



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS  
Y EN SISTEMAS

LA VOLATILIDAD DE UN ACTIVO COMO MOVIMIENTO  
BROWNIANO FRACCIONARIO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

VÍCTOR MIGUEL GARCÍA SÁNCHEZ

TUTOR:

DR. ARNAUD CHARLES LEO JEGOUSSE

Ciudad de México, 2020





*Dedicado a mi familia, amigos y maestros:  
gracias a ellos he llegado hasta aquí.*

# Agradecimientos

# Resumen

Un proceso gaussiano  $W^H$  es un movimiento Browniano fraccionario (fBm) si es autosimilar de parámetro  $H \in (0, 1)$ , llamado parámetro de Hurst, y tiene incrementos estacionarios. La covarianza en los incrementos de tal proceso está dada por

$$\mathbb{E}(W_t^H W_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} + |t - s|^{2H}). \quad (1)$$

Si  $H > \frac{1}{2}$ , entonces  $W^H$  tiene incrementos correlacionados positivamente y decimos que  $W^H$  posee memoria larga. Por otro lado, si  $H < \frac{1}{2}$ , entonces  $W^H$  tiene incrementos correlacionados negativamente. Este último caso puede usarse para describir sistemas que cuentan con memoria y persistencia, aunque no tendrá la suavidad que caracteriza al modelo con  $H > \frac{1}{2}$  en el que, por el contrario, diremos que es áspero.

Tras definir la integral estocástica respecto al fBm, es posible desarrollar la teoría necesaria para enunciar una versión fraccionaria de la fórmula de Itô. Además, al denotar la relación de tal integral estocástica con la integral estocástica respecto al movimiento Browniano (Bm) estandar, es posible bajo ciertas condiciones hablar de una versión fraccionaria del Teorema de Girsanov. La fórmula de Itô y el Teorema de Girsanov son muy importantes en la teoría de finanzas matemáticas, así que la existencia de versiones fraccionarias para los mismos, es un buen indicio de la incorporación del modelo de fBm para usos prácticos.

En [Gatheral et al., 2018] se define al modelo de volatilidad estocástica fraccionaria áspera (RFSV) usando un fBm con  $H < \frac{1}{2}$ , que tiene el potencial para satisfacer las propiedades observadas empíricamente en las series de tiempo de la volatilidad de precios de activos.

Cuando se estima la volatilidad con datos de alta frecuencia, se verifica la suavidad del proceso de volatilidad. Además observamos que el modelo RFSV es consistente con los datos financieros de series de tiempo; una aplicación es que nos permite obtener pronósticos mejorados de la volatilidad. Además encontramos que aunque la volatilidad no es un proceso de memoria larga en el modelo RFSV, los procedimientos estadísticos clásicos que apuntan a detectar la persistencia de la volatilidad, tienden a concluir la presencia de memoria larga en los datos generados a partir de ella, reafirmando la utilidad del modelo en la práctica.

Está escrito a la fecha, falta extender

# Índice general

<b>Notación</b>	<b>1</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Justificación . . . . .	1
Antecedentes . . . . .	2
Hipótesis . . . . .	2
Objetivos . . . . .	2
Objetivos generales . . . . .	2
Objetivos específicos . . . . .	2
Delimitación del problema . . . . .	2
Estructura del documento . . . . .	2
<b>1 Preámbulo</b>	<b>3</b>
§1.1 La volatilidad . . . . .	3
§1.2 El movimiento Browniano fraccionario . . . . .	4
§1.2.1 Memoria larga . . . . .	9
§1.3 Otras propiedades del fBm . . . . .	11
§1.3.1 Fórmula de Itô fraccionaria . . . . .	12
§1.3.2 Teorema de Girsanov fraccionario . . . . .	15
<b>2 La volatilidad en el fBm</b>	<b>18</b>

§2.1 La superficie de volatilidad implícita. . . . .	18
§2.1.1 Los datos . . . . .	19
§2.2 La suavidad del proceso de volatilidad . . . . .	21
§2.2.1 Los futuros DAX y Bund . . . . .	24
§2.3 ?? . . . . .	25
§2.4 Las diferencias entre FSV y RFSV . . . . .	26
<b>3 El movimiento browniano fraccionario en finanzas</b>	<b>27</b>
§3.1 ??? . . . . .	27
<b>Anexos</b>	<b>29</b>
<b>A Algunos resultados mencionados</b>	<b>30</b>
<b>B Códigos en R para los resultados presentados</b>	<b>32</b>
§B.1 La superficie de volatilidad . . . . .	32
§B.2 Estimaciones no paramétricas . . . . .	38



# Índice de figuras

2.1	Superficie de volatilidad implícita de las opciones call del VIX del 1 de junio del 2016 . . . . .	20
2.2	Estimaciones no paramétricas de los sesgos de volatilidad ATM del VIX con strike 70 al 1 de junio de 2016; la curva roja es la curva de ajuste $\psi(t) = 0.7t^{-0.45}$ . . . . .	21
2.3	$\log m(q, \Delta)$ como función de $\log \Delta$ para el DAX. . . . .	24
2.4	$\log m(q, \Delta)$ como función de $\log \Delta$ para el Bund. . . . .	25

# Índice de tablas

# Introducción

*La volatilidad implícita es el ‘número incorrecto utilizado en la fórmula incorrecta para obtener el precio correcto’.*

---

***Riccardo Rebonato***

*Theory and Practice of Model Risk  
Management. (1999)*

## Justificación

En la actualidad se necesitan profesionales en el sector financiero, en el cual se prefieren la modelación sobre la simulación, ya que la modelación justifica de mejor manera las aplicaciones prácticas del análisis técnico financiero.

El modelo más utilizado para estudiar el comportamiento financiero es el de Black-Scholes, propuesto en [Black y Scholes, 1973], a partir del cual se ha desarrollado una buena parte de la teoría de las finanzas matemáticas, sin embargo una de las principales características de este modelo, expuesto en la 1.1 es que su volatilidad  $\sigma$  es constante, comportamiento que solo se presenta localmente en la realidad.

Estudiaremos en contraste un modelo de volatilidad estocástica, justificado por la evidencia hallada en datos del VIX (Chicago Board Options Exchange Market Volatility Index).

## Antecedentes

En [Mandelbrot y Van Ness, 1968],

En [Comte y Renault, 1998], introducen el modelo de *volatilidad estocástica fraccionaria* (FSV).

En [Gatheral et al., 2018], consideran el modelo FSV con un exponente de Hurst  $H < \frac{1}{2}$ , al que cual nombran como modelo de *volatilidad estocástica fraccionaria áspera* (RFSV). Éste es consistente con datos de series de tiempo financieras.

## Hipótesis

El modelo de volatilidad estocástica fraccionara áspera, inspirado en el fBm con parámetro de Hurst  $H < \frac{1}{2}$ , representa de mejor manera el comportamiento observado en datos de frecuencia ultra alta, además de poseer la propiedad de memoria larga, que también se ha investigado ampliamente en los estudios de análisis técnico financiero, como en los fenómenos de repetición de patrones, por mencionar un ejemplo.

## Objetivos

### Objetivos generales

### Objetivos específicos

## Delimitación del problema

## Estructura del documento

# Capítulo 1

## Preámbulo

### 1.1. La volatilidad

Para describir el comportamiento del precio de un activo  $S_t$ , el modelo más usado es el de [Black y Scholes, 1973],

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad (1.1)$$

donde  $\mu$  es un término de deriva o tendencia y  $W_t$  es un Bm estándar. El término  $\sigma$  es el proceso de **volatilidad**, el cual también nos interesa estudiar a escala logarítmica, también llamada **log-volatilidad**.

En tal modelo,  $\sigma$  es constante o una función determinista del tiempo, mientras que en los modelos de volatilidad estocástica, se complexifica el comportamiento de  $\sigma$  al darle un comportamiento aleatorio. Uno de los primeros modelos de volatilidad estocástica se tiene en [Hull y White, 1993], en el cual  $\sigma$  está modelada como una semimartingala browniana continua, cuya dinámica es más realista, pues en este modelo la volatilidad del subyacente, además de variar respecto al tiempo, posee un riesgo específico.

Al modelo 1.2 expuesto a continuación lo llamaremos **modelo de volatilidad esto-**

**cástica**, donde la log-volatilidad  $\ln \sigma(t)$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck:

$$\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t)dW_{1,t} \\ d(\ln \sigma(t)) = k(\theta - \ln \sigma(t))dt + \gamma dW_{2,t} \end{cases}, \quad (1.2)$$

donde  $W_1, W_2$  son Bm no degenerados, lo cual asegura que el proceso de volatilidad instantánea sea estacionario, con la finalidad de generalizar la volatilidad constante o determinista del modelo de Black-Scholes a una volatilidad estocástica que, de acuerdo a [Hull y White, 1993], posee la volatilidad estocástica observada en la práctica y extiende al modelo de Vasicek propuesto en [Hull y White, 1990].

