



VÍCTOR GARCÍA.

CIENTÍFICO DE DATOS

NOTAS DE INTEGRACIÓN

*Papá, gracias por enseñarme a integrar,
tanto en cálculo como en la vida.*



Notas de Integración

Víctor Miguel García Sánchez

7 de mayo de 2025

Las presentes notas se encuentran en construcción, las sugerencias y observaciones son bien recibidas a través de victor.garcia@cimat.mx.

NOTACIÓN

A lo largo del presente documento, tanto para funciones derivables como integrables, supondremos que lo son en todo el dominio de la función, dejando de lado en la mayoría de los casos los problemas de discontinuidad en denominadores o radicales.

Para la derivada de la función f usaremos indistintamente las notaciones Df , $\frac{d}{dx}f(x)$, $f'(x)$.

Para la integral de la función f , usaremos $\int f(x)dx$ ó $\int f(y)$ según nos convenga.

Usaremos ambos como operadores lineales de espacios vectoriales de funciones, es decir que en lugar de la interpretación usual de aproximación lineal para derivada o de área bajo la curva para la integral, tendremos

$$D : f(x) \mapsto f'(x)$$

o simplemente,

$$D : f \mapsto f'$$

A su vez,

$$\int : f \mapsto F$$

O bien,

$$\int \cdot dx : f(x) \mapsto F(x)$$

Donde F es una primitiva de f .

1. LAS FÓRMULAS DE DERIVADAS

Para fines de las presentes notas, dejaremos de lado las interpretaciones de la derivada, así como su definición formal de límites, sin embargo, para comprender mejor la *antiderivada*, vale la pena recordar las fórmulas de derivación.

1.1. FUNCIONES ALGEBRAICAS

A continuación se presentan las fórmulas de derivación de funciones algebraicas usando la notación de Leibniz.

Sean $u(x), v(x), w(x)$ funciones de x derivables en todo su dominio, c y n constantes.

$$\frac{d}{dx}c = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{d}{dx}x = 1 \quad (1.1.2)$$

$$\frac{d}{dx}cv(x) = c\frac{d}{dx}v(x) \quad (1.1.3)$$

$$\frac{d}{dx}(u + v - w)(x) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) - \frac{d}{dx}w(x) \quad (1.1.4)$$

$$\frac{d}{dx}[v(x)]^n = n[v(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}v(x) \quad (1.1.5)$$

$$\frac{d}{dx}(uv)(x) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) \quad (1.1.6)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{[v(x)]^2} \quad (1.1.7)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v(x)}\right) = -\frac{c}{[v(x)]^2}\frac{d}{dx}v(x) \quad (1.1.8)$$

1.1.1. EJERCICIOS

1. Demostrar las fórmulas (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4) y (1.1.6) usando la definición de derivada, también conocida como la **Regla de los cuatro pasos**.
2. Demostrar las fórmulas (1.1.3), (1.1.7) y (1.1.8) a partir de las fórmulas del ejercicio anterior.
3. ** Demostrar la fórmula (1.1.5). [Hint: Para n real, usar **sucesiones de funciones**].

4. Demostrar la **Regla de la cadena** a partir de la definición:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}f(g(x))\frac{d}{dx}g(x)$$

Otra forma de demostrar la fórmula (1.1.5) requiere del uso de la Regla de la cadena y la fórmula de $\frac{d}{dx}e^x$. Aprovecharemos la siguiente sección para mencionar, además de ésta, las fórmulas de derivadas del resto de funciones trascendentes.

1.2. FUNCIONES TRASCENDENTES

Usaremos indistintamente \cot y ctg . Además, supondremos que cada función trigonométrica es continua en $v(x)$ como ya se había mencionado.

1.2.1. TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} v(x) = \cos v(x) \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \cos v(x) = -\operatorname{sen} v(x) \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.2)$$

$$\frac{d}{dx} \tan v(x) = [\sec v(x)]^2 \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.3)$$

$$\frac{d}{dx} \cot v(x) = -[\csc v(x)]^2 \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.4)$$

$$\frac{d}{dx} \sec v(x) = \sec v(x) \tan v(x) \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.5)$$

$$\frac{d}{dx} \csc v(x) = -\csc v(x) \cot v(x) \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.6)$$

1.2.2. INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx} \arcsen v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - [v(x)]^2}} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.7)$$

$$\frac{d}{dx} \arccos v(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - [v(x)]^2}} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.8)$$

$$\frac{d}{dx} \arctan v(x) = \frac{1}{1 + [v(x)]^2} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.9)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} v(x) = -\frac{1}{1 + [v(x)]^2} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.10)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} v(x) = \frac{1}{v(x) \sqrt{[v(x)]^2 - 1}} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.11)$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} v(x) = -\frac{1}{v(x) \sqrt{[v(x)]^2 - 1}} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.12)$$

1.2.3. EJERCICIOS

1. Demostrar las fórmulas 1.2.7 a 1.2.12 para el caso $v(x) = x$.
2. Usando la regla de la cadena y el ejercicio anterior, demostrar las fórmulas 1.2.7 a 1.2.12.

