FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA
História da Matemática

Logaritmo e suas Aplicações

RODRIGO SEVERO ARAÚJO
VICTOR GABRIEL HARUO IWAMOTO

Rio de Janeiro – RJ
Outubro 2025

1 Motivação e Contexto Histórico

Imagine a Europa do começo do século XVII, no período das grandes navegações, num mundo sem calculadoras nem computadores. Mas com a necessidade de se computar operações (especialmente multiplicações e divisões) com números grandes, e cada vez maiores, surgiu a necessidade de se fazer isso cada vez mais rápido.

A primeira ideia, ao invés de tentar criar uma máquina que fizesse as contas, foi tentar simplificar o problema. No século XVI, nasce a ideia de "transformar o produto em uma soma", utilizando a *trigonometria*. Mais precisamente, era utilizada as relações de Prostraférese, como a que segue:

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + cos(a-b)$$

Com essa ideia, e uma tabela trigonométrica, multiplicações de números poderiam ser feitas rapidamente, trocando-as por somas, e consultas à tabela, podemos fazer um exemplo breve:

Imagine que queremos realizar o seguinte produto: $0,98374 \cdot 0,90923$, utilizando de uma tabela trigonométrica, podemos fazer:

$$\begin{cases} 2\cos a = 0,98374 \\ \cos b = 0,90923 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cong 60° \\ b \cong 25° \end{cases} \Rightarrow \cos(a+b) + \cos(a-b) =$$
$$\cos(85°) + \cos(35°) = 0,0872 + 0,8192 = 0,9064$$

Multiplicando com uma calculadora dos tempos atuais obtemos: $0,8944459202$. O Resultado encontrado era muito preciso para a época, e que não custou um esforço muito grande a não ser somar e substituir valores de uma tabela. Esse método foi muito utilizado por matemáticos e astrônomos da época.

Essas ideias de transformar multiplicação para soma, abriu porta para um novo conceito: *Os logaritmos*

1.1 John Napier

John Napier (1550-1617) foi um proprietário escocês, nascido no castelo de Merchinston, na Escócia. John Napier teve origem nobre, viveu a maior parte de sua vida na majestosa propriedade de sua família. Era constantemente envolvido com controvérsias políticas e religiosas, e era anticatólico declarado. Em 1593 tentou provar numa publicação que o Papa era o Anticristo. Esta publicação atingiu 21 edições, com pelo menos dez ainda em vida do autor.

Napier desenvolveu um método similar ao da Prostaférese, na verdade, acredita-se que Napier tenha se influenciado por ele para criar seu método, pois ele utilizava tabelas de senos e seus ângulos. Apesar de não existir a notação exponencial, Napier fez a seguinte abordagem: Associou os termos das progressões geométricas e aritméticas da tabela abaixo:

b^1	b^2	b^3	b^4	$\dots$	b^m	$\dots$	b^n	$\dots$
1	2	3	4	$\dots$	m	$\dots$	n	$\dots$

então o produto de dois termos $b^m b^n$ da primeira progressão está associado à soma $m+n$ dos termos da segunda progressão.

Por exemplo, imagine que temos uma tabela com todas as potências de 2 e queremos realizar o produto: $512 \cdot 1024$, observe que isto é igual a $2^9 \cdot 2^{10}$, esse termo da progressão geométrica está associado ao termo $10+9=19$ da progressão aritmética, portanto, basta olhar na tabela quem é o número 2^{19}, e assim, conseguimos calcular o produto sem precisar efetuar nenhuma multiplicação.

Napier utilizou dessa ideia. Para manter os termos da progressão geométrica suficiente próximos, adotou $b = 1 - \frac{1}{10^7} \approx 1$, então seu decrescimento é lento o suficiente para termos bem próximos. Além disso, para evitar decimais, Napier multiplicou cada termo por 10^7. Então, a tabela agora poderia ser reescrita da seguinte forma:

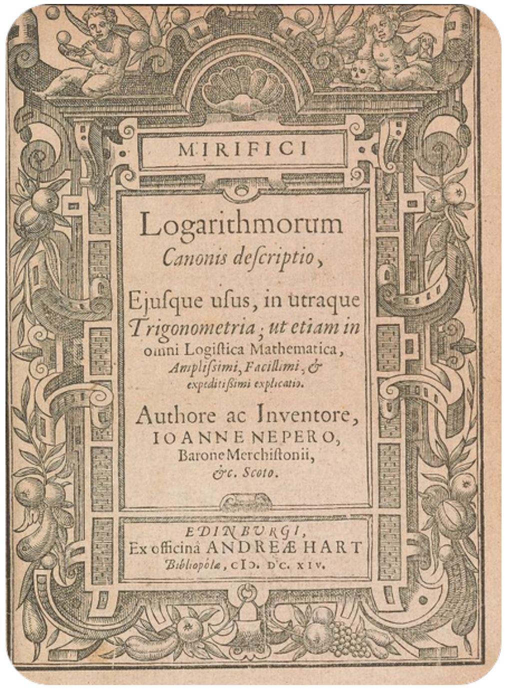
9999999	9999998	9999997	$\dots$	9999900	$\dots$	$3678794,228$	$\dots$
1	2	3	$\dots$	100	$\dots$	10000000	$\dots$

Daí, para qualquer N da primeira progressão, existe um único L na segunda progressão, de modo que

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Napier chamava L de logaritmo de N, e definiremos $\operatorname{Naplog} N = L$.

Napier publicou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos). O trabalho contém uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arco.



MIRIFICI

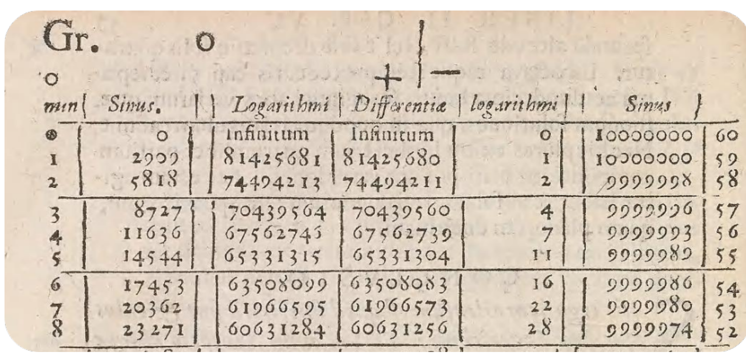
Logarithmorum
Canonis descriptio,

Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.

EDINBVRGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

Figura 1: Capa do Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio



Gr. 0

0 + | −

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52

Figura 2: Tabela desenvolvida por Napier

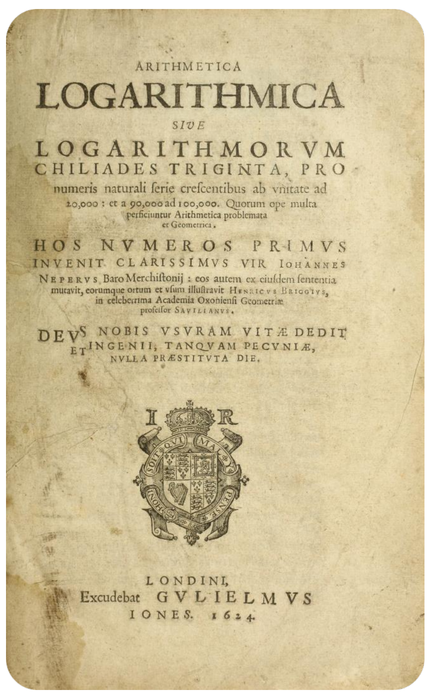
2 Outras Vertentes

2.1 Henry Briggs

Em 1616, impulsionado pela repercussão dos logaritmos, o matemático inglês Henry Briggs (1561 - 1630), professor de geometria no Gresham College, em Londres, ficou fascinado com a criação de Napier. Briggs visitou Napier em Edimburgo e sugeriu uma alteração na base do logaritmo. Com o intuito de tornar os cálculos mais intuitivos, ele propôs que o logaritmo fosse calculado na base decimal.

Napier concordou com a ideia; entretanto, faleceu logo em seguida, em 1617. Dessa forma, o encargo de adaptar as tabelas de logaritmos para a base decimal ficou a cargo de Briggs.

Em 1617, Briggs publicou os logaritmos dos primeiros 1.000 números. Já em 1624, lançou o livro *Arithmetica Logarithmica*, uma obra contendo os logaritmos dos primeiros 30.000 números naturais, com 14 casas de precisão.



ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.

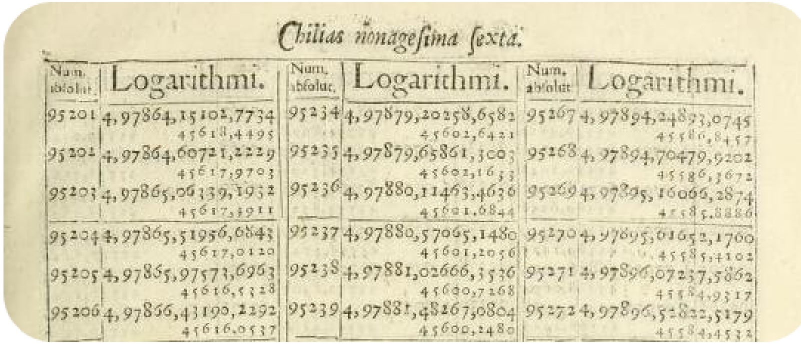
HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS, Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

I R

LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

Figura 3: Capa do Arithmetica Logarithmica



Chilias nonagesima sexta.

Num. absolut.	Logarithmi.	Num. absolut.	Logarithmi.	Num. absolut.	Logarithmi.
95201	4,97864,15102,7734	95234	4,97879,20258,6582	95267	4,97894,24893,0745
	45618,4495		45602,6421		45586,8457
95202	4,97864,60721,2229	95235	4,97879,65861,3003	95268	4,97894,70479,9202
	45617,9703		45602,1633		45586,3672
95203	4,97865,06339,1932	95236	4,97880,11463,4636	95269	4,97895,16066,2874
	45617,3911		45601,6844		45585,8886
95204	4,97865,51956,6843	95237	4,97880,57065,1480	95270	4,97895,61652,1760
	45617,0120		45601,2056		45585,4102
95205	4,97865,97573,6963	95238	4,97881,02666,3536	95271	4,97896,07237,5862
	45616,5328		45600,7268		45584,9317
95206	4,97866,43190,2292	95239	4,97881,48267,0804	95272	4,97896,52822,5179
	45616,0537		45600,2480		45584,4533

Figura 4: Tabela desenvolvida por Briggs

2.2 Jost Burgi

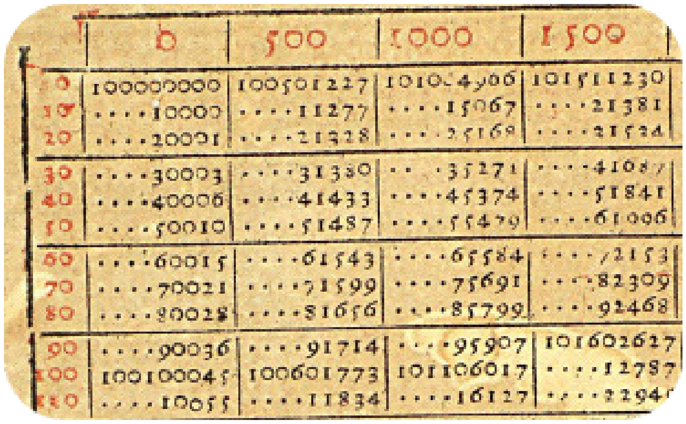
Por volta de 1600, o relojoeiro e matemático suíço Jost Bürgi (1552-1632) construiu uma tabela de progressões (um conceito análogo aos antilogaritmos) que precedeu os trabalhos de Napier, utilizando um método distinto.

Ao desenvolver sua tabela, Burgi percebeu que utilizar bases simples, como por exemplo 2, fazia com que as potências crescessem muito rapidamente e, portanto, tornando impraticável seu uso para interpolação de valores. Como método de contornar tal problemática, Burgi adotou uma razão muito próxima de 1, em específico 1.0001 como base para sua progressão geométrica.

Um dos aspectos mais distintos do sistema de Bürgi foi o uso de cores para enfatizar a relação dual entre a progressão aritmética (os logaritmos) e a progressão geométrica (os antilogaritmos).

Ao contrário de Napier, que desenvolveu uma terminologia técnica, Bürgi criou uma distinção visual imediata ao utilizar tinta preta e vermelha, tanto no texto explicativo quanto nas próprias tabelas:

- **Números Vermelhos (Logaritmos):** Impressos em vermelho, representavam os argumentos da tabulação. Estes números seguiam uma progressão aritmética.
- **Números Pretos (Antilogaritmos):** Impressos em preto, representavam as entradas tabulares, ou os "números ordinários". Estes números seguiam a progressão geométrica de base 1.0001.



	0	500	1000	1500
0	100000000	100501227	101004966	101511230
10	10000	11277	15067	21381
20	20001	21328	25169	31534
30	30003	31380	35271	....410[illegible]
40	40006	41433	45374	51841
50	50010	51487	55479	61006
60	60015	61543	65584	....[illegible]2153
70	70021	71599	75691	82309
80	80028	81656	85799	92468
90	90036	91714	95907	101602627
100	100100045	100601773	101106017	12787
110	10055	11834	16127	....2294[illegible]

Figura 5: Tabela desenvolvida por Burgi

Apesar de a tabela de Bürgi ter, na prática, o mesmo propósito da de Napier — transformar multiplicações complexas em adições simples — e de ter sido criada anteriormente, ela não conseguiu estabelecer uma base teórica suficientemente clara para definir o conceito abstrato de função logarítmica.

Por essa razão histórica, e pela fundamentação conceitual mais robusta de seu trabalho publicado em 1614, John Napier é predominantemente reconhecido como o inventor dos logaritmos.

