



FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS  
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA  
Inferência Estatística

**Tradução de Probability and Statistics by  
DeGroot & Schervish**

VICTOR GABRIEL HARUO IWAMOTO

Rio de Janeiro – RJ  
August 2025

## 7.1 Inferência Estatística

Lembre-se de nossos vários exemplos de ensaios clínicos. O que poderíamos dizer sobre a probabilidade de um futuro paciente responder com sucesso ao tratamento depois de observarmos os resultados de uma coleção de outros pacientes? Essa é a questão que a inferência estatística se destina a abordar. Em geral, a inferência estatística consiste em fazer declarações probabilísticas sobre quantidades desconhecidas. Por exemplo, podemos calcular médias, variâncias, quantis e algumas outras quantidades que ainda serão introduzidas sobre variáveis aleatórias não observadas e parâmetros desconhecidos de distribuições. Nosso objetivo será dizer o que aprendemos sobre as quantidades desconhecidas após observar alguns dados que acreditamos conter informações relevantes. Aqui estão alguns outros exemplos de questões que a inferência estatística pode tentar responder. O que podemos dizer sobre se uma máquina está funcionando corretamente após observarmos parte de sua produção? Em um processo cível, o que podemos dizer sobre se houve discriminação após observar como diferentes grupos étnicos foram tratados? Os métodos de inferência estatística, que desenvolveremos para abordar essas questões, são construídos sobre a teoria da probabilidade abordada nos capítulos anteriores deste texto.

### Probabilidade e Modelos Estatísticos

Nos capítulos anteriores deste livro, discutimos a teoria e os métodos da probabilidade. À medida que novos conceitos em probabilidade eram introduzidos, também introduzimos exemplos do uso desses conceitos em problemas que agora reconheceremos como *inferência estatística*. Antes de discutir a inferência estatística formalmente, é útil nos recordarmos daqueles conceitos de probabilidade que fundamentarão a inferência.

**Exemplo 7.1.1 Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos.** Uma empresa vende componentes eletrônicos e está interessada em saber por quanto tempo cada componente provavelmente durará. Eles podem coletar dados sobre componentes que foram usados sob condições típicas. Eles optam por usar a família de distribuições exponenciais para modelar o tempo (em anos) desde o momento em que um componente é colocado em serviço até sua falha. Eles gostariam de modelar os componentes como tendo todos a mesma taxa de falha  $\theta$ , mas há incerteza sobre o valor numérico específico de  $\theta$ . Para ser mais preciso, seja  $X_1, X_2, \dots$  uma sequência de tempos de vida de componentes em anos. A empresa acredita que, se soubessem a taxa de falha  $\theta$ , então  $X_1, X_2, \dots$  seriam variáveis aleatórias i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) com distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ . (Ver Seção 5.7 para a definição de distribuições exponenciais. Estamos usando o símbolo  $\theta$  para o parâmetro de nossas distribuições exponenciais em vez de  $\beta$  para corresponder ao restante da notação neste capítulo.) Suponha que os dados que a empresa irá observar

consistam nos valores de  $X_1, \dots, X_m$ , mas que eles ainda estejam interessados em  $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots$ . Eles também estão interessados em  $\theta$  porque está relacionado ao tempo de vida médio. Como vimos na Eq. (5.7.17), a média de uma variável aleatória exponencial com parâmetro  $\theta$  é  $1/\theta$ , razão pela qual a empresa pensa em  $\theta$  como a taxa de falha.

Imaginamos um experimento cujos resultados são sequências de tempos de vida como descrito acima. Como mencionado, se soubéssemos o valor de  $\theta$ , então  $X_1, X_2, \dots$  seriam variáveis aleatórias i.i.d. Nesse caso, a lei dos grandes números (Teorema 6.2.4) diz que a média  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  converge em probabilidade para a média  $1/\theta$ . E o Teorema 6.2.5 diz que  $n / \sum_{i=1}^n X_i$  converge em probabilidade para  $\theta$ . Como  $\theta$  é uma função da sequência de tempos de vida que constituem cada resultado experimental, ele pode ser tratado como uma variável aleatória. Suponha que, antes de observar os dados, a empresa acredite que a taxa de falha é provavelmente em torno de 0,5/ano, mas há uma certa incerteza sobre isso. Eles modelam  $\theta$  como uma variável aleatória com distribuição gama com parâmetros 1 e 2. Parafraseando o que foi dito anteriormente, eles também modelam  $X_1, X_2, \dots$  como variáveis aleatórias exponenciais condicionalmente i.i.d. com parâmetro  $\theta$  dado  $\theta$ . Eles esperam aprender mais sobre  $\theta$  examinando os dados da amostra  $X_1, \dots, X_m$ . Eles nunca podem aprender  $\theta$  precisamente, pois isso exigiria observar toda a sequência infinita  $X_1, X_2, \dots$ . Por essa razão,  $\theta$  é apenas hipoteticamente observável.

O Exemplo 7.1.1 ilustra várias características que serão comuns à maioria dos problemas de inferência estatística e que constituem o que chamamos de modelo estatístico.

**Definição 7.1.1 Modelo Estatístico.** Um *modelo estatístico* consiste em uma identificação das variáveis aleatórias de interesse (tanto observáveis quanto apenas hipoteticamente observáveis), uma especificação de uma distribuição de probabilidade conjunta ou de uma família de possíveis distribuições conjuntas para as variáveis aleatórias observáveis, a identificação de quaisquer parâmetros dessas distribuições que se assumem desconhecidos e possivelmente hipoteticamente observáveis, e (se desejado) uma especificação de uma distribuição conjunta para os parâmetros desconhecidos. Quando tratamos os parâmetros desconhecidos  $\theta$  como aleatórios, então a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias observáveis indexada por  $\theta$  é entendida como a distribuição condicional das variáveis aleatórias observáveis dado  $\theta$ .

No Exemplo 7.1.1, as variáveis aleatórias observáveis de interesse formam a sequência  $X_1, X_2, \dots$ , enquanto a taxa de falha  $\theta$  é hipoteticamente observável. A família de possíveis distribuições conjuntas de  $X_1, X_2, \dots$  é indexada

pelo parâmetro  $\theta$ . A distribuição de probabilidade conjunta das observáveis correspondente ao valor  $\theta$  é aquela em que  $X_1, X_2, \dots$  são variáveis aleatórias i.i.d. cada uma com distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ . Esta também é a distribuição condicional de  $X_1, X_2, \dots$  dado  $\theta$  porque estamos tratando  $\theta$  como uma variável aleatória. A distribuição de  $\theta$  é a distribuição gama com parâmetros 1 e 2.

**Nota: Redefinindo Ideias Antigas.** O leitor notará que um modelo estatístico nada mais é do que uma formalização de muitas características que temos usado em vários exemplos ao longo dos capítulos anteriores deste livro. Alguns exemplos precisam apenas de algumas das características que compõem a especificação completa de um modelo estatístico, enquanto outros exemplos usam a especificação completa. Nas Seções 7.1–7.4, nós vamos introduzir uma quantidade considerável de terminologia, grande parte da qual é a formalização de conceitos que foram introduzidos e usados em vários lugares anteriormente no livro. O propósito de toda essa formalidade é nos ajudar a manter os conceitos organizados para que possamos dizer quando estamos aplicando as mesmas ideias de novas maneiras e quando estamos introduzindo novas ideias.

Estamos agora prontos para introduzir formalmente a inferência estatística.

**Definição 7.1.2 Inferência Estatística.** Uma *inferência estatística* é um procedimento que produz uma declaração probabilística sobre alguns ou todas as partes de um modelo estatístico.

Por uma “declaração probabilística”, queremos dizer uma declaração que faz uso de qualquer um dos conceitos de teoria da probabilidade que foram discutidos no texto ou que ainda serão discutidos mais tarde. Por exemplo, eles incluem uma média, uma média condicional, um quantil, uma variância, uma distribuição condicional de uma variável aleatória dada outra, a probabilidade de um evento, uma probabilidade condicional de um evento dado algum outro, e assim por diante. No Exemplo 7.1.1, aqui estão alguns exemplos de inferências estatísticas que alguém poderia querer fazer:

- Produzir uma variável aleatória  $Y$  (uma função de  $X_1, \dots, X_m$ ) tal que  $\Pr(Y \geq \theta | \theta) = 0.9$ .
- Produzir uma variável aleatória  $Y$  que se espera que esteja próxima de  $\theta$ .
- Computar quão provável é que a média dos próximos 10 tempos de vida,  $\frac{1}{10} \sum_{i=m+1}^{m+10} X_i$ , seja pelo menos 2.
- Dizer algo sobre quão confiantes estamos de que  $\theta \leq 0.4$  após observar  $X_1, \dots, X_m$ .

Todos esses tipos de inferência e outros serão discutidos com mais detalhes neste livro.

Na Definição 7.1.1, distinguimos entre variáveis aleatórias observáveis e hipoteticamente observáveis. Reservamos o nome *observável* para uma variável aleatória que temos certeza de que poderíamos observar se dedicássemos o esforço necessário para observá-la. O nome *hipoteticamente observável* foi usado para uma variável aleatória que exigiria recursos infinitos para ser observada, como o limite (quando  $n \rightarrow \infty$ ) das médias amostrais das primeiras  $n$  observáveis. Neste texto, tal variável aleatória hipoteticamente observável corresponderá aos parâmetros da distribuição conjunta dos observáveis como no Exemplo 7.1.1. Como esses parâmetros figuram de forma proeminente em muitos dos tipos de problemas de inferência que veremos, vale a pena formalizar o conceito de parâmetro.

**Definição 7.1.3 Parâmetro/Espaço de parâmetros.** Em um problema de inferência estatística, uma característica ou combinação de características que determina a distribuição conjunta para as variáveis aleatórias de interesse é chamada de *parâmetro* da distribuição. O conjunto  $\Omega$  de todos os valores possíveis de um parâmetro  $\theta$  ou de um vetor de parâmetros  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$  é chamado de *espaço de parâmetros*.

Todas as famílias de distribuições introduzidas anteriormente (e a serem introduzidas mais tarde) neste livro têm parâmetros que estão incluídos nos nomes dos membros individuais da família. Por exemplo, a família de distribuições binomiais tem parâmetros que chamamos de  $n$  e  $p$ , a família de distribuições normais é parametrizada pela média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  de cada distribuição, a família de distribuições uniformes em intervalos é parametrizada pelos extremos dos intervalos, a família de distribuições exponenciais é parametrizada pela taxa de parâmetro  $\theta$ , e assim por diante. No Exemplo 7.1.1, o parâmetro  $\theta$  (a taxa de falha) deve ser positivo. Portanto, a menos que certos valores positivos de  $\theta$  possam ser explicitamente descartados como valores possíveis de  $\theta$ , o espaço de parâmetros  $\Omega$  será o conjunto de todos os números positivos. Como outro exemplo, suponha que a distribuição das alturas dos indivíduos em uma certa população seja assumida como a distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , mas que os valores exatos de  $\mu$  e  $\sigma^2$  sejam desconhecidos. A média  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  determinam a distribuição normal particular para as alturas dos indivíduos. Assim,  $(\mu, \sigma^2)$  pode ser considerado um par de parâmetros. Neste exemplo de alturas, tanto  $\mu$  quanto  $\sigma^2$  devem ser positivos. Portanto, o espaço de parâmetros  $\Omega$  pode ser considerado como o conjunto de todos os pares  $(\mu, \sigma^2)$  tais que  $\mu > 0$  e  $\sigma^2 > 0$ . Se a distribuição normal neste exemplo representa a distribuição das alturas em polegadas dos indivíduos nesta população particular, podemos ter certeza de que  $30 < \mu < 100$  e  $\sigma^2 < 50$ . Nesse caso, o espaço de parâmetros  $\Omega$  poderia ser considerado como o conjunto menor de todos os

pares  $(\mu, \sigma^2)$  tais que  $30 < \mu < 100$  e  $0 < \sigma^2 < 50$ .

A característica importante do espaço de parâmetros  $\Omega$  é que ele deve conter todos os valores possíveis dos parâmetros em um dado problema, para que possamos ter certeza de que o valor real do vetor de parâmetros é um ponto em  $\Omega$ .

**Exemplo 7.1.2 Um Ensaio Clínico.** Suponha que 40 pacientes receberão um tratamento para uma condição e que observaremos para cada paciente se ele se recupera ou não da condição. Podemos também estar interessados em uma grande coleção de pacientes adicionais que receberão o mesmo tratamento. Para ser específico, para cada paciente  $i = 1, 2, \dots$ , seja  $X_i = 1$  se o paciente  $i$  se recuperar, e seja  $X_i = 0$  se não. Como uma coleção de possíveis distribuições para  $X_1, X_2, \dots$ , poderíamos escolher dizer que os  $X_i$  são i.i.d. tendo a distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$  para  $0 \leq p \leq 1$ . Neste caso, o parâmetro  $p$  é conhecido por estar no intervalo  $[0, 1]$ , e este intervalo poderia ser considerado o espaço de parâmetros. Note também que a lei dos grandes números (Teorema 6.2.4) diz que  $p$  é o limite, quando  $n$  tende ao infinito, da proporção dos primeiros  $n$  pacientes que se recuperam.

Na maioria dos problemas, existe uma interpretação natural para o parâmetro como uma característica de possíveis distribuições de nossos dados. No Exemplo 7.1.2, o parâmetro  $p$  tem uma interpretação natural como a proporção de nossa população de pacientes que se recupera do tratamento. No Exemplo 7.1.1, o parâmetro  $\theta$  tem uma interpretação natural como uma taxa de falha, ou seja, um sobre o tempo de vida médio de uma grande população de tempos de vida. Tais casos, inferência sobre parâmetros pode ser interpretada como inferência sobre as características que o parâmetro representa. Neste texto, todos os parâmetros terão tais interpretações naturais. Em exemplos que se encontram fora de um curso introdutório, as interpretações podem não ser tão diretas.

## Exemplos de Inferência Estatística

Aqui estão alguns dos exemplos de modelos estatísticos e inferências que foram introduzidos anteriormente no texto.

**Exemplo 7.1.3 Um Ensaio Clínico.** O ensaio clínico introduzido no Exemplo 2.1.4 estava preocupado com a probabilidade de os pacientes evitarem uma recaída enquanto recebiam vários tratamentos. Para cada  $i$ , seja  $X_i = 1$  se o paciente  $i$  no tratamento com imipramina evitar a recaída e  $X_i = 0$  caso contrário. Seja  $P$  a proporção de pacientes que evitam a recaída em um grande grupo recebendo tratamento com imipramina. Se  $P$  for desconhecido, podemos modelar  $X_1, X_2, \dots$  como i.i.d. variáveis aleatórias de Bernoulli com parâme-

tro  $p$  condicional a  $P = p$ . Os pacientes na coluna da imipramina da Tabela 2.1 devem nos fornecer alguma informação que mude nossa incerteza sobre  $P$ . Uma inferência estatística consistiria em fazer uma declaração de probabilidade sobre os dados e/ou  $P$ , e o que os dados e  $P$  nos dizem um sobre o outro. Por exemplo, no Exemplo 4.7.8, assumimos que  $P$  tinha a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , e encontramos a distribuição condicional de  $P$  dados os resultados observados do estudo. Também calculamos a média condicional de  $P$  dados os resultados do estudo, bem como o E.M.Q. (Erro Médio Quadrático) para prever  $P$  tanto antes quanto depois de observar os resultados do estudo.

**Exemplo 7.1.4 Partículas Radioativas.** No Exemplo 5.7.8, partículas radioativas atingem um alvo de acordo com um processo de Poisson com taxa desconhecida  $\beta$ . No Exercício 22 da Seção 5.7, foi solicitado que você encontrasse a distribuição condicional de  $\beta$  após observar o processo de Poisson por um certo período de tempo.

**Exemplo 7.1.5 Antropometria de Besouros Pulga.** No Exemplo 5.10.2, plotamos duas medidas físicas de uma amostra de 31 besouros pulga juntamente com contornos de uma distribuição normal bivariada. A família de distribuições normais bivariadas é parametrizada por cinco quantidades: as duas médias, as duas variâncias e a correlação. A escolha de qual conjunto desses cinco parâmetros usar para os dados ajustados é uma forma de inferência estatística conhecida como *estimação*.

**Exemplo 7.1.6 Intervalo para a Média.** Suponha que as alturas dos homens em uma certa população sigam a distribuição normal com média  $\mu$  e variância 9, como no Exemplo 5.6.7. Desta vez, assuma que não conhecemos o valor da média  $\mu$ , mas desejamos aprender sobre ela amostrando da população. Suponha que decidamos amostrar  $n = 36$  homens e seja  $\bar{X}_n$  a média de suas alturas. Então o intervalo  $(\bar{X}_n - 0.98, \bar{X}_n + 0.98)$  calculado no Exemplo 5.6.8 tem a propriedade de que conterá o valor de  $\mu$  com probabilidade 0.95.

**Exemplo 7.1.7 Discriminação na Seleção do Júri.** No Exemplo 5.8.4, estávamos interessados em saber se havia evidência de discriminação contra Mexicano-Americanos na seleção do júri. A Figura 5.8 mostra como pessoas que entraram no caso com diferentes opiniões sobre a extensão da discriminação (se houver) poderiam alterar suas opiniões à luz do aprendizado da evidência numérica apresentada no caso.

**Exemplo 7.1.8 Tempos de Serviço em uma Fila.** Suponha que clientes em uma fila devam esperar por serviço e que estamos interessados em observar os tempos de serviço de vários clientes. Suponha que estejamos interessados na taxa em que os clientes são atendidos. Seja  $Z$  a taxa de serviço, e no Exemplo 5.7.4, mostramos como encontrar a distribuição condicional de  $Z$  dados vários tempos de serviço observados.

## Classes Gerais de Problemas de Inferência

**Previsão.** Uma forma de inferência é tentar prever variáveis aleatórias que ainda não foram observadas. No Exemplo 7.1.1, podemos estar interessados na média dos próximos 10 tempos de vida,  $\frac{1}{10} \sum_{i=m+1}^{m+10} X_i$ . No exemplo do ensaio clínico (Exemplo 7.1.3), podemos estar interessados em quantos pacientes no grupo da imipramina terão sucesso. Em praticamente todo problema de inferência estatística em que não observamos todos os dados relevantes, a previsão é possível. Quando a quantidade não observada a ser prevista é um parâmetro, a previsão é geralmente chamada de *estimação*, como no Exemplo 7.1.5.

**Problemas de Decisão Estatística.** Em muitos problemas de inferência estatística, após a análise de dados experimentais, devemos escolher entre várias decisões de classes com a propriedade de que as consequências de cada decisão disponível dependem do valor desconhecido de algum parâmetro. Por exemplo, podemos ter que estimar a taxa de falha  $\theta$  de nossos componentes eletrônicos quando as consequências dependem de quão próxima nossa estimativa de  $\theta$  está do valor correto. Como outro exemplo, podemos ter que decidir se a proporção desconhecida  $P$  de pacientes no exemplo da imipramina (Exemplo 7.1.3) é maior ou menor que uma constante especificada quando as consequências dependem de onde  $P$  se encontra em relação à constante. Este último tipo de inferência está intimamente relacionado a *testes de hipóteses*, o assunto do Capítulo 9.

