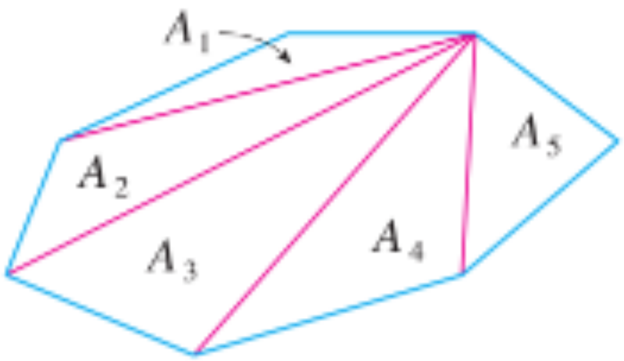
Cálculo Diferencial: Límites

L. I. Igor Castañeda Quiñonez

Límites

- Los orígenes del cálculo se remontan a unos 2 500 años a los antiguos griegos, quienes calcularon áreas usando el “método de agotamiento”. Los griegos sabían cómo encontrar elárea de cualquier polígono al dividirlo en triángulos como se ve en la figura y sumar las áreas de estos triángulos.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

Límites

- Un problema mucho más difícil es encontrar el área encerrada por una figura curvada. El método griego de agotamiento consistía en inscribir y circunscribir polígonos en la figura y a continuación aumentar el número de lados de los polígonos. La figura 2 ilustra este proceso para el caso especial de un círculo con polígonos regulares inscritos.

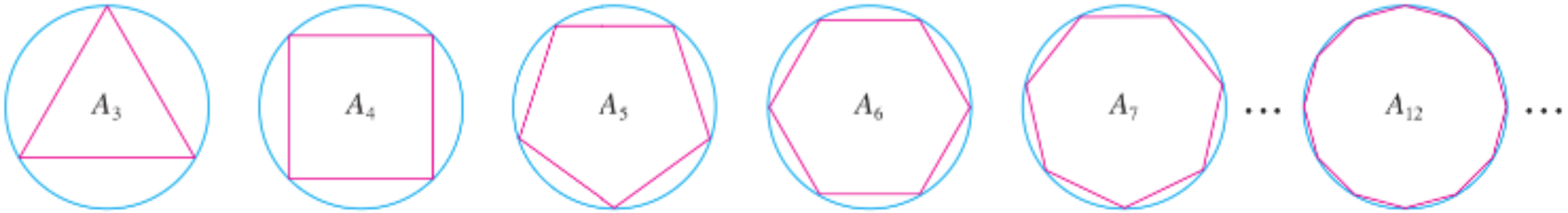


FIGURA 2

- Sea A_n el área del polígono inscrito con n lados. A medida que aumenta n, el área A_n se parece cada vez más y más al área del círculo. Así, decimos que el área del círculo es el *límite* de las áreas de los polígonos inscritos, y escribimos:

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Límites

- Los griegos no utilizaron explícitamente el concepto de límite. Sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a.C.) utilizó la técnica de agotamiento para obtener la conocida fórmula para el área de un círculo: $A = \pi r^2$
- Nos aproximaremos al área deseada por medio de áreas de rectángulos (como en la figura 4), disminuyendo el ancho de los rectángulos y luego calculando el área A como el límite de estas sumas de áreas de rectángulos.