3 Tábua de Logaritmo

A capacidade computacional hodierna banalizou operações que antes representavam desafios consideráveis de tempo e precisão, como o produto $4538 \cdot 675$. Entretanto, até a disseminação das calculadoras eletrônicas na década de 1970, tal cálculo exigia métodos analógicos e tabulares. Na época, a solução era advinda de métodos que utilizavam tábuas de logaritmos e réguas de cálculo.

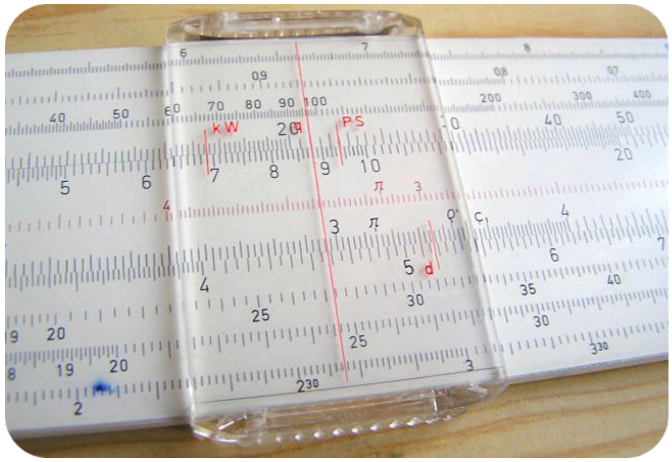


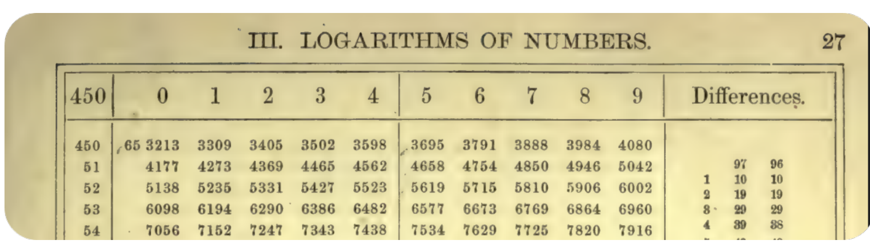
Figura 6: Régua de Cálculo

3.1 Exemplo

Para elucidar o método, demonstraremos como as tábuas eram utilizadas para computar o produto $4538 \cdot 675$. O método se fundamenta a partir da seguinte propriedade de logaritmo:

$$\begin{aligned} P = a \cdot b \quad &\implies \quad \log(P) = \log(a \cdot b) \\ &\implies \quad \log(P) = \log(a) + \log(b) \\ &\implies \quad P = \log^{-1}\left(\log(a) + \log(b)\right) \end{aligned}$$

Tabelas do Exemplo:



III. LOGARITHMS OF NUMBERS. 27

450	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Differences.
450	65 3213	3309	3405	3502	3598	3695	3791	3888	3984	4080	
51	4177	4273	4369	4465	4562	4658	4754	4850	4946	5042	97 96
52	5138	5235	5331	5427	5523	5619	5715	5810	5906	6002	1 10 10
53	6098	6194	6290	6386	6482	6577	6673	6769	6864	6960	2 19 19
54	7056	7152	7247	7343	7438	7534	7629	7725	7820	7916	3 29 29
											4 39 38

Figura 7: Tabela do Número 4538

670	82 6075	6140	6204	6269	6334	6399	6464	6528	6593	6658
71	6723	6787	6852	6917	6981	7046	7111	7175	7240	7305
72	7369	7434	7499	7563	7628	7692	7757	7821	7886	7951
73	8015	8080	8144	8209	8273	8338	8402	8467	8531	8595
74	8660	8724	8789	8853	8918	8982	9046	9111	9175	9239
75	9304	9368	9432	9497	9561	9625	9690	9754	9818	9882
76	9947	*0011	*0075	*0139	*0204	*0268	*0332	*0396	*0460	*0525
77	83 0589	0653	0717	0781	0845	0909	0973	1037	1102	1166
78	1230	1294	1358	1422	1486	1550	1614	1678	1742	1806
79	1870	1934	1998	2062	2126	2189	2253	2317	2381	2445

4	26
5	33
6	39
7	46
8	52
9	59
	64
1	6
2	13
3	19
4	26
5	32

Figura 8: Tabela do Número 675

300	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 7121	7266	7411	7555	7700	7844	7989	8133	8278	8422
01	8566	8711	8855	8999	9143	9287	9431	9575	9719	9863
02	48 0007	0151	0294	0438	0582	0725	0869	1012	1156	1299
03	1443	1586	1729	1872	2016	2159	2302	2445	2588	2731
04	2874	3016	3159	3302	3445	3587	3730	3872	4015	4157
05	4300	4442	4585	4727	4869	5011	5153	5295	5437	5579
06	5721	5863	6005	6147	6289	6430	6572	6714	6855	6997
07	7138	7280	7421	7563	7704	7845	7986	8127	8269	8410
08	8551	8692	8833	8974	9114	9255	9396	9537	9677	9818
09	9958	*0099	*0239	*0380	*0520	*0661	*0801	*0941	*1081	*1222

Differences.				
	145	144	143	142
1	15	14	14	14
2	29	29	29	28
3	44	43	43	43
4	58	58	57	57
5	73	72	72	71
6	87	86	86	85
7	102	101	100	99
8	116	115	114	114
9	131	130	129	128
	141	140	139	138

Figura 9: Tabela do Número Resultado

Para fins de organização separemos o método em etapas:

- Passo 1: Computar o logaritmo dos números 4538 e 675
- Passo 2: Somar o resultado encontrado
- Passo 3: Encontrar o antilogaritmo do resultado
- Passo 4: Aplicar métodos de interpolação para melhorar o resultado.

3.1.1 Passo 1

A princípio, é necessário computar o logaritmo dos número 4538 e 675. Mostraremos o processo para o número 4538 e para o número 675 é análogo e fica como exercício para o leitor. O método pode ser particionado em encontrar a parte inteira e a parte fracionária do logaritmo desejado, denota-se característica e mantissa respectivamente.

Parte Inteira: Note que:

$$
\begin{aligned}
&10^3 \leq 4538 \leq 10^4 \iff \\
&\log(10^3) \leq \log(4538) \leq \log(10^4) \iff \\
&3 \leq \log(4538) \leq 4
\end{aligned}
$$

Daí, a parte inteira do log(4538) é 3.

Mantissa: Para a mantissa é necessário consultar a tábua presente na Figura 2. Em suma, basta encontrar os primeiros digitos do valor desejado (450) e veja que os algarismos da parte superior da tábua é referente ao último digito, isto é, no exemplo devemos consultar a coluna do 8. Além disso, nesse exemplar é omitido as duas primeiras casas decimais da mantissa, nessa tábua tais valores estão precedentes à coluna do algarismo 0, isto é, no exemplo, já juntando os digitos, a mantissa é 656864.

Para descobrir a mantissa do valor 675 faça o uso da tábua presente na Figura 3.

Daí, $\log(4538) \approx 3,656864$ e $\log(675) \approx 2,829304$.