**Delineamento Experimental.** Em alguns problemas de inferência estatística, temos algum controle sobre o tipo ou a quantidade de dados experimentais que serão coletados. Por exemplo, considere um experimento para determinar a resistência média à tração de um certo tipo de liga como uma função da pressão e temperatura em que a liga é produzida. Dentro dos limites de certos orçamentos e restrições de tempo, pode ser possível para o experimentador escolher os níveis de pressão e temperatura nos quais os espécimes experimentais da liga serão produzidos, e também especificar o número de espécimes a serem produzidos em cada um desses níveis. Tal problema, no qual o experimentador pode escolher (pelo menos até certo ponto) o delineamento experimental particular a ser realizado, é chamado de problema de *delineamento experimental*. Obviamente, o delineamento de um experimento e a análise estatística dos dados experimentais estão intimamente relacionados. Não se pode projetar um experimento eficaz sem considerar a análise estatística subsequente que será realizada nos dados que serão obtidos. E não se pode realizar uma análise estatística significativa



de dados experimentais sem considerar o delineamento experimental particular do qual os dados foram derivados.

**Outras Inferências.** As classes gerais de problemas descritas acima, bem como os exemplos mais específicos que apareceram anteriormente, pretendem ser ilustrações de tipos de inferências estatísticas que poderemos realizar com a teoria e métodos introduzidos neste texto. A gama de possíveis modelos, inferências e métodos que podem surgir quando os dados são observados em problemas de pesquisa reais excede em muito o que podemos introduzir aqui. Espera-se que, ao obter uma compreensão dos problemas que cobrimos aqui, o leitor terá uma apreciação do que precisa ser feito quando um problema estatístico mais desafiador surge.

## Definição de uma Estatística

**Exemplo 7.1.9 Tempos de Falha de Rolamentos de Esferas.** No Exemplo 5.6.9, tínhamos uma amostra dos números de milhões de revoluções antes da falha para 23 rolamentos de esferas. Modelamos os tempos de vida como uma amostra aleatória de uma distribuição lognormal. Podemos supor que os parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  dessa distribuição lognormal são desconhecidos e que talvez queiramos fazer alguma inferência sobre eles. Gostaríamos de fazer uso dos 23 valores observados para fazer qualquer inferência. Mas precisamos acompanhar todos os 23 valores ou existem alguns resumos dos dados sobre os quais nossa inferência será baseada?

Cada inferência estatística que aprenderemos a realizar neste livro será baseada em um ou alguns resumos dos dados disponíveis. Tais resumos de dados surgem com tanta frequência e são tão fundamentais para a inferência que recebem um nome especial.

**Definição 7.1.4 Estatística.** Suponha que as variáveis aleatórias observáveis de interesse sejam  $X_1, \dots, X_n$ . Seja  $r$  uma função de valor real arbitrária de  $n$  variáveis reais. Então a variável aleatória  $T = r(X_1, \dots, X_n)$  é chamada de *estatística*.

Três exemplos de estatísticas são a média amostral  $\bar{X}_n$ , o máximo  $Y_n$  dos valores de  $X_1, \dots, X_n$ , e a função  $r(X_1, \dots, X_n)$ , que tem o valor constante 3 para todos os valores de  $X_1, \dots, X_n$ .

**Exemplo 7.1.10 Tempos de Falha de Rolamentos de Esferas.** No

Exemplo 7.1.9, suponha que estivéssemos interessados em fazer uma declaração sobre quão longe  $\mu$  está de 40. Então, poderíamos querer usar a estatística

$$T = \left| \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} \log(X_i) - 4 \right|$$

em nosso procedimento de inferência. Neste caso,  $T$  é uma medida ingênua de quão longe os dados sugerem que  $\mu$  está de 40.

**Exemplo 7.1.11 Intervalo para a Média.** No Exemplo 7.1.6, construímos um intervalo que tem probabilidade 0.95 de conter  $\mu$ . Os extremos do intervalo, a saber,  $\bar{X}_n - 0.98$  e  $\bar{X}_n + 0.98$ , são estatísticas.

Muitas inferências podem prosseguir sem construir estatísticas explicitamente como um passo preliminar. No entanto, a maioria das inferências envolverá o uso de estatísticas que poderiam ser identificadas antecipadamente. E saber quais estatísticas são úteis em quais circunstâncias pode simplificar muito a inferência. Expressar uma inferência em termos de uma estatística também pode nos ajudar a decidir quão bem a inferência atende às nossas necessidades. Por exemplo, no Exemplo 7.1.10, se estimamos  $\mu - 40$  por  $T$ , podemos usar a distribuição de  $T$  para nos ajudar a determinar quão provavelmente é que  $T$  difira de  $|\mu - 40|$  por uma grande quantidade. À medida que construímos inferências específicas mais tarde neste livro, chamaremos a atenção para aquelas estatísticas que desempenham papéis importantes na inferência.

## Parâmetros como Variáveis Aleatórias

Há alguma controvérsia sobre se os parâmetros devem ser tratados como variáveis aleatórias ou meramente como números que indexam uma distribuição. Por exemplo, no Exemplo 7.1.3, seja  $P$  a proporção de pacientes que evitam a recaída em um grande grupo que recebe imipramina. Então, dizemos que  $X_1, X_2, \dots$  são i.i.d. variáveis aleatórias de Bernoulli com parâmetro  $p$  condicional a  $P = p$ . Estamos explicitamente pensando em  $P$  como uma variável aleatória, e damos a ele uma distribuição. Uma alternativa seria dizer que  $X_1, X_2, \dots$  são i.i.d. variáveis aleatórias de Bernoulli com parâmetro  $p$  onde  $p$  é desconhecido e deixar por isso mesmo. Se realmente queremos calcular algo como a probabilidade condicional de que a proporção de pacientes seja maior que 0.5 dados os resultados dos primeiros 40 pacientes, então devemos tratar  $P$  como uma variável aleatória. Por outro lado, se estamos apenas interessados em fazer declarações de probabilidade que são indexadas pelo valor de  $p$ , então não precisamos pensar em  $p$  como uma variável aleatória. Por exemplo, podemos desejar encontrar duas variáveis aleatórias  $Y_1$  e  $Y_2$  (funções de  $X_1, \dots, X_{40}$ ) tais que, não importa qual  $p$  seja, a probabilidade de que  $Y_1 \leq p \leq Y_2$  seja de

pelo menos 0.9. Algumas das inferências que discutiremos mais adiante neste livro são do primeiro tipo que requerem o tratamento de  $P$  como uma variável aleatória, e algumas são do último tipo em que  $p$  é meramente um índice para uma distribuição.

Alguns estatísticos acreditam que é possível e útil tratar parâmetros como variáveis aleatórias em todos os problemas de inferência estatística. Eles acreditam que a distribuição de um parâmetro é uma probabilidade subjetiva que representa as crenças subjetivas e informadas de um experimentador individual sobre onde o valor verdadeiro do parâmetro provavelmente está. Uma vez que eles atribuem uma distribuição a um parâmetro, essa distribuição não é diferente de qualquer outra distribuição de probabilidade usada no campo da estatística, e todas as regras da teoria da probabilidade se aplicam a cada distribuição. De fato, em todos os casos descritos neste livro, os parâmetros podem realmente ser identificados como limites de funções de grandes coleções de observações potenciais. Aqui está um exemplo típico.

**Exemplo 7.1.12 Parâmetro como um Limite de Variáveis Aleatórias.** No Exemplo 7.1.3, o parâmetro  $P$  pode ser entendido da seguinte forma: Imagine uma sequência infinita de pacientes potenciais recebendo tratamento com imipramina. Suponha que, para cada inteiro  $n$ , os resultados de cada subconjunto ordenado de  $n$  pacientes dessa sequência infinita tenham a mesma distribuição conjunta que os resultados de qualquer outro subconjunto ordenado de  $n$  pacientes. Em outras palavras, suponha que a ordem em que os pacientes aparecem na sequência seja irrelevante para o resultado do tratamento. Seja  $P_n$  a proporção de pacientes que não recaem entre os primeiros  $n$  pacientes. Pode-se mostrar que a probabilidade é 1 de que  $P_n$  convirja para algo quando  $n \rightarrow \infty$ . Essa algo pode ser pensado como  $P$ , o que tem sido chamado de proporção de sucessos em uma população muito grande. Nesse sentido,  $P$  é uma variável aleatória porque é uma função de outros modelos de variáveis aleatórias. Um argumento semelhante pode ser feito em todos os modelos estatísticos deste livro, envolvendo parâmetros, mas a matemática necessária para tornar esses argumentos precisos é muito avançada para ser apresentada aqui (o Capítulo 12 de Schervish (1995) contém os detalhes necessários). Estatísticos que argumentam desta forma são ditos aderir à filosofia Bayesiana de estatística e são chamados de *Bayesianos*.

Há outra linha de raciocínio que leva naturalmente a tratar  $P$  como uma variável aleatória no Exemplo 7.1.12 sem depender de uma sequência infinita de pacientes potenciais. Suponha que o número de pacientes potenciais, embora grande, seja finito, digamos  $N$ . Então podemos fazer a aproximação na Seção 5.3.4 aplicável. Então  $P$  é apenas a proporção de sucessos entre a grande população de  $N$  pacientes. Condicional a  $P = p$ , o número de sucessos em uma amostra de  $n$  pacientes será aproximadamente uma variável aleatória binomial

com parâmetros  $n$  e  $p$  de acordo com o Teorema 5.3.4. Se os resultados dos pacientes na amostra são variáveis aleatórias, entre outras coisas, então a proporção de sucessos entre eles também é uma variável aleatória. Há outro grupo de estatísticos que acredita que em muitos problemas não é apropriado atribuir uma distribuição a um parâmetro, mas em vez disso, afirma que o valor verdadeiro do parâmetro é um certo número fixo cujo valor por acaso é desconhecido para o experimentador. Esses estatísticos atribuem uma distribuição a um parâmetro apenas quando há extensa informação prévia sobre as frequências relativas com que parâmetros similares tomaram cada um de seus valores possíveis em experimentos passados. Se dois cientistas diferentes pudessem concordar sobre quais experimentos passados eram similares ao experimento atual, então eles poderiam concordar sobre uma distribuição a ser atribuída ao parâmetro. Por exemplo, suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote manufaturado seja desconhecida. Suponha também que o mesmo fabricante produziu muitos desses lotes de itens no passado e que registros detalhados foram mantidos sobre as proporções de itens defeituosos em lotes passados. As frequências relativas para lotes passados poderiam então ser usadas para construir uma distribuição para  $\theta$ . Estatísticos que argumentariam desta forma são ditos aderir à filosofia frequentista de estatística e são chamados de *frequentistas*.

Os frequentistas baseiam-se na suposição de que existem sequências infinitas de variáveis aleatórias para dar sentido à maioria de suas declarações de probabilidade. Uma vez que se assume a existência de tal sequência infinita, descobre-se que os parâmetros das distribuições que estão sendo usadas são limites de funções das sequências infinitas, assim como fazem os Bayesianos descritos acima. Desta forma, os parâmetros são variáveis aleatórias porque são funções de outras variáveis aleatórias. O ponto de desacordo entre os dois grupos é se é útil ou mesmo possível atribuir uma distribuição a tais parâmetros.

Tanto Bayesianos quanto frequentistas concordam sobre a utilidade de famílias de distribuições para observações indexadas por parâmetros. Os Bayesianos referem-se à distribuição indexada pelo valor do parâmetro  $\theta$  como a distribuição condicional das observações dado que o parâmetro é igual a  $\theta$ . Os frequentistas referem-se à distribuição indexada por  $\theta$  como a distribuição das observações quando  $\theta$  é o valor verdadeiro do parâmetro. Os dois grupos concordam que sempre que uma distribuição pode ser atribuída a um parâmetro, a teoria e os métodos a serem descritos neste capítulo são aplicáveis e úteis. Nas Seções 7.2–7.4, nós explicitamente assumiremos que cada parâmetro é uma variável aleatória e atribuiremos a ele uma distribuição que representa as probabilidades de que o parâmetro esteja em vários subconjuntos do espaço de parâmetros. A partir da Seção 7.5, consideraremos técnicas de estimação que não se baseiam na atribuição de distribuições a parâmetros.

## 7.2 Distribuições a Priori e a Posteriori

A distribuição de um parâmetro antes da observação de quaisquer dados é chamada de distribuição *a priori*. A distribuição condicional do parâmetro, dados os valores observados, é chamada de distribuição *a posteriori*. Se inserirmos os valores observados dos dados na f.d.p. (função de densidade de probabilidade) ou f.p. (função de probabilidade) condicional, e considerarmos o resultado como uma função apenas do parâmetro, o resultado é chamado de função de *verossimilhança*.

### A Distribuição a Priori

**Exemplo 7.2.1 Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos.** No Exemplo 7.1.1, os tempos de vida  $X_1, X_2, \dots$  de componentes eletrônicos foram modelados como variáveis aleatórias i.i.d. exponenciais com parâmetro  $\theta$  condicional a  $\theta$ , e  $\theta$  foi interpretado como a taxa de falha dos componentes. Notamos que  $n / \sum_{i=1}^n X_i$  deveria convergir em probabilidade para  $\theta$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Dissemos então que  $\theta$  tinha a distribuição gama com parâmetros 1 e 2.

A distribuição de  $\theta$  mencionada no final do Exemplo 7.2.1 foi atribuída antes de se observar a vida útil de qualquer componente. Por essa razão, chamamos isso de *distribuição a priori*.

**Definição 7.2.1 Distribuição a Priori/f.p./f.d.p.** Suponha que se tenha um modelo estatístico com parâmetro  $\theta$ . Se trata  $\theta$  como uma variável aleatória, então a distribuição que se atribui a  $\theta$  antes de observar quaisquer outras variáveis aleatórias de interesse é chamada de sua *distribuição a priori*. Se o espaço de parâmetros for no máximo contável, então a distribuição a priori é discreta e sua f.p. é chamada de *f.p. a priori* de  $\theta$ . Se a distribuição a priori for contínua, então sua f.d.p. é chamada de *f.d.p. a priori* de  $\theta$ . Usaremos comumente o símbolo  $\xi(\theta)$  para denotar a f.p. ou f.d.p. a priori de  $\theta$ .

Quando se trata um parâmetro como uma variável aleatória, o nome “distribuição a priori” é meramente outro nome para a distribuição marginal do parâmetro.

**Exemplo 7.2.2 Moeda Justa ou de Duas Caras.** Seja  $\theta$  a probabilidade de obter uma cara quando uma certa moeda é lançada, e suponha que se saiba que a moeda é justa ou tem cara em ambos os lados. Portanto, os únicos valores possíveis de  $\theta$  são  $\theta = 1/2$  e  $\theta = 1$ . Se a probabilidade a priori de que a moeda é justa for 0.8, então a f.p. a priori de  $\theta$  é  $\xi(1/2) = 0.8$  e  $\xi(1) = 0.2$ .

**Exemplo 7.2.3 Proporção de Itens Defeituosos.** Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote manufaturado seja desconhecida e que a distribuição a priori atribuída a  $\theta$  seja a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Então a f.d.p. a priori de  $\theta$  é

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < \theta < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.2.1)$$

A distribuição a priori de um parâmetro  $\theta$  deve ser uma distribuição de probabilidade sobre o espaço de parâmetros  $\Omega$ . Assumimos que o experimentador ou estatístico será capaz de resumir seu conhecimento prévio e crenças sobre onde o valor de  $\theta$  provavelmente se encontra em  $\Omega$  na forma de uma distribuição a priori para  $\theta$ . Ou seja, antes que os dados experimentais tenham sido coletados ou observados, a experiência e o conhecimento passados do experimentador o levarão a acreditar que  $\theta$  tem maior probabilidade de estar em certas regiões de  $\Omega$  do que em outras. Assumiremos que as verossimilhanças relativas das diferentes regiões podem ser expressas em termos de uma distribuição de probabilidade em  $\Omega$ , ou seja, a distribuição a priori de  $\theta$ .

**Exemplo 7.2.4 Tempo de Vida de Lâmpadas Fluorescentes.** Suponha que os tempos de vida (em horas) de lâmpadas fluorescentes de um certo tipo devam ser observados e que o tempo de vida de qualquer lâmpada em particular tenha a distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ . Suponha também que o valor exato de  $\theta$  seja desconhecido, e com base na experiência prévia, a distribuição a priori de  $\theta$  seja considerada a distribuição gama para a qual a média é 0.0002 e o desvio padrão é 0.0001. Determinaremos a f.d.p. a priori de  $\theta$ . Suponha que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama com parâmetros  $\alpha_0$  e  $\beta_0$ . Foi mostrado no Teorema 5.7.4 que a média desta distribuição é  $\alpha_0/\beta_0$  e a variância é  $\alpha_0/\beta_0^2$ . Portanto,  $\alpha_0/\beta_0 = 0.0002$  e  $\alpha_0/\beta_0^2 = (0.0001)^2$ . Essas duas equações resultam em  $\alpha_0 = 4$  e  $\beta_0 = 20.000$ . Segue-se de Eq. (5.7.13) que a f.d.p. a priori de  $\theta$  para  $\theta > 0$  é a seguinte:

$$\xi(\theta) = \frac{(20.000)^4}{3!} \theta^3 e^{-20.000\theta}. \quad (7.2.2)$$

Além disso,  $\xi(\theta) = 0$  para  $\theta \leq 0$ .

No restante desta seção e nas Seções 7.3 e 7.4, focaremos em problemas de inferência estatística nos quais o parâmetro  $\theta$  é uma variável aleatória e, portanto, precisa ter uma distribuição atribuída. Referir-nos-emos à distribuição indexada por  $\theta$  para as outras variáveis aleatórias de interesse como a distribuição condicional para essas variáveis aleatórias dado  $\theta$ . Esta é precisamente a linguagem usada no Exemplo 7.2.1 onde o parâmetro é  $\theta$ , a taxa de falha. Referindo-se à f.p. ou f.d.p. condicional de variáveis aleatórias condicionais e

suas f.p.s e f.d.p.s. não condicionais, usaremos a notação da Seção 7.2.1. Por exemplo, se seja  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$  no Exemplo 7.2.1, a f.d.p. condicional de  $\mathbf{X}$  dado  $\theta$  é

$$f_m(\mathbf{x}|\theta) = \begin{cases} \theta^m \exp(-\theta[x_1 + \dots + x_m]) & \text{para todos } x_i > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (7.2.3)$$

Em muitos problemas, como no Exemplo 7.2.1, os dados observáveis  $X_1, X_2, \dots$  são modelados como uma amostra aleatória de uma distribuição univariada indexada por  $\theta$ . Nestes casos, seja  $f(x|\theta)$  a f.p. ou f.d.p. de uma única variável aleatória sob a distribuição indexada por  $\theta$ . Em tal caso, usando a notação acima,

$$f_m(\mathbf{x}|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_m|\theta).$$

Quando tratamos  $\theta$  como uma variável aleatória,  $f(x_i|\theta)$  é a f.p. ou f.d.p. condicional de cada observação  $X_i$  dado  $\theta$ , e as observações são condicionalmente i.i.d. dado  $\theta$ . Em resumo, as duas expressões a seguir devem ser entendidas como equivalentes:

- $X_1, \dots, X_n$  formam uma amostra aleatória com f.p. ou f.d.p.  $f(x|\theta)$ .
- $X_1, \dots, X_n$  são condicionalmente i.i.d. dado  $\theta$  com f.p. ou f.d.p. condicional  $f(x|\theta)$ .