En contraste con el modelo expresado en la ecuación (1.1), se pueden producir sesgos en la fijación de precios o cobertura de opciones. Tal efecto es conocido en la literatura empírica como el efecto “*smile*”. Se cree que los smiles en la volatilidad pueden explicarse mediante los modelos de volatilidad estocástica, que podrían tener en cuenta, entre otras propiedades, el clustering de volatilidad mencionado al final de la sección 1.2.1.

En términos de la suavidad del proceso de volatilidad, existen dos posibilidades: contar con rutas muy regulares, que es el caso de Black-Scholes, o bien, contar con trayectorias de volatilidad con una regularidad cercana a la del movimiento Browniano, que es el caso de los modelos de volatilidad local y estocástica.

## 1.2. El movimiento Browniano fraccionario

Nos interesa poder replicar el análisis a distintas escalas de tiempo de interés práctico, que van desde un día hasta varios años. Esta propiedad es llamada **autosimilitud**, tal nombre se debe a [Mandelbrot y Van Ness, 1968].

**Definición 1.2.1.** Llamemos **autosimilar de parámetro  $H$**  ( $H \geq 0$ ) a un proceso estocástico  $X = (X_t)$ , si para cualesquiera  $h > 0$  y  $t_0$ , se cumple que

$$(X_{t_0}) \stackrel{d}{\simeq} (h^{-H} X_{ht_0})$$

Proponemos ahora la definición de movimiento Browniano fraccionario (fBm) estándar

expuesta en [Samorodnitsky y Taqqu, 1994].

**Definición 1.2.2.** *Un proceso gaussiano  $W^H$  es un **movimiento Browniano fraccional** (**fBm**) si es autosimilar de parámetro  $H \in (0, 1)$ , al que llamaremos parámetro de Hurst, y tiene incrementos estacionarios.*

Probemos ahora la existencia del fBm, comenzando con las siguientes propiedades:

**Lema 1.2.3.** *Sea  $(X_t)$  un proceso gaussiano autosimilar de parámetro  $H$ . Entonces,*

1.  $X_0 \stackrel{c.s.}{=} 0$
2. Si  $(X_t)$  tiene incrementos estacionarios, entonces al fijar un tiempo  $t$ , tenemos que  $X_{-t} \stackrel{d}{\simeq} -X_t$
3. Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se cumple que  $\mathbb{E}[X_t] = 0$
4. Si además  $(X_t)$  es un proceso de varianza finita, entonces para cualesquiera  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) = \frac{1}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) Var(X_1)$$

*Demostración.* 1. Sea  $h > 0$  arbitrario. Entonces  $X_0 \stackrel{d}{\simeq} h^H X_0$ , así que  $X_0(h^H - 1) \stackrel{d}{\simeq} 0$ .

Como  $h$  es arbitrario, entonces  $X_0$  casi seguramente es 0 .

2. Usando 1, podemos observar que  $X_{-t} \stackrel{d}{\simeq} X_{-t} - X_0$ . Ya que  $(X_t)$  tiene incrementos estacionarios, entonces  $X_{-t} \stackrel{d}{\simeq} X_0 - X_t \stackrel{d}{\simeq} -X_t$ .

3. Veamos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[X_2 - X_1] \\ &= \mathbb{E}[2^H X_1] - \mathbb{E}[X_1] \\ &= (2^H - 1)\mathbb{E}[X_1], \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ .

Sea  $t > 0$ , entonces por la autosimilitud de  $(X_t)$ , tenemos que  $\mathbb{E}[X_t] = t^H \mathbb{E}[X_1] = 0$ .

Usando 2, podemos extenderlo de forma que la expresión es válida para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

4. Por 3, tenemos que

$$\begin{aligned}
Cov(X_{t_1}, X_{t_2}) &= \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}] \\
&= \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_{t_1}^2 + X_{t_2}^2 - (X_{t_1} - X_{t_2})^2] \\
&= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[X_{t_1}^2] + \mathbb{E}[X_{t_2}^2] - \mathbb{E}[(X_{t_1-t_2} - X_0)^2]] \\
&= \frac{1}{2} [\mathbb{E}[X_{|t_1|}^2] + \mathbb{E}[X_{|t_2|}^2] - \mathbb{E}[X_{|t_1-t_2|}^2]] \\
&= \frac{1}{2} [|t_1|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] + |t_2|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2] - |t_1 - t_2|^{2H} \mathbb{E}[X_1^2]] \\
&= \frac{1}{2} (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \text{Var}(X_1).
\end{aligned}$$

■

Un fBm es llamado movimiento Browniano fraccionario **estándar** si  $\text{Var}(X_1) = 1$ .

Al hecho de que  $\text{Var}[W_{t+\tau}^{\frac{1}{2}} - W_t^{\frac{1}{2}}] = T$  se le conoce también como *Ley*  $T^{\frac{1}{2}}$ , lo cual es considerado como parte de la definición del movimiento Browniano estándar. Ésta propiedad es generalizada en [Coutin, 2007] de la siguiente manera:

**Corolario 1.2.4.** *Una ley  $T^H$  para la desviación estándar de  $W^H$  puede enunciarse como:*

$$\mathbb{E}[|W_{t+T}^H - W_t^H|^q] = T^{Hq} V_q$$

donde  $V_q = \mathbb{E}(|N(0, 1)|^q)$ .

*Demostración.* Usando que el fBm tiene incrementos estacionarios, se sigue que,

$$\mathbb{E}[|W_{t+T}^H - W_t^H|^q] = \mathbb{E}[|W_T^H|^q],$$

como  $W^H$  es autosimilar de parámetro  $H$ ,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[|T^H W_1^H|^q] \\
&= T^{Hq} \mathbb{E}[|W_1^H|^q]
\end{aligned}$$

Además, como  $W^H$  es un proceso gaussiano,  $\mathbb{E}[|W_{t+T}^H - W_t^H|^q] = T^{Hq}V_q$

■

Cuando  $H = \frac{1}{2}$ ,  $W^H$  es el Bm estándar, lo cual se puede ver de su covarianza exhibida en 4, así que es una martingala. Por otro lado, para  $H \neq \frac{1}{2}$  no lo es. Para probarlo requerimos introducir la siguiente definición.

**Definición 1.2.5.** Sean  $X$  un proceso estocástico,  $\pi_T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$  una partición finita de  $[0, T]$  y

$$\delta(X, \pi_T) := \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p.$$

La  $p$ -variación de  $X$  sobre el intervalo  $[0, T]$  está definido como

$$\mathcal{V}_p(X, [0, T]) := \sup_{\pi_T} \delta_p(X, \pi_T)$$

**Teorema 1.2.6.** El fBm  $W^H$  es una semimartingala si y sólo si  $H = \frac{1}{2}$ .

*Demostración.* ( $\Leftarrow$ ) Como  $W^{\frac{1}{2}}$  es un Bm, entonces es una semimartingala.

( $\Rightarrow$ ) Para  $p > 0$ , consideremos las particiones de la forma  $\pi_1 = \{t_k = \frac{k}{n} : 0 \leq k \leq n\}$  y definamos

$$Y_{n,p} := n^{pH-1} \sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{i}{n}}^H - W_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p$$



Como  $W^H$  es autosimilar,

$$\begin{aligned} &\stackrel{d}{\simeq} n^{pH-1} \sum_{i=1}^n n^{-pH} |W_i^H - W_{i-1}^H|^p \\ &= n^{-1} \sum_{i=1}^n |W_i^H - W_{i-1}^H|^p \\ &=: \tilde{Y}_{n,p}. \end{aligned}$$

Veamos que por el Teorema ergódico,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_{n,p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n |W_i^H - W_{i-1}^H|^p}{n} \stackrel{L^1}{\simeq} \mathbb{E} [|W_1^H|^p]$$

Luego, como  $Y_{n,p} \stackrel{d}{\simeq} \tilde{Y}_{n,p}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{pH-1} \sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{i}{n}}^H - W_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{Y}_{n,p} \stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \mathbb{E} [|W_1^H|^p].$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left| W_{\frac{i}{n}}^H - W_{\frac{i-1}{n}}^H \right|^p &\stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-pH} \mathbb{E} [|W_1^H|^p] \\ &\stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \begin{cases} 0 & \text{si } pH > 1 \\ \mathbb{E} [|W_1^H|^p] & \text{si } pH = 1 \\ \infty & \text{si } pH < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que

$$\mathcal{V}_p(W^H, [0, 1]) \stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \begin{cases} 0 & \text{si } pH > 1 \\ \mathbb{E} [|W_1^H|^p] & \text{si } pH = 1 \\ \infty & \text{si } pH < 1 \end{cases}. \quad (1.3)$$

- Si  $H > \frac{1}{2}$ , veamos que para  $p = 2$ , tenemos que  $pH > 1$ , así que por la ecuación (1.3), se sigue que  $\mathcal{V}_2(W^H, [0, 1]) \stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} 0$ . Como  $W^H$  tiene incrementos estacionarios, entonces

$W^H$  tiene variación cuadrática 0 en cualquier intervalo. Procedamos por contradicción:

Supongamos que  $W^H$  es una semimartingala y sea  $W^H = M + A$  su descomposición, donde  $M = W^H - A$  es una martingala de variación cuadrática 0, así que es una constante. Como  $M$  es constante, entonces  $W^H = M + A$  es de variación acotada, es decir  $\mathcal{V}_1(W^H, [0, 1]) < \infty$ .

