Funciones y Modelos

L. I. Igor Castañeda Quiñonez

Funciones y Modelos

- Un modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por medio de una función o una ecuación) de un fenómeno real, como el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química, la esperanza de vida de una persona al nacer, o el costo de la reducción de las emisiones. El propósito del modelo es comprender el fenómeno y tal vez hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.

Funciones y Modelos

- La figura ilustra el proceso de modelado matemático. Dado un problema del mundo real, nuestra primera tarea es formular un modelo matemático mediante la identificación y etiquetado de las variables dependientes e independientes, y haciendo supuestos que simplifiquen lo suficiente el fenómeno para que sea matemáticamente manejable. Utilizamos nuestro conocimiento de la situación física y nuestras habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En situaciones donde no hay ninguna ley física para que nos guíe, podemos necesitar recopilar datos (ya sea en una biblioteca, en internet o mediante la realización de nuestros propios experimentos) y examinar los datos en forma de una tabla para poder identificar patrones. A partir de la representación numérica de una función, podemos obtener una representación gráfica. En algunos casos, la gráfica podría hasta sugerir una forma algebraica adecuada.

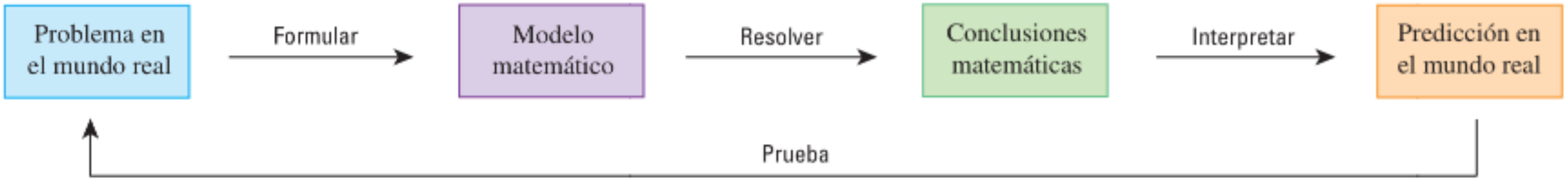


FIGURA 1 El proceso de modelado

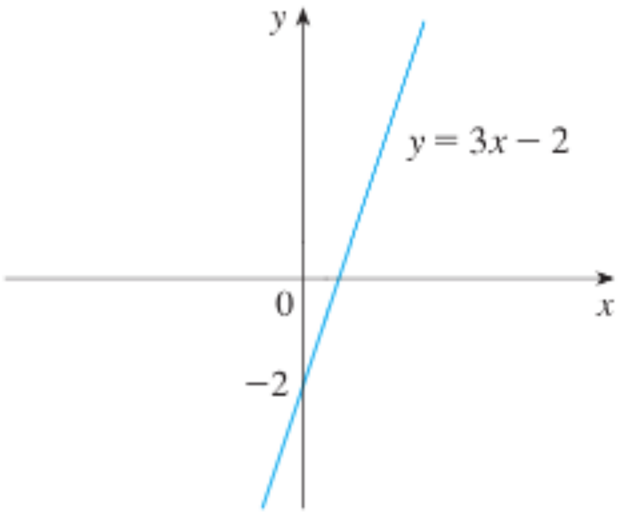
Funciones y Modelos

- La segunda etapa consiste en aplicar las matemáticas que conocemos (p. ej., el Cálculo que se desarrollará a lo largo de este cuatrimestre) al modelo matemático que hemos formulado a fin de obtener conclusiones matemáticas. A continuación, en ésta etapa, tomamos esas conclusiones matemáticas y las interpretamos como información sobre el fenómeno original del mundo real con el propósito de dar explicaciones o hacer predicciones. El último paso es poner a prueba nuestras predicciones comparando contra nuevos datos reales. Si las predicciones no coinciden con una buena aproximación con la realidad, necesitamos afinar nuestro modelo o formular uno nuevo y empezar otra vez el ciclo.