Embora geralmente usemos a primeira expressão por simplicidade, é frequente que a segunda expressão seja útil para lembrar que as duas expressões são equivalentes quando tratamos  $\theta$  como uma variável aleatória.

## Análise de Sensibilidade e Prioris Impróprias

No Exemplo 2.3.8 na página 84, vimos uma situação em que dois conjuntos muito diferentes de probabilidades a priori foram usados para uma coleção de eventos. Após a observação dos dados, no entanto, as probabilidades a posteriori eram bastante semelhantes. No Exemplo 5.8.4 na página 330, usamos uma grande coleção de distribuições a priori para a probabilidade de um parâmetro a fim de ver o quanto o impacto de uma distribuição a priori sobre a probabilidade a posteriori de um único evento importante. É uma prática comum comparar as distribuições a posteriori que surgem de várias distribuições a priori diferentes para ver o quanto o efeito da distribuição a priori tem sobre as respostas a questões importantes. Tais comparações são chamadas de *análise de sensibilidade*.

É muito comum o caso de que diferentes distribuições a priori não fazem muita diferença depois que os dados foram observados. Isso é especialmente verdadeiro se houver muitos dados ou se as distribuições a priori que estão sendo comparadas são muito dispersas. Essa observação tem duas implicações importantes. Primeiro, o fato de que diferentes experimentadores podem não concordar sobre uma distribuição a priori torna-se menos importante se houver muitos dados. Segundo, os experimentadores podem estar menos inclinados

a gastar tempo especificando uma distribuição a priori se não for fazer muita diferença qual deles é especificado. Infelizmente, se não se especifica alguma distribuição a priori, não há como calcular uma distribuição condicional do parâmetro dados os dados.

Como um expediente, existem alguns cálculos disponíveis que tentam capturar a ideia de que os dados contêm muito mais informações do que as disponíveis a priori. Geralmente, esses cálculos envolvem o uso de uma função  $\xi(\theta)$  como se fosse uma f.d.p. a priori para o parâmetro  $\theta$ , mas tal que  $\int \xi(\theta)d\theta = \infty$ , o que viola claramente a definição de f.d.p. Tais prioris são chamadas de *impróprias*. Discutiremos prioris impróprias mais detalhadamente na Seção 7.3.

## A Distribuição a Posteriori

**Exemplo 7.2.5 Tempo de Vida de Lâmpadas Fluorescentes.** No Exemplo 7.2.4, construímos uma distribuição a priori para o parâmetro  $\theta$  que especifica a distribuição exponencial para uma coleção de tempos de vida de lâmpadas fluorescentes. Suponha que observemos uma coleção de  $n$  tais tempos de vida. Como mudariamos a distribuição de  $\theta$  para levar em conta os dados observados?

**Definição 7.2.2 Distribuição/f.p./f.d.p. a Posteriori.** Considere um problema de inferência estatística com parâmetro  $\theta$  e variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$ , a serem observadas. A distribuição condicional de  $\theta$  dados  $X_1, \dots, X_n$  é chamada de *distribuição a posteriori* de  $\theta$ . A f.p. ou f.d.p. condicional de  $\theta$  dados  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  é chamada de *f.p. a posteriori* ou *f.d.p. a posteriori* de  $\theta$  e é tipicamente denotada por  $\xi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ .

Quando se trata o parâmetro como uma variável aleatória, o nome “distribuição a posteriori” é meramente outro nome para a distribuição condicional do parâmetro dados os dados. O teorema de Bayes para variáveis aleatórias (3.6.13) e para vetores aleatórios (3.7.15) nos diz como derivar a f.p. ou f.d.p. a posteriori de  $\theta$  após observar os dados. Reafirmaremos o teorema de Bayes aqui usando a notação específica de distribuições e parâmetros a priori.

**Teorema 7.2.1** Suponha que as  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição para a qual a f.d.p. ou a f.p. é  $f(x|\theta)$ . Suponha também que o valor do parâmetro  $\theta$  seja desconhecido e a f.p. ou f.d.p. a priori de  $\theta$  seja  $\xi(\theta)$ . Então a f.d.p. ou f.p. a posteriori de  $\theta$  é

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta)\xi(\theta)}{g_n(\mathbf{x})} \quad \text{para } \theta \in \Omega,$$

onde  $g_n$  é a f.d.p. ou f.p. conjunta marginal de  $X_1, \dots, X_n$ .



**Prova** Por simplicidade, assumiremos que o espaço de parâmetros  $\Omega$  é um intervalo da reta real ou a reta real inteira e que  $\xi(\theta)$  é uma f.d.p. a priori, em vez de uma f.p. a priori. No entanto, a prova que será dada aqui pode ser facilmente adaptada a um problema em que  $\xi(\theta)$  é uma f.p. Uma vez que as variáveis aleatórias  $X_1, \dots, X_n$  formam uma amostra aleatória da distribuição para a qual a f.d.p. é  $f(x|\theta)$ , segue-se que sua f.d.p. ou f.p. conjunta condicional dado  $\theta$  é

$$f_n(x_1, \dots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta). \quad (7.2.4)$$

Se usarmos a notação vetorial  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , então a f.d.p. conjunta em Eq. (7.2.4) pode ser escrita mais compactamente como  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$ . Eq. (7.2.4) expressa meramente o fato de que  $X_1, \dots, X_n$  são condicionalmente independentes e identicamente distribuídas dado  $\theta$ , cada uma tendo f.d.p. ou f.p.  $f(x|\theta)$ . Se multiplicarmos a f.d.p. ou f.p. conjunta de  $\theta$  por a f.d.p. de  $\xi(\theta)$ , obtemos a f.d.p. ou f.p. conjunta  $(n+1)$ -dimensional de  $X_1, \dots, X_n$  e  $\theta$  na forma

$$f(\mathbf{x}, \theta) = f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta). \quad (7.2.5)$$

A f.d.p. ou f.p. conjunta marginal de  $X_1, \dots, X_n$  pode agora ser obtida integrando o lado direito da Eq. (7.2.5) sobre todos os valores de  $\theta$ . Portanto, a f.d.p. ou f.p. conjunta marginal  $n$ -dimensional de  $X_1, \dots, X_n$  pode ser escrita na forma

$$g_n(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta)d\theta. \quad (7.2.6)$$

Eq. (7.2.6) é apenas uma instância da lei da probabilidade total para variáveis aleatórias (3.7.14). Ademais, a f.d.p. condicional de  $\theta$  dado que  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ , a saber,  $\xi(\theta|\mathbf{x})$ , deve ser igual a  $f(\mathbf{x}, \theta)$  dividido por  $g_n(\mathbf{x})$ . Assim, temos

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta)}{g_n(\mathbf{x})} \quad \text{para } \theta \in \Omega, \quad (7.2.7)$$

que é o teorema de Bayes reafirmado para parâmetros e amostras aleatórias. Se  $\xi(\theta)$  é uma f.p., de modo que a distribuição a priori é discreta, basta substituir a integral em (7.2.6) pela soma sobre todos os valores possíveis de  $\theta$ . ■

**Exemplo 7.2.6 Tempo de Vida de Lâmpadas Fluorescentes.** Suponha novamente, como nos Exemplos 7.2.4 e 7.2.5, que a distribuição dos tempos de vida de lâmpadas fluorescentes de um certo tipo seja a distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ , e a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição gama particular para a qual a f.d.p.  $\xi(\theta)$  é dada por Eq. (7.2.2). Suponha também que os tempos de vida de  $n$  lâmpadas deste tipo sejam observados. Determinaremos a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  dado que  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ . Pela Eq. (5.7.16), a f.d.p. de cada observação  $X_i$  é

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A f.d.p. conjunta de  $X_1, \dots, X_n$  pode ser escrita na seguinte forma, para  $x_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta y},$$

onde  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ . Como  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  será usado na construção da distribuição a posteriori de  $\theta$ , é agora aparente que a estatística  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  será usada em qualquer inferência que faça uso da distribuição a posteriori.

Uma vez que a f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$  é dada por Eq. (7.2.2), segue-se que para  $\theta > 0$ ,

$$f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta) = \theta^n e^{-\theta y} \frac{(20.000)^4}{3!} \theta^3 e^{-20.000\theta} = \frac{(20.000)^4}{3!} \theta^{n+3} e^{-(y+20.000)\theta}. \quad (7.2.8)$$

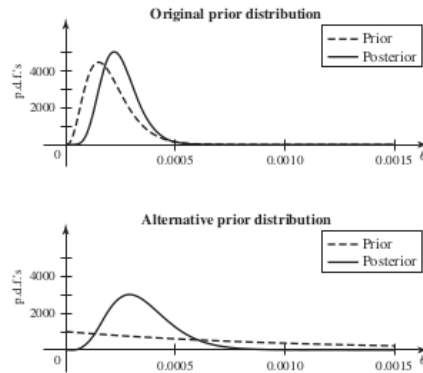
Precisamos calcular  $g_n(\mathbf{x})$ , que é a integral de (7.2.8) sobre todo  $\theta$ :

$$g_n(\mathbf{x}) = \int_0^\infty \frac{(20.000)^4}{3!} \theta^{n+3} e^{-(y+20.000)\theta} d\theta = \frac{(20.000)^4}{3!} \frac{\Gamma(n+4)}{(y+20.000)^{n+4}}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 5.7.3. Portanto,

$$\begin{aligned} \xi(\theta|\mathbf{x}) &= \frac{\frac{(20.000)^4}{3!} \theta^{n+3} e^{-(y+20.000)\theta}}{\frac{(20.000)^4}{3!} \frac{\Gamma(n+4)}{(y+20.000)^{n+4}}} \\ &= \frac{(y+20.000)^{n+4}}{\Gamma(n+4)} \theta^{n+3} e^{-(y+20.000)\theta}, \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

para  $\theta > 0$ . Quando comparamos esta expressão com Eq. (5.7.13), podemos ver que é a f.d.p. da distribuição gama com parâmetros  $n+4$  e  $y+20.000$ . Portanto, esta distribuição gama é a distribuição a posteriori de  $\theta$ . Como um exemplo específico, suponha que observamos os seguintes  $n = 5$  tempos de vida em horas: 2911, 4403, 3237, 5509 e 3118. Então  $y = 16.178$ , e a distribuição a posteriori de  $\theta$  é a distribuição gama com parâmetros 9 e 36.178. O painel superior da Fig. 7.1 exibe tanto a f.d.p. a priori quanto a posteriori neste exemplo. Fica claro a partir dos dados que os dados fizeram com que a distribuição de  $\theta$  mudasse um pouco da priori para a posteriori. Neste ponto, pode ser apropriado realizar uma análise de sensibilidade. Por exemplo, como a distribuição a posteriori mudaria se tivéssemos escolhido uma distribuição a priori diferente? Para ser específico, considere a priori gama com parâmetros 1 e 1000. Esta priori tem o mesmo desvio padrão da priori original, mas a média é cinco vezes maior. A distribuição a posteriori seria então a distribuição gama com parâmetros 6 e 17.178. As f.d.p.s desta priori e posteriori estão no painel inferior da Fig. 7.1. Pode-se ver que tanto a priori quanto a posteriori no painel inferior estão mais espalhadas do que suas contrapartes no painel superior.



É claro que a escolha da priori fará diferença com este pequeno conjunto de dados. Os nomes “a priori” e “a posteriori” derivam das palavras latinas para “anterior” e “posterior”. A distribuição a priori é a distribuição de  $\theta$  que vem antes da observação dos dados, e a distribuição a posteriori vem depois da observação dos dados.

## A Função de Verossimilhança

O denominador no lado direito da Eq. (7.2.7) é simplesmente a integral do numerador sobre todos os valores possíveis de  $\theta$ . Embora o valor desta integral dependa dos valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , ele não depende de  $\theta$  e pode ser tratado como uma constante quando o lado direito da Eq. (7.2.7) é considerado como uma f.d.p. de  $\theta$ . Podemos, portanto, substituir a Eq. (7.2.7) pela seguinte relação:

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta). \quad (7.2.10)$$

O símbolo de proporcionalidade  $\propto$  é usado aqui para indicar que o lado esquerdo é igual ao lado direito, exceto possivelmente por um fator constante, cujo valor pode depender dos valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , mas não depende de  $\theta$ . A constante apropriada que estabelecerá a igualdade dos dois lados na relação (7.2.10) pode ser determinada a qualquer momento usando o fato de que  $\int_{\Omega} \xi(\theta|\mathbf{x})d\theta = 1$ , porque  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  é uma f.d.p. de  $\theta$ . Uma das duas funções no lado direito da Eq. (7.2.10) é a f.d.p. a priori de  $\theta$ . A outra função também tem um nome especial.

**Definição 7.2.3 Função de Verossimilhança.** Quando a f.p. ou f.d.p. conjunta  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  das observações em uma amostra aleatória é considerada como uma função de  $\theta$  para valores dados de  $x_1, \dots, x_n$ , ela é chamada de *função de verossimilhança*.

A relação (7.2.10) afirma que a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  é proporcional ao produto da função de verossimilhança e da f.d.p. a priori de  $\theta$ . Usando a relação de proporcionalidade (7.2.10), muitas vezes é possível determinar a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  sem realizar explicitamente a integração em Eq. (7.2.6). Se pudermos reconhecer o lado direito da relação (7.2.10) como sendo, exceto por uma das f.d.p.s padrão introduzidas no Capítulo 5 ou em outro lugar neste livro, exceto possivelmente por um fator constante, então podemos facilmente determinar o fator apropriado que converterá o lado direito de (7.2.10) em uma f.d.p. adequada de  $\theta$ . Ilustraremos essas ideias considerando novamente o Exemplo 7.2.3.

**Exemplo 7.2.7 Proporção de Itens Defeituosos.** Suponha novamente, como no Exemplo 7.2.3, que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote manufaturado seja desconhecida e que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Suponha também que uma amostra aleatória de  $n$  itens seja retirada do lote, e para  $i = 1, \dots, n$ , seja  $X_i = 1$  se o  $i$ -ésimo item for defeituoso, e seja  $X_i = 0$  caso contrário. Então  $X_1, \dots, X_n$  formam  $n$  ensaios de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ . Determinaremos a f.d.p. a posteriori de  $\theta$ . Segue-se da Eq. (5.2.2) que a f.p. de cada observação  $X_i$  é

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x} & \text{para } x = 0, 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, se seja  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ , então a f.p. conjunta de  $X_1, \dots, X_n$  pode ser escrita na seguinte forma para  $x_i = 0$  ou  $1$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) = \theta^y(1-\theta)^{n-y}. \quad (7.2.11)$$

Uma vez que a f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$  é dada por Eq. (7.2.1), segue-se que para  $0 < \theta < 1$ ,

$$f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta) = \theta^y(1-\theta)^{n-y}. \quad (7.2.12)$$

Quando comparamos esta expressão com Eq. (5.8.3), podemos ver que, exceto por um fator constante, é a f.d.p. da distribuição beta com parâmetros  $\alpha = y+1$  e  $\beta = n-y+1$ . Uma vez que a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  é proporcional ao lado direito da Eq. (7.2.12), segue-se que  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  deve ser a f.d.p. da distribuição beta com parâmetros  $a = y+1$  e  $b = n-y+1$ . Portanto, para  $0 < \theta < 1$ ,

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)} \theta^y(1-\theta)^{n-y}. \quad (7.2.13)$$

Neste exemplo, a estatística  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  está sendo usada para construir a distribuição a posteriori, e, portanto, será usada em qualquer inferência que se baseie na distribuição a posteriori.

**Nota: Constante de Normalização para f.d.p. a Posteriori.** Os passos que nos levaram de (7.2.12) para (7.2.13) são um exemplo de uma técnica muito comum para determinar uma f.d.p. a posteriori. Pode-se extrair qualquer fator constante inconveniente da f.p. ou f.d.p. a priori e da função de verossimilhança antes de multiplicá-los juntos como em (7.2.10). Então, olhamos para o produto resultante, chame-o de  $g(\theta)$ , para ver se o reconhecemos como se parecendo com parte de uma f.d.p. que já vimos. Se, de fato, encontrarmos uma f.d.p. nomeada com a qual estamos familiarizados que seja igual a  $cg(\theta)$ , então nossa f.d.p. a posteriori também é  $cg(\theta)$ , e nossa distribuição a posteriori tem o nome correspondente, assim como no Exemplo 7.2.7.

## Observações Sequenciais e Previsão

Em muitos experimentos, as observações  $X_1, \dots, X_n$ , que formam a amostra aleatória, devem ser obtidas sequencialmente, ou seja, uma de cada vez. Em tal experimento, o valor de  $X_1$  é observado primeiro, o valor de  $X_2$  é observado em seguida, o valor de  $X_3$  é então observado, e assim por diante. Suponha que a f.d.p. a posteriori do parâmetro  $\theta$  após o valor de  $x_1$  ter sido observado, possa ser calculada da maneira usual a partir da relação

$$\xi(\theta|x_1) \propto f(x_1|\theta)\xi(\theta). \quad (7.2.14)$$

Como  $X_1$  e  $X_2$  são condicionalmente independentes dado  $\theta$ , a f.p. ou f.d.p. condicional de  $X_2$  dado  $\theta$  e  $X_1 = x_1$  é a mesma que dado  $\theta$  apenas, a saber,  $f(x_2|\theta)$ . Portanto, a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  na Eq. (7.2.14) serve como a f.d.p. a priori de  $\theta$  quando o valor de  $X_2$  está para ser observado. Assim, após o valor de  $x_2$  ter sido observado, a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  pode ser calculada a partir da relação

$$\xi(\theta|x_1, x_2) \propto f(x_2|\theta)\xi(\theta|x_1). \quad (7.2.15)$$

Podemos continuar desta forma, calculando uma f.d.p. a posteriori atualizada de  $\theta$  após cada observação e usando essa f.d.p. como a f.d.p. a priori de  $\theta$  para a próxima observação. A f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|x_1, \dots, x_{n-1})$  após os valores  $x_1, \dots, x_{n-1}$  terem sido observados, será em última análise a f.d.p. a priori de  $\theta$  para o valor final observado  $x_n$ . A f.d.p. a posteriori após todos os  $n$  valores  $x_1, \dots, x_n$  terem sido observados, será, portanto, especificada pela relação

$$\xi(\theta|x_1, \dots, x_n) \propto f(x_n|\theta)\xi(\theta|x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (7.2.16)$$

Alternativamente, depois de todos os  $n$  valores  $x_1, \dots, x_n$  terem sido observados, poderíamos calcular a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  da maneira usual, combinando a f.d.p. ou f.p. conjunta  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  com a f.d.p. a priori original  $\xi(\theta)$ , como indicado em Eq. (7.2.7). Pode ser mostrado (ver Exercício 8) que a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  será a mesma, independentemente de ser calculada diretamente usando Eq. (7.2.7) ou sequencialmente usando Eqs. (7.2.14), (7.2.15) e (7.2.16). Esta propriedade foi ilustrada na Seção 2.3 (ver página 80) para uma moeda que se sabe ser justa ou ter cara em ambos os lados. Após cada lançamento da moeda,

a probabilidade a posteriori de a moeda ser justa é atualizada. As constantes de proporcionalidade nas Eqs. (7.2.14)-(7.2.16) têm uma interpretação útil. Por exemplo, em (7.2.16) a constante de proporcionalidade é 1 sobre a integral do lado direito com respeito a  $\theta$ . Mas esta integral é a f.d.p. ou f.p. condicional de  $X_n$  dado  $X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$  de acordo com a versão condicional da lei da probabilidade total (3.7.16). Por exemplo, se  $\theta$  tem uma distribuição contínua,

$$f(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) = \int f(x_n|\theta)\xi(\theta|x_1, \dots, x_{n-1})d\theta. \quad (7.2.17)$$

Se estivermos interessados em prever a  $n$ -ésima observação após observar as primeiras  $n - 1$ , podemos usar (7.2.17), que também é 1 sobre a constante de proporcionalidade em Eq. (7.2.16), como a f.d.p. ou f.p. condicional de  $X_n$  dados os primeiros  $n - 1$  observáveis.