Por otro lado, para  $p = 1$ , la ecuación (1.3) obtenemos que  $\mathcal{V}_1(W^H, [0, 1]) \stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \infty$ . La contradicción anterior nos indica que no es posible que  $W^H$  sea una semimartingala.

- Si  $H < \frac{1}{2}$ , tomemos  $p = 2$ . Como  $pH < 1$ , entonces  $\mathcal{V}_2(W^H, [0, 1]) \stackrel{\mathbb{P}}{\simeq} \infty$ . Ya que las semimartingalas tienen variación cuadrática finita, entonces  $W^H$  no puede ser una semimartingala.

Por lo anterior, solo se puede tener  $H = \frac{1}{2}$ . ■

Como la integral estocástica de Itô se define sobre semimartingalas, entonces no es posible definir la integral estocástica respecto a  $W^H$  de esta manera, sin embargo, en [Comte y Renault, 1996], mencionan que solo se requiere la integración en  $L^2$  sobre procesos gaussianos para la valuación de opciones.

### 1.2.1. Memoria larga

Para introducir el concepto de memoria larga, el cual se ha refinado a lo largo del tiempo, comencemos describiendo la covarianza entre incrementos de tiempo.

**Teorema 1.2.7.** Sean  $t < s \in \mathbb{R}$  y  $h > 0$  el tamaño de los incrementos de tiempo, de forma que  $t + h \leq s$ . Sea  $n = \frac{s-t}{h} \geq 1$ . Denotemos la covarianza entre incrementos con la notación de [Biagini et al., 2008],  $\rho_H(n) = \text{Cov}[W_{s+h}^H - W_s^H, W_{t+h}^H - W_t^H]$ , entonces

$$\rho_H(n) = h^{2H} \left[ \frac{(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H}}{2} - n^{2H} \right] \text{Var}(W_1^H)$$

*Demostración.* Veamos que

$$\begin{aligned}\rho_H(n) &= \text{Cov} [W_{(t+nh)+h}^H - W_{(t+nh)}^H, W_{t+h}^H - W_t^H] \\ &= \mathbb{E} [(W_{t+nh+h}^H - W_{t+nh}^H)(W_{t+h}^H - W_t^H)] - \mathbb{E} [W_{t+nh+h}^H - W_{t+nh}^H] \mathbb{E} [W_{t+h}^H - W_t^H]\end{aligned}$$

Usando que  $W^H$  tiene incrementos estacionarios y el 3,

$$\begin{aligned}&= \mathbb{E} [(W_{t+nh+h}^H - W_{t+nh}^H)(W_{t+h}^H - W_t^H)] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [-(W_{t+nh+h}^H)^2 + 2W_{t+nh+h}^H W_{t+h}^H - (W_{t+h}^H)^2 \\ &\quad + (W_{t+nh+h}^H)^2 - 2W_{t+nh+h}^H W_t^H + (W_t^H)^2 \\ &\quad + (W_{t+nh}^H)^2 - 2W_{t+nh}^H W_{t+h}^H + (W_{t+h}^H)^2 \\ &\quad - (W_{t+nh}^H)^2 + 2W_{t+nh}^H W_t^H - (W_t^H)^2] \\ &= \frac{1}{2} [-\mathbb{E} (W_{t+nh+h}^H - W_{t+h}^H)^2 + \mathbb{E} (W_{t+nh+h}^H - W_t^H)^2 + \mathbb{E} (W_{t+nh}^H - W_{t+h}^H)^2 - \mathbb{E} (W_{t+nh}^H - W_t^H)^2]\end{aligned}$$

Al utilizar de nuevo que  $W^H$  tiene incrementos estacionarios y el 3,

$$= \frac{1}{2} [-\mathbb{E} (W_{nh}^H)^2 + \mathbb{E} (W_{nh+h}^H)^2 + \mathbb{E} (W_{nh-h}^H)^2 - \mathbb{E} (W_{nh}^H)^2]$$

Por la autosimilaridad de  $W^H$ ,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} [-(nh)^{2H} \mathbb{E} (W_1^H)^2 + (nh+h)^{2H} \mathbb{E} (W_1^H)^2 + (nh-h)^{2H} \mathbb{E} (W_1^H)^2 - (nh)^{2H} \mathbb{E} (W_1^H)^2] \\ &= \frac{1}{2} [-(nh)^{2H} + (nh+h)^{2H} + (nh-h)^{2H} - (nh)^{2H}] \mathbb{E} (W_1^H)^2 \\ &= \frac{1}{2} h^{2H} [-n^{2H} + (n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - n^{2H}] \mathbb{E} (W_1^H)^2 \\ &= h^{2H} \left[ \frac{(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H}}{2} - n^{2H} \right] \text{Var}(W_1^H)\end{aligned}$$

■

La expresión de  $\rho_H$  dada en el teorema (1.2.7) nos da de forma explícita su convexidad, así que contamos con la siguiente consecuencia.

**Lema 1.2.8.** *De acuerdo al parámetro de Hurst  $H$  que posea un fBm, se presenta uno de los siguientes 3 casos para la correlación entre incrementos  $\rho_H(n)$ :*

- Si  $H < \frac{1}{2}$ , entonces  $W^H$  tiene incrementos correlacionados negativamente.
- Si  $H = \frac{1}{2}$ , entonces  $W^H$  tiene incrementos independientes.
- Si  $H > \frac{1}{2}$ , entonces  $W^H$  tiene incrementos correlacionados positivamente.

El primer caso del lema (1.2.8) puede usarse para describir fenómenos de “**clustering**”, es decir, sistemas que cuentan con *memoria* y *persistencia*, propiedades de las que hablaremos en ????. Por otro lado, el tercer caso, puede usarse para sistemas con intermitencia y antipersistencia.

Si  $H > \frac{1}{2}$ , decimos que posee **memoria larga**. Inicialmente, la expresión memoria larga se refería a un comportamiento subexponencial de la función de autocorrelación, lo cual ha sido ampliamente aceptado por diversos autores, como [Ding et al., 1993] y [Andersen et al., 2003].

Por otro lado, autores como [Chen et al., 2006], [Bentes y Mendes da Cruz, 2011] y [Chronopoulou, 2011] se han referido al decaimiento de manera exponencial con exponente menor que 1.

Citando a [Gatheral et al., 2018], el concepto de memoria larga es demasiado frágil para ser aplicable a un análisis que involucra datos de frecuencia ultra alta.

### 1.3. Otras propiedades del fBm

En esta sección describimos brevemente algunas propiedades más particulares del fBm sin ahondar en sus demostraciones, más bien, para hacer mención histórica de su uso en el problema de la refinación del modelo.

Para comprender los siguientes resultados, presentaremos las integrales estocásticas con respecto al fBm usando el hecho de que es Gaussiano ¿Puedo acortar con “usando su Gaussianidad”?. La teoría enfocada a este tipo de integrales es conocida como el *Cálculo de Malliavin para fBm*, ampliamente aceptada y estudiada en [Yilmaz, 2018] y [Di Nunno et al., 2009], por mencionar algunos trabajos recientes.

### 1.3.1. Fórmula de Itô fraccionaria

**Definición 1.3.1.** Sean  $\delta(\mathbb{R})$  el espacio de Schwartz *¿Lo defino?* de funciones suaves de decrecimiento rápido en  $\mathbb{R}$  y  $\delta'(\mathbb{R})$  su **dual**, éste último conocido como **el espacio de distribuciones templadas**. Sea  $\mathbb{P}^H$  la medida de probabilidad en la  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\delta'(\mathbb{R}))$  que satisface

$$\int_{\delta'(\mathbb{R})} \exp(i \langle \omega, f \rangle) d\mathbb{P}^H(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2\right), \quad \forall f \in \delta(\mathbb{R}),$$

donde  $\langle \omega, f \rangle = \omega(f)$  es la acción de  $\omega \in \delta'(\mathbb{R})$  en  $f \in \delta(\mathbb{R})$ .

La existencia de la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^H$ , llamada *medida de probabilidad de ruido blanco*, se sigue del teorema de Bochner-Minlos y es la misma que para el Bm estándar *¿Es la misma para todos los fBm?*. Denotemos por  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^H}$  a la esperanza bajo la medida de probabilidad  $\mathbb{P}^H$ .

**Definición 1.3.2.** Sea  $L^p(\mathbb{P}^H) = L^p$  el espacio de todas las variables aleatorias  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{P}^H)} := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^H} [|F|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

La idea central para definir la integral estocástica para todo  $H \in (0, 1)$ , es relacionar el fBm  $W_t^H$  con el Bm clásico, correspondiente a  $H = \frac{1}{2}$ , mediante el siguiente operador  $M_H$ :

**Definición 1.3.3.** Sea  $H \in (0, 1)$ . Definamos al operador  $M_H$  sobre funciones  $f \in \delta(\mathbb{R})$  tal que para toda  $y \in \mathbb{R}$ ,

$$\widehat{M_H f}(y) = |y|^{\frac{1}{2}-H} \widehat{f}(y),$$

donde

$$\widehat{g}(y) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(x) dx$$

denota la transformada de Fourier de  $f$ .