Funciones Y Modelos

- Un modelo matemático nunca es una representación completamente precisa de una situación física: es una idealización. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para permitir hacer cálculos matemáticos, pero es razonablemente preciso para proporcionar valiosas conclusiones. Es importante percatarse de las limitaciones del modelo porque, finalmente, la Madre Naturaleza tiene la última palabra.
- Hay muchos tipos diferentes de funciones que pueden utilizarse para modelar relaciones observadas en el mundo real. En lo que sigue, analizaremos el comportamiento y gráfica de estas funciones y daremos ejemplos de situaciones adecuadamente modeladas por ellas.

Funciones y Modelos



- MODELOS LINEALES
- Cuando decimos que y es una función lineal de x, queremos decir que la gráfica de la función es una recta, de manera que podemos utilizar la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

- donde m es la pendiente de la recta y b es la intersección de la recta con el eje y.
- Un rasgo característico de las funciones lineales es que crecen a una razón constante. Por ejemplo, la figura muestra una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla con algunos de sus valores. Obesrvemos que cuando x aumenta por 0.1, el valor de $f(x)$ aumenta 0.3. Así que $f(x)$ aumenta 3 veces más rápido que x. De este modo, la pendiente de la gráfica $y = 2x - 2$, es decir 3, lo que puede interpretarse como la razón de cambio de y respecto a x.

x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

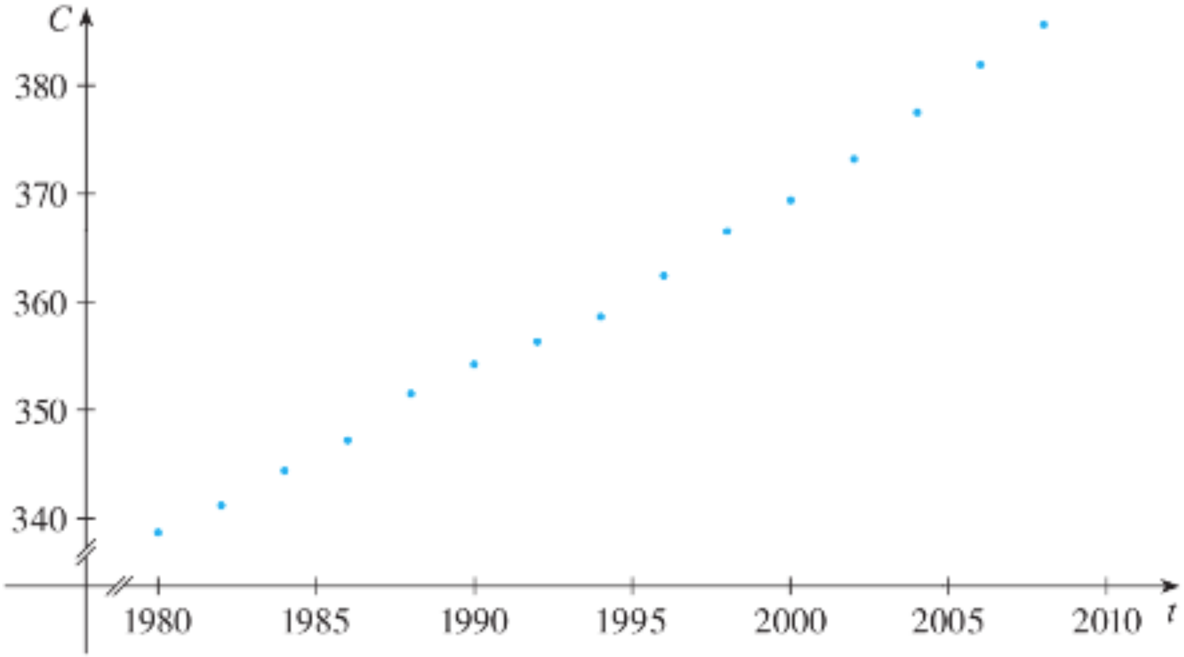
Funciones y Modelos

- La tabla muestra el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el Observatorio Mauna Loa, desde 1980 a 2008. Utilice los datos de la tabla para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1996	362.4
1982	341.2	1998	366.5
1984	344.4	2000	369.4
1986	347.2	2002	373.2
1988	351.5	2004	377.5
1990	354.2	2006	381.9
1992	356.3	2008	385.6
1994	358.6		

