anteriormente. Sin embargo, se verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si se considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x))$$

- se puede aplicar el teorema 13.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}.$$

Derivadas Parciales

- Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f, se sabe que $\frac{dw}{dx} = 0$ y se tiene

$$F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

- Ahora, si $F_y(x, y) \neq 0$, se puede usar el hecho de que $\frac{dx}{dx} = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

- Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

Derivadas Parciales

TEOREMA 13.8 REGLA DE LA CADENA: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \qquad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

- Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar una derivada implícitamente
- Hallar dy/dx, dada la ecuación $y^3 + y^4 - 5y - x^2 + 4 = 0.$
- Solución: Se comienza por definir una función F.

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

- Después, usando el teorema 13.8, se tiene

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5$$

- por lo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Determine y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.
- SOLUCION: La ecuación dada se puede escribir como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

- de modo que la ecuación 6 da como resultado

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

- Ahora se supone que z está dada en forma implícita como una función $z = f(x, y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$. Esto significa que $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$ para todo (x, y) en el dominio f. Si F y f son derivables, entonces usamos la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Derivadas Parciales

- Pero $$\frac{\partial}{\partial x}(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$$

- así que esta ecuación se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

- Si $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ y obtenemos la primera fórmula de las ecuaciones 7. La fórmula para $\partial z/\partial y$ se obtiene de una manera parecida.

7 $$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Derivadas Parciales

- Una vez más, una versión del **teorema de la función implícita** da condiciones en las cuales la suposición es válida. Si F está definida dentro de una esfera que contiene (a, b, c), donde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$, y F_x, F_y y F_z son continuas dentro de la esfera, entonces la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función de x y y cerca del punto (a, b, c) y esta función es derivable, con derivadas parciales dadas por la ecuación 7.

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Determine $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.
- SOLUCION: Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 7, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar derivadas parciales implícitamente
- Encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, dada la ecuación $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0$.
- SOLUCION: Para aplicar el teorema 13.8, sea

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

- Entonces

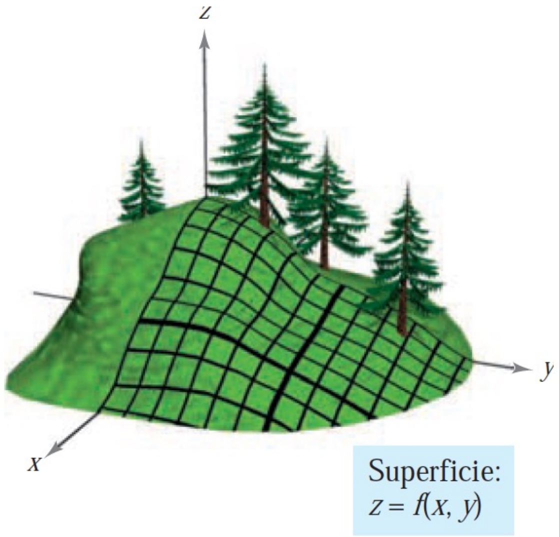
$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$
$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$
$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y$$

- Con lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

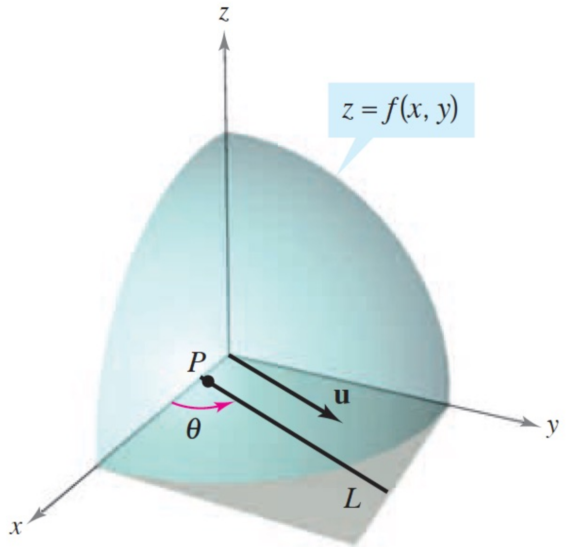
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