En lo sucesivo denotaremos al operador simplemente por  $M$  en lugar de  $M_H$ , a menos que requiramos especificar el parámetro de Hurst asociado  $H$ .

¿Demuestro lo siguiente?

**Proposición 1.3.4.** *El operador  $M$  puede definirse equivalentemente como*

$$Mf(x) = -\frac{d}{dx} \frac{C_H}{(H - \frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} (t-x) |t-x|^{H-\frac{3}{2}} f(t) dt,$$

donde  $f \in \delta(\mathbb{R})$  y

$$C_H := \left\{ 2\Gamma\left(H - \frac{1}{2}\right) \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(H - \frac{1}{2}\right)\right] \right\}^{-1} [\Gamma(2H+1) \operatorname{sen}(\pi H)]^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de la caracterización anterior, es posible escribir explícitamente  $Mf$  de la siguiente manera:

$$Mf(x) = \begin{cases} C_H \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-t) - f(x)}{|t|^{\frac{3}{2}-H}} dt & \text{si } 0 < H < \frac{1}{2} \\ f(x) & \text{si } H = \frac{1}{2} \\ C_H \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|t-x|^{\frac{3}{2}-H}} dt & \text{si } \frac{1}{2} < H < 1. \end{cases}$$

El operador  $M$  se extiende de manera natural del espacio  $\delta(\mathbb{R})$  al espacio

$$\begin{aligned} L_H^2(\mathbb{R}) &:= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ (determinista)} : |y|^{\frac{1}{2}-H} \hat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : Mf(x) \in L^2(\mathbb{R}) \right\} \\ &= \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_H < \infty \right\}, \end{aligned}$$

donde

$$\|f\|_H := \|Mf\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Definamos además en  $L_H^2(\mathbb{R})$  el producto interno

$$\langle f, g \rangle_H = \langle Mf, Mg \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Sea  $\tilde{W}^H = (\tilde{W}_t^H)$ , el proceso sobre los reales definido por ¿Está bien dicho para evitar poner que para todo  $t$  real?

$$\tilde{W}_t^H := \tilde{W}^H(t, \omega) := \langle \omega, M1_{[0,t]}(\cdot) \rangle, \quad (1.4)$$

el cual es un proceso gaussiano. A partir de la ecuación (1.4) es posible probar que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^H} [\tilde{W}_t^H] = 0$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , además de que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^H} [\tilde{W}_s^H \tilde{W}_t^H] = \frac{1}{2} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H})$ . Recordando el lema (1.2.3), observamos que la versión continua  $W_t^H$  de  $\tilde{W}_t^H$  es un fBm ¿respecto a  $\mathbb{P}^H$ ?.

Sea  $f(x) = \sum_j a_j 1_{[t_j, t_{j+1}]}(x)$  una función escalonada. Siguiendo la definición de la ecuación (1.4) y usando la linealidad del producto interno,

$$\begin{aligned} \langle \omega, Mf \rangle &= \sum_j a_j \langle \omega, M1_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle \\ &= \sum_j a_j (\langle \omega, M1_{[0, t_{j+1}]} \rangle - \langle \omega, M1_{[0, t_j]} \rangle) \\ &= \sum_j a_j (W_{t_{j+1}}^H - W_{t_j}^H) \\ &=: \int_{\mathbb{R}} f(t) dW_t^H \end{aligned} \tag{1.5}$$

La definición de integral antes mencionada se extiende de manera natural para toda  $f \in L_H^2(\mathbb{R})$ , debido a que

$$\|\langle \omega, Mf \rangle\|_{L^2(\mathbb{P}^H)} = \|Mf\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_H.$$

**Teorema 1.3.5** (Fórmula de Itô fraccionaria). *Sean  $H \in (0, 1)$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función en  $C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  tal que las variables aleatorias*

$$f(t, W_t^H), \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, W_s^H) ds \quad y \quad \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, W_s^H) s^{2H-1} ds$$

*pertenecen a  $L^2(\mathbb{P}^H)$ . Entonces,*

$$f(t, W_t^H) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} f(s, W_s^H) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, W_s^H) dW_s^H + H \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, W_s^H) s^{2H-1} ds. \tag{1.6}$$

### 1.3.2. Teorema de Girsanov fraccionario

Otro resultado de interés en las finanzas matemáticas es el Teorema de Girsanov, para el cual, aunque con mayor dificultad, es posible obtener una versión fraccionaria, para esto se requieren definir un par de conceptos adicionales.

Para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$  podemos definir

$$\langle \omega, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \omega, f_n \rangle \quad \text{como límite en } L^2(\mathbb{P}),$$

donde  $f_n \in \delta(\mathbb{R})$  es una sucesión convergente a  $f$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Como consecuencia de lo último, tenemos que

$$\tilde{B}_t := \tilde{B}(t, \omega) := \langle \omega, I_{[0,t]}(\cdot) \rangle \quad (1.7)$$

está bien definido como elemento de  $L^2(\mathbb{P})$  para toda  $t \in \mathbb{R}$ , donde

$$I_{[0,t]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ -1 & \text{si } t \leq s \leq 0, \text{ exceptuando } t = s = 0, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Por el Teorema de Continuidad de Kolmogorov, el proceso  $\tilde{B}$  tiene una versión continua  $B$ , que es un proceso Gaussiano, más aún, es un Bm con respecto a  $\mathbb{P}^H$ , de forma análoga a la que se probó que  $\tilde{W}^H$  es un fBm.

De la ecuación (1.7), se sigue que para todas las funciones deterministas  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \omega, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) dB_t. \quad (1.8)$$

Al comparar las definiciones dadas en ecuaciones 1.5 y 1.8, tenemos que para toda  $f \in L_H^2(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dW_t^H = \int_{\mathbb{R}} Mf(t) dB_t \quad (1.9)$$



Finalmente, como última propiedad acerca del fBm, enunciaremos un teorema tipo Girsanov en su forma fraccionaria. Comencemos estableciendo el teorema de Girsanov clásico. Sean  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  y la nueva medida de probabilidad  $\hat{\mathbb{P}}$  sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  definida por la densidad de Radon-Nikodym,

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp \left( \int_{\mathbb{R}} \psi(s) dB_s - \frac{1}{2} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right),$$

donde  $B_s$  es un Bm estándar. El Teorema de Girsanov clásico dice que bajo la medida de probabilidad  $\hat{\mathbb{P}}$ , el proceso  $\hat{B}$  dado por

$$\hat{B}_t := B_t - \int_0^t \psi(s) ds \quad (1.10)$$

es también un Bm estándar.

Su relación con el fBm es que al utilizar la ecuación (1.9) con  $f(s) = 1_{[0,t]}(s)$ , podemos ver que

$$\begin{aligned} \hat{W}_t^H &:= \int_{\mathbb{R}} M1_{[0,t]}(s) d\hat{B}_s \\ &= \int_{\mathbb{R}} M1_{[0,t]}(s) dB_s - \int_{\mathbb{R}} M1_{[0,t]}(s) \psi(s) ds \end{aligned}$$

es un fBm bajo  $\hat{\mathbb{P}}$ . Para la obtención de teoremas tipo Girsanov, se requiere eliminar la deriva  $\int_{\mathbb{R}} M1_{[0,t]}(s) \psi(s) ds$ , para lo que hay que resolver ecuaciones funcionales de la forma

$$\int_{\mathbb{R}} M1_{[0,t]}(s) \psi(s) ds = g(t),$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_0^t M\psi(s) ds = g(t). \quad (1.11)$$

Una solución a tal ecuación funcional se presenta en la siguiente proposición.

**Proposición 1.3.6.** Sean  $A, T \in \mathbb{R}$ , con  $T > 0$ . Si  $g(t) = At \, 1_{[0,T]}(t)$ , entonces

$$\psi(t) = \frac{A \left[ (T-t)^{\frac{1}{2}-H} + t^{\frac{1}{2}-H} \right]}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-H\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-H\right)\right)} 1_{[0,T]}(t)$$

es una solución a la ecuación (1.11).

# Capítulo 2

## La volatilidad en el fBm

En el capítulo 2, extenderemos el modelo de volatilidad estocástica para lograr la persistencia en la volatilidad, además de la aparición de efectos smile bastante pronunciados, inclusive para opciones de madurez muy alta.

Citando a [Comte y Renault, 1998]: “en la práctica, la disminución de la amplitud del smile al aumentar el tiempo hasta la madurez es más lenta”, lo cual coincide con lo establecido en el modelo 1.3. En [Comte y Renault, 1998] se introducen los procesos de volatilidad de reversión de la memoria larga a la configuración de [Hull y White, 1993], mencionada en la ecuación (1.2), extendiendo dicho modelo al reemplazar el Bm  $W_2$  por un fBm  $W^H$ , con  $H > \frac{1}{2}$ .