**Exemplo 7.2.8 Tempo de Vida de Lâmpadas Fluorescentes.** No Exemplo 7.2.6, condicional a  $\theta$ , os tempos de vida de lâmpadas fluorescentes são variáveis aleatórias exponenciais independentes com parâmetro  $\theta$ . Também observamos os tempos de vida de cinco lâmpadas, e a distribuição a posteriori de  $\theta$  foi encontrada como sendo a distribuição gama com parâmetros 9 e 36.178. Suponha que queiramos prever o tempo de vida  $X_6$  da próxima lâmpada. A f.d.p. condicional de  $X_6$ , o tempo de vida da próxima lâmpada, dadas as primeiras cinco vidas, integra o produto de  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  e  $f(x_6|\theta)$  em relação a  $\theta$ . A f.d.p. a posteriori de  $\theta$  é  $\xi(\theta|\mathbf{x}) = 2.633 \times 10^{36} \theta^8 e^{-36.178\theta}$  para  $\theta > 0$ . Então, para  $x_6 > 0$

$$\begin{aligned} f(x_6|\mathbf{x}) &= \int_0^\infty 2.633 \times 10^{36} \theta^8 e^{-36.178\theta} \theta e^{-x_6\theta} d\theta \\ &= 2.633 \times 10^{36} \int_0^\infty \theta^9 e^{-(x_6+36.178)\theta} d\theta \\ &= 2.633 \times 10^{36} \frac{\Gamma(10)}{(x_6 + 36.178)^{10}} = \frac{9.555 \times 10^{41}}{(x_6 + 36.178)^{10}}. \end{aligned} \quad (7.2.18)$$

Podemos usar esta f.d.p. para realizar qualquer cálculo que desejarmos sobre a distribuição de  $X_6$  dados os tempos de vida observados. Por exemplo, a probabilidade de que a sexta lâmpada dure mais de 3000 horas é igual a

$$\Pr(X_6 > 3000|\mathbf{x}) = \int_{3000}^\infty \frac{9.555 \times 10^{41}}{9 \times 39.178^9} dx_6 = \frac{9.555 \times 10^{41}}{9 \times 39.178^9} = 0.4882.$$

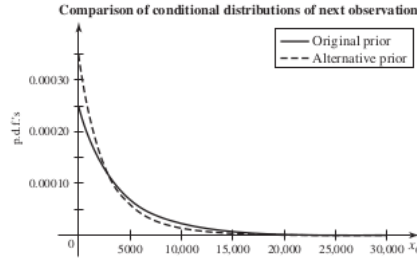
Podemos continuar a análise de sensibilidade que foi iniciada no Exemplo 7.2.6. É importante saber a probabilidade de que o próximo tempo de vida seja de pelo menos 3000, podemos ver quanta influência a escolha da distribuição a priori teve nesta computação. Usando a segunda distribuição a priori (gama com parâmetros 1 e 1000), descobrimos que a distribuição a posteriori de  $\theta$  era

a gama com parâmetros 6 e 17.178. Poderíamos calcular a f.d.p. condicional de  $X_6$  dados os dados observados da mesma forma que fizemos com a priori original, e seria

$$f(x_6|\mathbf{x}) = \frac{1.542 \times 10^{26}}{(x_6 + 17.178)^7}, \quad \text{para } x_6 > 0. \quad (7.2.19)$$

Com esta f.d.p., a probabilidade de que  $X_6 > 3000$  é

$$\Pr(X_6 > 3000|\mathbf{x}) = \int_{3000}^{\infty} \frac{1.542 \times 10^{26}}{(x_6 + 17.178)^7} dx_6 = \frac{1.542 \times 10^{26}}{6 \times 20.178^6} = 0.3807.$$



Como notamos no final do Exemplo 7.2.6, as diferentes prioris fazem uma diferença considerável nas inferências que podemos fazer. É importante ter um valor preciso de  $\Pr(X_6 > 3000|\mathbf{x})$ , precisamos de uma amostra maior. Os dois f.d.p.s diferentes de  $X_6$  podem ser comparados na Fig. 7.2. A f.d.p. de Eq. (7.2.18) é maior para valores intermediários de  $x_6$ , enquanto a de Eq. (7.2.19) é maior para os valores extremos de  $x_6$ .

## Resumo

A distribuição a priori de um parâmetro descreve nossa incerteza sobre o parâmetro antes de observar quaisquer dados. A função de verossimilhança é a f.d.p. ou f.p. condicional dos dados, considerada como uma função do parâmetro dados os dados. A verossimilhança nos diz o quanto os dados alteram nossa incerteza. Valores grandes da verossimilhança corresponderão a valores de parâmetro onde a posteriori será maior do que a priori. Valores baixos da verossimilhança ocorrerão em valores de parâmetro onde a posteriori será menor do que a priori. A distribuição a posteriori do parâmetro é a distribuição condicional do parâmetro dados os dados. Ela é obtida usando o teorema de Bayes para variáveis aleatórias, que vimos pela primeira vez na página 148. Podemos

prever observações futuras que são condicionalmente independentes dos dados observados dado  $\theta$  usando a versão condicional da lei da probabilidade total que vimos na página 163.

## Exercícios

1. Considere novamente a situação descrita no Exemplo 7.2.8. Desta vez, suponha que o experimentador acredite que a distribuição a priori de  $\theta$  é a distribuição gama com parâmetros 1 e 5000. Que valor o experimentador calcularia para  $\Pr(X_6 > 3000|\mathbf{x})$ ?
2. Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote manufaturado seja 0,1 ou 0,2, e que a f.p. (função de probabilidade) a priori de  $\theta$  seja a seguinte:

$$\xi(0.1) = 0.7 \quad \text{e} \quad \xi(0.2) = 0.3.$$

Suponha também que, quando oito itens são selecionados aleatoriamente do lote, descobre-se que exatamente dois deles são defeituosos. Determine a f.p. a posteriori de  $\theta$ .

3. Suponha que o número de defeitos em um rolo de fita de gravação magnética tenha uma distribuição de Poisson para a qual a média  $\lambda$  é 1,0 ou 1,5, e a f.p. a priori de  $\lambda$  é a seguinte:

$$\xi(1.0) = 0.4 \quad \text{e} \quad \xi(1.5) = 0.6.$$

Se um rolo de fita selecionado aleatoriamente apresentar três defeitos, qual é a f.p. a posteriori de  $\lambda$ ?

4. Suponha que a distribuição a priori de algum parâmetro  $\theta$  seja uma distribuição gama para a qual a média é 10 e a variância é 5. Determine a f.d.p. (função de densidade de probabilidade) a priori de  $\theta$ .
5. Suponha que a distribuição a priori de algum parâmetro  $\theta$  seja uma distribuição beta para a qual a média é  $1/3$  e a variância é  $1/45$ . Determine a f.d.p. a priori de  $\theta$ .
6. Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote manufaturado seja desconhecida, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Quando oito itens são selecionados aleatoriamente do lote, descobre-se que exatamente três deles são defeituosos. Determine a distribuição a posteriori de  $\theta$ .
7. Considere novamente o problema descrito no Exercício 6, mas suponha agora que a f.d.p. a priori de  $\theta$  seja a seguinte:

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 2(1 - \theta) & \text{para } 0 < \theta < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Como no Exercício 6, suponha que em uma amostra aleatória de oito itens, exatamente três sejam defeituosos. Determine a distribuição a posteriori de  $\theta$ .

8. Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição para a qual a f.d.p. é  $f(x|\theta)$ , o valor de  $\theta$  é desconhecido, e a f.d.p. a priori de  $\theta$  é  $\xi(\theta)$ . Mostre que a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  é a mesma, quer seja calculada diretamente usando a Eq. (7.2.7) ou sequencialmente usando as Eqs. (7.2.14), (7.2.15) e (7.2.16).
9. Considere novamente o problema descrito no Exercício 6, e assuma a mesma distribuição a priori de  $\theta$ . Suponha, no entanto, que em vez de selecionar uma amostra aleatória de oito itens do lote, realizemos o seguinte experimento: os itens do lote são selecionados aleatoriamente um a um até que exatamente três defeituosos tenham sido encontrados. Se descobirmos que devemos selecionar um total de oito itens neste processo, qual é a distribuição a posteriori de  $\theta$  no final do experimento?
10. Suponha que uma única observação  $X$  deva ser retirada da distribuição uniforme no intervalo  $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ , o valor de  $\theta$  é desconhecido, e a distribuição a priori de  $\theta$  é a distribuição uniforme no intervalo  $[10, 20]$ . Se o valor observado de  $X$  for 12, qual é a distribuição a posteriori de  $\theta$ ?
11. Considere novamente as condições do Exercício 10, e assuma a mesma distribuição a priori de  $\theta$ . Suponha, no entanto, que seis observações sejam selecionadas aleatoriamente da distribuição uniforme no intervalo  $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$ , e seus valores sejam 11.0, 11.5, 11.7, 11.1, 11.4 e 10.9. Determine a distribuição a posteriori de  $\theta$ .

## 7.3 Distribuições a Priori Conjugadas

Para cada um dos modelos estatísticos mais populares, existe uma família de distribuições para o parâmetro com uma propriedade muito especial. Se a distribuição a priori for escolhida como um membro dessa família, então a distribuição a posteriori também será um membro da mesma família. Tal família de distribuições é chamada de *família conjugada*. A escolha de uma distribuição a priori de uma família conjugada tornará o cálculo da distribuição a posteriori particularmente simples.

### Amostragem de uma Distribuição de Bernoulli

**Exemplo 7.3.1 Um Ensaio Clínico.** No Exemplo 5.8.5 (página 330), estávamos observando pacientes em um ensaio clínico. A proporção  $P$  de resultados bem-sucedidos entre todos os pacientes possíveis era uma variável aleatória para a qual escolhemos uma distribuição da família de distribuições beta. Essa escolha tornou o cálculo da distribuição condicional de  $P$  dados os dados observados

muito simples no final daquele exemplo. De fato, a distribuição condicional de  $P$  dados os dados era outro membro da família beta.

O resultado do Exemplo 7.3.1 ocorre em geral e é o assunto do próximo teorema.

**Teorema 7.3.1** Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ , que é desconhecido ( $0 < \theta < 1$ ). Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição beta com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Então a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é a distribuição beta com parâmetros  $\alpha + \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\beta + n - \sum_{i=1}^n x_i$ .

O Teorema 7.3.1 é apenas uma reafirmação do Teorema 5.8.2 (página 329), e sua prova é essencialmente o cálculo no Exemplo 5.8.3.

### Atualizando a Distribuição a Posteriori

Uma implicação do Teorema 7.3.1 é a seguinte: Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote seja desconhecida, a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , e os itens sejam selecionados um de cada vez aleatoriamente do lote. Suponha que o primeiro item inspecionado seja defeituoso, a distribuição a posteriori de  $\theta$  será a distribuição beta com parâmetros  $\alpha + 1$  e  $\beta$ . Se o primeiro item não for defeituoso, a distribuição a posteriori será a distribuição beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta + 1$ . O processo pode ser continuado da seguinte maneira: a cada item inspecionado, a distribuição a posteriori atual de  $\theta$  é trocada por uma nova distribuição beta na qual o valor de ou o parâmetro  $\alpha$  ou o parâmetro  $\beta$  é aumentado em uma unidade, a cada vez que um item defeituoso é encontrado, e o valor do parâmetro  $\beta$  é aumentado em uma unidade a cada vez que um item não defeituoso é encontrado.

**Definição 7.3.1 Família Conjugada/Hiperparâmetros.** Seja  $\mathcal{F}$  uma família de possíveis distribuições sobre um espaço de parâmetros  $\Omega$ . Suponha que, não importa qual observação  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  observarmos, nem qual distribuição a priori  $\xi \in \mathcal{F}$  escolhermos, a distribuição a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  é um membro de  $\mathcal{F}$ . Então  $\mathcal{F}$  é chamada de *família conjugada* de distribuições para amostras das distribuições  $f(x|\theta)$ . Suponha também que a família  $\mathcal{F}$  seja parametrizada por outros parâmetros, então os parâmetros associados para a distribuição a priori são chamados de *hiperparâmetros*, e os parâmetros associados da distribuição a posteriori são chamados de *hiperparâmetros a posteriori*.

O Teorema 7.3.1 diz que a família de distribuições beta é uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de uma distribuição de Bernoulli. Se uma distribuição a priori é uma distribuição beta, então a distribuição a

posteriori em cada estágio de amostragem também será uma distribuição beta, independentemente dos valores da amostra observados. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  na distribuição a priori do Teorema 7.3.1 são os hiperparâmetros. Os correspondentes hiperparâmetros a posteriori de  $\theta$  são  $\alpha + \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\beta + n - \sum_{i=1}^n x_i$ . A estatística  $\sum_{i=1}^n X_i$  é necessária para calcular a distribuição a posteriori, portanto, ela estará presente em qualquer inferência baseada na distribuição a posteriori. Exercícios 23 e 24 introduzem uma coleção geral de f.p.s e f.d.p.s  $f(x|\theta)$  para as quais as famílias de distribuições conjugadas existem. A maioria das famílias de distribuições nomeadas abordadas por esses exercícios são notáveis exceções.

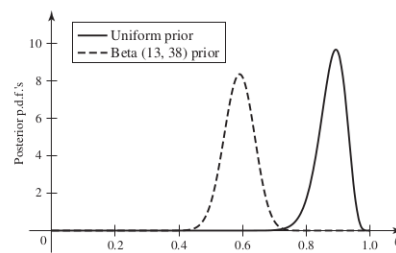
**Exemplo 7.3.2 A Variância da Distribuição Beta a Posteriori.** Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote seja desconhecida, a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , e os itens devam ser selecionados aleatoriamente do lote e inspecionados até que a variância da distribuição a posteriori de  $\theta$  tenha sido reduzida a 0.01 ou menos. Devemos determinar o número total de itens defeituosos e não defeituosos que devem ser obtidos antes que o processo de amostragem seja interrompido. Conforme afirmado na Seção 5.8, a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$  é a distribuição beta com parâmetros 1 e 1. Portanto, depois que  $y$  itens defeituosos e  $z$  itens não defeituosos tiverem sido obtidos, a distribuição a posteriori de  $\theta$  será a distribuição beta com  $\alpha = y + 1$  e  $\beta = z + 1$ . Foi mostrado no Teorema 5.8.3 que a variância da distribuição beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  é  $\alpha\beta/[(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)]$ . Portanto, a variância  $V$  da distribuição a posteriori de  $\theta$  será

$$V = \frac{(y+1)(z+1)}{(y+z+2)^2(y+z+3)}.$$

A amostragem deve parar assim que o número de defeituosos  $y$  e o número de não defeituosos  $z$  que foram obtidos sejam tais que  $V \leq 0.01$ . Pode ser mostrado (ver Exercício 2) que não será necessário selecionar mais de 22 itens, mas é necessário selecionar pelo menos sete itens.

**Exemplo 7.3.3 Uso de Luvas por Enfermeiras.** Friedland et al. (1992) estudaram 23 enfermeiras em um hospital do centro da cidade antes e depois de um programa educacional sobre a importância de usar luvas. Eles registraram se as enfermeiras usavam ou não luvas em procedimentos nos quais poderiam entrar em contato com fluidos corporais. Antes do programa educacional, as enfermeiras foram observadas durante 51 procedimentos, e usaram luvas em apenas 13 deles. Seja  $\theta$  a probabilidade de uma enfermeira usar luvas dois meses após o programa educacional. Podemos estar interessados em como  $\theta$  se compara a 13/51, a proporção observada antes do programa. Vamos considerar duas distribuições a priori diferentes para  $\theta$  para ver quão sensível a distribuição a posteriori de  $\theta$  é à escolha da distribuição a priori. A primeira distribuição a

priori será uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , que também é a distribuição beta com parâmetros 1 e 1. A segunda distribuição a priori será a distribuição beta com parâmetros 13 e 38. Esta segunda distribuição a priori tem uma variância muito menor que a primeira e tem sua média em  $13/51$ . Alguém que sustenta a segunda priori acredita firmemente que o programa educacional não terá efeito perceptível. Dois meses após o programa educacional, 56 procedimentos foram observados, com as enfermeiras usando luvas em 50 deles. A distribuição a posteriori de  $\theta$ , com base na primeira priori, seria a distribuição beta com parâmetros  $1 + 50 = 51$  e  $1 + 6 = 7$ . Em particular, a média a posteriori de  $\theta$  é  $51/(51 + 7) = 0.88$ , e a probabilidade a posteriori de que  $\theta > 13/51$  é essencialmente 1. Com base na segunda priori, a distribuição a posteriori de  $\theta$  seria a distribuição beta com parâmetros  $13 + 50 = 63$  e  $38 + 6 = 44$ . A média a posteriori seria  $63/(63 + 44) = 0.59$ , e a probabilidade a posteriori de que  $\theta > 13/51$  é 0.95. Assim, mesmo alguém que era inicialmente cético sobre o programa educacional parece ter sido convencido. A probabilidade é bastante alta de que as enfermeiras tenham pelo menos o dobro de probabilidade de usar luvas após o programa como antes. A Figura 7.3 mostra as f.d.p.s de ambas as distribuições a posteriori calculadas acima. As distribuições são claramente muito diferentes. Por exemplo, a primeira dá uma probabilidade maior que 0.99 de que  $\theta > 0.7$ , enquanto a segunda dá uma probabilidade menor que 0.001 de que  $\theta > 0.7$ . No entanto, uma vez que estamos apenas interessados na probabilidade de que  $\theta > 13/51 = 0.5098$ , vemos que ambas as prioris concordam que essa probabilidade é bastante grande.



## Amostragem de uma Distribuição de Poisson

**Exemplo 7.3.4 Chegadas de Clientes.** O dono de uma loja modela as chegadas de clientes como um processo de Poisson com uma taxa desconhecida de  $\theta$  por hora. Ele atribui a  $\theta$  uma distribuição gama com parâmetros 3 e 2.

Seja  $X$  o número de clientes que chegam em um período específico de uma hora. Se  $X = 3$  for observado, o dono da loja quer atualizar a distribuição de  $\theta$ .

Quando as amostras são retiradas de uma distribuição de Poisson, a família de distribuições gama é uma família conjugada de distribuições a priori. Essa relação é mostrada no próximo teorema.