Derivadas Parciales

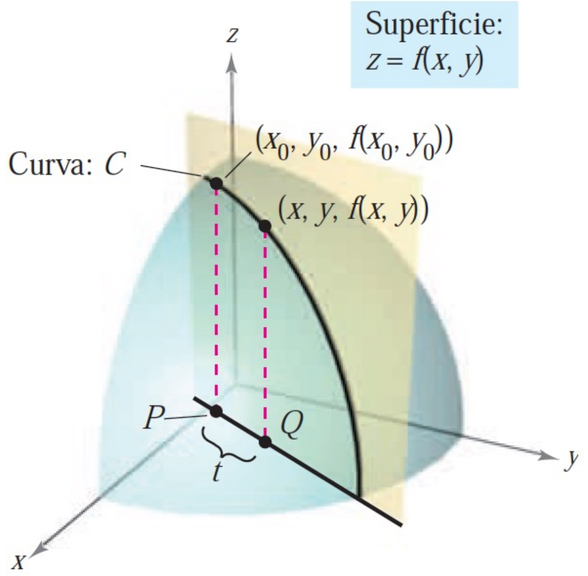


- **Derivadas direccionales y gradientes**
- Suponer que se está en la colina de la figura y se quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z. Si la colina está representada por $z = f(x,y)$, se sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x,y)$ y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_y(x,y)$. En este tema se verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.
- Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, se definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x,y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f como se muestra en la figura. La "dirección" de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$



Derivadas Parciales



- donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, se reduce el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a $\boldsymbol{u}$, como se muestra en la figura. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C. La pendiente de la superficie en $(x_0, y_o, f(x_0, y_0))$ en la dirección de u se define como la pendiente de la curva C en ese punto.
- De manera informal, se puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L, representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t\cos\theta$$

- Y,

$$y = y_0 + t\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Derivadas Parciales

- de manera que para todo valor de t, el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L. Para cada uno de los puntos P y Q hay un punto correspondiente en la superficie.

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \qquad \text{Punto sobre } P.$$
$$(x, y, f(x, y)) \qquad \text{Punto sobre } Q.$$

- Como la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} &= \sqrt{(t\cos\theta)^2+(t\operatorname{sen}\theta)^2}\\ &= |t|\end{aligned}$$

- Por último, haciendo que t se aproxime a 0, se llega a la definición siguiente.

Derivadas Parciales

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sea f una función de dos variables x y y, y sea $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de u**, que se denota $D_{\mathbf{u}} f$, es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\cos\theta,\, y + t\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

- Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite. Una fórmula “de trabajo” más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y.

Derivadas Parciales

TEOREMA 13.9 DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

- DEMOSTRACION: Dado un punto fijado (x_0, y_0), sea $x = x_0 + t\cos\theta$ y sea $y = y_0 + t\sin\theta$. Ahora, se hace $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, se puede aplicar la regla de la cadena del teorema 13.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta.$$

- Si $t = 0$, entonces $x = x_o$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$$

- De acuerdo con la definición de $g'(t)$, también es verdad que

$$g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t) - g(0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\theta + f_y(x_0, y_0)\operatorname{sen}\theta.$

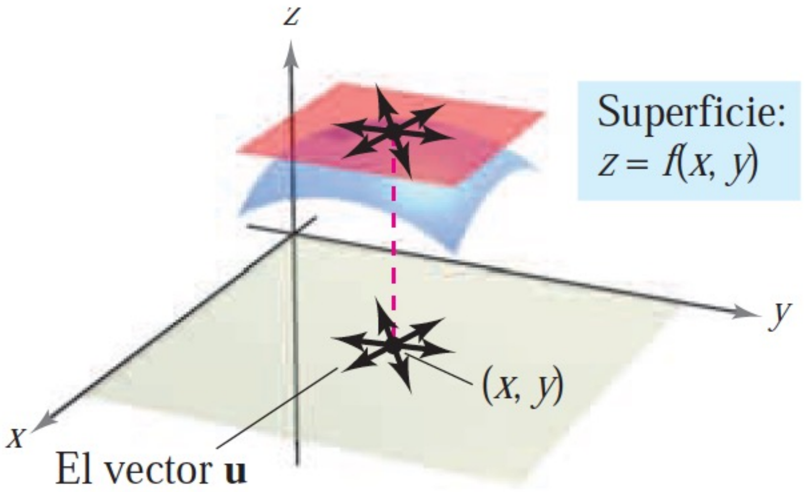
Derivadas Parciales

- Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por $\boldsymbol{u}$, como se muestra en la figura. Dos de éstas son las derivadas parciales
- 1. En la dirección del eje x positivo $(\theta = 0)$: $\boldsymbol{u} = \cos 0\, \boldsymbol{i} + \sin 0\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}$