### 2.1. La superficie de volatilidad implícita.

La *volatilidad implícita*  $\sigma_{BS}(k, \tau)$  de una opción (con strike  $K$  y madurez  $\tau$ ) es el valor del parámetro de volatilidad en la fórmula de Black-Scholes, véase la ecuación (1.1), requerida para igualar el precio en el mercado de tal opción. La *superficie de volatilidad implícita* es la superficie generada al graficar la volatilidad implícita como función del strike y la madurez.

### 2.1.1. Los datos

Analizaremos el comportamiento de los precios al cierre de las opciones Call en el mercado de valores, utilizando datos del índice VIX del 1 de junio del 2016. Estos datos fueron extraídos del sample del sitio de internet <https://datashop.cboe.com/option-quotes>. Los datos contienen las fecha de emisión y expiración, los precios de strike, apertura, alta, baja, cierre, volumen, tamaños de bid y ask, precios de bid y ask al cierre, VWAP (precio medio ponderado por volumen) e interés abierto.

La volatilidad implícita para cada opción no aparece en esta base de datos, como si ocurre en otras bases de datos de paga, sin embargo como se mencionó al inicio de la sección, puede determinarse de la misma forma en que lo hacen para las bases de datos de paga, utilizando en el modelo de valuación de Black-Scholes.

Al conocer el precio de una opción Call<sup>1</sup>  $C_0$  de un subyacente de precio  $S_0$ , su strike  $K$ , su tiempo de madurez anualizado  $t$ , además de la tasa de interés libre de riesgo  $r$  al momento de la emisión de la opción, mediante la fórmula

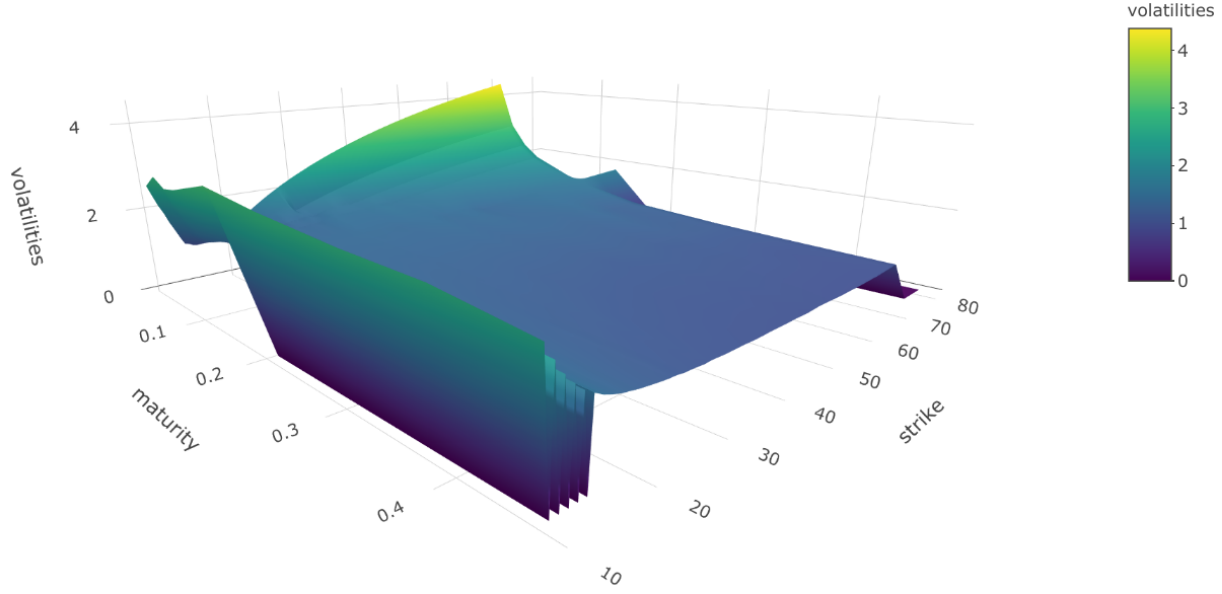
$$C_0 = S_0 N(d_1) - N(d_2) K e^{-rt}, \quad (2.1)$$

donde  $N$  es la función de distribución normal estándar, mientras que  $d_1 = -\frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$  y  $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$ , es posible obtener el parámetro de volatilidad. Notemos que  $d_1$  y  $d_2$  están en función de la volatilidad  $\sigma$ , que al ser el único elemento desconocido en la ecuación (2.1), se puede determinar mediante métodos numéricos. En el código del anexo B.1 se determinan los parámetros de volatilidad para los datos antes mencionados, ingresando 0 para aquellos valores en los que no se posee una opción correspondiente en el mercado.

Una superficie de volatilidad implícita “inspirada por la volatilidad estocástica”, como la llaman [Gatheral y Jacquier, 2014], mostrada en la figura 2.1, se ajusta a los precios de cierre de las opciones VIX del 1 de junio del 2016.

---

<sup>1</sup>En la base de datos también se encuentran datos de las opciones Put, sin embargo, hubo muy pocas opciones en el mercado a la venta ese día, como es usual con este tipo de opciones.



**Figura 2.1:** Superficie de volatilidad implícita de las opciones call del VIX del 1 de junio del 2016

Como mencionan [Gatheral et al., 2018], es conocido que en el mercado de valores, la forma general de la superficie de volatilidad es invariante bajo cambios de nivel y orientación, al menos en una primera aproximación. Lo anterior sugiere que la volatilidad es un proceso homogéneo en el tiempo, además de ser independiente del strike.

Las visibles discontinuidades de la figura 2.1 se deben únicamente a los strikes cuya volatilidad correspondiente es 0, es decir, a la ausencia de opciones en el mercado de valores con los strikes indicados, sin embargo, de existir (o en su defecto, extrapolar), se observa que seguirían la tendencia de homogeneidad en el tiempo e independencia del strike.

Los modelos homogéneos en el tiempo convencionales, no se ajustan a la superficie de volatilidad. Los modelos de volatilidad estocástica convencionales, por otro lado, generan una estructura de términos de sesgo **ATM** (en el dinero) que es constante para  $\tau$  pequeña y se comporta como una suma de exponenciales decrecientes para  $\tau$  más grande.

En [Fukasawa, 2011], se muestra que para el modelo de volatilidad estocástica

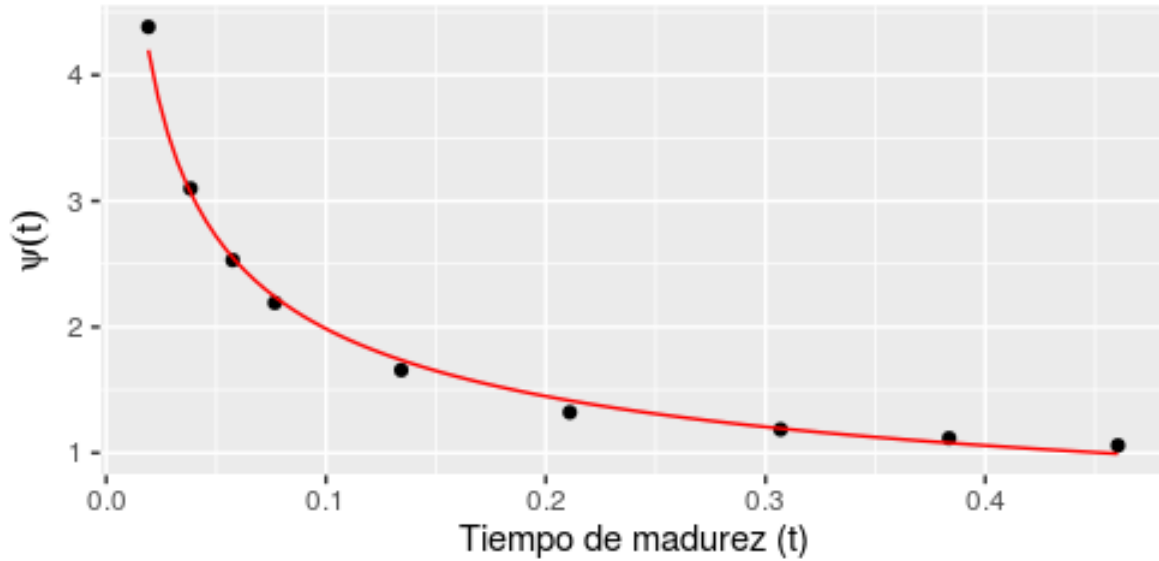
$$Z_t = rt - \frac{1}{2} \int_0^t g(Y_s^n)^2 ds + \int_0^t g(Y_s^n) \left[ \theta dW'_s + \sqrt{1 - \theta^2} dW_s \right],$$

donde  $Y_s^n = y + \epsilon_n W_s^H$ ,  $\theta \in (-1, 1)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  son constantes,  $g$  una función de Borel,  $W_s$  y  $W'$  son Bm, se tiene un sesgo de volatilidad ATM de la forma  $\psi(\tau) \sim \tau^{H-1/2}$ , al menos

para  $\tau$  pequeño.

Lo anterior proporciona un contraejemplo a la creencia de que la explosión del smile de la volatilidad cuando  $\tau \rightarrow 0$ , como se ve en las figuras 2.1 y 2.2, implica la presencia de saltos, como mencionan por ejemplo [Carr y Wu, 2003]. Cabe mencionar que, para que un modelo del tipo analizado por [Fukasawa, 2011] genere una superficie de volatilidad con una forma razonable, necesitaríamos tener un valor de  $H$  cercano a cero.