1.2.4. LOGARÍTMICAS

$$\frac{d}{dx} \ln v(x) = \frac{1}{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.13)$$

$$\frac{d}{dx} \log_b v(x) = \frac{\log_b e}{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.14)$$

1.2.5. EXPONENCIALES

$$\frac{d}{dx} e^{v(x)} = e^{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.15)$$

$$\frac{d}{dx} a^{v(x)} = \ln a \cdot a^{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.16)$$

$$\frac{d}{dx} [u(x)]^{v(x)} = v(x) \cdot [u(x)]^{v(x)-1} \frac{d}{dx} u(x) + \ln u(x) \cdot [u(x)]^{v(x)} \frac{d}{dx} v(x) \quad (1.2.17)$$

1.2.6. EJERCICIOS

1. Demostrar la fórmula (1.2.15) [*Hint: Usar la regla de la cadena.*]
2. Demostrar la fórmula (1.2.13) usando el ejercicio anterior y la regla de la cadena.
3. Demostrar la fórmula (1.2.14) [*Hint: Usar la fórmula de cambio de base:*]

$$\begin{aligned}\log_b y &= \frac{\ln y}{\ln b} \\ &= \ln y \log_b e\end{aligned}$$

Algunas de las fórmulas anteriores se demuestran, a grandes rasgos, de la siguiente forma:

- Para demostrar la fórmula (1.2.16) se usa que $a^v = e^{\ln a \cdot v}$ y la fórmula (1.2.15).
- Para demostrar la fórmula (1.2.17) se usa que $u^v = e^{\ln(u) \cdot v}$, además de las fórmulas (1.1.6), (1.2.13) y (1.2.15).

2. LA DIFERENCIAL

La diferencial de la función $f(x)$ se define de la siguiente manera:

$$d(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) dx \quad (2.0.1)$$

Lo anterior no debe confundirse con la utilización común aunque incorrecta de interpretar la notación de derivación de Leibniz como una fracción. Lo cual se explica a detalle en Flanders (1989).

Podría decirse que la diferencial de una función es su derivada la que le añadimos al final un factor dx , el cual será tan importante como la constante de integración, cuando lleguemos a la sección de integración. Consideraremos la ausencia de cualquiera de ellos, por simplicidad, como un error “ortográfico”.

2.1. LAS FÓRMULAS DE DIFERENCIALES

Considerando la definición dada en la ecuación 2.0.1, podemos obtener las fórmulas de diferenciales a partir de las fórmulas 1.1.1 a 1.2.17. Siendo $u(x), v(x), w(x)$ funciones de x derivables

en todo su dominio y c y n constantes, al igual que en la subsección 1.1.

$$d c = 0 \quad (2.1.1)$$

$$d x = dx \quad (2.1.2)$$

$$d cv(x) = cdv \quad (2.1.3)$$

$$d(u + v - w)(x) = du(x) + dv(x) - dw(x) \quad (2.1.4)$$

$$d[v(x)]^n = n[v(x)]^{n-1}dv(x) \quad (2.1.5)$$

$$d(uv)(x) = u(x)dv(x) + v(x)du(x) \quad (2.1.6)$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{[v(x)]^2} \quad (2.1.7)$$

$$d\left(\frac{c}{v(x)}\right) = -\frac{c}{[v(x)]^2}dv(x) \quad (2.1.8)$$

Se sugiere como ejercicio demostrar la fórmula (2.1.7) a partir de la fórmula (1.1.7) y la ecuación 2.0.1.