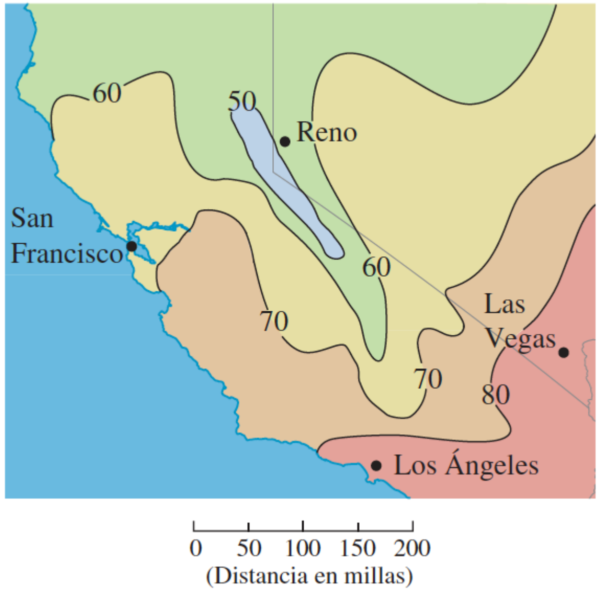
$$D_{\mathbf{i}}\, f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \operatorname{sen} 0 = f_x(x, y)$$

- 2. En la dirección del eje y positivo $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$: $\boldsymbol{u} = \cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} + \sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}$

$$D_{\mathbf{j}}\, f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$



Derivadas Parciales



- En el mapa del clima de la figura, se muestra un mapa de contorno de la función temperatura $T(x, y)$ para los estados de California y Nevada a las 3:00 PM, de un día de octubre. Las curvas de nivel o isotermas, unen localidades con la misma temperatura. La derivada parcial T_x en un lugar como Reno es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia si viajamos hacia el este desde Reno; T_y es la razón de cambio de la temperatura si viajamos hacia el norte. Pero, ¿qué sucede si queremos saber la razón de cambio de la temperatura cuando viaja hacia el sureste; es decir, hacia Las Vegas, o en alguna otra dirección? En esta sección se estudia un tipo de derivada, que se denomina *derivada direccional*, que permite calcular la razón de cambio de una función de dos o más variables en cualquier dirección.

Derivadas Parciales

- Derivadas direccionales
- Recuerde que si $z = f(x, y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y se definen como

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$\boxed{1}$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}$.

Derivadas Parciales

- Supongamos que ahora queremos encontrar la razón de cambio de z en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\boldsymbol{u} = \langle a, b \rangle$. (Véase figura 2.) Para hacer esto consideremos la superficie S cuya ecuación es $z = f(x, y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ queda sobre S. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\boldsymbol{u}$ interseca a S en una curva C (véase figura 3.) La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