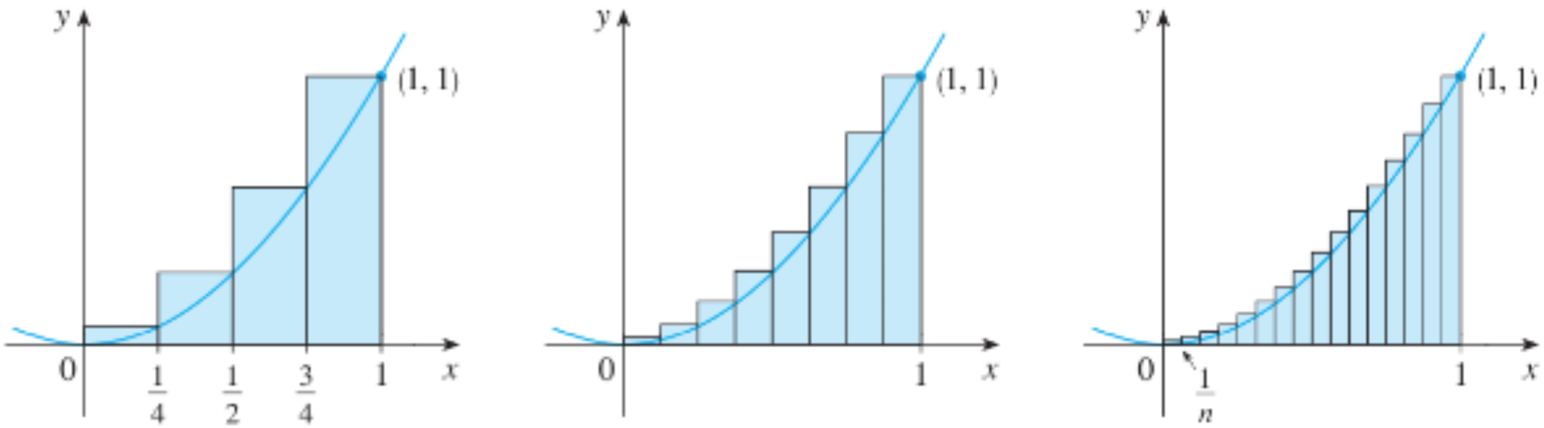
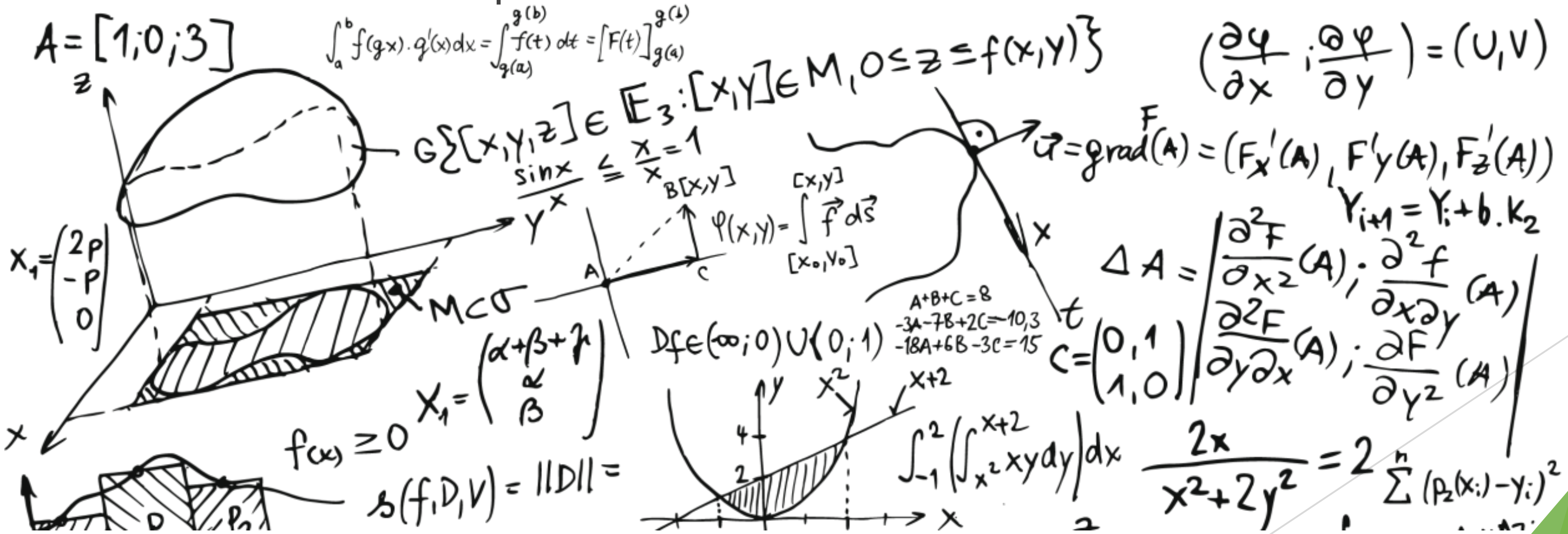


FIGURA 4

Límites

- El problema del área es el problema central en la rama del Cálculo llamado cálculo integral. Las técnicas que vamos a desarrollar en el capítulo 5 para encontrar áreas también nos permitirán calcular el volumen de un sólido, la longitud de una curva, la fuerza de las aguas contra una presa, la masa y el centro de gravedad de una varilla y el trabajo realizado al bombear agua hacia afuera de un tanque.