Como veremos en la ??, nuestras estimaciones empíricas de  $H$  a partir de datos de series de tiempo, efectivamente son muy pequeñas. El modelo de volatilidad que especificaremos en la sección 3.1, impulsado por un fBm con  $H < \frac{1}{2}$ , tiene potencial de satisfacer las propiedades observadas empíricamente en las series de tiempo de volatilidad, así como de poseer la forma de la superficie de volatilidad antes descrita.



**Figura 2.2:** Estimaciones no paramétricas de los sesgos de volatilidad ATM del VIX con strike 70 al 1 de junio de 2016; la curva roja es la curva de ajuste  $\psi(t) = 0.7t^{-0.45}$ .

## 2.2. La suavidad del proceso de volatilidad

Es de utilidad en el análisis de regularidad de soluciones generalizadas a ecuaciones diferenciales parciales, hablar de la suavidad de tales procesos en el sentido de la regularidad de Hölder.

**Definición 2.2.1.** *Un proceso estocástico  $X$  es  $\beta$ -Hölder continuo si existe una variable*

aleatoria finita  $K$ , a la que nos referimos como constante de Hölder, tal que

$$\sup_{s,t \in [0,1]; s \neq t} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\beta} \leq K.$$

### Cambiar por la definición de Biagini 2008 pp4 Criterio de Kolmogorov

Por lo anterior, de manera similar a lo estudiado en [Gatheral et al., 2018], comenzaremos estimando la suavidad de forma empírica para el proceso de volatilidad de los siguientes activos:

- Los futuros DAX y Bund, para los cuales estimaremos la varianza integrada directamente a partir de datos de alta frecuencia, utilizando un estimador basado en el modelo con zonas de incertidumbre de [Robert y Rosenbaum, 2012], esto con los precios de entre las 10 y las 11 am (horario de Londres) de algunos días entre el 13 de Mayo del 2010 y el 1 de Agosto del 2014.
- Los índices S&P y NASDAQ, para los cuales utilizaremos estimaciones de varianza previamente calculadas del Oxford-Man Institute of Quantitative Finance Realized Library, para algunos días entre el 3 de enero del 2000 y el 31 de marzo del 2014.

Supongamos que contamos con las observaciones discretas del proceso de volatilidad, en una retícula de tamaño  $\Delta$  en el intervalo  $[0, T] : \sigma_0, \sigma_\Delta, \dots, \sigma_{k\Delta}, \dots, k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor\}$ . Por simplicidad, tomemos  $N = \lfloor \frac{T}{\Delta} \rfloor$  y para  $q \geq 0$  definamos

$$m(q, \Delta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\log(\sigma_{k\Delta}) - \log(\sigma_{(k-1)\Delta})|^q$$

Al igual que [Rosenbaum, 2007], vamos a asumir que existen  $s_q > 0$  y  $b_q > 0$ , tales que

$$N^{qs_q} m(q, \Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} b_q \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) indica que el proceso de volatilidad pertenece al espacio de suavidad de Besov<sup>2</sup>  $\mathcal{B}_{q,\infty}^{s_q}$  y no pertenece a  $\mathcal{B}_{q,\infty}^{s'_q}$ , para  $s'_q > s_q$ . Por lo tanto,  $s_q$  puede verse como la

---

<sup>2</sup>Definido en el anexo A

regularidad de la volatilidad cuando se mide en la norma  $l_q$ . En particular, las funciones en  $\mathcal{B}_{q,\infty}^{s_q}$  para todo  $q > 0$  poseen la propiedad de continuidad Hölder, con parámetro  $h$  para cualquier  $h < s$ .

Suponiendo que los incrementos del proceso de log-volatilidad son estacionarios, además de que se cumplen las condiciones necesarias para aplicar la ley de los grandes números,  $m(q, \Delta)$  puede verse como la versión empírica de

$$\mathbb{E} [| \log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0) |^q]. \quad (2.3)$$

El proceso de volatilidad no es directamente observable, así que no es posible calcular  $m(q, \Delta)$  de manera exacta en la práctica, especialmente porque el menor  $\Delta$  posible en la práctica es de 1 día. Aproximaremos las volatilidades para los mercados **spot** antes mencionados para una hora fija del día.

Como se mencionó anteriormente, para estimar la volatilidad en los futuros DAX y Bund, usaremos el estimador de varianza integrada, el cual usa el modelo de zonas de incertidumbre de [Robert y Rosenbaum, 2012] para 1248 días entre las fechas antes mencionadas, este modelo nos permite utilizar todos los datos de precios de frecuencia ultra alta para nuestra estimación, y así obtener estimaciones precisas en ventanas de tiempo cortas.

Para los índices S&P y NASDAQ, aproximaremos las varianzas spot diarias utilizando las varianzas estimadas por el Oxford-Man Institute of Quantitative Finance Realized Library en 3540 días entre las fechas antes mencionadas.

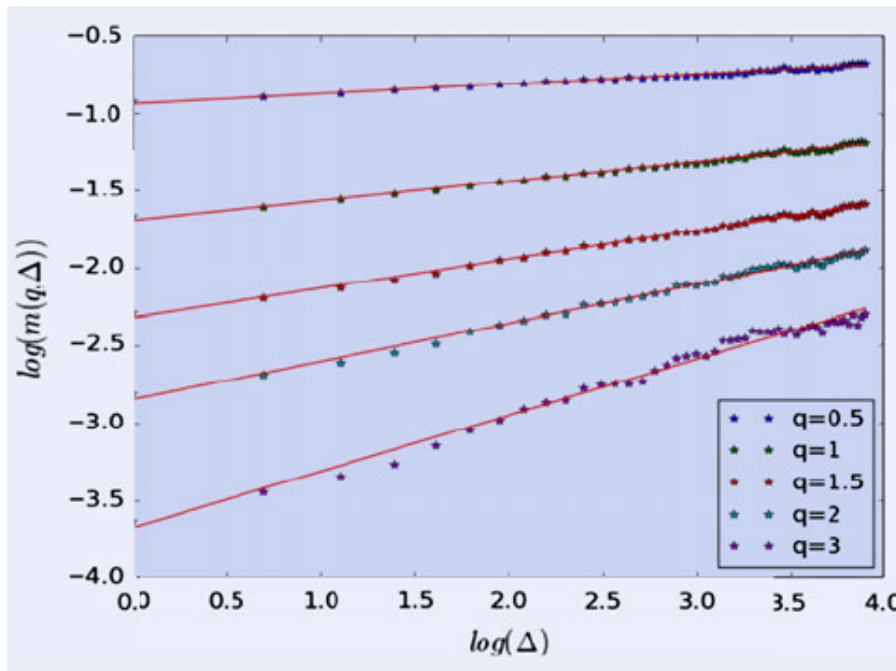
En lo consecuente, seguiremos usando la notación  $m(q, \Delta)$  para referirnos a la aproximación de la volatilidad spot real, como se explicó anteriormente. Procederemos a estimar el parámetro de suavidad  $s_q$  para cada  $q$ , al calcular  $m(q, \Delta)$  para diferentes valores de  $\Delta$  y haciendo un modelo de regresión para  $\log m(q, \Delta)$  en función de  $\log \Delta$ . Notemos que para un determinado  $\Delta$ , varios  $m(q, \Delta)$  se pueden calcular según el punto de partida. Nuestro valor final de  $m(q, \Delta)$  es el promedio simple de estos valores.



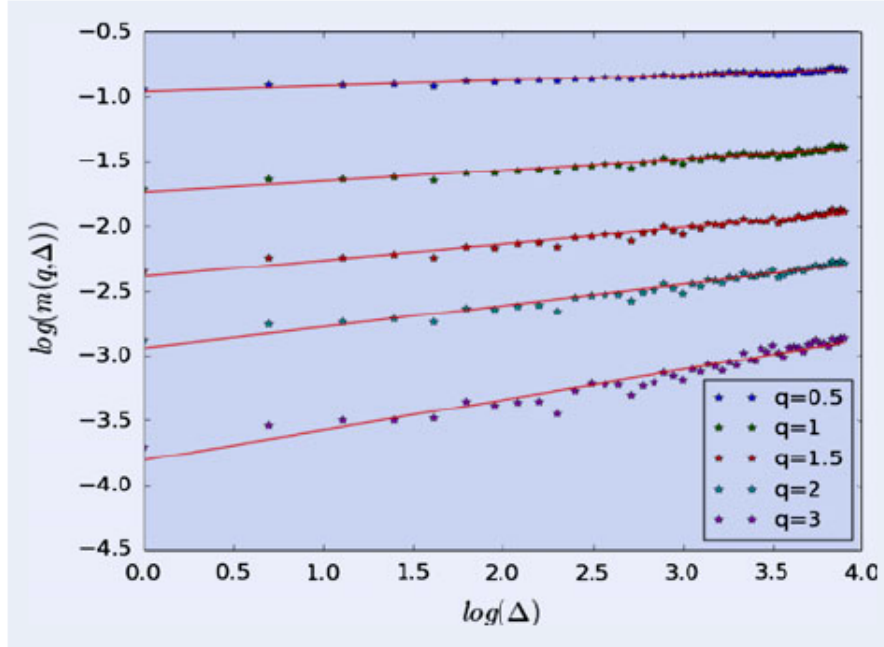
### 2.2.1. Los futuros DAX y Bund

El Futuro DAX es un contrato de futuro que tiene por subyacente al índice DAX, uno de los índices de la Bolsa de Fráncfort. Por otro lado, el futuro Bund es un bono sobre la deuda pública del Gobierno Federal alemán. Ambos se encuentran entre los activos con mayor liquidez del mundo, además, de acuerdo a [?], el modelo con zonas de incertidumbre utilizado para estimar la volatilidad se aplica bien a ellos.