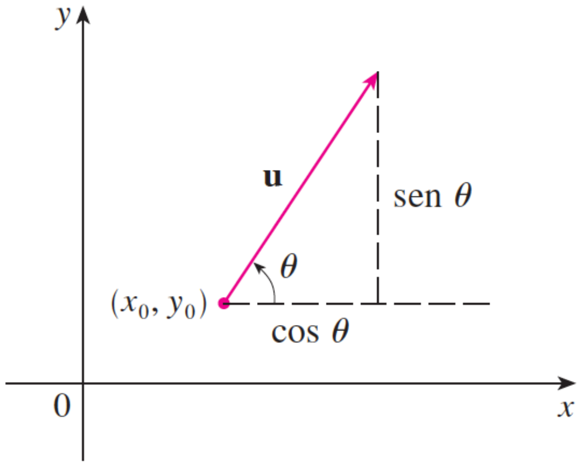
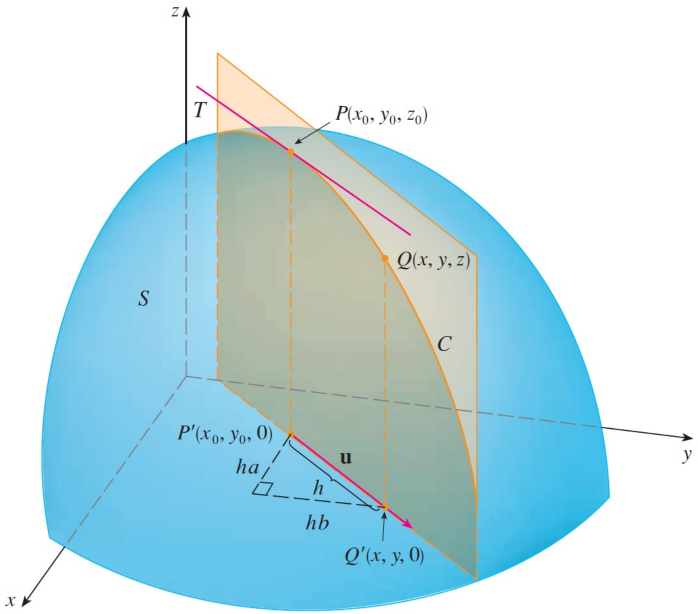


FIGURA 2
Un vector unitario
$\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \operatorname{sen}\theta \rangle$



Derivadas Parciales

- Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P', Q' son las proyecciones de P, Q sobre el plano xy, entonces el vector es paralelo a $\boldsymbol{u}$ y entonces

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle$$

- para algún escalar h. Por tanto, $x - x_0 = ha$, $y - y_0 = hb$, por lo que $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, y

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- Si tomamos el límite cuando $h \to 0$, obtenemos la razón de cambio de z con respecto a la distancia en la dirección de $\boldsymbol{u}$, la cual se denomina derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

Derivadas Parciales

$\boxed{2}$ **Definición** La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si este límite existe.

- Al comparar la definición 2 con las ecuaciones 1, observamos que si $u = i = \langle 1, 0 \rangle$, entonces $D_i f = f_x$ y si $u = j = \langle 0, 1 \rangle$, entonces $D_j f = f_y$. En otras palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.

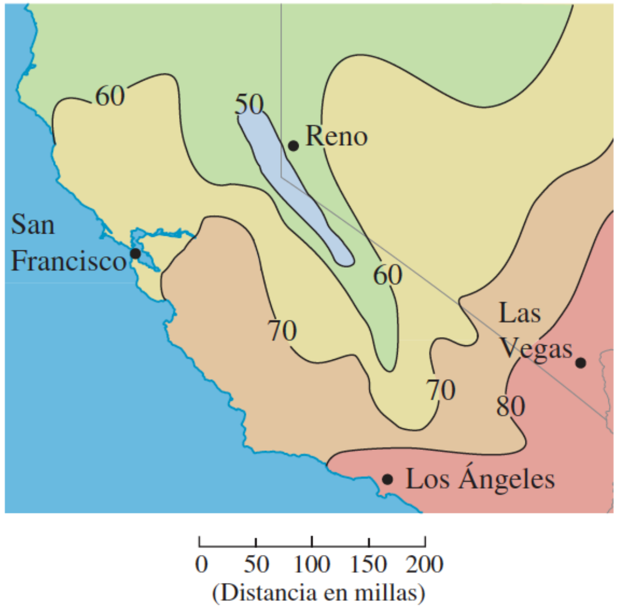
Derivadas Parciales

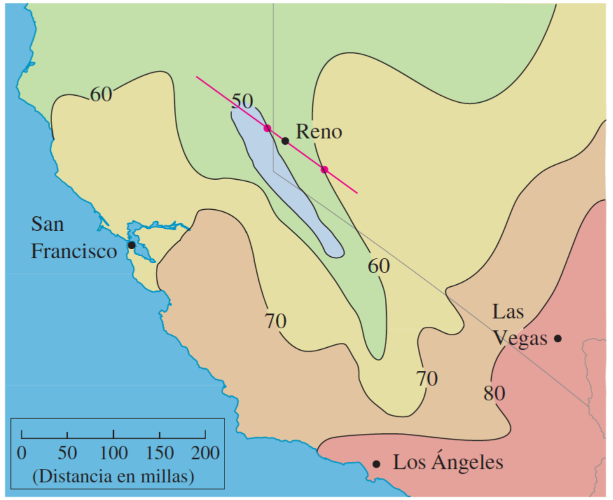
- EJEMPLO: Con ayuda del mapa del clima ilustrado en la figura estime el valor de la derivada direccional de la función de la temperatura en Reno en la dirección sureste.