Siguiendo una estructura similar a la sección anterior, a continuación se presentan las fórmulas de diferenciales de las principales funciones trascendentes.

$$d \operatorname{sen} v(x) = \cos v(x)dv(x) \quad (2.2.1)$$

$$d \cos v(x) = -\operatorname{sen} v(x)dv(x) \quad (2.2.2)$$

$$d \tan v(x) = [\sec v(x)]^2dv(x) \quad (2.2.3)$$

$$d \cot v(x) = -[\csc v(x)]^2dv(x) \quad (2.2.4)$$

$$d \sec v(x) = \sec v(x) \tan v(x)dv(x) \quad (2.2.5)$$

$$d \csc v(x) = -\csc v(x) \cot v(x)dv(x) \quad (2.2.6)$$

$$d \operatorname{arc sen} v(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - [v(x)]^2}} d v(x) \quad (2.2.7)$$

$$d \operatorname{arc cos} v(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - [v(x)]^2}} d v(x) \quad (2.2.8)$$

$$d \operatorname{arctan} v(x) = \frac{1}{1 + [v(x)]^2} d v(x) \quad (2.2.9)$$

$$d \operatorname{arccot} v(x) = -\frac{1}{1 + [v(x)]^2} d v(x) \quad (2.2.10)$$

$$d \operatorname{arcsec} v(x) = \frac{1}{v(x) \sqrt{[v(x)]^2 - 1}} d v(x) \quad (2.2.11)$$

$$d \operatorname{arccsc} v(x) = -\frac{1}{v(x) \sqrt{[v(x)]^2 - 1}} d v(x) \quad (2.2.12)$$

$$d \ln v = \frac{1}{v} d v \quad (2.2.13)$$

$$d \log_b v = \frac{\log_b e}{v} d v \quad (2.2.14)$$

$$d e^v = e^v d v \quad (2.2.15)$$

$$d a^v = \ln a \cdot a^v d v \quad (2.2.16)$$

$$d u^v = v \cdot [u]^{v-1} d u + \ln u \cdot u^v d v \quad (2.2.17)$$

3. INTEGRACIÓN DE FORMAS ELEMENTALES ORDINARIAS

De acuerdo a Aguilar (2009) y , en los problemas de cálculo integral nos interesa:
Hallar una función $f(x)$ cuya derivada

$$f'(x) = \phi(x)$$

es conocida.

Nos concentraremos en aprender a hallar las integrales *indefinidas* de expresiones dadas.

En lo que sigue daremos por sentado que todas nuestras funciones de interés poseen una integral indefinida, el estudio riguroso de la integrabilidad de las funciones queda fuera del propósito de estas notas. Sin embargo seguirá teniendo importancia la *constante de integración* debido a su relevancia en cursos como ecuaciones diferenciales.

Tampoco entraremos a detalle en la teoría de formas diferenciales, sin embargo, es importante, al expresar una integral no olvidar el dx , ya que el restarle importancia puede llevarnos a cometer errores como el siguiente:

Al resolver la integral $\int \sin(x^2)$, “se puede realizar” la sustitución $u = x^2$, con lo que

$$\int \sin(u) = -\cos(u) = \cos(x^2)$$

Así que a grandes rasgos, diremos que la integral es una “medida” y dx nos habla del tamaño de la unidad de medida.

3.1. INTEGRALES INMEDIATAS

Con la finalidad de coincidir en la notación con los principales libros de referencia, en ésta subsección nos referiremos a $v(x)$, por simplicidad como v , siendo así como, por ejemplo, la fórmula (3.1.5), se escribiría correctamente como

$$\int \frac{dv(x)}{v(x)} = \ln(v(x)) + C$$

Además de permitirnos usar indistintamente v como variable o como función de x . Dicho lo anterior, haremos uso del Teorema Fundamental del Cálculo y las fórmulas 2.1.2 a 2.1.6, 1.2.13 y 1.2.15 para obtener las siguientes fórmulas de integrales:

$$\int 1dx = \int dx = x + C \quad (3.1.1)$$

$$\int cvdx = c \int vdx + C \quad (3.1.2)$$

$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx \quad (3.1.3)$$

$$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \text{ Si } n \neq -1 \quad (3.1.4)$$

$$\int \frac{dv}{v} = \ln(v) + C \quad (3.1.5)$$

$$\int e^v dv = e^v + C \quad (3.1.6)$$

Un primer uso de la fórmula (3.1.4) es generalizar la fórmula (3.1.1), ésto al tomar $n = 0$, de manera que

$$\int dv = v + C$$

como v es una función ($v(x)$), podemos ver la ecuación anterior como una versión del Teorema Fundamental del Cálculo.