3.1.2 Passo 2

Somando os valores encontrados no passo anterior, temos que:

$$\begin{aligned}\log(4538 \cdot 675) &= \log(4538) + \log(675)\\ &\approx 3{,}656864 + 2{,}829304\\ &= 6{,}486168\end{aligned}$$

3.1.3 Passo 3

De maneira análoga, encontrar o antilogaritmo segue o mesmo método.

Parte Inteira:

$$\begin{aligned}&6 \leq 6{,}486168 \leq 7 \iff\\ &\log^{-1}(6) \leq \log^{-1}(6{,}486168) \leq \log^{-1}(7) \iff\\ &10^6 \leq 4538 \cdot 675 \leq 10^7\end{aligned}$$

Daí, a parte inteira indica que o resultado está na casa dos milhões (10^6).

Mantissa: Por meio da tábua na Figura 4, procuremos os dois primeiros digitos da mantissa (48), como logaritmo é uma função crescente, basta procurar ordenadamente. Daí, nos valores que englobam o 48 procuremos pelo piso de 6168. Veja que, como não há o número exato, o número se encontra no intervalo $[6147, 6289]$. Assim, ao tomar 6147 encontramos que o valor aproximado do antilogaritmo desejado é 3063.

Juntando a informação obtida a partir da parte inteira e da mantissa chegamos que $4538 \cdot 675 = 3.063.000$. Por meio de ferramentas de computacionais hodierna descobrimos que o produto é na verdade 3063150; assim, o erro percentual relativo é 0,0049% .

3.1.4 Passo 4

Não satisfeito com a aproximação anterior, ainda por meio da tábua há a possibilidade de melhorar o resultado.

No passo precedente, vimos que $6168 \in I = [6147, 6289]$, assim, $|I| = 142$ e a diferença do valor desejado para o extremo esquerdo de I é $6168 - 6147 = 21$. Dessa maneira, analisando a parte de diferença da tabela na coluna 142, vemos que $21 \in [14, 28]$, melhor dizendo, o quinto dígito é 1, já que devemos sempre pegar o mínimo do menor intervalo possível. Assim, o resultado do produto se torna 3.063.100.

Para descobrirmos o sexto dígitos é necessário realizar um truque, note que no processo anterior na tabela das diferenças não encontramos exatamente o número 21, então podemos subtrair o valor desejado pelo extremo esquerdo do intervalo, $21 - 14 = 7$ (denotaremos de resto). Além disso, computamos o tamanho do intervalo, isto é, $28 - 14 = 14$ (denotaremos de intervalo). Daí, utilizando a seguinte fórmula:

$$\frac{Resto}{Intervalo} = 7/14 = 0.5$$

O resultado nos dá o sexto digito, assim, o resultado do produto se torna 3.063.150

3.1.5 Conclusão

Veja que após realizar o processo de interpolação duas vezes consecutivas reduzimos o erro percentual relativo para zero, isto é, encontramos o resultado exato. Demonstrando que apesar de trabalhoso o método realmente é funcional.

4 Definição Geométrica

Napier, em seus estudos, também desenvolveu uma definição geométrica para o logaritmo. Considere um segmento de reta AB e uma semirreta DE, de origem D, conforme a figura 10. Suponhamos que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente a partir de A e D, respectivamente, ao longo dessas linhas, com a mesma velocidade inicial. Admitamos que C se mova com uma velocidade numericamente sempre igual à distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme.

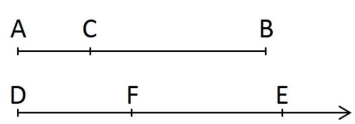


Figura 10: Definição Geométrica de logaritmo

Napier definiu então DF como logaritmo de CB. Isto é, pondo $DF = x$ e $CB = y$, temos:

$$x = \text{Naplog}\, y$$

Para demonstrar esse fato, utilizaremos ferramentas do cálculo diferencial e integral que temos atualmente. Tomando $AB = 10^7$, $x = DF$, $y = CB$, sabemos que a velocidade de C é a derivada de seu deslocamento, ou seja, temos que:

$$\frac{d}{dt}(10^7 - y) = y \iff -\frac{dy}{dt} = y$$

Resolvendo essa equação diferencial, temos que $y(t) = Ce^{-t}$, como $y(0) = C = 10^7$, segue que:

$$y(t) = 10^7 e^{-t}$$

Além disso, como $x(t)$ tem velocidade constante, $x(t) = 10^7 t$. Daí, obtemos as seguintes funções de deslocamento:

$$y(t) = 10^7 e^{-t} \qquad \text{e} \qquad x(t) = 10^7 t$$

Portanto, obtemos que:

$$x = 10^7 t = 10^7 \cdot \ln\left(\frac{10^7}{y}\right)$$

Observe que as definições não coincidem exatamente, mas como Napier tomou 10^7, isto é, um número muito grande. As definições são aproximadamente equivalentes. De fato, após algumas manipulações algébricas e utilizando que $\ln\left(1 - \frac{1}{10^7}\right) \approx -\frac{1}{10^7}$, conseguimos obter que:

$$y = 10^7(1 - 10^{-7})^x \implies x \approx 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right)$$

Para visualizar essa definição geométrica, fizemos uma construção geométrica no *geogebra*. Para melhor visualização utilizamos $AB = 10$. O ponto P desliza sobre o plano $\mathbb{R}^2$ de modo que $P = (CB(t), DF(t))$, assim, conseguimos visualizar que isso constrói um gráfico de uma função logarítimica. Segue o link: Clique Aqui.