- SOLUCION: El vector unitario dirigido hacia el sureste es $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})/\sqrt{2}$, pero no es necesario recurrir a esta expresión. Inicie dibujando una recta que pase por Reno y que se dirija hacia el sureste (véase figura).

- Aproximamos a la derivada direccional $D_u T$ mediante el promedio de la razón de cambio de la temperatura entre los puntos donde la recta interseca las isotermas $T = 50$ y $T = 60$. La temperatura en el punto al sureste de Reno es $T = 60°\mathrm{F}$ y la temperatura en el punto noroeste de Reno es $T = 50°\mathrm{F}$. Al parecer, la distancia entre estos puntos es de casi 75 millas. De este modo, la razón de cambio de la temperatura en la dirección sureste es

$$D_{\mathbf{u}} T \approx \frac{60 - 50}{75} = \frac{10}{75} \approx 0.13\ °\mathrm{F/mi}$$





Derivadas Parciales

- Cuando calculamos la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general aplicamos el teorema siguiente.

3 **Teorema** Si f es una función derivable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b$$

- DEMOSTRACIÓN Si definimos una función g de una variable h mediante

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$$

- entonces según la definición de la derivada

$$\boxed{4} \qquad g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0)$$

Derivadas Parciales

- Por otro lado, podemos escribir $g(h) = f(x, y)$, donde $x = x_0 + ha$, $y = y_0 + hb$, de modo que la regla de la cadena (teorema 14.5.2) da

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dh} = f_x(x, y)\,a + f_y(x, y)\,b$$

- Si ahora hacemos $h = 0$, entonces $x = x_0$, $y = y_0$, y

$$\boxed{5} \qquad g'(0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

- Al comparar las ecuaciones 4 y 5, observe que

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,a + f_y(x_0, y_0)\,b$$

- Si el vector unitario $\boldsymbol{u}$ forma un ángulo θ con el eje positivo x (como en la figura 2), entonces podemos escribir $u = \langle \cos\theta, \sin\theta \rangle$ y así la fórmula del teorema 3 se transforma en

$$\boxed{6} \qquad D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\,\text{sen}\,\theta$$

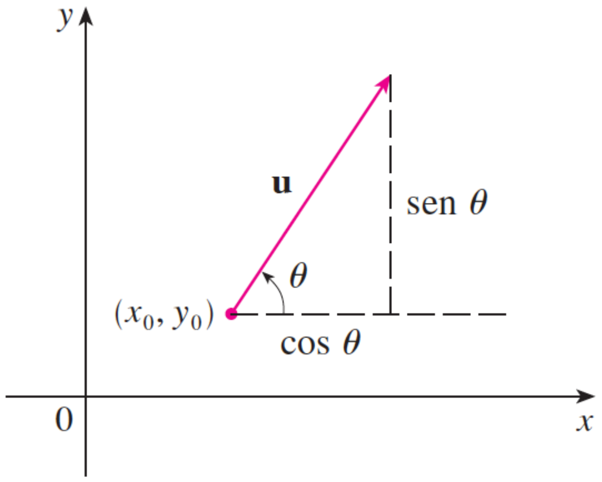


FIGURA 2
Un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle = \langle \cos\theta, \text{sen}\,\theta \rangle$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Determine la derivada direccional $D_u f(x, y)$ si

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

- y $\boldsymbol{u}$ es el vector unitario dado por el ángulo $\theta = \pi/6$. Qué es $D_u f(1, 2)$?
- SOLUCION: Con la fórmula 6 se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos\frac{\pi}{6} + f_y(x, y) \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= (3x^2 - 3y)\frac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y)\tfrac{1}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\,x^2 - 3x + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)y\right]$$

- Por lo tanto

$$D_{\mathbf{u}} f(1, 2) = \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}(1)^2 - 3(1) + \left(8 - 3\sqrt{3}\right)(2)\right] = \frac{13 - 3\sqrt{3}}{2}$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar una derivada direccional
- Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$$ Superficie.