**Teorema 7.3.2** Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória da distribuição de Poisson com média  $\theta > 0$ , e  $\theta$  seja desconhecido. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Então a distribuição a posteriori de  $\theta$ , dado que  $X_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), é a distribuição gama com parâmetros  $\alpha + \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\beta + n$ .

**Prova** Seja  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ . Então a função de verossimilhança  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  satisfaz a relação

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) \propto e^{-n\theta} \theta^y.$$

Nesta relação, um fator que envolve  $\mathbf{x}$  mas não depende de  $\theta$  foi descartado do lado direito. Além disso, a f.d.p. a priori de  $\theta$  tem a forma

$$\xi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \quad \text{para } \theta > 0.$$

Como a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  é proporcional a  $f_n(\mathbf{x}|\theta)\xi(\theta)$ , segue-se que

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{\alpha+y-1} e^{-(\beta+n)\theta} \quad \text{para } \theta > 0.$$

O lado direito desta relação pode ser reconhecido como sendo, exceto por um fator constante, a f.d.p. da distribuição gama com parâmetros  $\alpha + y$  e  $\beta + n$ . Portanto, a distribuição a posteriori de  $\theta$  é como especificado no teorema. ■

No Teorema 7.3.2, os números  $\alpha$  e  $\beta$  são os hiperparâmetros a priori. Note que os hiperparâmetros a posteriori são  $\alpha + \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\beta + n$ . Note que a estatística  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$  é usada para calcular a distribuição a posteriori de  $\theta$ , e, portanto, fará parte de qualquer inferência baseada na posteriori.

**Exemplo 7.3.5 Chegadas de Clientes.** No Exemplo 7.3.4, podemos aplicar o Teorema 7.3.2 com  $n = 1$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ , e  $x_1 = 3$ . A distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X = 3$  é a distribuição gama com parâmetros 6 e 3.

**Exemplo 7.3.6 A Variância da Distribuição Gama a Posteriori.** Con-

sidere uma distribuição de Poisson para a qual a média  $\theta$  é desconhecida, e suponha que a f.d.p. a priori de  $\theta$  seja a seguinte:

$$\xi(\theta) = \begin{cases} 2e^{-2\theta} & \text{para } \theta > 0, \\ 0 & \text{para } \theta \leq 0. \end{cases}$$

Suponha também que as observações devam ser retiradas da distribuição de Poisson até que a variância da distribuição a posteriori de  $\theta$  tenha sido reduzida a 0.01 ou menos. Devemos determinar o número de observações que devem ser feitas antes que o processo de amostragem seja interrompido. A f.d.p. a priori dada é a da distribuição gama com hiperparâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ . Portanto, depois de termos obtido valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , a soma dos quais é  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ , a distribuição a posteriori de  $\theta$  será a distribuição gama com hiperparâmetros  $y+1$  e  $n+2$ . Foi mostrado no Teorema 5.4.2 que a variância da distribuição gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  é  $\alpha/\beta^2$ . Portanto, a variância  $V$  da distribuição a posteriori de  $\theta$  será

$$V = \frac{y+1}{(n+2)^2}.$$

A amostragem deve parar assim que os valores observados  $x_1, \dots, x_n$  forem tais que  $V \leq 0.01$ . Ao contrário do Exemplo 7.3.2, não há limite uniforme sobre quão grande  $n$  precisa ser porque  $y$  pode ser arbitrariamente grande, não importa qual seja  $n$ . Claramente, são necessárias pelo menos  $n = 8$  observações antes que  $V \leq 0.01$ .

## Amostragem de uma Distribuição Normal

**Exemplo 7.3.7 Emissões Automotivas.** Considere novamente o exemplo de emissões automotivas em Exemplo 5.6.1 na página 302. Antes de observar os dados, suponha que um engenheiro acreditasse que cada medida de emissão tinha a distribuição normal com média  $\theta$  e desvio padrão 0.5, mas que  $\theta$  era desconhecido. O engenheiro também acredita que  $\theta$  tem uma distribuição normal com média 2.0 e desvio padrão 1.0. Depois de ver os dados na Fig. 5.1, como este engenheiro descreveria sua incerteza sobre  $\theta$ ?

Quando as amostras são retiradas de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido mas o valor da variância  $\sigma^2$  é conhecido, a família de distribuições normais é uma família conjugada de distribuições a priori, como mostrado no próximo teorema.

**Teorema 7.3.3** Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o valor da variância  $\sigma^2 > 0$  é conhecido. Suponha também que a distribuição a

priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal com média  $\mu_0$  e variância  $\nu_0^2$ . Então a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado que  $X_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é a distribuição normal com média  $\mu_1$  e variância  $\nu_1^2$ , onde

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2 \mu_0 + n \nu_0^2 \bar{x}_n}{\sigma^2 + n \nu_0^2} \quad (7.3.1)$$

e

$$\nu_1^2 = \frac{\sigma^2 \nu_0^2}{\sigma^2 + n \nu_0^2}. \quad (7.3.2)$$

**Prova** A função de verossimilhança,  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  tem a forma

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 \right].$$

Aqui, um fator constante foi descartado do lado direito. O método de completar o quadrado (ver Exercício 24 na Seção 5.6) nos diz que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2 = n(\theta - \bar{x}_n)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Omitindo um fator que envolve  $x_1, \dots, x_n$  mas não depende de  $\theta$ , podemos reescrever  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  na seguinte forma:

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) \propto \exp \left[ -\frac{n}{2\sigma^2} (\theta - \bar{x}_n)^2 \right].$$

Como a f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$  tem a forma

$$\xi(\theta) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\nu_0^2} (\theta - \mu_0)^2 \right],$$

segue-se que a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  satisfaz a relação

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{n}{\sigma^2} (\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{\nu_0^2} (\theta - \mu_0)^2 \right] \right\}.$$

Se  $\mu_1$  e  $\nu_1^2$  são como especificado nas Eqs. (7.3.1) e (7.3.2), completar o quadrado novamente estabelece a seguinte identidade:

$$\frac{n}{\sigma^2} (\theta - \bar{x}_n)^2 + \frac{1}{\nu_0^2} (\theta - \mu_0)^2 = \frac{1}{\nu_1^2} (\theta - \mu_1)^2 + \frac{n}{\sigma^2 + n \nu_0^2} (\bar{x}_n - \mu_0)^2.$$

Como o termo final no lado direito desta equação não envolve  $\theta$ , ele pode ser absorvido na constante de proporcionalidade, e obtemos a relação

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\nu_1^2} (\theta - \mu_1)^2 \right].$$

O lado direito desta relação pode ser reconhecido como sendo, exceto por um fator constante, a f.d.p. da distribuição normal com média  $\mu_1$  e variância  $\nu_1^2$ . Portanto, a distribuição a posteriori de  $\theta$  é como especificado no teorema. ■

No Teorema 7.3.3, os números  $\mu_0$  e  $\nu_0^2$  são os hiperparâmetros a priori, enquanto  $\mu_1$  e  $\nu_1^2$  são os hiperparâmetros a posteriori. Note que a estatística  $\bar{X}_n$  é usada na construção da distribuição a posteriori, e, portanto, desempenhará um papel em qualquer inferência baseada na posteriori.

**Exemplo 7.3.8 Emissões Automotivas.** Podemos aplicar o Teorema 7.3.3 para responder à pergunta no final do Exemplo 7.3.7. Na notação do teorema, temos  $n = 46$ ,  $\sigma^2 = 0.5^2 = 0.25$ ,  $\mu_0 = 2$  e  $\nu_0^2 = 1.0$ . A média das 46 medições é  $\bar{x}_n = 1.329$ . A distribuição a posteriori de  $\theta$  é então a distribuição normal com média e variância dadas por

$$\mu_1 = \frac{0.25 \times 2 + 46 \times 1 \times 1.329}{0.25 + 46 \times 1} = 1.333,$$

$$\nu_1^2 = \frac{0.25 \times 1}{0.25 + 46 \times 1} = 0.0054.$$

A média  $\mu_1$  da distribuição a posteriori de  $\theta$ , como dada na Eq. (7.3.1), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mu_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n\nu_0^2} \mu_0 + \frac{n\nu_0^2}{\sigma^2 + n\nu_0^2} \bar{x}_n. \quad (7.3.3)$$

Pode-se ver da Eq. (7.3.3) que  $\mu_1$  é uma média ponderada da média a priori  $\mu_0$  e da média amostral  $\bar{x}_n$ . Além disso, pode-se ver que o peso relativo dado a  $\bar{x}_n$  satisfaz as três propriedades a seguir: (1) Para valores fixos de  $\nu_0^2$  e  $\sigma^2$ , quanto maior o tamanho da amostra  $n$ , maior será o peso relativo dado a  $\bar{x}_n$ . (2) Para valores fixos de  $\nu_0^2$  e  $n$ , quanto maior a variância  $\sigma^2$  de cada observação na amostra, menor será o peso relativo dado a  $\bar{x}_n$ . (3) Para valores fixos de  $\sigma^2$  e  $n$ , quanto maior a variância  $\nu_0^2$  da distribuição a priori, maior será o peso relativo dado a  $\bar{x}_n$ . Além disso, pode-se ver da Eq. (7.3.2) que a variância  $\nu_1^2$  da distribuição a posteriori de  $\theta$  depende do número  $n$  de observações que foram feitas, mas não depende das magnitudes dos valores observados. Portanto, para uma amostra aleatória de  $n$  observações a ser retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido, o valor da variância é conhecido, e a distribuição a priori de  $\theta$  é uma distribuição normal especificada. Então, antes de qualquer observação ter sido feita, podemos usar a Eq. (7.3.2) para calcular o valor da variância  $\nu_1^2$  da distribuição a posteriori. No entanto, o valor da média  $\mu_1$  da distribuição a posteriori dependerá dos valores observados que são obtidos na amostra. O fato de a variância a posteriori não depender dos valores observados deve-se à suposição de que a variância  $\sigma^2$  das observações individuais é conhecida. Na Seção 8.6, relaxaremos essa suposição.



**Exemplo 7.3.9 A Variância da Distribuição Normal a Posteriori.**

Suponha que as observações devam ser retiradas de uma distribuição normal com média  $\theta$  e variância 1, e que o valor de  $\theta$  seja desconhecido. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal com variância 4. Além disso, as observações devem ser feitas até que a variância da distribuição a posteriori de  $\theta$  tenha sido reduzida a 0.01 ou menos. Devemos determinar o número de observações que devem ser feitas antes que o processo de amostragem seja interrompido. Segue-se da Eq. (7.3.2) que, após  $n$  observações terem sido feitas, a variância  $\nu_1^2$  da distribuição a posteriori será

$$\nu_1^2 = \frac{4}{4n + 1}.$$

Portanto, a relação  $\nu_1^2 \leq 0.01$  será satisfeita se e somente se  $n \geq 99.75$ . Portanto, a variância a posteriori será de 0.01 ou menos depois de 100 observações terem sido feitas e não antes.

**Exemplo 7.3.10 Contagem de Calorias em Alimentos Preparados.**

Allison, Heshka, Sepulveda e Heymsfield (1993) amostraram 20 alimentos preparados nacionalmente e compararam o conteúdo de calorias declarado com o conteúdo de calorias determinado no laboratório. A Figura 7.4 é um histograma das diferenças percentuais entre as medições observadas em laboratório e o conteúdo de calorias anunciado nos rótulos dos alimentos. Suponha que modelamos a distribuição condicional das diferenças dado  $\theta$  como a distribuição normal com média  $\theta$  e variância 100. (Nesta seção, assumimos que a variância é conhecida. Na Seção 8.6, seremos capazes de lidar com o caso em que tanto a média quanto a variância são tratadas como variáveis aleatórias com uma distribuição conjunta.) Usaremos uma distribuição a priori para  $\theta$  que é a distribuição normal com média 0 e uma variância de 60. Os dados  $\mathbf{X}$  compreendem as 20 diferenças na Fig. 7.4, cuja média é 0.125. A distribuição a posteriori de  $\theta$  seria então a distribuição normal com média

$$\mu_1 = \frac{100 \times 0 + 20 \times 60 \times 0.125}{100 + 20 \times 60} = 0.1154,$$

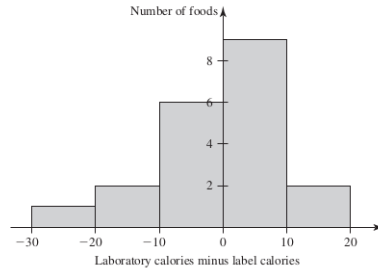
e variância

$$\nu_1^2 = \frac{100 \times 60}{100 + 20 \times 60} = 4.62.$$

Por exemplo, podemos estar interessados em saber se os empacotadores estão subestimando sistematicamente as calorias em seus alimentos em pelo menos 1 por cento. Isso corresponderia a  $\theta > 1$ . Usando o Teorema 5.6.6, podemos encontrar

$$\Pr(\theta > 1 | \mathbf{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{1 - 0.1154}{\sqrt{4.62}}\right) = 1 - \Phi(1.12) = 0.3403.$$

Há uma chance não desprezível, mas não esmagadora, de que os empacotadores estejam omitindo um por cento ou mais de suas calorias dos rótulos.



## Amostragem de uma Distribuição Exponencial

**Exemplo 7.3.11 Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos.** No Exemplo 7.2.1, suponha que observemos os tempos de vida de três componentes,  $X_1 = 3, X_2 = 1.5, X_3 = 2.1$ . Eles foram modelados como i.i.d. variáveis exponenciais, dado  $\theta$ . Nossa distribuição a priori para  $\theta$  foi a distribuição gama com parâmetros 1 e 2. Qual é a distribuição a posteriori de  $\theta$  dados esses tempos de vida observados?

Ao amostrar de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro  $\theta$  é desconhecido, a família de distribuições gama serve como uma família conjugada de distribuições a priori, como mostrado no próximo teorema.

**Teorema 7.3.4** Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial com parâmetro  $\theta > 0$  que é desconhecido. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Então a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado que  $X_i = x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) é a distribuição gama com parâmetros  $\alpha + n$  e  $\beta + \sum_{i=1}^n x_i$ .

**Prova** Novamente, seja  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ . Então a função de verossimilhança  $f_n(\mathbf{x}|\theta)$  tem a forma

$$f_n(\mathbf{x}|\theta) = \theta^n e^{-\theta y}.$$

Além disso, a f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$  tem a forma

$$\xi(\theta) \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} \quad \text{para } \theta > 0.$$

Portanto, segue-se que a f.d.p. a posteriori  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  tem a forma

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{\alpha+n-1} e^{-(\beta+y)\theta} \quad \text{para } \theta > 0.$$

O lado direito desta relação pode ser reconhecido como sendo, exceto por um fator constante, a f.d.p. da distribuição gama com parâmetros  $\alpha + n$  e  $\beta + y$ . Portanto, a distribuição a posteriori de  $\theta$  é como especificado no teorema. ■

A distribuição a posteriori de  $\theta$  no Teorema 7.3.4 depende do valor observado da estatística  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ; portanto, toda inferência sobre  $\theta$  baseada na distribuição a posteriori dependerá do valor observado de  $Y$ .

**Exemplo 7.3.12 Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos.** No Exemplo 7.3.11, podemos aplicar o Teorema 7.3.4 para encontrar a distribuição a posteriori. Na notação do teorema e sua prova, temos  $n = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ , e

$$y = \sum_{i=1}^n x_i = 3 + 1.5 + 2.1 = 6.6.$$

A distribuição a posteriori de  $\theta$  é então a distribuição gama com parâmetros  $\alpha + n = 1 + 3 = 4$  e  $\beta + y = 2 + 6.6 = 8.6$ . O leitor deve notar que o Teorema 7.3.4 teria encurtado muito a derivação da posterior no Exemplo 7.2.6.

## Distribuições a Priori Impróprias

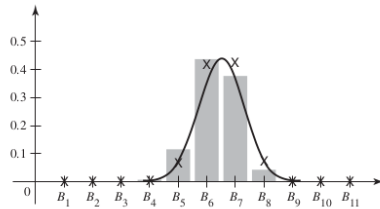
Na Seção 7.2, mencionamos prioris impróprias como expedientes que tentam capturar a ideia de que há muito mais informação nos dados do que a contida em nossa distribuição a priori. Cada uma das famílias conjugadas que vimos nesta seção tem uma priori imprópria como um caso limite.

**Exemplo 7.3.13 Um Ensaio Clínico.** O que ilustramos aqui será aplicado a todos os exemplos em que os dados compreendem uma amostra i.i.d. (dado  $\theta$ ) da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ . Considere os sujeitos no grupo da imipramina no Exemplo 2.1.4. A proporção de sucessos entre todos os pacientes que poderiam receber imipramina foi chamada de  $P$  em exemplos anteriores, mas vamos chamá-la de  $\theta$  desta vez para manter a notação geral deste capítulo. Suponha que  $\theta$  tenha a distribuição beta com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , e um conjugado geral a priori. Existem  $n = 40$  pacientes no grupo da imipramina, e 22 deles são sucessos. A distribuição a posteriori de  $\theta$  é a distribuição beta com parâmetros  $\alpha + 22$  e  $\beta + 18$ , como vimos no Teorema 7.3.1. A média da distribuição a posteriori é  $(\alpha + 22)/(\alpha + \beta + 40)$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são pequenos, então a média a posteriori está próxima de  $22/40$ , que é a proporção observada de sucessos. De fato, se  $\beta = 0$ , o que não corresponde a uma distribuição beta real, então a média a posteriori é exatamente  $22/40$ . No entanto, olhe o que acontece com  $\alpha$  e  $\beta$  quando eles se aproximam de 0. A f.d.p. beta (ignorando a constante) é  $\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$ . Podemos definir  $\alpha = \beta = 0$  e fingir que  $\xi(\theta) \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1}$  é a

f.d.p. a priori de  $\theta$ . A função de verossimilhança é  $f_{40}(\mathbf{x}|\theta) = \binom{40}{22}\theta^{22}(1-\theta)^{18}$ . Podemos ignorar o fator constante  $\binom{40}{22}$  e obter o produto

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{21}(1-\theta)^{17}, \quad \text{para } 0 < \theta < 1.$$

Isso é facilmente reconhecido como sendo a mesma coisa que a f.d.p. da distribuição beta com parâmetros 22 e 18, exceto por um fator constante. Assim, se usarmos a "priori imprópria" beta com hiperparâmetros 0 e 0, obtemos a distribuição a posteriori beta para  $\theta$  com hiperparâmetros 22 e 18. Note que o Teorema 7.3.1 produz a distribuição a posteriori correta mesmo neste caso de priori imprópria. A Figura 7.5 adiciona a f.d.p. da distribuição beta a posteriori calculada aqui à Fig. 2.4, que representava as probabilidades a posteriori para duas distribuições a priori discretas diferentes. Todas as três posteriores são muito próximas.



**Definição 7.3.2 Priori Imprópria.** Seja  $\xi(\theta)$  uma função não negativa cujo domínio inclui o espaço de parâmetros de um modelo estatístico. Suponha que  $\int \xi(\theta)d\theta = \infty$ . Se pretendemos usar  $\xi(\theta)$  como a f.d.p. a priori de  $\theta$ , então estamos usando uma *priori imprópria* para  $\theta$ .