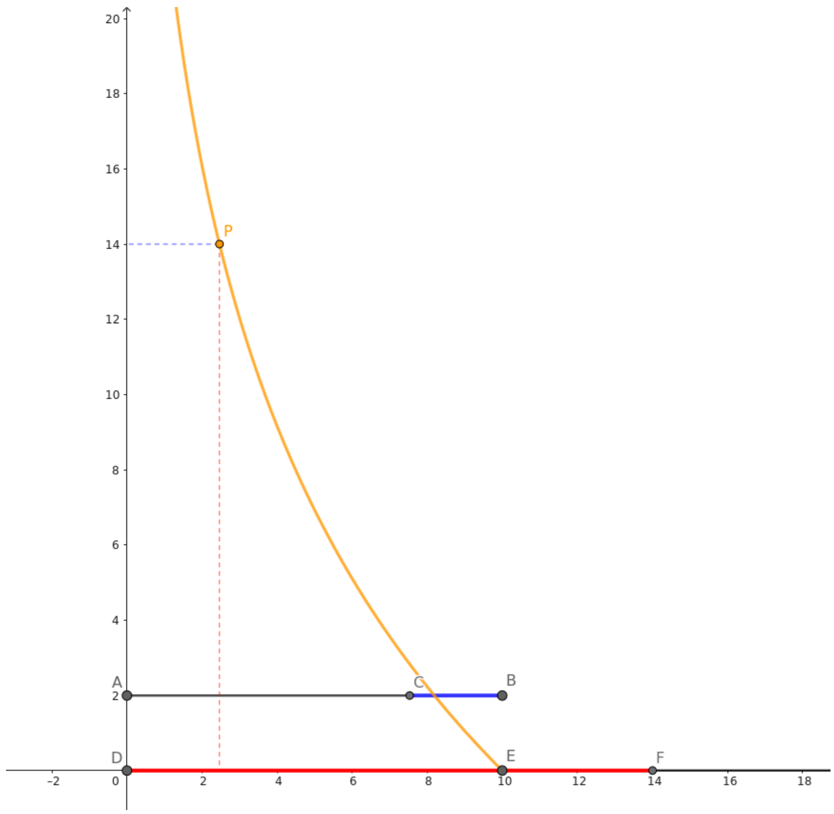


Figura 11: Ilustração da definição geométrica de logaritmo

5 Definição Atual

Apesar da enorme importância dos logaritmos para cálculos numéricos, não é dessa maneira que somos introduzidos aos logaritmos na escola. Na verdade, a definição de logaritmo que aprendemos é intimamente ligada a uma exponencial. A definição é a que segue

Definição. Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo* de b na base a o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b. Em símbolos: se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \iff a^x = b$$

A partir desta definição, é tranquilo chegarmos em algumas propriedades interessantes, não iremos prová-las pois não está no escopo do texto, porém, é um excelente exercício para o leitor.

Propriedades dos logaritmos:

1. $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a a^k = k$
3. $\log_a 1 = 0$
4. $\log_a a = 1$
5. $\log_a x^k = k \log_a x$
6. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
7. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
8. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

6 O Logaritmo Hiperbólico

Décadas depois da invenção de Napier, em 1647 os logaritmos apareceram em um campo não esperado, na **área de uma hipérbole**.

Vamos focar o estudo na hipérbole quadrada, isto é, a hipérbole $xy = 1$, ou ainda, $y = \frac{1}{x}$. Queremos estudar a área abaixo do gráfico de 1 a algum ponto a no eixo x. Utilizando linguagem atual do cálculo, queremos estudar:

$$A(a) = \int_1^a \frac{1}{x} dx$$

A figura 12 mostra a área que estamos interessados

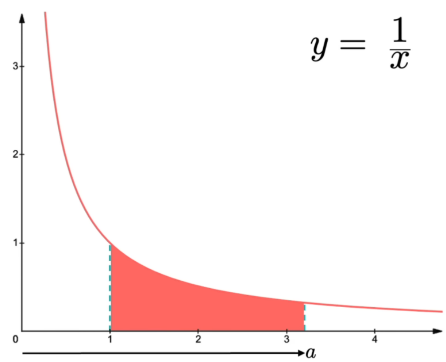


Figura 12: Área abaixo da Hipérbole de 1 a a

Saint Vincent

Calcular essa área se mostrou uma atividade difícil, pois muitos matemáticos tentaram calcular esta área e falharam, entre eles estão Arquimedes, René Descartes e Fermat. Fermat abriu caminho para que o matemático Grégoire de Saint-Vincent (1584 - 1667) finalmente descobrisse a àrea abaixo da hipérbole.

Para calcular essa área, Saint-Vincent a dividiu em retângulos de uma maneira particular, ilustrada na figura 13. O 1° retângulo começa no ponto a, o 2° retângulo começa no ponto ar, o 3° em ar^2 e assim por diante, até chegar em 1, além disso, note que

$r < 1$. A ideia era clara, somar a área de todos os retângulos. Entretanto, não é difícil ver que há um erro com a área real, porém, se r estiver suficientemente próximo de 1, este erro fica imperceptível.

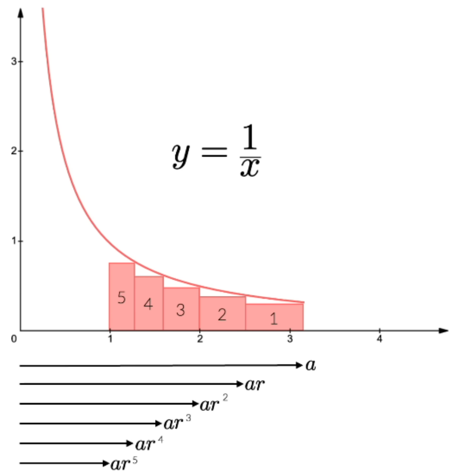


Figura 13: Área da Hipérbole via progressão geométrica

Iremos calcular as áreas destes retângulo para ver se encontramos algo interessante, os resultados estão na tabela 1

Retângulo	Altura	Comprimento	Área
1	$\frac{1}{a}$	$a(1-r)$	$(1-r)$
2	$\frac{1}{ar}$	$ar(1-r)$	$(1-r)$
3	$\frac{1}{ar^2}$	$ar^2(1-r)$	$(1-r)$
4	$\frac{1}{ar^3}$	$ar^3(1-r)$	$(1-r)$
5	$\frac{1}{ar^4}$	$ar^4(1-r)$	$(1-r)$

Tabela 1: Tabela de Retângulos sob a curva $y = 1/x$

Encontramos algo interessante! As áreas de cada um desses retângulos são exatamente as mesmas, todas iguais a $(1-r)$. Esse resultado deu Saint-Vincent a seguinte ideia: ele percebeu que isso levava a uma interessante relação entre a distância e a área abaixo da hipérbole, ilustrada na tabela 2.

Observe que na distância, de uma linha para outra multiplicamos sempre

Distância	**Área**
ar^5	0
ar^4	$(1-r)$
ar^3	$2(1-r)$
ar^2	$3(1-r)$
ar	$4(1-r)$
a	$5(1-r)$

Tabela 2: Relação entre distância e área abaixo da hipérbole

por $1/r$, enquanto na área somamos sempre $(1-r)$ Isso significa que a distância está seguindo uma progressão geométrica, enquanto a área está seguindo uma progressão aritmética.

Logo, os números na tabela relacionados seguem as mesmas ideias vistas por Napier anos antes. E portanto a relação entre a distância e a área é *logarítmica*.

Daí, Alfonso de Sarasa, um dos estudantes de Saint Vincent, escreveu essa relação de forma explícita, a área da hipérbole até o ponto a, foi definida como

$$A(a) = \log(a)$$

Esse logaritmo foi chamado de **logaritmo hiperbólico**. Porém, Saint Vincent e de Sarasa ainda não foram capazes de encontrar uma maneira para calculá-lo. Daí entra uma nova figura: Nicholas Mercator.

7 Série de Mercator

Ainda no espectro da matemática, após a descoberta da íntima conexão entre a função logaritmo e área sobre a hipérbole começaram a surgir consequências da propriedade.

A Série de Mercator é um dos principais marcos. Inicialmente, a série foi descoberta independemente por Johannes Hudde (1656) e por Isaac Newton (1665), entretanto, nenhum dos dois havia publicado o resultado. Apenas em 1668, Nicholas Mercator após descobrir de forma independente publicou o seu tratado Logarithmotechnia com a seguinte série:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

que aproxima a função logaritmo para o intervalo $-1 < x \leq 1$.