- en $(1, 2)$ en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}.$$ Dirección.

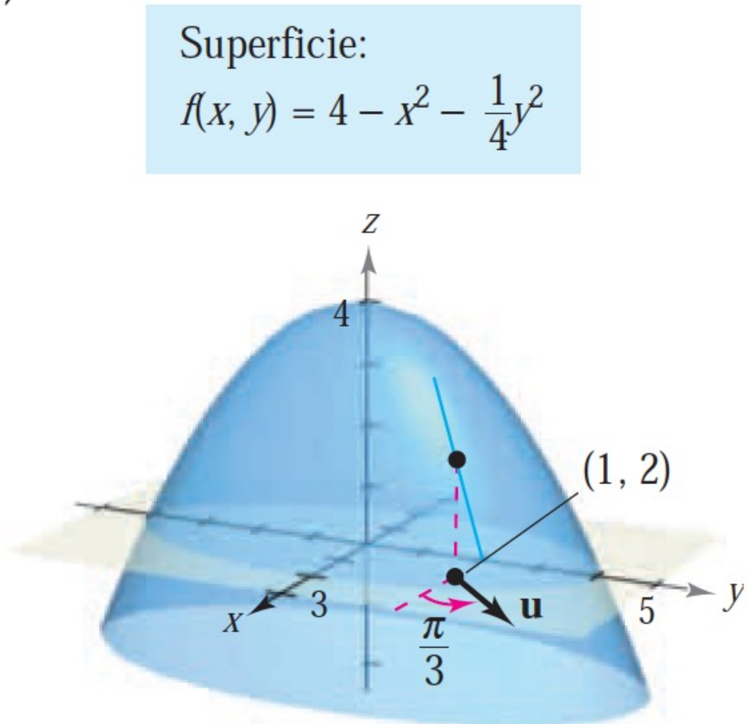
- Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema
- 13.9.

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= (-2x)\cos\theta + \left(-\frac{y}{2}\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

Derivadas Parciales

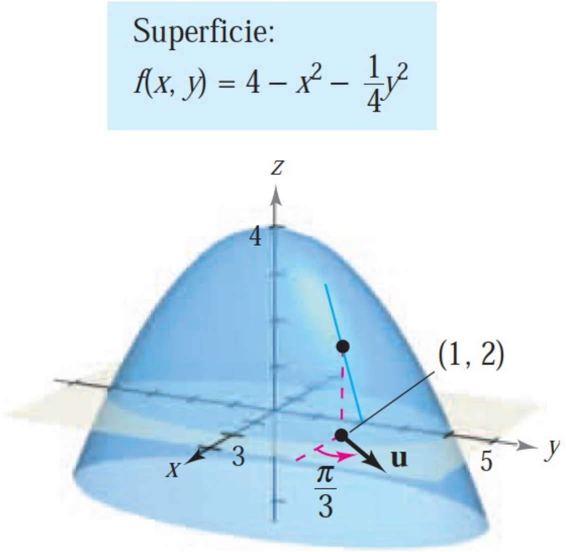
- Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \end{aligned}$$



Derivadas Parciales

- NOTA: La figura muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto $(1, 2, 2)$ en la dirección del vector unitario $\boldsymbol{u}$.
- Se ha especificado la dirección por medio de un vector unitario $\boldsymbol{u}$. Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, se debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 13.9.



Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar una derivada direccional.
- Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} 2y \qquad \text{Superficie.}$$

- En $(1, \frac{\pi}{2})$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \qquad \text{Dirección.}$$

- SOLUCION: Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 13.9. Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{v}$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$$