A Definição 7.3.2 não é muito útil para determinar uma priori imprópria a ser usada em uma aplicação particular. Existem muitos métodos para escolher uma priori imprópria, e a esperança é que todos eles levem a distribuições a posteriori semelhantes, de modo que não importe muito qual deles se escolhe. O método mais direto para escolher uma priori imprópria é começar com a família de distribuições conjugadas, se tal família existir. Na maioria dos casos, se a parametrização da família conjugada (hiperparâmetros) for escolhida com cuidado, a posteriori terá a mesma forma que a priori conjugada mais uma estatística. Alguém então substituiria cada um desses hiperparâmetros por 0 para obter o que parece ser a fórmula para a f.d.p. a posteriori. Isso é o que fizemos no Exemplo 7.3.13; cada um dos hiperparâmetros a posteriori era igual aos hiperparâmetros a priori correspondentes mais alguma estatística. Nesse exemplo, substituímos ambos os hiperparâmetros a priori por 0 para obter a priori imprópria. O método descrito anteriormente precisa ser modificado se

alguém escolher uma parametrização "inconveniente" da priori conjugada, como no Exemplo 7.3.15 abaixo.

**Exemplo 7.3.14 Mortes no Exército Prussiano.** Bortkiewicz (1898) contou o número de soldados prussianos mortos por coices de cavalo em várias unidades do exército durante o século dezenove (um problema mais sério naquela época do que hoje). Havia 14 corpos do exército para cada um dos 20 anos, para um total de 280 contagens. As 280 contagens tiveram os seguintes valores: 144 contagens são 0, 91 contagens são 1, 32 contagens são 2, 11 contagens são 3, e 2 contagens são 4. Nenhuma unidade sofreu mais de quatro mortes por coices de cavalo em um único ano. (Esses dados foram reportados e analisados por Winsor, 1947.) Suponha que vamos modelar as 280 contagens como uma amostra aleatória de variáveis aleatórias de Poisson  $X_1, \dots, X_{280}$  com média  $\theta$  condicional ao parâmetro  $\theta$ . Uma priori conjugada seria um membro da família de distribuições gama com hiperparâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . O Teorema 7.3.2 diz que a distribuição a posteriori de  $\theta$  seria a distribuição gama com hiperparâmetros a posteriori 196 e 280, uma vez que a soma das 280 contagens é 196. A menos que  $\alpha$  ou  $\beta$  seja muito grande, a distribuição gama a posteriori é quase a mesma que a distribuição gama com hiperparâmetros posteriores 196 e 280. Este problema de distribuição a posteriori parece ser o resultado do uso de uma priori conjugada com hiperparâmetros a priori 0 e 0. Ignorando o fator constante, a f.d.p. da distribuição gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  é  $\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$  para  $\theta > 0$ . Se definirmos  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  nesta fórmula, obtemos a "f.d.p. a priori imprópria"  $\theta^{-1}$  para  $\theta > 0$ . Fingindo que isso realmente era uma f.d.p. a priori e aplicando o teorema de Bayes para variáveis aleatórias (Teorema 3.6.4) resultaria em

$$\xi(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{195}e^{-280\theta}, \quad \text{para } \theta > 0.$$

Isso é facilmente reconhecido como sendo a f.d.p. da distribuição gama com parâmetros 196 e 280, exceto por um fator constante. Este exemplo de resultado se aplica a todos os casos em que modelamos dados com distribuições de Poisson. A "distribuição gama"imprópria com hiperparâmetros a priori 0 e 0 pode ser usada no Teorema 7.3.2, e a conclusão ainda se manterá.

**Exemplo 7.3.15 Tempos de Falha de Rolamentos de Esferas.** Suponha que modelamos os 23 logaritmos de tempos de falha dos rolamentos de esferas do Exemplo 5.6.9 como variáveis aleatórias normais  $X_1, \dots, X_{23}$  com média  $\theta$  e variância 0.25. Uma priori conjugada para  $\theta$  seria a distribuição normal com média  $\mu_0$  e variância  $\nu_0^2$ . Para os log-tempos de falha,  $\bar{x}_{23} = 4.15$ , então a distribuição a posteriori de  $\theta$  seria a distribuição normal com média  $\mu_1 = (0.25\mu_0 + 23 \times 4.15\nu_0^2)/(0.25 + 23\nu_0^2)$  e variância  $\nu_1^2 = (0.25\nu_0^2)/(0.25 + 23\nu_0^2)$ . Se deixarmos  $\nu_0^2 \rightarrow \infty$  nas fórmulas para  $\mu_1$  e  $\nu_1^2$ , obtemos  $\mu_1 \rightarrow 4.15$  e  $\nu_1^2 \rightarrow 0.25/23$ . Ter variância infinita para a distribuição a priori de  $\theta$  é como dizer que  $\theta$  é igualmente provável de estar em qualquer lugar na reta real. Isso

acontece em todos os exemplos em que modelamos dados  $X_1, \dots, X_n$  como uma amostra aleatória da distribuição normal com média  $\theta$  e variância conhecida  $\sigma^2$  condicional a  $\theta$ . Se usarmos uma "distribuição normal" imprópria com variância infinita (a priori não precisa de média), o cálculo no Teorema 7.3.3 resultaria na distribuição normal com média  $\bar{x}_n$  e variância  $\sigma^2/n$ . Neste caso,  $\xi(\theta)$  seria igual a uma constante. Este exemplo poderia ser uma aplicação do método descrito após a Definição 7.3.2 se tivéssemos os hiperparâmetros "mais convenientes": 1 sobre a variância  $1/\nu_0^2$  e a média sobre a variância  $\mu_0/\nu_0^2$ . Em termos desses hiperparâmetros, a distribuição posterior tem 1 sobre sua variância igual a  $1/\nu_1^2 = 1/\nu_0^2 + n/\sigma^2 = 1/\nu_0^2 + 23/0.25$  e média sobre variância igual a  $\mu_1/\nu_1^2 = \mu_0/\nu_0^2 + 23 \times 4.15/0.25$ . Cada um dos hiperparâmetros a posteriori tem a forma do hiperparâmetro a priori correspondente mais uma estatística. A priori imprópria com a média sobre variância e 1 sobre variância iguais a 0 também tem  $\xi(\theta)$  igual a uma constante.

Existem outros exemplos de prioris impróprias para outros modelos de amostragem. O leitor pode verificar (no Exercício 21) que a "distribuição gama" com parâmetros 0 e 0 leva a resultados semelhantes aos de uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial. Os Exercícios 23 e 24 introduzem uma coleção geral de f.d.p.s  $f(x|\theta)$  para as quais é fácil construir prioris impróprias. Prioris impróprias foram introduzidas para casos em que os dados observados continham muito mais informação do que nossa distribuição a priori. Implicitamente, estamos assumindo que os dados são informativos. Quando os dados não contêm muita informação, as prioris impróprias podem ser altamente inapropriadas.

**Exemplo 7.3.16 Eventos Muito Raros.** No Exemplo 5.4.7, estávamos discutindo um contaminante de água potável conhecido como criptosporídio que geralmente ocorre em concentrações muito baixas. Suponha que uma autoridade de água modele os oocistos de criptosporídio no abastecimento de água como um processo de Poisson com taxa de  $\theta$  oocistos por litro. Eles decidem amostrar 25 litros de água para aprender sobre  $\theta$ . Suponha que eles usem a priori gama imprópria com "f.d.p."  $\theta^{-1}$ . (Esta é a mesma priori imprópria usada no Exemplo 7.3.14.) Se a amostra de 25 litros não contiver oocistos, a autoridade de água teria uma distribuição a posteriori para  $\theta$  que é a distribuição gama com parâmetros 0 e 5, o que não é uma distribuição real. Não importa quantos litros eles amostrarem, a distribuição a posteriori não será uma distribuição real até que pelo menos um oocisto seja observado. Ao amostrar eventos raros, pode-se ser forçado a quantificar a informação a priori na forma de uma distribuição a priori adequada para fazer inferências baseadas na distribuição a posteriori.

## Resumo

Para cada uma das várias famílias diferentes de modelos estatísticos, para dados de uma determinada família, encontramos uma família conjugada de distribuições para o parâmetro. Essas famílias têm a propriedade de que, se a distribuição a priori for escolhida da família, então a distribuição a posteriori é um membro da família. Para dados com distribuições relacionadas à Bernoulli, como binomial, geométrica e binomial negativa, a família conjugada para o parâmetro de sucesso é a família de distribuições beta. Para dados com distribuições relacionadas ao processo de Poisson, como Poisson e gama (com primeiro parâmetro conhecido), e exponencial, a família conjugada para o parâmetro de taxa é a família de distribuições gama. Para dados com uma distribuição normal com variância conhecida, a família conjugada para a média é a família normal. Também descrevemos o uso de prioris impróprias. Prioris impróprias não são distribuições de probabilidade, mas se fingirmos que são, podemos calcular distribuições a posteriori que se aproximam daquelas que teríamos obtido usando prioris conjugadas apropriadas com valores extremos dos hiperparâmetros a priori.

## Exercícios

1. Considere novamente a situação descrita no Exemplo 7.3.10. Uma vez mais, suponha que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal com média 0, mas desta vez seja a variância a priori  $\nu_0^2 > 0$ . Se a média a posteriori de  $\theta$  for 0.12, que valor de  $\nu_0^2$  foi usado?
2. Mostre que no Exemplo 7.3.2 deve-se ter  $V \leq 0.01$  depois que 22 itens tiverem sido selecionados. Mostre também que  $V > 0.01$  até que pelo menos sete itens tenham sido selecionados.
3. Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote seja desconhecida e que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição beta com parâmetros 2 e 200. Se 100 itens forem selecionados aleatoriamente do lote e três deles forem defeituosos, qual é a distribuição a posteriori de  $\theta$ ?
4. Considere novamente as condições do Exercício 3. Suponha que, depois de observar três itens defeituosos entre os 100 itens selecionados, a distribuição a posteriori de  $\theta$  que um estatístico atribui seja uma distribuição beta para a qual a média é  $2/51$  e a variância é  $98/(51^2(103))$ . Que distribuição a priori o estatístico atribuiu a  $\theta$ ?
5. Suponha que o número de defeitos em um rolo de 1200 pés de fita magnética tenha uma distribuição de Poisson para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama com parâmetros  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ . Quando cinco rolos desta fita são selecionados

- e inspecionados, o número de defeitos encontrados neles são 2, 2, 6, 0 e 3. Determine a distribuição a posteriori de  $\theta$ .
6. Seja  $\theta$  o número médio de defeitos por 100 pés de um certo tipo de fita magnética. Suponha que o valor de  $\theta$  seja desconhecido e que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama com parâmetros  $\alpha = 2$  e  $\beta = 10$ . Quando um rolo de 1200 pés desta fita é inspecionado, exatamente quatro defeitos são encontrados. Determine a distribuição a posteriori de  $\theta$ .
  7. Suponha que as alturas dos indivíduos em uma certa população tenham uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o desvio padrão é 2 polegadas. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal para a qual a média é 68 polegadas e o desvio padrão é 1 polegada. Se 10 pessoas forem selecionadas aleatoriamente da população, e sua altura média for de 69.5 polegadas, qual é a distribuição a posteriori de  $\theta$ ?
  8. Considere novamente o problema descrito no Exercício 7.
    - (a) Qual intervalo de 1 polegada de comprimento tem a maior probabilidade a priori de conter o valor de  $\theta$ ?
    - (b) Qual intervalo de 1 polegada de comprimento tem a maior probabilidade a posteriori de conter o valor de  $\theta$ ?
    - (c) Encontre as probabilidades dos intervalos nas partes (a) e (b).
  9. Suponha que uma amostra aleatória de 20 observações seja retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e a variância é 1. Depois que os valores tiverem sido observados, descubra-se que  $\bar{x}_n = 10$ , e que a distribuição a posteriori de  $\theta$  é uma distribuição normal para a qual a média é 8 e a variância é  $1/25$ . Qual foi a distribuição a priori de  $\theta$ ?
  10. Suponha que uma amostra aleatória deva ser retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o desvio padrão é 2, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal com o desvio padrão 1. Qual é o menor número de observações que devem ser incluídas na amostra para reduzir o desvio padrão da distribuição a posteriori de  $\theta$  para o valor 0.1?
  11. Suponha que uma amostra aleatória de 100 observações deva ser retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o desvio padrão é 2, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal. Mostre que, não importa quão grande seja o desvio padrão da distribuição a priori, o desvio padrão da distribuição a posteriori será menor que  $1/5$ .
  12. Suponha que o tempo em minutos necessário para servir um cliente em um caixa de banco tenha uma distribuição exponencial para a qual o valor



do parâmetro  $\beta$  é desconhecido, e a distribuição a priori de  $\beta$  seja uma distribuição gama para a qual a média é 0.2 e o desvio padrão é 1. Se o tempo médio necessário para servir uma amostra aleatória de 20 clientes for de 3.8 minutos, qual é a distribuição a posteriori de  $\beta$ ?

13. Para uma distribuição com média  $\mu \neq 0$  e desvio padrão  $\sigma > 0$ , o *coeficiente de variação* da distribuição é definido como  $\sigma/|\mu|$ . Considere novamente o problema descrito no Exercício 12, e suponha que o coeficiente de variação da distribuição gama a priori de  $\beta$  seja 2. Qual é o menor número de clientes que devem ser observados para reduzir o coeficiente de variação da distribuição a posteriori para 0.1?
14. Mostre que a família de distribuições beta é uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de uma distribuição binomial negativa com um valor conhecido do parâmetro  $r$  e um valor desconhecido do parâmetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ).
15. Seja  $\xi(\theta)$  uma f.d.p. definida da seguinte forma para constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ :

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\theta} & \text{para } \theta > 0, \\ 0 & \text{para } \theta \leq 0. \end{cases}$$

Uma distribuição com esta f.d.p. é chamada de *distribuição gama inversa*.

- (a) Verifique se  $\xi(\theta)$  é realmente uma f.d.p. verificando que  $\int_0^\infty \xi(\theta) d\theta = 1$ .
- (b) Considere a família de distribuições de probabilidade que pode ser representada por uma f.d.p.  $\xi(\theta)$  tendo a forma geral dada para todos os pares de constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  possíveis. Mostre que esta família é uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de uma distribuição normal com um valor conhecido da média  $\mu$  e um valor desconhecido da variância  $\theta$ .
16. No Exercício 15, o parâmetro é considerado o desvio padrão em vez da variância. Determine uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de uma distribuição normal com um valor conhecido da média  $\mu$  e um valor desconhecido do desvio padrão  $\sigma$ .
17. Suponha que o número de minutos que uma pessoa deve esperar por um ônibus a cada manhã tenha a distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ , onde o valor do ponto final  $\theta$  é desconhecido. Suponha também que a f.d.p. a priori de  $\theta$  seja a seguinte:

$$\xi(\theta) = \begin{cases} \frac{192}{\theta^4} & \text{para } \theta \geq 4, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se os tempos de espera observados em três manhãs sucessivas forem 5, 3 e 8 minutos, qual é a f.d.p. a posteriori de  $\theta$ ?

18. A distribuição de Pareto com parâmetros  $x_0$  e  $\alpha$  ( $x_0 > 0$  e  $\alpha > 0$ ) é definida no Exercício 16 da Seção 5.7. Mostre que a família de distribuições de Pareto é uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ , onde o valor do ponto final  $\theta$  é desconhecido.
19. Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição para a qual a f.d.p.  $f(x|\theta)$  é a seguinte:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha também que o valor do parâmetro  $\theta$  seja desconhecido ( $\theta > 0$ ), e a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ). Determine a média e a variância da distribuição a posteriori de  $\theta$ .

20. Suponha que modelamos os tempos de vida (em meses) de componentes eletrônicos como variáveis aleatórias exponenciais independentes com parâmetro desconhecido  $\beta$ . Modelamos  $\beta$  como tendo uma distribuição gama com parâmetros  $a$  e  $b$ . Acreditamos que o tempo de vida médio é de quatro meses, com um desvio padrão de seis meses. Também observamos 10 componentes com uma vida útil média observada de cinco meses. Determine a média e o desvio padrão da vida útil média, dado que observamos os 10 componentes. Dica: use o Exercício 21 da Seção 5.7.
21. Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ . Seja a priori para  $\theta$  imprópria com "f.d.p."  $\xi(\theta) = 1/\theta$  para  $\theta > 0$ . Encontre a distribuição a posteriori de  $\theta$  e mostre que a média a posteriori de  $\theta$  é  $1/\bar{x}_n$ .
22. Considere os dados no Exemplo 7.3.10. Desta vez, suponha que usemos a priori imprópria "f.d.p."  $\xi(\theta) = 1$  para todo  $\theta$ . Encontre a distribuição a posteriori de  $\theta$  e a probabilidade a posteriori de que  $\theta > 1$ .
23. Considere uma distribuição para a qual a f.d.p. ou f.p.  $f(x|\theta)$  é tal que  $\theta$  pertence a algum espaço de parâmetros  $\Omega$ . É dito que uma família de distribuições obtidas deixando  $\theta$  variar em  $\Omega$  é uma *família exponencial*, ou uma *família de Koopman-Darmois*, se  $f(x|\theta)$  pode ser escrito da seguinte forma para  $\theta \in \Omega$  e todos os valores de  $x$ :

$$f(x|\theta) = a(\theta)b(x) \exp[c(\theta)d(x)].$$

Aqui  $a(\theta)$  e  $c(\theta)$  são funções arbitrárias de  $\theta$ , e  $b(x)$  e  $d(x)$  são funções arbitrárias de  $x$ . Para cada um  $(a, \beta) \in H$ , seja

$$\xi_{a,\beta}(\theta) = \frac{[a(\theta)]^\beta \exp[\alpha c(\theta)]}{\int_H [a(\eta)]^\beta \exp[\alpha c(\eta)] d\eta}.$$

Seja  $\Psi$  o conjunto de todas as distribuições de probabilidade que têm f.d.p.s da forma  $\xi_{a,\beta}(\theta)$  para alguns  $(a, \beta) \in H$ .

- (a) Mostre que  $\Psi$  é uma família conjugada de distribuições a priori para amostras de  $\Psi$ .
- (b) Suponha que observamos uma amostra aleatória de tamanho  $n$  da distribuição com f.d.p.  $f(x|\theta)$ . Se a f.d.p. a priori de  $\theta$  for  $\xi_{\alpha_0, \beta_0}$ , mostre que os hiperparâmetros a posteriori são

$$\alpha_1 = \alpha_0 + n, \beta_1 = \beta_0 + \sum_{i=1}^n d(x_i).$$

- 24. Mostre que cada uma das seguintes famílias de distribuições é uma família exponencial, como definido no Exercício 23.
  - (a) A família de distribuições de Bernoulli com um valor desconhecido do parâmetro  $p$ .
  - (b) A família de distribuições de Poisson com uma média desconhecida.
  - (c) A família de distribuições binomiais negativas para as quais o valor de  $r$  é conhecido e o valor de  $p$  é desconhecido.
  - (d) A família de distribuições normais com uma média desconhecida e uma variância conhecida.
  - (e) A família de distribuições normais com uma variância desconhecida e uma média conhecida.
  - (f) A família de distribuições gama para as quais o valor de  $\alpha$  é conhecido e o valor de  $\beta$  é desconhecido.
  - (g) A família de distribuições gama para as quais o valor de  $\beta$  é conhecido e o valor de  $\alpha$  é desconhecido.
  - (h) A família de distribuições beta para as quais o valor de  $\alpha$  é conhecido e o valor de  $\beta$  é desconhecido.
- 25. Mostre que a família de distribuições uniformes nos intervalos  $[0, \theta]$  para  $\theta > 0$  não é uma família exponencial, como definido no Exercício 23. Olhe para o suporte de cada distribuição.
- 26. Mostre que a família de distribuições uniformes discretas nos conjuntos  $\{0, 1, \dots, \theta\}$  para um inteiro não negativo  $\theta$  não é uma família exponencial, como definido no Exercício 23.