7.1 Demonstração

Note que a propriedade de a área da hipérbole se relacionar ao logaritmo pode ser resumida em:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt \tag{1}$$

Na época de Mercator, as séries geométricas já eram difundidas, daí os matemáticos da época já conheciam a seguinte expressão:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{2}$$

Ao analisar a expressão dentro da integral, Mercator percebeu que a expressão (2) ao tomar $x = -t$ se torna:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots \tag{3}$$

Daí:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \dots dt \tag{4}$$

Como a integral em (4) é polinomial, é facil calcular a primitiva:

$$\begin{aligned} \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots)\, dt &= \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots\right]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

Note que, o resultado nada mais é do que um caso específico da Série de Taylor com $f(x) = \ln(1+x)$ em $x = 0$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad \text{sendo} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Ao calcular as derivadas consecutivas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora, avaliamos tudo em $x = 0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6, \ldots$$

Por fim, substituindo:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots \\ &= 0 + 1x + \frac{-1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + \frac{-6}{24}x^4 + \ldots\end{aligned}$$

Ao simplificar, novamente obtemos a Série de Mercator:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

7.2 Gráfico

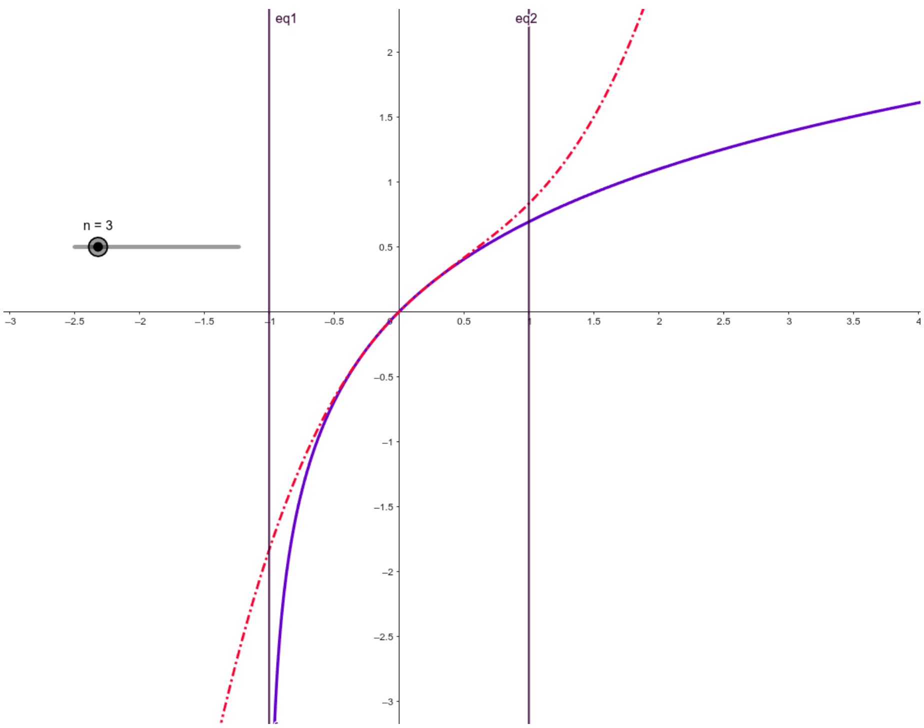


Figura 14: Comparação da Série de Mercator para $n = 3$ e a função $\ln(1 + x)$.

No GeoGebra, criamos um gráfico animado iterativo para enxergar como a Série de Mercator se aproxima da função $\ln(1+x)$ para $-1 < x \leq 1$ quando o número de iterações aumenta. Segue o link: Clique Aqui

8 O Número de Euler e o Logaritmo Natural

No início do século XVIII, a conexão entre logaritmos e exponenciais foi finalmente reconhecida e o conceito de uma base para um logaritmo foi compreendido.

Leonhard Euler

Em 1748, 101 anos após os trabalhos de Saint Vincent e de Sarasa, Leonhard Euler (1707 - 1753) calculou a base deste logaritmo natural (denominado desta maneira por Mercator). Essa base era nada mais que o número e (número de Euler). A história do número de Euler é um pouco longa, faremos um breve resumo para explicar qual a sua relação com o logarítmo natural.

Em 1683, Jakob Bernoulli (1654-1705), estava estudando sobre a capitalização em juros compostos. Ele observou que ao aumentar a frequência da capitalização (diária, por hora, por minuto, etc.), o montante final aumentava, porém não tendia ao infinito, era limitado. Ele precisou estudar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

O qual conseguiu determinar que estava entre 2 e 3, utilizando o teorema do binônimo de Newton.

Algumas décadas depois, em meio do século XVIII, Euler chamou este número de e, e conseguiu mostrar, também utilizando o teorema do binômio que

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

Mas dentro de nosso contexto, o mais interessante que Euler fez, foi mostrar que esse número seria a base do logarítmo hiperbólico (ou natural). Dessa vez, definiremos a área abaixo da hipérbole de 1 até a como sendo $A(a)=\log_b a$, pois agora é compreendida o conceito de base para logaritmo.

Observe que qualquer que seja a base b do logaritmo hipérbolico, ele é tal que $A(b)=\log_b b=1$. Faremos uma construção similar, porém diferente da proposta de Saint-Vincent.

Aproximaremos a área em n retângulos, definindo $q=\sqrt[n]{b}$, então o k-ésimo retângulo é tal que o comprimento de sua base vale $q^{k+1}-q^k$ e sua altura é $\frac{1}{q^k}$, e portanto, a área de cada retângulo vale

$$A_k=\frac{q^{k+1}-q^k}{q^k}=q-1$$

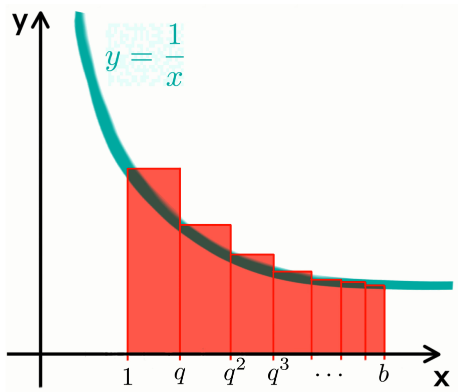


Figura 15: Área da Hipérbole

Portanto, cada retângulo tem a mesma área $q-1$, logo, a área total aproximada abaixo da hipérbole é nada mais que $A = n(q-1)$, mas sabemos que quando n cresce, esse número deve tender a 1, ou seja, b deve ser tal que:

$$\lim_{n\to\infty} n(q-1) = 1 \quad \text{, isto é,} \quad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-1) = 1$$

Esta foi a expressão que Euler obteve. É possível mostrar rigorosamente que b deve ser o número e. Não o faremos aqui, mas daremos uma razão intuitiva:

Sabemos que deve valer o limite: $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-1) = 1$. Então, para n grande, temos que:

$$n\left(\sqrt[n]{b}-1\right) \approx 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{b}-1 \approx \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{b} \approx 1 + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow b \approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

E daí, foi descoberto que e era exatamente a base do logaritmo hiperbólico.