Funciones y Modelos

- Utilizamos los datos de la tabla 1 para hacer la gráfica de dispersión en la figura, donde t representa el tiempo (en años) y C, el nivel de CO2(en partes por millón, ppm).



Funciones y Modelos

- Utilice el modelo lineal dado por la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 para 1987 y predecir el nivel para el año 2015. De acuerdo con este modelo, ¿cuándo el nivel de CO_2 superará 420 partes por millón?

Funciones y Modelos

- Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, estimamos que el nivel promedio de CO2 en 1987 fue $$C(1987) = (1.65429)(1987) - 2938.07 \approx 349.00$$
- Éste es un ejemplo de *interpolación* porque hemos estimado un valor entre los valores observados. (De hecho, el Observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO2 en 1987 fue de 348.93 ppm, por lo que nuestra estimación es bastante precisa.)
- Con $t = 2015$, obtenemos

$$C(2015) = (1.65429)(2015) - 2938.07 \approx 395.32$$

Funciones y Modelos

- Por lo que auguramos que el nivel promedio de CO2 en el año 2015 será 395.3 ppm. Este es un ejemplo de *extrapolación* porque hemos predicho un valor fuera de la región de observaciones. En consecuencia, estamos mucho menos seguros acerca de la precisión de nuestra predicción. Utilizando la ecuación 2, vemos que el nivel de CO2 supera las 420 ppm cuando

$$1.65429t - 2938.07 > 420$$

- Resolviendo esta desigualdad, obtenemos

$$t > \frac{3358.07}{1.65429} \approx 2029.92$$

Funciones y Modelos

- Observemos que los puntos de datos parecen estar cercanos a una recta, por lo que es natural que se elija un modelo lineal en este caso. Pero hay muchas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de datos, así que, ¿cuál debemos usar? Una posibilidad es la recta que pasa por el primero y el último puntos de datos. La pendiente de esta recta es