Límites

- **EL PROBLEMA DE LA TANGENTE**
- Considere el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente t a una curva con ecuación $y = f(x)$ en un punto dado P. Considerarla como una recta que toca la curva en P como en la figura 5.

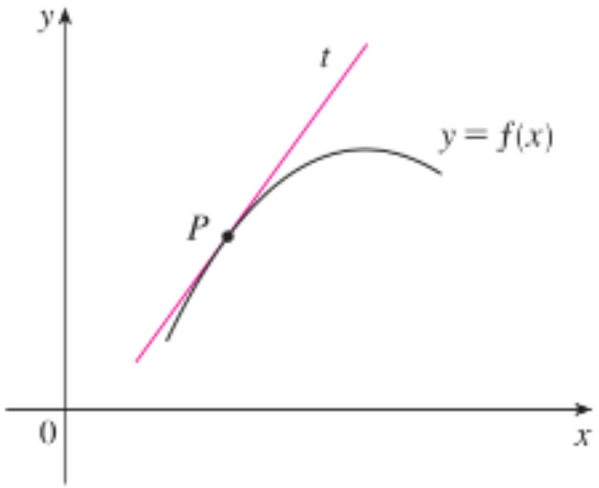


FIGURA 5
La recta tangente en P

Límites

- Como sabemos que el punto P se encuentra en la recta tangente, podemos encontrar la ecuación de t si sabemos su pendiente m. El problema es que necesitamos dos puntos para calcular la pendiente y tenemos sólo un punto P de t. Para sortear el problema encontramos en primer lugar una aproximación a m tomando un punto cercano Q de la curva y calculamos la pendiente m_{PQ} de la recta secante PQ. De la figura 6 vemos que:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

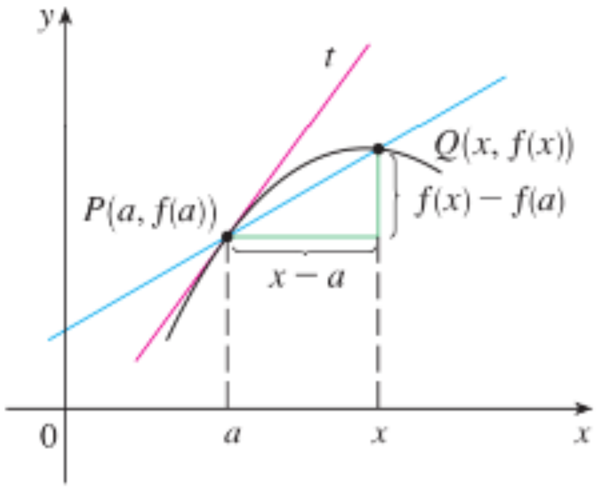


FIGURA 6

La recta secante PQ

Límites

- Ahora imaginemos que Q se mueve a lo largo de la curva hacia P como en la figura 7. Puede ver que la recta secante gira y se acerca a la recta tangente como su posición limite. Esto significa que la pendiente m_{PQ} de la recta secante se acerca más y más a la pendiente m de la recta tangente. Escribimos:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