A su vez, de las fórmulas 2.2.1 a 2.2.6 se obtienen las siguientes:

$$\int \cos v dv = \operatorname{sen} v + C \quad (3.1.7)$$

$$\int \operatorname{sen} v dv = -\cos v + C \quad (3.1.8)$$

$$\int \sec^2 v dv = \tan v + C \quad (3.1.9)$$

$$\int \csc^2 v dv = -\cot v + C \quad (3.1.10)$$

$$\int \sec v \tan v dv = \sec v + C \quad (3.1.11)$$

$$\int \csc v \cot v dv = -\csc v + C \quad (3.1.12)$$

Podemos notar que el caso que no es cubierto por la fórmula (3.1.4), $n = -1$, puede resolverse mediante la fórmula (3.1.5).

Las fórmulas 2.2.7 a 2.2.12 también nos brindan integrales inmediatas, pero éstas convienen ser estudiadas en el tema de Integración por Sustitución Trigonométrica o cambio de variable.

3.2. ALGUNAS INTEGRALES CASI INMEDIATAS

A continuación veremos otras integrales que requieren de un esfuerzo ligeramente mayor a la simple observación de la fórmula y la correcta elección de la función $v(x)$ a integrar.

Problema 1 ($\int \tan v dv$). Comencemos utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx \\ &= - \int \frac{-\operatorname{sen} x dx}{\cos x} \end{aligned}$$

Podemos ver que al sustituir $v = x$ en la fórmula (2.2.2) obtenemos el numerador de la expresión anterior, así que podemos reescribir lo anterior como

$$= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

Al usar la fórmula (3.1.5) con $v(x) = \cos x$, obtenemos

$$\begin{aligned} &= -\ln(\cos x) + C \\ \int \tan v dv &= -\ln(\cos v) + C \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Problema 2 ($\int \cot v dv$). La demostración es análoga a la integral 3.2.1

$$\int \cot v dv = \ln(\operatorname{sen} v) + C \quad (3.2.2)$$

Problema 3 ($\int \sec v \, dv$). Al observar las fórmulas 2.2.1 a 2.2.6, podemos notar que no hay expresión trigonométrica, cuya diferencial sea $\sec v \, dv$, sin embargo, las fórmulas (2.2.3) y (2.2.5) tienen expresiones parecidas, así que multiplicamos y dividimos la expresión por $\sec x + \tan x$:

$$\begin{aligned}\int \sec x \, dx &= \int \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \sec x \, dx \\ &= \int \frac{(\sec x + \tan x) \sec x \, dx}{\sec x + \tan x} \\ &= \int \frac{(\sec^2 x + \tan x \sec x) \, dx}{\sec x + \tan x}\end{aligned}$$

Al reordenar los sumandos del denominador

$$= \int \frac{(\sec^2 x + \tan x \sec x) \, dx}{\tan x + \sec x},$$

Al sustituir en la fórmula (2.1.4) $u = \tan x$, $v = \sec x$ y $w = 0$, además de las fórmulas (2.2.3) y (2.2.5), antes mencionadas, ambas con $v = x$, podemos reescribir el numerador de la forma

$$= \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x}$$

Finalmente al usar la fórmula (3.1.5) con $v(x) = \tan x + \sec x$, obtenemos

$$= \ln(\tan x + \sec x) + C$$

$$\int \sec v \, dv = \ln(\tan v + \sec v) + C \quad (3.2.3)$$

Problema 4 ($\int \csc v \, dv$). La demostración es análoga a la integral 3.2.3

$$\int \csc v \, dv = -\ln(\cot v + \csc v) + C \quad (3.2.4)$$

Problema 5 ($\int a^v \, dv$). El caso $a = 1$ se ve en la fórmula (3.1.1), así que supondremos $a \neq 1$. Multiplicamos y dividimos por $\ln a$,

$$\begin{aligned}\int a^x \, dx &= \int \frac{\ln a}{\ln a} a^x \, dx \\ &= \int \frac{1}{\ln a} \ln a \cdot a^x \, dx\end{aligned}$$

Al utilizar la fórmula (3.1.2) con $c = \frac{1}{\ln a}$ y $v = \ln a \cdot a^x$, obtenemos

$$= \frac{1}{\ln a} \int \ln a \cdot a^x \, dx$$

Al usar la fórmula (2.2.16) con $v = x$, obtenemos

$$= \frac{1}{\ln a} \int d(a^x)$$

Así que usar el Teorema Fundamental del Cálculo, antes enunciado como la versión general de la fórmula (3.1.1) con $v(x) = a^x$, concluimos que

$$= \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$\int a^v \, dv = \frac{1}{\ln a} a^v + C \quad (3.2.5)$$

3.3. LA IMPORTANCIA DE LA ELECCIÓN DE dv

Un error muy común cuando se está aprendiendo a integrar, consiste en creer que tras elegir v , el resto de términos conforman dv , para notar que no es así, basta con observar que para el siguiente problema, derivado del el Problema 5, es fácil cometer un error.