$$\frac{385.6 - 338.7}{2008 - 1980} = \frac{46.9}{28} = 1.675$$

- Y su ecuación es

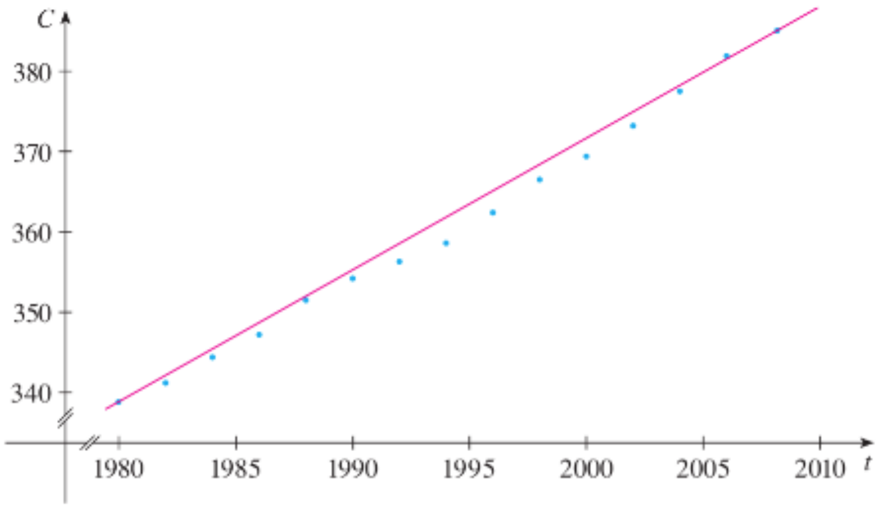
$$C - 338.7 = 1.675(t - 1980)$$

- O bien

$$\boxed{1} \qquad C = 1.675t - 2977.8$$

Funciones y Modelos

- La ecuación 1 da un posible modelo lineal para el nivel de dióxido de carbono y se representa gráficamente en la figura
- Por tanto, predecimos que el nivel de CO2 superará 420 ppm para el año 2030. Esta predicción es riesgosa porque se trata de un tiempo bastante alejado de nuestras observaciones. De hecho, podemos ver en la figura que la tendencia ha sido de un rápido aumento para los niveles de CO2 en los últimos años, por lo que el nivel podría superar los 420 ppm antes de 2030.



Funciones y Modelos

- **POLINOMIALES**
- Una función P se llama **polinomial** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

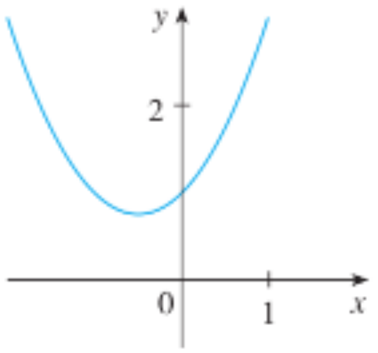
- donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, , , , a_n$ son constantes llamadas los coeficientes de la polinomial. El dominio de cualquier polinomial es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** de polinomial es n. Por ejemplo la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

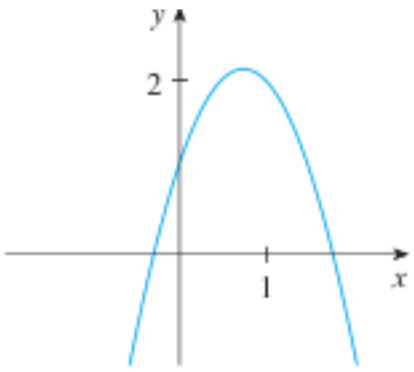
- Es Polinomial de grado 6

Funciones y Modelos

- Una polinomial de grado 1 es de la forma $P(x) = mx + b$, por lo que es una función lineal. Una polinomial de grado 2 es de la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ y se llama función cuadrática. Su gráfica es siempre una parábola obtenida por desplazamientos de la parábola $y = ax^2$. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.



a) $y = x^2 + x + 1$



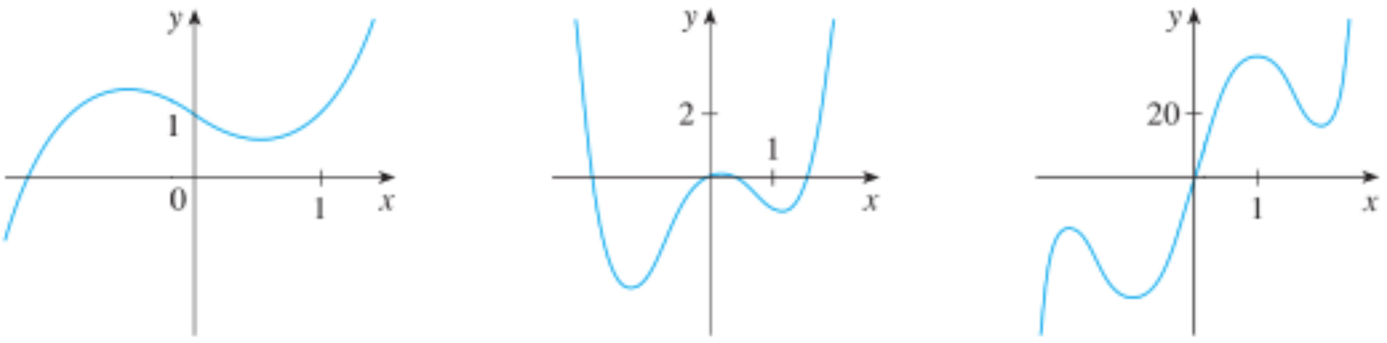
b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Funciones y Modelos