## 7.4 Estimadores de Bayes

Um estimador de um parâmetro é alguma função dos dados que esperamos que seja próxima ao parâmetro. Um estimador de Bayes é um estimador que é escolhido para minimizar a média a posteriori de alguma medida de quão longe um estimador está do parâmetro, como o erro quadrático ou o erro absoluto.

## Natureza de um Problema de Estimação

### Exemplo 7.4.1 Contagem de Calorias em Rótulos de Alimentos.

No Exemplo 7.3.10, encontramos a distribuição a posteriori de  $\theta$ , a diferença percentual média entre as calorias medidas e as anunciadas. Um grupo de consumidores pode desejar relatar um único número como uma estimativa de  $\theta$  sem especificar a distribuição inteira para  $\theta$ . Como escolher tal estimativa de número único é o assunto desta seção.

Começamos com uma definição apropriada para um valor de variável real, como no Exemplo 7.4.1. Uma definição mais geral se seguirá depois que nos familiarizarmos mais com o conceito de estimação.

**Definição 7.4.1 Estimador/Estimativa.** Seja  $X_1, \dots, X_n$  observáveis, cuja distribuição conjunta é indexada por um parâmetro  $\theta$  assumindo valores em um subconjunto  $\Omega$  da reta real. Um *estimador* do parâmetro  $\theta$  é uma função de valor real  $\delta(X_1, \dots, X_n)$ . Se  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  são observados, então  $\delta(x_1, \dots, x_n)$  é chamada de *estimativa* de  $\theta$ .

Note que todo estimador é, por natureza de ser uma função dos dados, uma estatística no sentido da Definição 7.1.4. Como o valor de  $\theta$  deve pertencer a  $\Omega$ , pode parecer razoável exigir que todo valor possível de um estimador  $\delta(X_1, \dots, X_n)$  também deva pertencer a  $\Omega$ . Não exigiremos essa restrição, no entanto. Se um estimador pode assumir valores fora do espaço de parâmetros  $\Omega$ , o experimentador precisará decidir no problema específico se isso parece apropriado ou se tem propriedades menos desejáveis. Na Definição 7.1.4, distinguimos entre os termos *estatística* e *estimativa*. Como um estimador  $\delta(X_1, \dots, X_n)$  é uma função dos dados, o próprio estimador é uma variável aleatória, e sua distribuição de probabilidade pode ser derivada da distribuição conjunta de  $X_1, \dots, X_n$  se esta for conhecida. Por outro lado, uma *estimativa* é o valor específico  $\delta(x_1, \dots, x_n)$  do estimador que é determinado usando valores observados específicos  $x_1, \dots, x_n$ . Se usarmos a notação vetorial  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  e  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , então um estimador é uma função  $\delta(\mathbf{X})$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$ , e uma estimativa é um valor específico  $\delta(\mathbf{x})$ . Muitas vezes será conveniente denotar um estimador  $\delta(\mathbf{X})$  simplesmente pelo símbolo  $\delta$ .

## Funções de Perda

### Exemplo 7.4.2 Contagem de Calorias em Rótulos de Alimentos.

No Exemplo 7.4.1, o grupo de consumidores pode sentir que o constrangimento ou possíveis ações legais que encontrarão como resultado de sua estimativa é uma função de  $\theta$  e da estimativa  $\delta(\mathbf{x})$ . Idealmente, eles gostariam de quantificar a quantidade de problemas negativos como uma função de  $\theta$  e  $\delta(\mathbf{x})$ , e então poderiam ter alguma ideia de quão provável é que encontrem vários níveis de

problemas como resultado de sua estimação. O requisito mais fundamental de um bom estimador  $b$  é que ele produza uma estimativa que esteja próxima do valor real de  $\theta$ . Em outras palavras, um bom estimador é aquele para o qual é altamente provável que o erro  $b - \theta$  esteja próximo de 0. Assumiremos que para cada valor possível  $a$  de uma estimativa e cada valor possível  $\theta \in \Omega$  existe um número  $L(\theta, a)$  que mede a perda ou o custo para o estatístico quando o verdadeiro valor do parâmetro é  $\theta$  e sua estimativa é  $a$ . Normalmente, quanto maior a distância entre  $a$  e  $\theta$ , maior será o valor de  $L(\theta, a)$ .

**Definição 7.4.2 Função de perda.** Uma *função de perda* é uma função de valor real de duas variáveis,  $L(\theta, a)$ , onde  $\theta \in \Omega$  e  $a$  é um número real. A interpretação é que um estatístico perde  $L(\theta, a)$  se o parâmetro for igual a  $\theta$  e a estimativa for igual a  $a$ .

Como antes, seja  $\xi(\theta)$  a f.d.p. a priori de  $\theta$  no conjunto  $\Omega$ , e considere um problema no qual o estatístico deve estimar o valor de  $\theta$  sem poder observar os valores em uma amostra aleatória. Se o estatístico escolher uma estimativa particular  $a$ , então sua perda esperada será

$$E[L(\theta, a)] = \int_{\Omega} L(\theta, a) \xi(\theta) d\theta. \quad (7.4.1)$$

Assumiremos que o estatístico deseja escolher uma estimativa  $a$  para a qual a perda esperada em Eq. (7.4.1) é um mínimo.

### Definição de um Estimador de Bayes

Suponha agora que o estatístico possa observar o valor  $\mathbf{x}$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$  antes de estimar  $\theta$ , e seja  $\xi(\theta|\mathbf{x})$  a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  no conjunto  $\Omega$ . (O caso de um parâmetro discreto pode ser tratado de maneira semelhante.) Para cada estimativa  $a$  que o estatístico possa usar, sua perda esperada neste caso será

$$E[L(\theta, a)|\mathbf{x}] = \int_{\Omega} L(\theta, a) \xi(\theta|\mathbf{x}) d\theta. \quad (7.4.2)$$

Portanto, o estatístico deve agora escolher uma estimativa  $a$  para a qual a esperança em Eq. (7.4.2) é um mínimo. Para cada valor possível  $\mathbf{x}$  do vetor aleatório  $\mathbf{X}$ , seja  $\delta^*(\mathbf{x})$  o valor de uma estimativa  $a$  para a qual a perda esperada em Eq. (7.4.2) é um mínimo. Então o estimador  $\delta^*(X)$  para o qual os valores são especificados desta forma será um estimador de  $\theta$ .

**Definição 7.4.3 Estimador/Estimativa de Bayes.** Seja  $L(\theta, a)$  uma função de perda. Para cada valor possível  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{X}$ , seja  $\delta^*(\mathbf{x})$  um valor de  $a$  tal que

$E[L(\theta, a)|\mathbf{x}]$  é minimizado. Então  $\delta^*$  é chamado de *Estimador de Bayes* de  $\theta$ . Uma vez que  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  é observado,  $\delta^*(\mathbf{x})$  é chamado de *Estimativa de Bayes* de  $\theta$ .

Outra maneira de descrever uma estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  é notar que, para cada valor possível  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{X}$ , o valor  $\delta^*(\mathbf{x})$  é escolhido de modo que

$$E[L(\theta, \delta^*(\mathbf{x}))|\mathbf{x}] = \min_a E[L(\theta, a)|\mathbf{x}]. \quad (7.4.3)$$

Em resumo, consideramos um problema de estimação no qual uma amostra aleatória  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  deve ser retirada de uma distribuição envolvendo um parâmetro  $\theta$  com um valor desconhecido em algum conjunto especificado  $\Omega$ . Para cada função de perda dada  $L(\theta, a)$  e cada f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$ , o estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  é o estimador  $\delta$  para o qual Eq. (7.4.3) é satisfeita para cada valor possível  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{X}$ . Deve ser enfatizado que a forma do estimador de Bayes dependerá tanto da função de perda que é usada no problema quanto da distribuição a priori que é atribuída a  $\theta$ .

... a função  $L(\theta, a)$  é projetada para medir o quão custoso é usar o valor  $a$  para estimar  $\theta$ . Um estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  é escolhido de modo que  $a = \delta^*(\mathbf{x})$  forneça o valor mínimo da média a posteriori de  $L(\theta, a)$ . Ou seja,

$$E[L(\theta, \delta^*(\mathbf{x}))|\mathbf{x}] = \min_a E[L(\theta, a)|\mathbf{x}].$$

Se a perda for erro quadrático,  $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$ , então  $\delta^*(\mathbf{x})$  é a média a posteriori de  $\theta$ ,  $E(\theta|\mathbf{x})$ . Se a perda for erro absoluto,  $L(\theta, a) = |\theta - a|$ , então  $\delta^*(\mathbf{x})$  é uma mediana da distribuição a posteriori de  $\theta$ . Para outras funções de perda, a localização do mínimo pode ter que ser feita numericamente.

## Diferentes Funções de Perda

De longe, a função de perda mais comumente usada em problemas de estimação é a função de perda de erro quadrático.

**Definição 7.4.4 Função de Perda de Erro Quadrático.** A função de perda

$$L(\theta, a) = (\theta - a)^2 \quad (7.4.4)$$

é chamada de *perda de erro quadrático*.

Quando a função de perda de erro quadrático é usada, a estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  para cada valor observado de  $\mathbf{x}$  será o valor de  $a$  para o qual a esperança  $E[(\theta - a)^2|\mathbf{x}]$  é um mínimo. O Teorema 4.7.3 afirma que a esperança de  $(\theta - a)^2$  é calculada com respeito a uma certa distribuição de  $\theta$ , esta esperança será um

mínimo quando  $a$  for escolhido como igual à média  $E(\theta|\mathbf{x})$  da distribuição a posteriori, se a média a posteriori for finita. Se a média a posteriori não for finita, então a perda esperada é infinita para cada valor possível de  $a$ . Portanto, temos o seguinte corolário do Teorema 4.7.5.

**Corolário 7.4.1** Seja  $\theta$  um parâmetro de valor real. Suponha que a função de perda de erro quadrático (7.4.4) seja usada e que a média a posteriori,  $E(\theta|\mathbf{X})$ , seja finita. Então, um estimador de Bayes de  $\theta$  é  $\delta^*(\mathbf{X}) = E(\theta|\mathbf{X})$ .

**Exemplo 7.4.3 Estimando o Parâmetro de uma Distribuição de Bernoulli.** Seja a amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ , que é desconhecido e deve ser estimado. Seja a distribuição a priori de  $\theta$  a distribuição beta com parâmetros  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . Suponha que a função de perda de erro quadrático seja usada, como especificado em Eq. (7.4.4), para  $0 < \theta < 1$  e  $0 < a < 1$ . Determinaremos a estimativa de Bayes de  $\theta$ . Para valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , seja  $y = \sum_{i=1}^n x_i$ . Segue-se do Teorema 7.3.1 que a distribuição a posteriori de  $\theta$  será a distribuição beta com parâmetros  $\alpha_1 = \alpha + y$  e  $\beta_1 = \beta + n - y$ . Uma vez que a média da distribuição beta com parâmetros  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  é  $\alpha_1/(\alpha_1 + \beta_1)$ , a média da distribuição a posteriori de  $\theta$  será  $(\alpha + y)/(\alpha + \beta + n)$ . A estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  será igual a este valor para cada vetor observado  $\mathbf{x}$ . Portanto, o estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  é especificado da seguinte forma:

$$\delta^*(\mathbf{X}) = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n X_i}{\alpha + \beta + n}. \quad (7.4.5)$$

**Exemplo 7.4.4 Estimando a Média de uma Distribuição Normal.** Seja a amostra aleatória  $X_1, \dots, X_n$  de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o valor da variância  $\sigma^2$  é conhecido. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal com média  $\mu_0$  e variância  $\nu_0^2$ . Finalmente, suponha que a função de perda de erro quadrático seja usada, como especificado em Eq. (7.4.4), para  $-\infty < \theta < \infty$  e  $-\infty < a < \infty$ . Determinaremos o estimador de Bayes de  $\theta$ . Segue-se do Teorema 7.3.3 que para todos os valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , a distribuição a posteriori de  $\theta$  será a distribuição normal com média  $\mu_1$  especificada em Eq. (7.3.1). Portanto, o estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  é especificado da seguinte forma:

$$\delta^*(\mathbf{X}) = \frac{\sigma^2 \mu_0 + n \nu_0^2 \bar{X}_n}{\sigma^2 + n \nu_0^2}. \quad (7.4.6)$$

A variância a posteriori de  $\theta$  não entra neste cálculo.

Outra função de perda comumente usada em problemas de estimação é a função de perda de erro absoluto.

**Definição 7.4.5 Função de Perda de Erro Absoluto.** A função de perda

$$L(\theta, a) = |\theta - a| \quad (7.4.7)$$

é chamada de *perda de erro absoluto*.

Para cada valor observado de  $\mathbf{x}$ , a estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  será agora o valor de  $a$  para o qual a esperança  $E(|\theta - a| | \mathbf{x})$  é um mínimo. Foi mostrado no Teorema 4.5.3 que para cada distribuição de probabilidade dada de  $\theta$ , a esperança de  $|\theta - a|$  será um mínimo quando  $a$  for escolhido como a mediana da distribuição de  $\theta$ . Portanto, quando a esperança de  $|\theta - a|$  é calculada com respeito à distribuição a posteriori de  $\theta$ , esta esperança será um mínimo quando  $a$  for escolhido como a mediana da distribuição a posteriori de  $\theta$ .

**Corolário 7.4.2** Quando a função de perda de erro absoluto (7.4.7) é usada, um estimador de Bayes de um parâmetro de valor real  $\theta$  é  $\delta^*(\mathbf{X})$  igual a uma mediana da distribuição a posteriori de  $\theta$ .

Vamos agora reconsiderar os Exemplos 7.4.3 e 7.4.4, mas usaremos a função de perda de erro absoluto em vez da função de perda de erro quadrático.

**Exemplo 7.4.5 Estimando o Parâmetro de uma Distribuição de Bernoulli.** Considere novamente as condições do Exemplo 7.4.3, mas suponha que a função de perda de erro absoluto seja usada, como especificado na Eq. (7.4.7). Para todos os valores observados  $x_1, \dots, x_n$ , a estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  será igual à mediana da distribuição a posteriori de  $\theta$ , que é a distribuição beta com parâmetros  $\alpha + y$  e  $\beta + n - y$ . Não há expressão simples para a mediana desta distribuição. Ela deve ser determinada por aproximações numéricas para cada conjunto de valores observados. A maioria dos softwares de computador estatísticos pode calcular a mediana de uma distribuição beta arbitrária. Como um exemplo específico, considere a situação descrita no Exemplo 7.3.13 no qual uma priori imprópria foi usada. A distribuição a posteriori de  $\theta$  nesse exemplo foi a distribuição beta com parâmetros 22 e 18. A média desta distribuição beta é  $22/40 = 0.55$ . A mediana é 0.5508.

**Exemplo 7.4.6 Estimando a Média de uma Distribuição Normal.** Considere novamente as condições do Exemplo 7.4.4, mas suponha agora que a função de perda de erro absoluto seja usada, como especificado na Eq. (7.4.7). Para todos os valores observados, a estimativa de Bayes  $\delta^*(\mathbf{x})$  será igual à mediana da distribuição normal a posteriori de  $\theta$ . No entanto, uma vez que a média



e a mediana de cada distribuição normal são iguais,  $\delta^*(\mathbf{x})$  é igual à média da distribuição a posteriori. Portanto, o estimador de Bayes com respeito à função de perda de erro absoluto é o mesmo que o estimador de Bayes com respeito à função de perda de erro quadrático, e é novamente dado pela Eq. (7.4.6).

## Outras Funções de Perda

Embora a função de perda de erro quadrático e, em menor grau, a função de perda de erro absoluto sejam as funções de perda mais comumente usadas em problemas de estimação, nenhuma delas pode ser apropriada em um problema de estimação particular. Em alguns problemas, pode ser apropriado usar uma função de perda com a forma  $L(\theta, a) = |\theta - a|^k$ , onde  $k$  é algum número positivo diferente de 1 ou 2. Em outros problemas, o fato de a estimativa  $a$  ter uma magnitude grande pode depender do valor real de  $\theta$ . Em tal problema, pode ser apropriado usar uma função de perda com a forma  $L(\theta, a) = \lambda_1(\theta)|\theta - a|$  ou  $L(\theta, a) = \lambda_2(\theta)(\theta - a)^2$ , onde  $\lambda(\theta)$  é uma função positiva de  $\theta$ . Em outros problemas ainda, pode ser mais custoso superestimar  $\theta$  por uma certa quantidade do que subestimá-lo pela mesma quantidade. Uma função de perda específica que reflete essa propriedade é a seguinte:

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 3(\theta - a)^2 & \text{para } \theta \leq a, \\ (\theta - a)^2 & \text{para } \theta > a. \end{cases}$$

Vários outros tipos de funções de perda podem ser relevantes em problemas de estimação específicos. No entanto, neste livro, daremos a maior parte de nossa atenção às funções de perda de erro quadrático e de erro absoluto.

## A Estimativa de Bayes para Amostras Grandes

**Efeito de Diferentes Distribuições a Priori.** Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote seja desconhecida e que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Suponha também que o valor de  $\theta$  deva ser estimado, e que a função de perda de erro quadrático seja usada. Suponha, finalmente, que em uma amostra aleatória de 100 itens do lote, 10 itens sejam defeituosos. Como a distribuição uniforme é a distribuição beta com parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$ , e como  $n = 100$  e  $y = 10$ , segue-se de Eq. (7.4.5) que a estimativa de Bayes é  $\delta^*(\mathbf{x}) = 11/102 = 0.108$ . Agora, suponha que a f.d.p. a priori de  $\theta$  tenha a forma  $\xi(\theta) = 2(1 - \theta)$  para  $0 < \theta < 1$ . Em vez de uma distribuição uniforme, e que em uma amostra aleatória de 100 itens, exatamente 10 itens sejam defeituosos. Como  $\xi(\theta)$  é a f.d.p. da distribuição beta com parâmetros  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ , segue-se de Eq. (7.4.5) que neste caso a estimativa de Bayes de  $\theta$  é  $\delta(\mathbf{x}) = 11/103 = 0.107$ . As duas distribuições a priori consideradas aqui são bastante diferentes. A média da distribuição uniforme é  $1/2$ , e a média da outra distribuição a priori é  $1/3$ . No entanto, como o número de observações na amostra é grande ( $n = 100$ ), as estimativas de Bayes com respeito às duas distribuições a priori diferentes são quase as mesmas. Além

disso, os valores de ambas as estimativas são muito próximos da proporção observada de itens defeituosos na amostra,  $\bar{x}_n = 0.1$ .