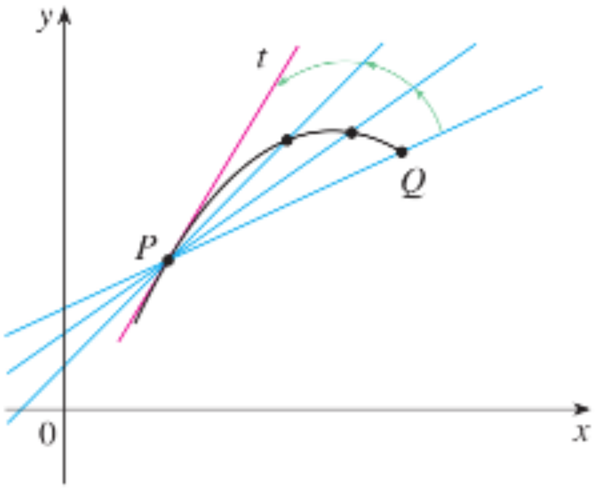


FIGURA 7
Recta secante aproximándose a la recta tangente

Límites

- y decimos que m es el límite de m_{PQ} cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Puesto que x se aproxima a a cuando Q se aproxima a P, también podríamos utilizar la ecuación 1 para escribir:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Límites

- **VELOCIDAD**
- Cuando miramos el velocímetro de un automóvil y leemos que se está desplazando a 48 mi/h, ¿qué información estamos obteniendo? Si la velocidad se mantiene constante, después de una hora nos habremos desplazado 48 mi. Pero, si varía la velocidad del coche, ¿qué significa decir que la velocidad en un instante dado es 48 mi/h?
- A fin de analizar esta situación, examinemos el caso de un automóvil que viaja a lo largo de una carretera recta en el que suponemos que es posible medir la distancia recorrida por el vehículo (en pies) a intervalos de un segundo como se registra en la siguiente tabla:

t = Tiempo transcurrido (s)	0	1	2	3	4	5
d = Distancia (pies)	0	2	9	24	42	71

Límites

- Un primer paso para hallar la velocidad una vez que han transcurrido 2 segundos, es encontrar la velocidad promedio durante el intervalo: $2 \leq t \leq 4$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$
$$= \frac{42 - 9}{4 - 2}$$
$$= 16.5 \text{ pies/s}$$

- Del mismo modo, la velocidad promedio en el intervalo $2 \leq t \leq 3$ es:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{24 - 9}{3 - 2} = 15 \text{ pies/s}$$

Límites

- Tenemos la sensación de que la velocidad en el instante $t = 2$ no puede ser muy diferente de la velocidad promedio durante un corto intervalo de tiempo desde $t = 2$. Así que imaginemos que se ha medido la distancia recorrida en intervalos de tiempo de 0.1 segundo como se ve en la siguiente tabla:

t	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
d	9.00	10.02	11.16	12.45	13.96	15.80

- Entonces podemos calcular, por ejemplo, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo [2,2.5]:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{15.80 - 9.00}{2.5 - 2} = 13.6 \text{ pies/s}$$

Límites

- Los resultados de estos cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Intervalo de tiempo	[2, 3]	[2, 2.5]	[2, 2.4]	[2, 2.3]	[2, 2.2]	[2, 2.1]
Velocidad promedio (pies/s)	15.0	13.6	12.4	11.5	10.8	10.2

- Las velocidades promedio durante intervalos sucesivamente más pequeños parecen estar aproximándose cada vez más a un número cercano a 10 y, por tanto, esperaríamos que la velocidad en exactamente $t = 2$ sea de 10 pies/s.

Límites

- En la figura 8 se muestra una representación gráfica del movimiento del automóvil al ubicar los puntos correspondientes a la distancia recorrida como función del tiempo. Si escribimos $d = f(t)$, entonces $f(t)$ es el número de pies recorridos después de t segundos. La velocidad promedio en el intervalo de tiempo [2,t] es:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

- que es lo mismo que la pendiente de la recta secante *PQ* en la figura 8. La velocidad cuando es el valor límite de esta velocidad promedio cuando *t* se aproxima a 2; es decir:

$$v = \lim_{t \to 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$$

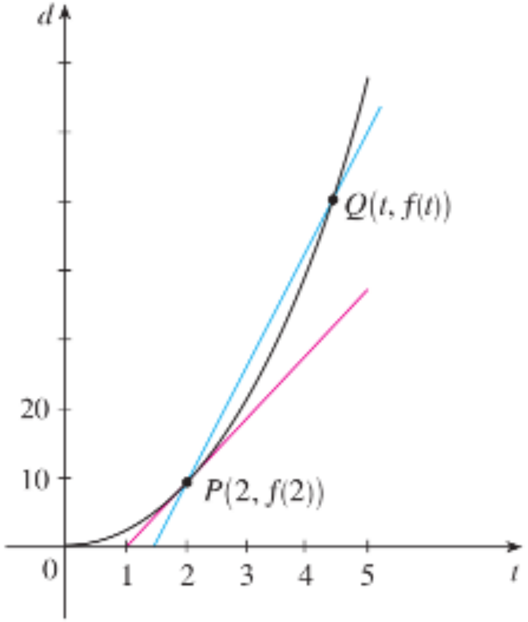


FIGURA 8

Límites

- **EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN**
- La segunda paradoja de Zenón se refiere a una carrera entre el héroe griego Aquiles y una tortuga a la que se ha dado cierta ventaja al inicio. Zenón argumentaba, como se hace ver enseguida, que Aquiles nunca podría rebasar a la tortuga. Supongamos que Aquiles empieza en la posición a_1y la tortuga comienza en posición t_1 (véase la figura 9). Cuando Aquiles alcanza el punto $a_2 = t_1$, la tortuga está más adelante en la posición t_2. Cuando Aquiles llega a $a_3 = t_2$, la tortuga está en t_3. Este proceso continúa indefinidamente y así parece que ¡la tortuga siempre estará por delante! Pero esto desafía el sentido común.

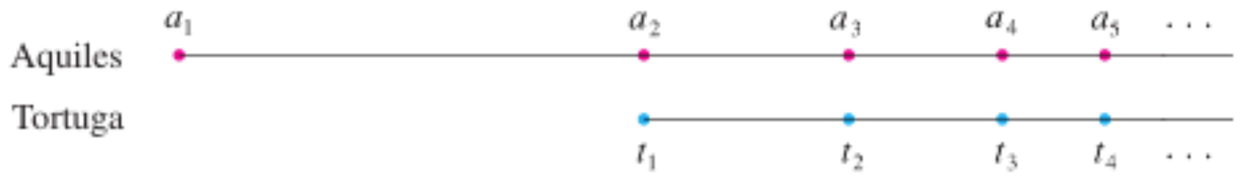


FIGURA 9

Límites

- Una manera de explicar esta paradoja es con el concepto de sucesión. Las posiciones sucesivas de Aquiles (a_1, a_2, a_3,…) o las posiciones sucesivas de la tortuga (t_1, t_2, t_3,…) forman lo que se conoce como una sucesión.
- En general, una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto de números escritos en un orden definido. Por ejemplo, la sucesión:

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

- puede describirse dando la siguiente fórmula para el n-ésimo término:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Límites

- Podemos visualizar esta sucesión ubicando sus términos en una recta numérica como en la figura 10a) o dibujando su gráfica como en la figura 10b). En cualquiera de las dos representaciones observamos que los términos de la sucesión $a_n = 1/n$ se aproximan cada vez más y más a 0 al aumentar n. De hecho, podemos encontrar términos tan pequeños como queramos haciendo n suficientemente grande. En estas condiciones, decimos que el límite de la sucesión es 0, y lo indicamos escribiendo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- En general, la notación:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

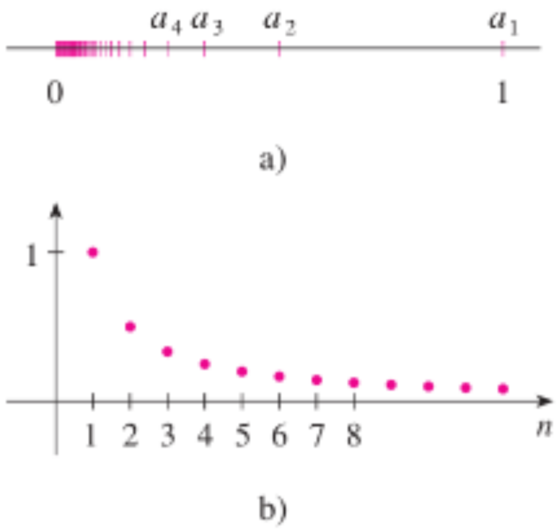


FIGURA 10