- Una polinomial de grado 3 es de la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

- y se llama función cúbica. La figura muestra la gráfica de una función cúbica en el inciso a) y las gráficas de polinomiales de grados 4 y 5 en los incisos b) y c). Veremos más adelante por qué las gráficas tienen esas formas.



a) $y = x^3 - x + 1$ b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Funciones y Modelos

- Las polinomiales se utilizan comúnmente para modelar diversas cantidades que se presentan en las ciencias naturales y sociales. Explicaremos por qué los economistas usan a menudo una polinomial $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. En el siguiente ejemplo, utilizamos una función cuadrática para modelar la caída de una pelota.

Funciones y Modelos

- Se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN, a 450 m por encima del suelo. Las sucesivas alturas h de la pelota por encima del suelo están registradas a intervalos de 1 segundo, en la tabla. Encuentre un modelo para ajustar los datos y utilice ese modelo para predecir el momento en que la pelota golpeará el suelo.

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Funciones y Modelos

- En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión con la información disponible y se observa que un modelo ideal no es adecuado. Pero parece ser que los puntos de datos podrían acomodarse a una parábola, por lo que intentamos un modelo cuadrático. Utilizando una calculadora graficadora o computadora (que utiliza el método de los mínimos cuadrados), obtenemos el siguiente modelo cuadrático:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

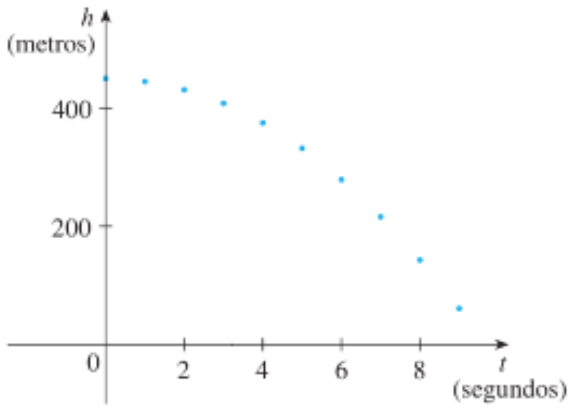


FIGURA 9
Gráfica de dispersión para la caída de una pelota

Funciones y Modelos

- En la figura 10 dibujamos la gráfica de la ecuación 3 junto con los puntos de datos y vemos que el modelo cuadrático es muy buen ajuste.
- La pelota golpea el suelo cuando $h = 0$, por lo que resolvemos la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

- La ecuación cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

- La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo que pronosticamos que la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 9.7 segundos.

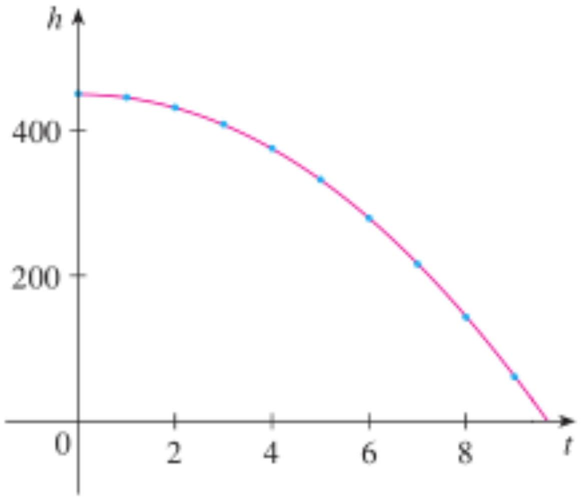


FIGURA 10
Modelo cuadrático para la caída de una pelota