9 Aplicações

O advento do logaritmo natural, consolidado por Leonhard Euler, representou uma mudança de paradigma fundamental na matemática, suplantando a relevância dos sistemas anteriores, como os de John Napier e os logaritmos decimais (base 10). Originalmente, o logaritmo surgiu como uma ferramenta computacional, cujo propósito era simplificar cálculos complexos de multiplicação, divisão e potenciação em uma era pré-computadores. Com o surgimento das calculadoras e computadores, essa função original tornou-se obsoleta. A capacidade de realizar cálculos aritméticos de forma instantânea deslocou o foco do logaritmo: de uma ferramenta de cálculo para um conceito central no desenvolvimento teórico e prático da matemática.

Atualmente, o logaritmo natural está intrinsecamente ligado ao cálculo diferencial e integral. A base e (o número de Euler) possui propriedades matemáticas vantajosas que simplificam enormemente as operações de diferenciação e integração. Como a função $\ln(x)$ é a primitiva de $\frac{1}{x}$ e a inversa da função exponencial e^x (cuja derivada é ela mesma), ela se torna a linguagem natural para descrever e resolver problemas em inúmeras áreas da ciência e engenharia. Assim, o logaritmo deixou de ser uma ferramenta para fazer contas mecânicas e se tornou um pilar para resolver problemas impraticáveis.

A seguir, ilustramos essa mudança de paradigma com uma aplicação fundamental em Inferência Estatística.

Exemplo: O Estimador de Máxima Verossimilhança (EMV) da Normal

Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória i.i.d. de uma distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$. A Função de Densidade de Probabilidade (FDP) de cada observação x_i é:

$$f(x_i \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Função de Verossimilhança . A função de verossimilhança $L(\mu, \sigma^2 \mid \mathbf{x})$ é o produto das FDPs:

$$L(\mu, \sigma^2 \mid \mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\right) \tag{5}$$

Função de Log-Verossimilhança. Para encontrar os parâmetros que maximizam a função de verossimilhança, o caminho direto seria derivar a Equação (5) em relação a μ e σ^2. No entanto, derivar um produto de n funções exponenciais precisaria de aplicações sucessivas e complexas da Regra do Produto, tornando o problema analiticamente complexo.

Daí, o logaritmo demonstra sua usabilidade moderna. A chave para sua aplicação é que por ser uma função estritamente crescente, encontrar os pontos críticos de $L(\theta)$ é equivalente a encontrar os pontos críticos de $\ln(L(\theta))$. Ao aplicar o logaritmo natural, transformamos o produto complexo em uma soma factível, a log-verossimilhança $\ell(\mu, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned}
\ell(\mu, \sigma^2 \mid \mathbf{x}) &= \ln\left[L(\mu, \sigma^2 \mid \mathbf{x})\right] \\
&= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2
\end{aligned}$$

Maximização. Agora, derivar esta soma em relação a μ e σ^2 e igualar a zero torna-se uma tarefa simples de cálculo. Resolvendo o sistema de equações resultante, encontramos os EMVs:

- **Para a média μ:** A média amostral.

$$\hat{\mu}_{ML} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- **Para a variância σ^2:** A variância amostral com denominador n.

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Portanto, o exemplo demonstra perfeitamente a ”nova”aplicação do logaritmo. Ele não foi usado para facilitar um cálculo aritmético, mas sim para transformar um problema analítico hercúlico em um que é solucionável. O logaritmo deixou de ser uma ferramenta para o cálculo mecânico para se tornar uma ferramenta indispensável para a simplificação da própria análise matemática.

9.1 Escala Richter: Da Amplitude à Escala Destrutiva

Durante os noticiários sobre desastres naturais, frequentemente a intensidade dos terremotos é quantificada por um número na Escala de Magnitude Richter com o intuito de evidenciar a magnitude da perda material e humanitária encadeada pela energia liberada do tremor.

Mas afinal, como surgiu e como interpreto a escala? Desenvolvida em meados da década de 1930 pelos pesquisadores Charles Richter e Beno Gutenberg, da Caltech, a Escala Richter originou-se da necessidade de condensar um conjunto denso de dados de um sismógrafo em um único número, de forma concisa e intuitiva. Para isso, propuseram a seguinte fórmula:

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \tag{6}$$

onde A é a amplitude máxima da onda sísmica registrada e A_0 é uma amplitude de referência. É importante notar que A_0 não é uma constante; seu valor depende da distância entre o sismógrafo e o epicentro do terremoto.

Em virtude da natureza logarítmica da fórmula, um acréscimo de apenas uma unidade na escala não representa um aumento linear, mas sim um aumento exponencial na intensidade do tremor. Aplicando a definição de logaritmo, podemos isolar a amplitude A:

$$M = \log_{10}\left(\frac{A}{A_0}\right) \iff A = 10^M \cdot A_0 \tag{7}$$

Para compreender melhor, podemos comparar a amplitude de um terremoto de magnitude M (denotaremos a amplitude do tremor com magnitude M por meio de A_M) com a de um terremoto de magnitude $M + 1$:

$$\begin{cases} A_M = 10^M \cdot A_0 \\ A_{M+1} = 10^{M+1} \cdot A_0 \end{cases} \implies A_{M+1} = 10 \cdot A_M$$

Daí, vemos que o aumento de apenas um ponto na Escala Richter corresponde a um tremor com amplitude 10 vezes maior.

Ademais, perceba que tal resultado é referente ao tremor e não necessariamente sobre sua capacidade destrutiva. Dessa maneira, a fim de ilustrar o potencial destrutivo do acréscimo de uma unidade na Escala Richter introduziremos o conceito de energia:

$$E_M \propto A^{3/2} \iff E_M = k \cdot A^{3/2}$$

Denotando a energia liberada por um terremoto de escala $M+1$ por E_{M+1}, temos que:

$$\begin{aligned} E_{M+1} &\propto (A_{M+1})^{3/2} \\ &= (10 \cdot A_M)^{3/2} \\ &= 10^{3/2} \cdot (A_M)^{3/2} \\ &\propto 10^{3/2} \cdot E_M \end{aligned}$$

Perceba que, $10^{3/2} \approx 31,6$, isto é, a capacidade destrutiva do tremor é 31,6 vezes maior ao aumentar uma unidade na escala, e o impacto sobre a realidade pode ser percebido através da seguinte tabela:

Magnitude	**Descrição dos Efeitos**
1–3	Nada / Imperceptível
3–4	Perceptível, sem danos
4–5	Danos domésticos
5–6	Danos em prédios sem estrutura adequada
6–7	Danos em prédios normais
7–8	Danos sérios
8–9	Destruição de cidades
9–10	Muda a topografia
> 10	Desconhecido / Catástrofe global

Tabela 3: Efeitos por Magnitude na Escala Richter

Fica claro, portanto, que o conceito introduzido por John Napier em 1614 transcende a matemática abstrata. O real conhecimento dos logaritmos permite uma análise crítica da realidade. Diferentemente do que o senso comum poderia sugerir, um terremoto de magnitude 10 não causa o dobro da destruição de um de magnitude 5. Na verdade, seu poder destrutivo é cerca de 31 milhões de vezes maior. Ter essa percepção nos ajuda a compreender melhor a magnitude dos fenômenos que nos rodeiam e analisá-los com senso crítico.