Problema 6 ($\int 5 \ln a a^x dx$). Al tomar $v = a^x$, no debemos afirmar tan a la ligera que dv es $5 \ln a dx$, pues dv se determina al **diferenciar** v , asistidos de las fórmulas de la sección 2.1.1, no simplemente tomando el resto de términos en la expresión. Como se vio en el el Problema 5, $dv = \ln a a^x$, así que no es posible usar directamente la fórmula (3.1.1) con $v(x) = a^x$, así como en el el Problema 5 tampoco se usó desde el primer paso.

Comencemos entonces usando la fórmula (3.1.2) con $c = 5$ y $v = \ln a a^x$, de manera que

$$\int 5 \ln a a^x dx = 5 \int \ln a a^x dx$$

Donde ya podemos usar la fórmula (3.1.1) con $v(x) = a^x$

$$= 5a^x + C$$

En ocasiones una constante será lo único que impida usar directamente alguna fórmula y como se vio en el el Problema 6, la manera de tratar con este impedimento es asistidos de la fórmula (3.1.2), sin embargo no siempre será así y serán requeridas otras estrategias, como las expuestas en la la sección 4.

Una buena estrategia para asegurarse de no usar incorrectamente una fórmula es cubrir la integral que se está realizando para determinar dv a partir de la elección de v y no a partir de la integral que se está resolviendo.

3.4. EJERCICIOS

$$\int 2x(2+x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2(2+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C \quad (3.4.1)$$

$$\int \sqrt{m+nx} dx = \frac{2(m+nx)^{\frac{3}{2}}}{3n} + C \quad (3.4.2)$$

$$\int \frac{e^\theta d\theta}{c+ae^\theta} = \frac{1}{a} \ln |c+ae^\theta| + C \quad (3.4.3)$$

$$\int \frac{\sen 5x dx}{1-\cos 5x} = \frac{1}{5} \ln |1-\cos 5x| + C \quad (3.4.4)$$

$$\int \frac{dx}{e^{2x}} = \frac{1}{2e^{2x}} + C \quad (3.4.5)$$

$$\int \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2 \ln |\sec \sqrt{x}| + C \quad (3.4.6)$$