**Exemplo 7.4.7 Medidas de Peito.** Quetelet (1846) relatou (com alguns erros) dados sobre as medidas de peito (em polegadas) de 5732 milicianos escoceses. Esses dados apareceram anteriormente em um artigo de 1817 de um médico militar e foram discutidos por Stigler (1986). A Fig. 7.6 mostra um histograma dos dados. Suponha que modelamos as medidas individuais do peito como uma amostra aleatória (dado  $\theta$ ) de variáveis aleatórias normais com média  $\theta$  e variância 4. A média do peito da amostra é  $\bar{x}_n = 39.85$ . Se tivéssemos a distribuição normal a priori com média  $\mu_0$  e variância  $\nu_0^2$ , então usando a Eq. (7.3.1) a distribuição a posteriori de  $\theta$  seria normal com média

$$\mu_1 = \frac{4\mu_0 + 5732 \times \nu_0^2 \times 39.85}{4 + 5732 \times \nu_0^2}$$

e variância

$$\nu_1^2 = \frac{4\nu_0^2}{4 + 5732 \times \nu_0^2}.$$

A estimativa de Bayes será então  $\delta(\mathbf{x}) = \mu_1$ . Note que, a menos que  $\mu_0$  seja incrivelmente grande ou  $\nu_0^2$  seja muito pequeno, teremos  $\mu_1$  quase igual a 39.85 e  $\nu_1^2$  quase igual a  $4/5732$ . De fato, se a f.d.p. a priori de  $\theta$  for qualquer função contínua que seja positiva em torno de  $\theta = 39.85$  e não seja extremamente grande longe de 39.85, então a f.d.p. a posteriori de  $\theta$  com uma f.d.p. normal muito próxima com média 39.85 e variância  $4/5732$ . A média e a mediana da distribuição a posteriori estão próximas de 39.85, independentemente da distribuição a priori.

**Consistência do Estimador de Bayes.** Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra aleatória (dado  $\theta$ ) da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ . Suponha que usamos uma priori conjugada para  $\theta$ . Como  $\theta$  é a média da distribuição da qual a amostra está sendo retirada, segue-se das leis dos grandes números discutidas na Seção 6.2 que  $\bar{X}_n$  converge em probabilidade para  $\theta$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como a diferença entre o estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  e  $\bar{X}_n$  converge em probabilidade para 0 quando  $n \rightarrow \infty$ , também pode ser concluído que  $\delta^*(\mathbf{X})$  converge em probabilidade para o valor desconhecido de  $\theta$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Definição 7.4.6 Sequência Consistente de Estimadores.** Uma sequência de estimadores que converge em probabilidade para o valor desconhecido do

parâmetro que está sendo estimado, quando  $n \rightarrow \infty$ , é chamada de *sequência consistente de estimadores*.

Assim, mostramos que os estimadores de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  formam uma sequência consistente de estimadores no problema considerado aqui. A interpretação prática deste resultado é a seguinte: Quando um grande número de observações é feito, há alta probabilidade de que o estimador de Bayes esteja muito próximo do valor desconhecido de  $\theta$ . Os resultados que acabamos de apresentar para estimar o parâmetro de uma distribuição de Bernoulli também são verdadeiros para outros problemas de estimação. Sob condições gerais razoáveis e para uma ampla classe de funções de perda, os estimadores de Bayes de alguns parâmetros  $\theta$  formarão uma sequência consistente de estimadores à medida que o tamanho da amostra  $n \rightarrow \infty$ . Em particular, para amostras aleatórias de qualquer uma das várias famílias de distribuições discutidas na Seção 7.3, se uma distribuição a priori conjugada for atribuída aos parâmetros e a função de perda de erro quadrático for usada, os estimadores de Bayes formarão sequências consistentes de estimadores. Por exemplo, considere novamente as condições do Exemplo 7.4.4. Nesse exemplo, uma amostra aleatória é retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido, e o estimador de Bayes  $\delta^*(\mathbf{X})$  é especificado por Eq. (7.4.6). Como  $\bar{X}_n$  convergirá para o valor desconhecido de  $\theta$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pode-se ver a partir da Eq. (7.4.6) que  $\delta^*(\mathbf{X})$  também convergirá para  $\theta$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assim, os estimadores de Bayes novamente formam uma sequência consistente de estimadores. Outros exemplos são dados nos Exercícios 7 e 11 no final desta seção.

## Parâmetros e Estimadores Mais Gerais

Até agora nesta seção, consideramos apenas parâmetros de valor real e estimadores desses parâmetros. Existem duas generalizações muito comuns desta situação que são fáceis de lidar com as mesmas técnicas descritas acima. A primeira generalização é para parâmetros multidimensionais, como o parâmetro bidimensional de uma distribuição normal com média e variância desconhecidas. A segunda generalização é para funções do parâmetro em vez do próprio parâmetro. Por exemplo, se  $\theta$  é a taxa de falha no Exemplo 7.1.1, podemos estar interessados em estimar  $1/\theta$ , o tempo médio até a falha. Como outro exemplo, se nossos dados provêm de uma distribuição normal com média e variância desconhecidas, podemos desejar estimar apenas a média em vez do parâmetro inteiro. As mudanças necessárias na Definição 7.4.1 para lidar com ambas as generalizações que acabamos de mencionar são dadas na Definição 7.4.7.

**Definição 7.4.7 Estimador/Estimativa.** Seja  $X_1, \dots, X_n$  observáveis, cuja distribuição conjunta é indexada por um parâmetro  $\theta$  assumindo valores em um subconjunto  $\Omega$  de um espaço  $k$ -dimensional. Seja  $h$  uma função

de  $\Omega$  para um espaço  $d$ -dimensional. Defina  $\psi = h(\theta)$ . Um *estimador* de  $\psi$  é uma função  $\delta(X_1, \dots, X_n)$  que assume valores no espaço  $d$ -dimensional. Se  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$  são observados, então  $\delta(x_1, \dots, x_n)$  é chamada de *estimativa* de  $\psi$ .

Quando  $h$  na Definição 7.4.7 é a função identidade  $h(\theta) = \theta$ , então  $\psi = \theta$  e estamos estimando o parâmetro original  $\theta$ . Quando  $h(\theta)$  é uma coordenada de  $\theta$ , então  $\psi$  é essa coordenada, e estamos estimando apenas essa coordenada. Haverá uma série de parâmetros multidimensionais em seções posteriores e capítulos deste livro. Aqui está um exemplo de estimar uma função de um parâmetro.

**Exemplo 7.4.8 Tempo de Vida de Componentes Eletrônicos.** No Exemplo 7.3.12, suponha que queiramos estimar  $\psi = 1/\theta$ , o tempo médio até a falha dos componentes eletrônicos. A distribuição a posteriori de  $\theta$  é a distribuição gama com parâmetros 4 e 8.6. Se usarmos a função de perda de erro quadrático  $L(\theta, a) = (\psi - a)^2$ , o Teorema 4.7.3 diz que a estimativa de Bayes é a média da distribuição a posteriori de  $\psi$ . Que é,

$$\begin{aligned}\delta^*(\mathbf{x}) &= E(\psi|\mathbf{x}) = E\left(\frac{1}{\theta} \middle| \mathbf{x}\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \xi(\theta|\mathbf{x}) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \frac{8.6^4}{6} \theta^3 e^{-8.6\theta} d\theta \\ &= \frac{8.6^4}{6} \int_0^\infty \theta^2 e^{-8.6\theta} d\theta \\ &= \frac{8.6^4}{6} \frac{2}{8.6^3} = \frac{8.6}{3} = 2.867.\end{aligned}$$

onde a igualdade final segue do Teorema 5.7.3. A média de  $1/\theta$  é ligeiramente maior que  $1/E(\theta|\mathbf{x}) = 8.6/4 = 2.15$ .

**Nota: Funções de Perda e Utilidade.** Na Seção 4.8, introduzimos o conceito de utilidade para medir os valores para um tomador de decisão de vários resultados aleatórios. O conceito de função de perda está intimamente relacionado ao de utilidade. Em um sentido, uma função de perda é como o negativo de uma utilidade. De fato, o Exemplo 4.8.8 mostra como converter perda de erro absoluto em uma utilidade. Nesse exemplo, o papel do parâmetro  $\theta$  e do estimador  $d(W)$  desempenham os papéis do estimador. De maneira semelhante, pode-se converter outras funções de perda em utilidades. Portanto, não é surpreendente que o objetivo de maximizar a utilidade esperada na Seção 4.8 tenha sido substituído pelo objetivo de minimizar a perda esperada na seção atual.

## Limitações dos Estimadores de Bayes

A teoria dos estimadores de Bayes, como descrita nesta seção, fornece uma teoria satisfatória e coerente para a estimação de parâmetros. De fato, para os estatísticos que aderem à filosofia Bayesiana, ela fornece a única teoria de estimação que pode ser desenvolvida. No entanto, existem certas limitações para a aplicabilidade da teoria em problemas estatísticos práticos. Para aplicar a teoria, é necessário especificar uma função de perda particular, como o erro quadrático ou o erro absoluto, e também uma distribuição a priori para o parâmetro. Especificações significativas podem existir, em princípio, mas pode ser muito difícil e demorado para um estatístico determiná-las. Em alguns problemas, o estatístico deve determinar as especificações que seriam apropriadas para clientes ou empregadores que não estão disponíveis ou não conseguem comunicar suas preferências e conhecimento. Em outros problemas, pode ser necessário que uma estimativa seja feita por membros de um grupo ou comitê, e pode ser difícil para os membros do grupo chegarem a um acordo sobre uma função de perda apropriada e distribuição a priori. Outra dificuldade possível é que em um problema particular o parâmetro  $\theta$  pode ser na verdade um vetor de parâmetros de valor real para os quais todos os valores são desconhecidos. A teoria dos estimadores de Bayes, que foi desenvolvida na seção anterior, pode ser facilmente generalizada para incluir a estimação de um parâmetro vetorial  $\theta$ . No entanto, para aplicar esta teoria em tal problema é necessário especificar uma priori multivariada para este vetor e também especificar uma função de perda  $L(\theta, \mathbf{a})$  para um vetor  $\mathbf{a}$  multivariado. Mesmo que o estatístico possa estar interessado em estimar apenas um ou dois componentes do vetor  $\theta$  em um determinado problema, ele ainda deve atribuir uma priori multivariada para todo o vetor  $\theta$ . Em muitos problemas estatísticos, alguns dos quais serão discutidos mais adiante neste livro,  $\theta$  pode ter um grande número de componentes. Em tal problema, é especialmente difícil especificar uma distribuição a priori significativa na parametrização multidimensional. Deve ser enfatizado que não há uma maneira simples de resolver essas dificuldades. Outros métodos de estimação que não se baseiam em distribuições a priori e funções de perda normalmente têm limitações práticas, e esses outros métodos também costumam ter sérios defeitos em sua estrutura teórica.

## Resumo

Um estimador de um parâmetro  $\theta$  é uma função  $\delta$  dos dados  $\mathbf{X}$ . Se  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  for observado, o valor  $\delta(\mathbf{x})$  é chamado de nossa estimativa, o valor observado do estimador  $\delta(\mathbf{X})$ .

## Exercícios

1. Em um ensaio clínico, seja  $\theta$  a probabilidade de um resultado bem-sucedido. Suponha que  $\theta$  tenha uma distribuição a priori que é a distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ , que também é a distribuição beta com parâmetros

- 1 e 1. Suponha que o primeiro paciente tenha um resultado bem-sucedido. Encontre as estimativas de Bayes de  $\theta$  que seriam obtidas para as funções de perda de erro quadrático e de erro absoluto.
2. Suponha que a proporção  $\theta$  de itens defeituosos em um grande lote seja desconhecida, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição beta para a qual os parâmetros são  $\alpha = 5$  e  $\beta = 10$ . Suponha também que 20 itens sejam selecionados aleatoriamente do lote, e que exatamente um desses itens seja encontrado como defeituoso. Se a função de perda de erro quadrático for usada, qual é a estimativa de Bayes de  $\theta$ ?
3. Considere novamente as condições do Exercício 2. Suponha que a distribuição a priori de  $\theta$  seja como dada no Exercício 2, e suponha novamente que 20 itens sejam selecionados aleatoriamente do lote.
  - (a) Para qual número de itens defeituosos na amostra o erro quadrático médio da estimativa de Bayes será máximo?
  - (b) Para qual número o erro quadrático médio da estimativa de Bayes será mínimo?
4. Suponha que uma amostra aleatória de tamanho  $n$  seja retirada da distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$ , que é desconhecido, mas para a qual a distribuição a priori de  $\theta$  é uma distribuição beta para a qual a média é  $\mu_0$ . Mostre que a média da distribuição a posteriori de  $\theta$  será uma média ponderada com a forma  $\gamma_n \bar{X}_n + (1 - \gamma_n)\mu_0$ , e mostre que  $\gamma_n \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
5. Suponha que o número de defeitos em um rolo de 1200 pés de fita de gravação magnética tenha uma distribuição de Poisson para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição gama para a qual os parâmetros são  $\alpha = 3$  e  $\beta = 1$ . Quando cinco rolos desta fita são selecionados aleatoriamente e inspecionados, os números de defeitos encontrados nos rolos são 2, 2, 6, 0 e 3. Se a função de perda de erro quadrático for usada, qual é a estimativa de Bayes de  $\theta$ ? (Ver Exercício 5 da Seção 7.3.)
6. Suponha que uma amostra aleatória de tamanho  $n$  seja retirada de uma distribuição de Poisson para a qual a média  $\theta$  é desconhecida, e a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição gama para a qual a média é  $\mu_0$ . Mostre que a média da distribuição a posteriori de  $\theta$  será uma média ponderada com a forma  $\gamma_n \bar{X}_n + (1 - \gamma_n)\mu_0$ , e mostre que  $\gamma_n \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ .
7. Considere novamente as condições do Exercício 6, e suponha que o valor de  $\theta$  deva ser estimado usando a função de perda de erro quadrático. Mostre que os estimadores de Bayes, para  $n = 1, 2, \dots$ , formam uma sequência consistente de estimadores de  $\theta$ .

8. Suponha que as alturas dos indivíduos em uma certa população tenham uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o desvio padrão é 2 polegadas. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja uma distribuição normal para a qual a média é 68 polegadas e o desvio padrão é 1 polegada. Suponha finalmente que 10 pessoas sejam selecionadas aleatoriamente da população, e sua altura média seja de 69.5 polegadas.
  - (a) Se a função de perda de erro quadrático for usada, qual é a estimativa de Bayes de  $\theta$ ?
  - (b) Se a função de perda de erro absoluto for usada, qual é a estimativa de Bayes de  $\theta$ ? (Ver Exercício 7 da Seção 7.3.)
9. Suponha que uma amostra aleatória deva ser retirada de uma distribuição normal para a qual o valor da média  $\theta$  é desconhecido e o desvio padrão é 2, a distribuição a priori de  $\theta$  é uma distribuição normal para a qual o desvio padrão é 1, e o valor de  $\theta$  deva ser estimado usando a função de perda de erro quadrático. Qual é o menor tamanho da amostra aleatória que deve ser tomado para que o erro quadrático médio do estimador de Bayes de  $\theta$  seja 0.01 ou menos? (Ver Exercício 10 da Seção 7.3.)
10. Suponha que o tempo em minutos necessário para servir um cliente em um determinado caixa de banco tenha uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro  $\theta$  é desconhecido, a distribuição a priori de  $\theta$  é uma distribuição gama para a qual a média é 0.2 e o desvio padrão é 1, e o tempo médio necessário para servir uma amostra aleatória de 20 clientes seja observado como 3.8 minutos. Se a função de perda de erro quadrático for usada, qual é a estimativa de Bayes de  $\theta$ ? (Ver Exercício 12 da Seção 7.3.)
11. Suponha que uma amostra aleatória de tamanho  $n$  seja retirada de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro  $\theta$  é desconhecido, a distribuição a priori de  $\theta$  é uma distribuição gama especificada, e o valor de  $\theta$  deva ser estimado usando a função de perda de erro quadrático. Mostre que os estimadores de Bayes, para  $n = 1, 2, \dots$ , formam uma sequência consistente de estimadores de  $\theta$ .
12. Seja  $\theta$  a proporção de eleitores registrados em uma grande cidade que são a favor de uma certa proposição. Suponha que o valor de  $\theta$  seja desconhecido, e dois estatísticos,  $A$  e  $B$ , atribuam a  $\theta$  as seguintes f.d.p.s a priori diferentes,  $\xi_A(\theta)$  e  $\xi_B(\theta)$ , respectivamente:

$$\xi_A(\theta) = 2\theta \quad \text{para } 0 < \theta < 1,$$

$$\xi_B(\theta) = 4\theta^3 \quad \text{para } 0 < \theta < 1.$$

Em uma amostra aleatória de 1000 eleitores registrados da cidade, descubra-se que 710 são a favor da proposição.

- (a) Encontre a distribuição a posteriori que cada estatístico atribui a  $\theta$ .
  - (b) Encontre a estimativa de Bayes para cada estatístico com base na função de perda de erro quadrático.
  - (c) Mostre que, após as opiniões dos 1000 eleitores na amostra aleatória terem sido obtidas, as estimativas de Bayes para os dois estatísticos não poderiam diferir por mais de 0.002, independentemente do número na amostra que eram a favor da proposição.
13. Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória da distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ , onde o valor do parâmetro  $\theta$  é desconhecido. Suponha também que a distribuição a priori de  $\theta$  seja a distribuição de Pareto com parâmetros  $x_0$  e  $\alpha$  ( $x_0 > 0$  e  $\alpha > 0$ ), como definido no Exercício 16 da Seção 5.7. Se o valor de  $\theta$  deve ser estimado usando a função de perda de erro quadrático, qual é o estimador de Bayes de  $\theta$ ? (Ver Exercício 18 da Seção 7.3.)
14. Suponha que  $X_1, \dots, X_n$  formem uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro  $\theta$  é desconhecido ( $\theta > 0$ ). Seja  $\xi(\theta)$  a f.d.p. a priori de  $\theta$ , e seja  $\hat{\theta}$  o estimador de Bayes de  $\theta$  com respeito à f.d.p. a priori  $\xi(\theta)$  quando a função de perda de erro quadrático é usada. Seja  $\psi = \theta^2$ , e suponha que, em vez de estimar  $\theta$ , seja desejado estimar o valor de  $\psi$  sujeito à seguinte função de perda de erro quadrático:

$$L(\psi, a) = (\psi - a)^2 \quad \text{para } \psi > 0 \text{ e } a > 0.$$

Seja  $\hat{\psi}$  o estimador de Bayes de  $\psi$ . Explique por que  $\hat{\psi} > \hat{\theta}^2$ . *Dica:* Olhe o Exercício 4 na Seção 4.4.

15. Seja  $c > 0$  e considere a função de perda

$$L(\theta, a) = \begin{cases} c|\theta - a| & \text{se } \theta < a, \\ |\theta - a| & \text{se } \theta \geq a. \end{cases}$$

Assuma que  $\theta$  tem uma distribuição contínua. Prove que um estimador de Bayes de  $\theta$  será qualquer quantil  $1/(1+c)$  da distribuição a posteriori de  $\theta$ . *Dica:* A prova é muito parecida com a prova do Teorema 4.5.3. O resultado se mantém mesmo que  $\theta$  não tenha uma distribuição contínua, mas a prova é mais complicada.