9.2 Potencial Hidrogeniônico (pH)

A escala de pH (Potencial Hidrogeniônico) é um conceito bastante estudado em química. Esse conceito foi definido pelo químico dinamarquês Soren Peter Lauritz Sorensen no ano de 1909. Ela serve para determinar os níveis de acidez de uma solução. O pH de uma solução é definido como o logaritmo decimal do inverso da concentração de H_3O^+ (ion hidroxônio), ou seja,

$$pH = -\log[H_3O^+]$$

Assim, percebe-se que quanto maior o valor da concentração de H_3O^+, menor o valor do pH, ou seja, quanto mais ácida a solução, menor o pH. Definir a acidez em uma escala logarítimica foi muito positivo. Primeiro que, em solução, os valores de íons hidrogênio podem variar drasticamente, além de serem, na maioria das vezes, expressos em potências negativas de 10.

A classificação do pH se dá da seguinte forma:

pH	**solução**
0 a 7	ácida
7	neutra
7 a 14	básica

Abaixo temos uma imagem com o pH de algumas soluções mais comuns.

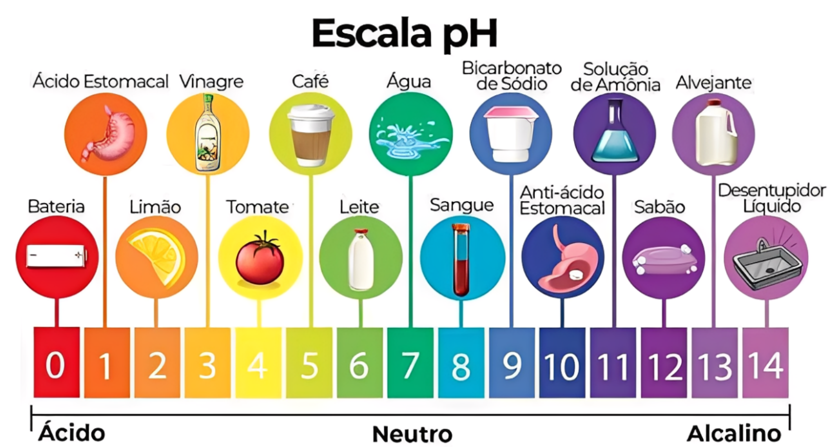


Figura 16: Exemplos de soluções e seu pH

Exemplo. Jean, um químico curioso, estava na praia e enche um copo com água do mar. Ao chegar em seu laboratório, ele mede a concentração de íons (H_3O^+) desse copo de água, obteve-se que esta é de 10^{-8} mol/l. Assim qual será o pH dessa água?

$$\begin{aligned}
pH &= -\log[H_3O^+],\\
pH &= -\log 10^{-8},\\
pH &= -(-8)\log 10,\\
pH &= 8
\end{aligned}$$

Assim, Jean notou que a água do mar era uma solução básica.

10 Questão Proposta

Seja $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ função contínua tal que $f(xy) = f(x) + f(y)$, o objetivo desta questão é mostrar que $f(x) = f(e)\ln(x)$.

(a) Mostre que $f(e^n) = n \cdot f(e) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) Mostre que $f(e^q) = q \cdot f(e) \quad \forall q \in \mathbb{Q}_{>0}$

(c) Conclua por continuidade que vale $f(e^r) = r \cdot f(e)\, \forall r \in \mathbb{R}_{>0}$ e portanto deve-se ter $f(x) = f(e)\ln(x)$.

Dica: Para o item (c) você deve utilizar dois resultados importantes vistos em um curso de análise real:

1. f é contínua em a se para toda sequência x_n convergente a a, tem-se $\lim f(x_n) = f(a)$
2. Os racionais são densos na reta, isto é, para todo número real r, existe uma sequência q_n de racionais convergente a r

Referências

1. GAMBERA, Artur Rezzieri. **Uma abordagem histórica sobre logaritmos**. Disponível em: <https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/uma-abordagem-historica-sobre-logaritmos---artur-rezzieri-gambera.pdf>. Acesso em: 18 out. 2025.
2. EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
3. BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
4. WIKIPEDIA. **History of logarithms**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_logarithms>. Acesso em: 18 out. 2025.
5. YOUTUBE. **A VERDADEIRA ORIGEM do Número de Euler**. Canal: Tem Ciência. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jV49W0lY0OM>. Acesso em: 18 out. 2025.

6. YOUTUBE. **Log Tables**. Canal: Numberphile. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=VRzH4xB0GdM>. Acesso em: 18 out. 2025.

7. YOUTUBE. **Log Tables (extra bit)**. Canal: Numberphile. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=vzV50goW_WM>. Acesso em: 18 out. 2025.

8. LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2019. Disponível em: <https://matematicatransformadora.com/wp-content/uploads/2019/04/2-SBM-Elon-Lages-Lima-Logaritmos.pdf>. Acesso em: 18 out. 2025.

9. WIKIPEDIA. **Mercator series**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_series>. Acesso em: 18 out. 2025.

10. WIKIPEDIA. **Richter scale**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Richter_scale>. Acesso em: 18 out. 2025.

11. YouTube. **Logaritmos. Onde vou usar?**. Canal: Professor Possani. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JFw9ihPyrMI&>. Acesso em: 18 out. 2025.

12. DEGROOT, Morris H.; SCHERVISH, Mark J. **Probability and Statistics**. 4th ed. Boston: Pearson, 2012.

13. WIKIPEDIA. **Henry Briggs (mathematician)**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Briggs_(mathematician)>. Acesso em: 18 out. 2025.

14. WIKIPEDIA. **History of logarithms**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_logarithms>. Acesso em: 18 out. 2025.

15. WIKIPEDIA. **Jost Bürgi**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi>. Acesso em: 18 out. 2025.

16. MAA. **Logarithms: The early history of a familiar function — Joost Bürgi introduces logarithms**. Disponível em: <https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function-joost-b-rgi-introduces-logarithms>. Acesso em: 18 out. 2025.

17. YOUTUBE. **The History of the Natural Logarithm - How was it discovered?**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=habHK6wLkic>. Acesso em: 18 out. 2025.

18. PECORARI, Mariana. **Logaritmos e Aplicações**. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/e4f2fbc5-c42d-475d-a1f1-5cfc26564238/content>. Acesso em: 18 out. 2025.

19. Brasil Escola. **O que é pH?**. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/quimica/o-que-e-ph.htm>. Acesso em: 18 out. 2025.

20. JONES, George William. **Logarithmic tables**. 4. ed. London, 1893. Disponível em: <https://dn790003.ca.archive.org/0/items/logarithmictable00joneuoft/logarithmictable00joneuoft.pdf>. Acesso em: 18 out. 2025.