3.5. RESUMEN DE LAS FÓRMULAS

Función	Derivada	Diferencial	Integral
$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$d f(x)$	$\int f(x) dx$
c	0	0	$cx + C$
x	1	dx	$\frac{x^2}{2} + C$
$cv(x)$	$c \frac{d}{dx}v(x)$	$c \frac{d}{dx}v(x)dx$	$c \int v(x)dx$
$(u + v - w)(x)$	$\frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) - \frac{d}{dx}w(x)$	$du(x) + dv(x) - dw(x)$	$\int udx + \int vdx - \int wdx$
$[v(x)]^n$	$n [v(x)]^{n-1} \frac{d}{dx}v(x)$	$n [v(x)]^{n-1} dv(x)$	
x^n	nx^{n-1}	$nx^{n-1}dx$	$\begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \ln(x) + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$
$u(x)v(x)$	$u(x) \frac{d}{dx}v(x) + v(x) \frac{d}{dx}u(x)$	$udv(x) + vdu(x)$	
$\left(\frac{u}{v}\right)(x)$	$\frac{v(x) \frac{d}{dx}u(x) - u(x) \frac{d}{dx}v(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{[v(x)]^2}$	
$\frac{c}{v(x)}$	$-\frac{c}{[v(x)]^2} \frac{d}{dx}v(x)$	$-\frac{c}{[v(x)]^2} dv(x)$	
$\text{sen } v(x)$	$\cos v(x) \frac{d}{dx}v(x)$	$\cos v(x)dv(x)$	
$\text{sen } x$	$\cos x$	$\cos x dx$	$-\cos x + C$
$\cos v(x)$	$-\text{sen } v(x) \frac{d}{dx}v(x)$	$-\text{sen } v(x)dv(x)$	
$\cos x$	$-\text{sen } x$	$-\text{sen } x dx$	$\text{sen } x + C$
$\tan v(x)$	$[\sec v(x)]^2 \frac{d}{dx}v(x)$	$[\sec v(x)]^2 dv(x)$	
$\tan x$	$[\sec x]^2$	$[\sec x]^2 dx$	$-\ln(\cos x) + C$
$\cot v(x)$	$-[\csc v(x)]^2 \frac{d}{dx}v(x)$	$-[\csc v(x)]^2 dv(x)$	
$\cot x$	$-[\csc x]^2$	$-[\csc x]^2 dx$	$\ln(\text{sen } v) + C$
$\sec v(x)$	$\sec v(x) \tan v(x) \frac{d}{dx}v(x)$	$\sec v(x) \tan v(x) dv(x)$	
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\sec x \tan x dx$	$\ln(\tan x + \sec x) + C$
$\csc v(x)$	$-\csc v(x) \cot v(x) \frac{d}{dx}v(x)$	$-\csc v(x) \cot v(x) dv(x)$	
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$-\csc x \cot x dx$	$-\ln(\cot x + \csc x) + C$
$\text{arc sen } v(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-[v(x)]^2}} \frac{d}{dx}v(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-[v(x)]^2}} dv(x)$	
$\text{arc cos } v(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-[v(x)]^2}} \frac{d}{dx}v(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-[v(x)]^2}} dv(x)$	
$\text{arctan } v(x)$	$\frac{1}{1+[v(x)]^2} \frac{d}{dx}v(x)$	$\frac{1}{1+[v(x)]^2} dv(x)$	
$\text{arccot } v(x)$	$-\frac{1}{1+[v(x)]^2} \frac{d}{dx}v(x)$	$-\frac{1}{1+[v(x)]^2} dv(x)$	
$\text{arcsec } v(x)$	$\frac{1}{v(x)\sqrt{[v(x)]^2-1}} \frac{d}{dx}v(x)$	$\frac{1}{v(x)\sqrt{[v(x)]^2-1}} dv(x)$	
$\text{arccsc } v(x)$	$-\frac{1}{v(x)\sqrt{[v(x)]^2-1}} \frac{d}{dx}v(x)$	$-\frac{1}{v(x)\sqrt{[v(x)]^2-1}} dv(x)$	
$\ln(v(x))$	$\frac{1}{v(x)} \frac{d}{dx}v(x)$	$\frac{1}{v(x)} dv(x)$	
$\log_b v$	$\frac{\log_b e}{v(x)} \frac{d}{dx}v(x)$	$\frac{\log_b e}{v(x)} dv(x)$	
$e^{v(x)}$	$e^{v(x)} \frac{d}{dx}v(x)$	$e^{v(x)} dv(x)$	
e^x	e^x	$e^x dx$	e^x
$a^{v(x)}$	$\ln a a^{v(x)} \frac{d}{dx}v(x)$	$\ln a a^{v(x)} dv(x)$	
a^x	$\ln a a^x$	$\ln a a^x dx$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$
$[u(x)]^{v(x)}$	$v \cdot [u]^{v-1} \frac{d}{dx}u + \ln u \cdot u^v \frac{d}{dx}v$	$v \cdot [u]^{v-1} du + \ln u \cdot u^v dv$	

En el formulario anterior, hay expresiones cuyas integrales no expresamos, esto por ser demasiado generales, o bien, porque aún no abordamos los métodos para obtenerlas.

3.6. PROBLEMAS

$$\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x}} \right) dx \quad (3.6.1)$$

$$\int \cot x (2 + \ln |\sec x|) dx \quad (3.6.2)$$

$$\int \frac{dy}{y \ln^2 y} \quad (3.6.3)$$

$$\int \sqrt{1 + \cos \alpha} d\alpha \quad (3.6.4)$$

$$\int e^{\frac{1}{\sec 2x}} \sen 2x dx \quad (3.6.5)$$

$$\int (10^{3x} - 2^x) dx \quad (3.6.6)$$

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1 + x^2} dx \quad (3.6.7)$$

$$\int x \csc 4x^2 dx \quad (3.6.8)$$

$$\int e^{2x} \sen(e^{2x}) dx \quad (3.6.9)$$

$$\int \frac{dw}{\cos^2 w - \cos 2w} \quad (3.6.10)$$

4. ARTIFICIOS DE INTEGRACIÓN

Se llaman artificios de integración a los procesos que nos permiten resolver una integral que no es inmediata, es decir, en aquellas en las que además de la elección estratégica de $v(x)$ ¹, la racionalización, factorización o algún otro truco algebraico no tan evidente² que permite la solución de alguna integral.

Para cada idea del párrafo anterior, poner una nota al pie de página haciendo referencia a ejercicios específicos de la sección anterior..

4.1. CAMBIO DE VARIABLE O SUSTITUCIÓN ALGEBRAICA

Uno de los ejemplos más evidentes de sustitución algebraica es el presentado en el 5, pues el paso crucial de integración se resolvió simplemente eligiendo $v(x) = a^x$ para su uso en una fórmula básica.