Las gráficas de  $\log m(q, \Delta)$  vs  $\log \Delta$  para diferentes valores de  $q$  son mostrados para el DAX en la figura 2.3, y para el Bund en la figura 2.4.



**Figura 2.3:**  $\log m(q, \Delta)$  como función de  $\log \Delta$  para el DAX.



**Figura 2.4:**  $\log m(q, \Delta)$  como función de  $\log \Delta$  para el Bund.

Podemos observar en las figuras 2.3 y 2.4 que la regresión antes mencionada brinda una relación lineal bastante buena. Considerando la estacionariedad, ésto quiere decir que los incrementos de log-volatilidad poseen la siguiente propiedad de escala en esperanza

$$\mathbb{E}[|\log(\sigma_\Delta) - \log(\sigma_0)|^q] = b_q \Delta^{\xi_q},$$

que es una versión explícita de la ecuación (2.3), donde  $\xi_q = qs_q > 0$  es la pendiente de regresión. Más aún, el parámetro de suavidad  $s_q$  parece no depender de  $q$ .

## 2.3. ??

No se como acortar lo siguiente

En la sección 2.2 mostramos empíricamente que los incrementos de la volatilidad logarítmica de varios activos poseen una propiedad de escala con un parámetro de suavidad constante y que su distribución es cercana a la Gaussiana. Esto sugiere el modelo:

$$\sigma_t = \sigma \exp(\nu W_t^H),$$

donde  $W_t^H$  es un fBm de parámetro  $H$  igual a la suavidad medida de volatilidad,  $\nu, \sigma$  son constantes positivas.

Sin embargo, este modelo no es estacionario, lo cual sería deseable para garantizar que el modelo sea razonable para tiempos muy largos. Con motivo de lograr que el modelo sea estacionario, se buscó mejorar modelos como el presentado en la ecuación (1.2), modelando la volatilidad logarítmica como un proceso fraccionario de Ornstein–Uhlenbeck con una escala de tiempo de reversión muy larga, definido por la solución estacionaria de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \nu dW_t^H - \alpha(X_t - m)dt,$$

donde  $m, \nu, \alpha \in \mathbb{R}$  y  $\nu, \alpha > 0$ . Tal proceso fue estudiado por [Cheridito et al., 2003].

Pendiente continuar, guiar con Cheridito

## 2.4. Las diferencias entre FSV y RFSV

En [Comte y Renault, 1998], introducen el modelo de Volatilidad Estocástica Fraccional (FSV) Pendiente continuar, guiar con el Volatility is rough

## Capítulo 3

# El movimiento browniano fraccionario en finanzas

En vista de la utilidad del modelo clásico de Black Scholes, en el cual utilizamos un fBm con parámetro de Hurst  $H = \frac{1}{2}$ , es natural pensar en la posibilidad de extender al fBm con  $0 < H < 1$ . Como se mencionó en lema (1.2.8), el fBm con  $H > \frac{1}{2}$  posee cierta memoria o persistencia, mientras que con  $H < \frac{1}{2}$  el fBm presenta ciertos efectos de turbulencias o antipersistencia, como se observó en la 2.4 y en similitud con el precio observado en el mercado nórdico liberado de electricidad, de acuerdo con [Simonsen, 2003].

Al remplazar sin cambios el Bm del modelo de Black Scholes por un fBm, a pesar de mantener cierta consistencia matemática, de acuerdo a **buscar bien las citas, creo que Cheridito**, cuando definimos la integral respecto al fBm como una integral por trayectorias, el mercado correspondiente presenta oportunidad de arbitraje.

**Teorema 3.0.1.**

### 3.1. ???

# Conclusiones

# Anexos

# Apéndice A

## Algunos resultados mencionados

**Teorema A.0.1** (Desigualdad de la suma de potencias).

**Definición A.0.2** (Espacios de Besov, [Rosenbaum, 2011]). Sea  $\Delta_n^h$  el operador definido por

$$f(x) \mapsto \begin{cases} f(x+h) - f(x) & \text{si } n = 1 \\ \Delta_h^1(\Delta_h^{n-1})f(x) & \end{cases}$$

El módulo  $L^p$  de  $n$ -ésimo orden de suavidad de  $f$  en  $[0, 1]$  es

$$\omega_n(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^n f\|_{L^p(\Omega_{k,n})},$$

donde  $\Omega_{h,n} = \{x \in [0, 1] \mid x + hk \in [0, 1], k = 0, \dots, n\}$ . Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s > 0$ , el espacio de Besov  $\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0, 1])$  esta formado por las funciones  $f \in L^p[0, 1]$  tales que

$$\sup_{j \geq 0} \{2^{sj} \omega_n(f, 2^{-j})_p\}_{j \geq 0} < \infty$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $s < n$ .

Es un espacio de Banach equipado con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{p,\infty}^s([0,1])} = \|f\|_{L^p} + \sup_{j \geq 0} \{2^{sj} \omega_n(f, 2^{-j})_p\}_{j \geq 0}.$$

Para una función real  $f$  definida en  $[0, 1]$  y  $0 < p < \infty$ , definamos  $J_j^p(f)$  como

$$J_j^p(f) = \sum_{k=1}^{2^j} |f(k2^{-j}) - f(\{k-1\}2^{-j})|^p.$$

Para  $p = \infty$  es usual considerar la norma supremo.



# Apéndice B

## Códigos en R para los resultados presentados

### B.1. La superficie de volatilidad

El código expuesto a continuación se encarga de importar los precios de opciones Call y Put al día 1 de junio del 2016 del índice VIX, éstos datos fueron obtenidos de manera gratuita del sitio <https://datashop.cboe.com/option-quotes>.

```
#LIBRERÍAS
library(plotly)

#CONSTANTES
#Obtenida en https://ycharts.com/indicators/10_year_treasury_rate
TenYearTreasure=0.0184
#Obtenida en https://ycharts.com/indicators/us_12month_trimmed_mean_
    pce_inflation_rate
Inflacion=(0.0179+0.0172)/2
#Usando https://www.wallstreetmojo.com/risk-free-rate-formula/
#r es la tasa de interés libre de riesgo
r=(1+TenYearTreasure)/(1+Inflacion)-1

#IMPORTA DATOS
```

```

data=read.csv("UnderlyingOptionsEODQuotes_2016-06-01.csv")
#S, Precio del subyacente, constante en todos los registros
S=data$underlying_bid_1545[1]
#Se eliminan los datos que no se usan
VIX=data[,c(2,4,5)]
#Se estima el valor de la opción con el valor medio entre bid y ask
del día
VIX$optionvalue=(data$bid_eod+data$ask_eod)/2

#Se divide entre la cantidad de segundos al año
VIX$maturity=as.double(difftime(strptime(as.character(VIX$expiration),
format = "%Y-%m-%d"), strptime(as.character(VIX$quote_date),
format = "%Y-%m-%d")))/(60*24*24*365)
#Se conservan solo los tiempos de madurez
VIX=VIX[,-c(1,2)]
#La madurez 0 indetermina d1, así que se elimina
VIX=VIX[-which(VIX$maturity==0),]

#Separando los precios de las opciones call y put
naux=nrow(VIX)/2
VIXCalls=VIX[-2*(1:naux),]
VIXPuts=VIX[-(2*(1:naux)-1),]

#Obteniendo el tamaño de la retícula de datos
#Se eliminan los valores repetidos de los strikes
strike=unique(VIX$strike)
m=length(strike)
maturity=unique(VIX$maturity)
n=length(maturity)

