

### 25.3.2 Métodos de Runge-Kutta de tercer orden

Para  $n = 3$ , es posible efectuar un desarrollo similar al del método de segundo orden. El resultado de tal desarrollo genera seis ecuaciones con ocho incógnitas. Por lo tanto, se deben dar *a priori* los valores de dos de las incógnitas con la finalidad de establecer los parámetros restantes. Una versión común que se obtiene es

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h \quad (25.39)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.39a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (25.39b)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1h + 2k_2h) \quad (25.39c)$$

Observe que si la EDO está en función sólo de  $x$ , este método de tercer orden se reduce a la regla de Simpson 1/3. Ralston (1962) y Ralston y Rabinowitz (1978) desarrollaron una versión alternativa que proporciona un mínimo para el error de truncamiento. En cualquier caso, los métodos RK de tercer orden tienen errores local y global de  $O(h^4)$  y  $O(h^3)$ , respectivamente, y dan resultados exactos cuando la solución es una cúbica. Al tratarse de polinomios, la ecuación (25.39) será también exacta cuando la ecuación diferencial sea cúbica y la solución sea de cuarto grado. Ello se debe a que la regla de Simpson 1/3 ofrece estimaciones exactas de la integral para cúbicas (recuerde el cuadro 21.3).

### 25.3.3 Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

El más popular de los métodos RK es el de cuarto orden. Como en el caso de los procedimientos de segundo orden, hay un número infinito de versiones. La siguiente, es la forma comúnmente usada y, por lo tanto, le llamamos *método clásico RK de cuarto orden*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (25.40)$$

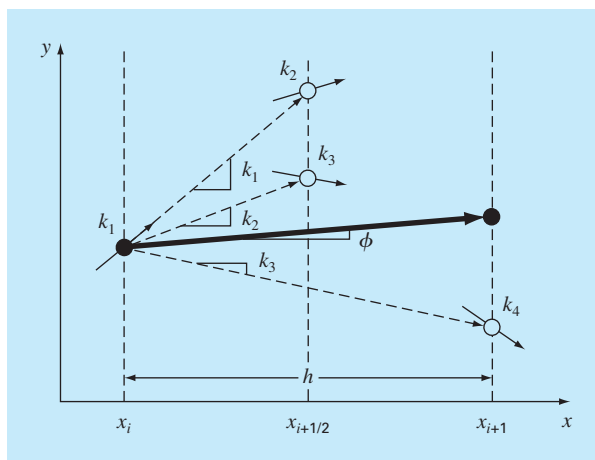
donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.40a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (25.40b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \quad (25.40c)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (25.40d)$$

**FIGURA 25.15**

Representación gráfica de las pendientes estimadas empleadas en el método RK de cuarto orden.

Observe que con las EDO que están en función sólo de  $x$ , el método RK clásico de cuarto orden es similar a la regla de Simpson 1/3. Además, el método RK de cuarto orden tiene similitud con el procedimiento de Heun en cuanto a que se usan múltiples estimaciones de la pendiente para obtener una mejor pendiente promedio en el intervalo. Como se muestra en la figura 25.15, cada una de las  $k$  representa una pendiente. La ecuación (25.40) entonces representa un promedio ponderado de éstas para establecer la mejor pendiente.

### EJEMPLO 25.7 Método clásico RK de cuarto orden

#### Planteamiento del problema.

- a) Con el método clásico RK de cuarto orden [ecuación (25.40)] integre

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

usando un tamaño de paso  $h = 0.5$  y la condición inicial  $y = 1$  en  $x = 0$ ;

- b) De manera similar integre

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

utilizando  $h = 0.5$  con  $y(0) = 2$  desde  $x = 0$  hasta 0.5.

#### Solución.

- a) Se emplean las ecuaciones (25.40a) a (25.40d) para calcular  $k_1 = 8.5$ ,  $k_2 = 4.21875$ ,  $k_3 = 4.21875$  y  $k_4 = 1.25$ ; las cuales se sustituyen en la ecuación (25.40) para dar

$$\begin{aligned} y(0.5) &= 1 + \left\{ \frac{1}{6} [8.5 + 2(4.21875) + 2(4.21875) + 1.25] \right\} 0.5 \\ &= 3.21875 \end{aligned}$$

que es exacta. Así, como la solución verdadera es una cuártica [ecuación (PT7.16)], el método de cuarto orden da un resultado exacto.

b) En este caso, la pendiente al inicio del intervalo se calcula como sigue:

$$k_1 = f(0, 2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3$$

Este valor se utiliza para calcular un valor de  $y$  y una pendiente en el punto medio,

$$y(0.25) = 2 + 3(0.25) = 2.75$$

$$k_2 = f(0.25, 2.75) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.75) = 3.510611$$

Esta pendiente, a su vez, se utiliza para calcular otro valor de  $y$  y otra pendiente en el punto medio,

$$y(0.25) = 2 + 3.510611(0.25) = 2.877653$$

$$k_3 = f(0.25, 2.877653) = 4e^{0.8(0.25)} - 0.5(2.877653) = 3.446785$$

Después, se usará esta pendiente para calcular un valor de  $y$  y una pendiente al final del intervalo,

$$y(0.5) = 2 + 3.071785(0.5) = 3.723392$$

$$k_4 = f(0.5, 3.723392) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.723392) = 4.105603$$

Por último, las cuatro estimaciones de la pendiente se combinan para obtener una pendiente promedio, la cual se utiliza después para realizar la última predicción al final del intervalo.