Tanto la sustitución algebraica como trigonométrica tienen una interpretación específica en la teoría de la medida, en especial al trabajar con integrales definidas, sin embargo, al menos para esta parte del texto, por simplicidad realizaremos ambos procesos de sustitución sin preocuparnos demasiado por estas implicaciones teóricas, procurando volver siempre a la variable original de interés.

¹Véase el Problema 1

²Véase el Problema 3

Para mayor claridad, expresaremos tal idea al reescribir el Problema 1 siguiendo el proceso de sustitución algebraica.

Problema 7.

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx \\ &= - \int \frac{-\operatorname{sen} x \, dx}{\cos x}\end{aligned}$$

Sea $v = \cos x$. Con tal elección de v , de la tabla 3.5 tenemos que $dv = -\operatorname{sen} x \, dx$, así que podemos reescribir la integral anterior como

$$= - \int \frac{dv}{v}$$

Usando la fórmula (3.1.5), obtenemos

$$= -\ln v + C$$

Y como $v = \cos x$, entonces

$$= -\ln(\cos x) + C$$

Una de las ideas más relevantes a destacar del ejercicio anterior y del proceso de integración en general, como ya se había mencionado en la subsección 3.3, es que dv no se debe “elegir a conveniencia” para contar con todos los términos que aparecen en el integrando, dv se determina al diferenciar el v que se haya elegido. La simple idea de cambiar una expresión complicada por una sola variable algebraica nos abre la puerta a poder efectuar la integración de expresiones más generales, que de efectuarse correctamente, evita el error de “elección por conveniencia” antes mencionado.

Problema 8 ($\int \operatorname{sen}^n x \cos x \, dx$). Si $n = -1$, tenemos $\int \cot x \, dx$, la cual se abordó en el Problema 2. Si $n \neq -1$, para efectuar la integral, definamos $v = \operatorname{sen} x$, además, de acuerdo a la tabla 3.5, $dv = \cos x \, dx$, así que es posible reescribir la integral como

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x \, dx = \int v^n \, dv$$

Como $n \neq -1$, podemos utilizar la fórmula (3.1.4), así que

$$= \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

Y como $v = \operatorname{sen} x$, entonces

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C$$

Por lo anterior,

$$\int \operatorname{sen}^n x \cos x \, dx = \begin{cases} \ln(\operatorname{sen} v) + C, & \text{si } n = -1 \\ \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{n+1} + C, & \text{si } n \neq -1. \end{cases}$$

Podemos notar en los problemas anteriores que la elección de v tuvo como consecuencia la aparición de forma natural de dv en la integral, lo cual permitió convertir las integrales en integrales inmediatas, beneficio que no se tiene en todas las integrales, para ilustrarlo sírvase de ejemplo el Problema 5.

Problema 9 ($\int a^x dx$). Sea $u = a^x$, con lo que la tabla 3.5, $du = \ln a \cdot a^x dx$, así que podemos reescribir la integral como

$$\int a^x dx = \int \frac{du}{\ln a}$$

Usando la fórmula (3.1.2) con $c = \frac{1}{\ln a}$ y $v = 1$, obtenemos

$$= \frac{1}{\ln a} \int du$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$= \frac{u}{\ln a} + C$$

Y como $u = a^x$,

$$= \frac{a^x}{\ln a} + C$$

En contraste con los problemas previos en los que solo se requirió del cambio de variable para determinar cual integral inmediata permitía terminar el problema, en este caso, la aparición del factor constante $\frac{1}{\ln a}$ requirió de un pequeño esfuerzo adicional: la manipulación de constantes dentro y fuera de la integral auxiliados de la fórmula (3.1.2).

El siguiente problema se presenta para reafirmar la importancia de determinar dv a partir de v , sin verse influenciados por la forma de la integral que se está realizando.

Problema 10 ($\int (4x^3 + 6x)^{\pi-1} (2x^2 + 1) dx$). Comencemos notando que la aparición del exponente $\pi - 1$ sugiere el uso de la fórmula (3.1.4), en la que la elección de v es claramente $v = 4x^3 + 6x$ junto a $n = \pi - 1$.