```

A continuación se definen las funciones utilizadas en el análisis de los datos.

```
#d1 sigue la notación usual de los modelos financieros, S es el precio
  del subyacente, K el strike, r la tasa de interés libre de riesgo
  y t el tiempo de madurez.
#x es la volatilidad, normalmente representada por sigma y será
  determinada más adelante
d1<-function(S,K, r, x, t)
{
  d<-log(S/K)+(r+x*x/2)*t
  d<-d/(x*sqrt(t))
  return(d)
}

#Definición de la fórmula de la opción Call europea
#Las variables son las mismas que en la función d1
Call<-function(S,K, r, x, t)
{
  d1=d1(S, K, r, x, t)
  #d2 se define en función de d1, la volatilidad y el tiempo de
    madurez
  d2=d1-x*sqrt(t)
  C=S*pnorm(d1,0,1)-K*exp(r*t)*pnorm(d2,0,1)
  return(C)
}

#La función Put se define de manera análoga a la Call
Put<-function(S,K, r, x, t)
{
  d1=d1(S, K, r, x, t)
  d2=d1-x*sqrt(t)
  P=K*exp(r*t)*(1-pnorm(d2,0,1))-S*(1-pnorm(d1,0,1))
  return(P)
}
```

```

#A continuación se modifican las funciones Call y Put para
    posteriormente obtener el valor de la volatilidad x con uniroot
CallFromVol<-function(S,K,r,x,t,C)
    return(Call(S,K,r,x,t)-C)

PutFromVol<-function(S,K,r,x,t,P)
    return(Put(S,K,r,x,t)-P)

#Se define la matriz de volatilidades para cada strike y madurez que
    se tienen en la tabla de precios
VolCalls=matrix(rep(0, m*n), nrow=m)
#Se llenan las volatilidades
for (i in 1:m)
    for (j in 1:n)
    {
        #Pointer es la posición de la tabla VIXCalls en la que el precio
            de strike es strike[i] y posee un tiempo de madurez maturity[j]
        pointer=intersect(which(VIXCalls$strike==strike[i]),
            which(VIXCalls$maturity==maturity[j]))
        #Por definición, pointer es un arreglo, así que debemos verificar
            si no está vacío.
        if(length(pointer)==1)
        {
            #Valuation es el precio del Call que se encuentra en la tabla
                VIXCalls
            Valuation=VIXCalls$optionvalue[pointer]
            #En la tabla de volatilidades, se ingresa el valor (en
                porcentaje) devuelto por uniroot aplicado a la función
                CallFromVol
            VolCalls[i,j]=uniroot(CallFromVol, c(0,5), S=S, K=strike[i],
                r=r, t=maturity[j], Valuation)$root

```

```

    }
  }

#VolPuts es la matriz de volatilidades correspondiente a las opciones
  put, se define de la misma manera que VolCalls
VolPuts=matrix(rep(0, m*n), nrow=m)
for (i in 1:m)
  for (j in 1:n)
  {
    pointer=intersect(which(VIXPuts$strike==strike[i]),
      which(VIXPuts$maturity==maturity[j]))
    if(length(pointer)==1)
    {
      Valuation=VIXPuts$optionvalue[pointer]
      #Aunque se define de manera análoga, las soluciones se buscan en
      otro intervalo, ya que las opciones Put son menos comunes en
      el mercado
      VolPuts[i,j]=uniroot(PutFromVol, c(-2,2), S=S, K=strike[i], r=r,
        t=maturity[j], Valuation)$root
    }
  }
}

```

Se define y se llama a la función Plot3D, la cual muestra en un Viewer la superficie de volatilidad implícita para las opciones Call, mostrada en la figura 2.1.

```

#La siguiente función, se puede aplicar a las tablas ValCalls y
  VolPuts, sin embargo, al no existir tantas opciones put en el
  mercado, será más informativo solo usarla para los precios de las
  opciones call.

#El eje x es la columna maturity de la tabla volatilities, el eje y es
  la columna de strikes y el eje z son las volatilities
Plot3D<-function(volatilities)
{

```

```

x=maturity
y=strike
z=volatilities
End=floor(max(z))+1
#Tras definir los valores a graficarse, se establece el tipo de gráfica y las variables a graficarse
fig <- plot_ly(
  type = 'surface',
  contours = list(
    x = list(show = TRUE, start = 0.01, end = 0.5, size = 5,
      color = 'white'),
    z = list(show = TRUE, start = -0.5, end = End, size = 5)),
  #size 5 para calls, 2 para puts, para mejor visualización
  x = ~maturity,
  y = ~strike,
  z = ~volatilities)
#Se establece el diseño y aspectos de la gráfica
fig <- fig %>% layout(

  scene = list(
    xaxis = list(nticks = 9),
    zaxis = list(nticks = 4),
    camera = list(eye = list(x = 1, y = -1, z = 0.5)),
    aspectratio = list(x = .9, y = .9, z = 0.3)))

return(fig)
}

Plot3D(VolCalls)

```

## B.2. Estimaciones no paramétricas

El siguiente código es utilizado para brindar una estimación no paramétrica de los sesgos de volatilidad.

```
#Se toma una muestra de los datos
VolCallsAtStrike70=VolCalls[37,]

#Se determinan los coeficientes obtenidos al realizar una
  regresión exponencial
Coef=as.numeric(lm(log(VolCallsAtStrike70)~
  log(maturity))$coefficients)
#Como se graficará en la forma  $At^{(-b)}$ , se toma la
  exponencial del intercepto
Coef[1]=exp(Coef[1])

#Se ingresan a un data frame los valores de madurez junto a
  la muestra de datos tomada
NoParam<-data.frame(maturity, VolCallsAtStrike70)

#Se grafican los datos de NoParam junto con la curva de
  regresión
ggplot(data=NoParam, aes(x=maturity, y=VolCallsAtStrike70))+
  geom_point()+stat_function(fun=function(x)
  Coef[1]*x^Coef[2], col="red")+
  xlab("Tiempo de madurez (t)") + ylab(expression(psi(t)))
```

# Bibliografía

- [Andersen et al., 2003] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., y Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility. *Econometrica*, 71(2):579–625.
- [Bentes y Mendes da Cruz, 2011] Bentes, S. R. y Mendes da Cruz, M. (2011). Is stock market volatility persistent? A fractionally integrated approach.
- [Biagini et al., 2008] Biagini, F., Hu, Y., Øksendal, B., y Zhang, T. (2008). *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*.
- [Black y Scholes, 1973] Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- [Carr y Wu, 2003] Carr, P. y Wu, L. (2003). What Type of Process Underlies Options? A Simple Robust Test. 58(6).
- [Chen et al., 2006] Chen, Z., Daigler, R. T., y Parhizgari, A. M. (2006). Persistence of volatility in futures markets. *Journal of Futures Markets: Futures, Options, and Other Derivative Products*, 26(6):571–594.
- [Cheridito et al., 2003] Cheridito, P., Kawaguchi, H., y Maejima, M. (2003). Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Electronic Journal of Probability*, 8:no. 3, 14.
- [Chronopoulou, 2011] Chronopoulou, A. (2011). Parameter estimation and calibration for long-memory stochastic volatility models. *Handbook of Modeling High-Frequency Data in Finance*, 4:219.
- [Comte y Renault, 1996] Comte, F. y Renault, E. (1996). Long memory continuous time models. *Journal of Econometrics*, 73(1):101–149.



- [Comte y Renault, 1998] Comte, F. y Renault, E. (1998). Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4):291–323.
- [Coutin, 2007] Coutin, L. (2007). An introduction to (stochastic) calculus with respect to fractional Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités XL*, volume 1899 of *Lecture Notes in Math.*, pages 3–65. Springer, Berlin.
- [Di Nunno et al., 2009] Di Nunno, G., Øksendal, B., y Proske, F. (2009). *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin.
- [Ding et al., 1993] Ding, Z., Granger, C. W., y Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of empirical finance*, 1(1):83–106.
- [Fukasawa, 2011] Fukasawa, M. (2011). Asymptotic analysis for stochastic volatility: martingale expansion. *Finance and Stochastics*, 15(4):635–654.
- [Gatheral y Jacquier, 2014] Gatheral, J. y Jacquier, A. (2014). Arbitrage-free SVI volatility surfaces. *Quantitative Finance*, 14(1):59–71.
- [Gatheral et al., 2018] Gatheral, J., Jaisson, T., y Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6):933–949.
- [Hull y White, 1990] Hull, J. y White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The review of financial studies*, 3(4):573–592.
- [Hull y White, 1993] Hull, J. y White, A. (1993). One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities. *Journal of financial and quantitative analysis*, 28(2):235–254.
- [Mandelbrot y Van Ness, 1968] Mandelbrot, B. B. y Van Ness, J. W. (1968). Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review. A Publication of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10:422–437.

- [Robert y Rosenbaum, 2012] Robert, C. Y. y Rosenbaum, M. (2012). Volatility and covariation estimation when microstructure noise and trading times are endogenous. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 22(1):133–164.
- [Rosenbaum, 2007] Rosenbaum, M. (2007). *Etude de Quelques Problèmes d’Estimation Statistique en Finance*. phdthesis, ENSAE ParisTech ; Université Paris-Est.
- [Rosenbaum, 2011] Rosenbaum, M. (2011). A new microstructure noise index. *Quantitative Finance*, 11(6):883–899.
- [Samorodnitsky y Taqqu, 1994] Samorodnitsky, G. y Taqqu, M. S. (1994). *Stable non-Gaussian random processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York.
- [Simonsen, 2003] Simonsen, I. (2003). Measuring anti-correlations in the nordic electricity spot market by wavelets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 322:597–606.
- [Yilmaz, 2018] Yilmaz, B. (2018). Computation of option greeks under hybrid stochastic volatility models via Malliavin calculus. *Modern Stochastics. Theory and Applications*, 5(2):145–165.