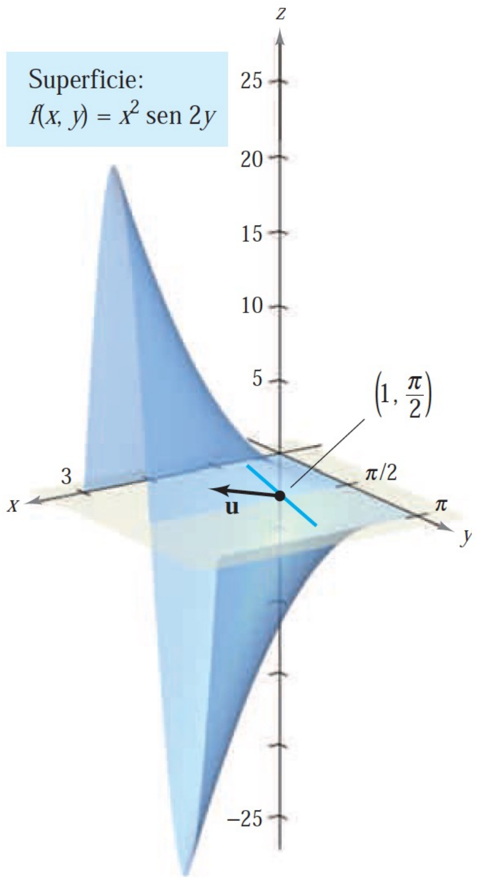


Figura 13.47

- Usando este vector unitario, se tiene

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = (2x \operatorname{sen} 2y)(\cos\theta) + (2x^2 \cos 2y)(\operatorname{sen}\theta)$$

$$D_{\mathbf{u}} f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = (2 \operatorname{sen} \pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2 \cos \pi)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

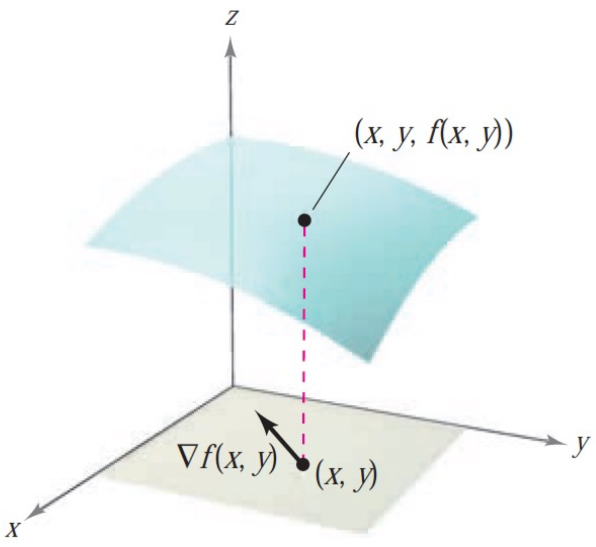
$$= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{8}{5}.$$

Ver la figura 13.47.

Derivadas Parciales

- **El gradiente de una función de dos variables**
- El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.



El gradiente de f es un vector en el plano xy
Figura 13.48

DEFINICIÓN DE GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de** f, denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

∇f se lee como "nabla f". Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$. En la figura 13.48 hay que observar que para cada (x, y), el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

NOTA El símbolo ∇ no tiene ningún valor. Es un operador de la misma manera que d/dx es un operador. Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$, produce el vector $\nabla f(x, y)$. ■

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar el gradiente de una función
- Hallar el gradiente de $f(x, y) = y \ln x + xy^2$ en el punto $(1, 2)$
- SOLUCION: Utilizando

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

- Se tiene

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}.$$

- En el punto $(1, 2)$, el gradiente es

$$\begin{aligned}\nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Derivadas Parciales

- Como el gradiente de f es un vector, se puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de $\boldsymbol{u}$ como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = [\, f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}].$$

- En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 13.10 FORMA ALTERNATIVA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Si f es una función diferenciable de x y y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

Derivadas Parciales

- EJEMPLO: Hallar una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$
- Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

- En $(-\frac{3}{4}, 0)$, en la dirección de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$
- SOLUCION: Como las derivadas de f son continuas, f es diferenciable y se puede aplicar el teorema 13.10. Un vector en la dirección especificada es

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} = \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j}$$

$$= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Derivadas Parciales

- y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

- Como $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j = 64xi - 4yj$, el gradiente en $(-\frac{3}{4}, 0)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}.$$

Gradiente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

- Por consiguiente, en $(-\frac{3}{4}, 0)$ la derivada direccional es

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) &= \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{27}{10}. \end{aligned}$$

Derivada direccional en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$.

Superficie:
$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$