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(3.510611) + 2(3.446785) + 4.105603] = 3.503399$$

$$y(0.5) = 2 + 3.503399(0.5) = 3.751669$$

que es muy aproximada a la solución verdadera de 3.751521.

### 25.3.4 Métodos de Runge-Kutta de orden superior

Cuando se requieren resultados más exactos, se recomienda el *método RK de quinto orden de Butcher* (1964):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h \quad (25.41)$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (25.41a)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{4}k_1h\right) \quad (25.41b)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{4}h, y_i + \frac{1}{8}k_1h + \frac{1}{8}k_2h\right) \quad (25.41c)$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i - \frac{1}{2}k_2h + k_3h\right) \quad (25.41d)$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{16}k_1h + \frac{9}{16}k_4h\right) \quad (25.41e)$$

$$k_6 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{3}{7}k_1h + \frac{2}{7}k_2h + \frac{12}{7}k_3h - \frac{12}{7}k_4h + \frac{8}{7}k_5h\right) \quad (25.41f)$$

Observe la semejanza entre el método de Butcher y la regla de Boole de la tabla 21.2. Existen las fórmulas RK de orden superior, como el método de Butcher, pero en general, la ganancia en exactitud con métodos mayores al cuarto orden se ve afectada por mayor trabajo computacional y mayor complejidad.

### EJEMPLO 25.8 Comparación de los métodos de Runge-Kutta

**Planteamiento del problema.** Con los métodos RK desde primero hasta quinto orden resuelva

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

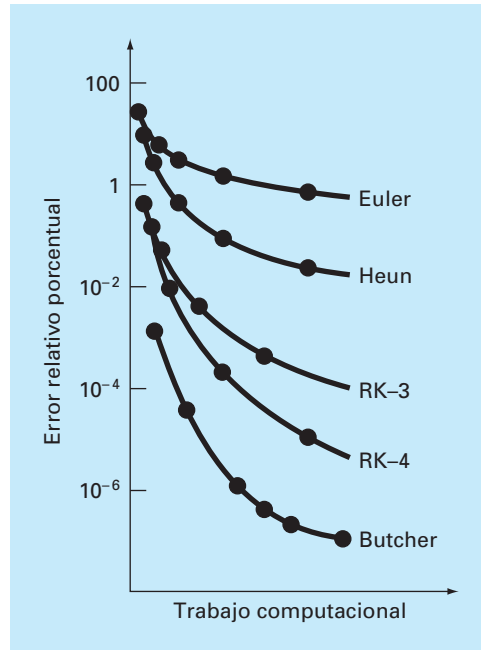
con  $y(0) = 2$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$  con diferentes tamaños de paso. Compare la exactitud de los diferentes métodos para la estimación en  $x = 4$ , basándose en la respuesta exacta,  $y(4) = 75.33896$ .

**Solución.** El cálculo se realiza usando los métodos de Euler, de Heun no iterativo, RK de tercer orden [ecuación (25.39)], clásico RK de cuarto orden y RK de quinto orden de Butcher. Los resultados se presentan en la figura 25.16, donde graficamos el valor absoluto del error relativo porcentual contra el trabajo computacional. Esta última cantidad es equivalente al número requerido de evaluaciones de la función para obtener el resultado, como:

$$\text{Trabajo computacional} = n_f \frac{b-a}{h} \quad (\text{E25.8.1})$$

donde  $n_f$  = número de evaluaciones de la función consideradas para el cálculo particular de RK. Para órdenes  $\leq 4$ ,  $n_f$  es igual al orden del método; sin embargo, observe que la técnica de Butcher de quinto orden requiere seis evaluaciones de la función [ecuaciones (25.41a) a la (25.41f)]. La cantidad  $(b-a)/h$  es el intervalo de integración total dividido entre el tamaño de paso (es decir, es el número necesario de aplicaciones de la técnica RK para obtener el resultado. Como las evaluaciones de la función son generalmente las que consumen más tiempo, la ecuación (E25.8.1) proporciona una medida burda del tiempo de ejecución requerido para obtener la respuesta.

La inspección de la figura 25.16 nos lleva a varias conclusiones: primero, que los métodos de orden superior logran mayor exactitud con el mismo trabajo computacional; segundo, que la ganancia en exactitud lograda por el mayor trabajo tiende a disminuir

**FIGURA 25.16**

Comparación del error relativo porcentual contra los métodos de RK, desde el de primero hasta el quinto órdenes.

después de un punto. (Observe que las curvas primero caen con rapidez y después tienden a nivelarse.)

El ejemplo 25.8 y la figura 25.16 nos llevarán a la conclusión de que las técnicas RK de orden superior son siempre los métodos de preferencia. Sin embargo, deben considerarse otros factores cuando se elija una técnica de solución, tales como el costo de programación y los requerimientos de exactitud del problema. Las alternativas (ventajas y desventajas) se explorarán con detalle en las aplicaciones a la ingeniería en el capítulo 28 y en el epílogo de la parte siete.

### 25.3.5 Algoritmos computacionales para los métodos de Runge-Kutta

Como en el caso de todos los métodos expuestos en este capítulo, las técnicas RK se ajustan muy bien al algoritmo general formulado en la figura 25.7. La figura 25.17 muestra el pseudocódigo para determinar la pendiente del método clásico RK de cuarto orden [ecuación (25.40)]. Las subrutinas que calculan las pendientes para todas las otras versiones se programan fácilmente de forma similar.