Como antes se mencionó, un error común es asumir que el resto de elementos dentro de la integral, $(2x^2 + 1)dx$ constituyen a dv , lo cual facilitaría claramente la integración, aunque esto sería incorrecto, pues dv se debe obtener, por definición, al diferenciar v , así que $dv = 12x^2 + 6 = 6(2x^2 + 1)dx$, de donde podemos observar que es posible reescribir la integral como

$$\int (4x^3 + 6x)^{\pi-1} (2x^2 + 1) dx = \int v^n \frac{dv}{6}$$

Usando la fórmula (3.1.2) seguida de la fórmula (3.1.4),

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \int v^n dv \\ &= \frac{1}{6} \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \frac{v^{n+1}}{6(n+1)} + C \end{aligned}$$

Finalmente, como $v = 4x^3 + 6x$ y $n = \pi - 1$, entonces

$$\int (4x^3 + 6x)^{\pi-1} (2x^2 + 1) dx = \frac{(4x^3 + 6x)^\pi}{6\pi} + C$$

4.1.1. EJERCICIOS

$$\int \frac{6z \, dz}{(5 - 3z^2)^2} = \frac{8\sqrt{x^3 + 8}}{3} + C \quad (4.1.1)$$

$$\int \sqrt{x} (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \, dx = \frac{2}{3} ax^{\frac{3}{2}} - x^2 \sqrt{a} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C \quad (4.1.2)$$

$$\int \left(\frac{\sec x}{1 + \tan x} \right)^2 \, dx = -\frac{1}{1 + \tan x} + C \quad (4.1.3)$$

$$\int \frac{e^\theta \, d\theta}{a + be^\theta} = \frac{\ln(a + be^\theta)}{b} + C \quad (4.1.4)$$

$$\int x^{n-1} \sqrt{a + bx^n} \, dx = \frac{2(a + bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3bn} + C \quad (4.1.5)$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{2 + x^3} = \frac{\ln(2 + x^3)}{3} + C \quad (4.1.6)$$

4.1.2. PROBLEMAS

$$\int \frac{\sec^2 y \, dy}{a + b \tan y} \quad (4.1.7)$$

$$\int \frac{ae^\theta + b}{ae^\theta - b} d\theta \quad (4.1.8)$$

$$\int \frac{x \, dx}{(a + bx^2)^3} \quad (4.1.9)$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(a + bx^3)^2} \quad (4.1.10)$$

$$\int \frac{\sec a\theta \, d\theta}{\cos a\theta + b} \quad (4.1.11)$$

$$\int \frac{\csc^2 \phi \, d\phi}{\sqrt{2\cot \phi + 3}} \quad (4.1.12)$$

$$\int \frac{\sec 2\theta \tan 2\theta \, d\theta}{3\sec 2\theta - 2} \quad (4.1.13)$$

$$\int 6e^{3x} \, dx \quad (4.1.14)$$

$$\int (e^{5x} + a^{5x}) \, dx \quad (4.1.15)$$

$$\int a^x e^x \, dx \quad (4.1.16)$$

4.2. SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

A partir del teorema fundamental del cálculo y las fórmulas 1.2.7 a 1.2.12, es posible obtener integrales sencillas como la siguiente:

Problema 11.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Usando la fórmula (1.2.7) con $v = x$,

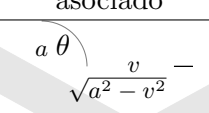
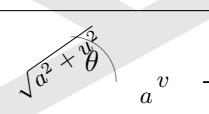
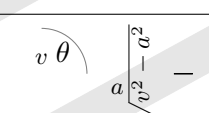
$$= \int d(\arcsen x)$$

Por el Teorema Fundamental del cálculo,

$$= \arcsen x + C$$

Sin embargo, existe un proceso que permite resolver integrales que poseen expresiones de la forma $a^2 - [v(x)]^2$, $a^2 + [v(x)]^2$ y $[v(x)]^2 - a^2$. A este proceso se le conoce como *Integración por sustitución trigonométrica*. Tal proceso es bastante similar al de sustitución algebraica, además de aprovechar las identidades trigonométricas para convertir expresiones que poseen sumas o diferencias dentro de radicales en integrales más simples que se pueden resolver usando las fórmulas 3.1.1 a ??, además de incorporar las fórmulas 3.1.7 a 3.1.12.

Un diagrama ilustrativo para entender cuál es la sustitución trigonométrica de acuerdo a la integral a realizarse es el siguiente, que además sirve de ayuda visual para que, al terminar el proceso de integración, se pueda volver a expresar en función de la variable inicial.

Expresión en la integral	Sustitución trigonométrica	Triángulo asociado
$a^2 - v^2$	$v = a \sen \theta$	
$a^2 + v^2$	$v = a \tan \theta$	
$v^2 - a^2$	$v = a \sec \theta$	

Veamos ahora como usar la tabla 4.2 para resolver una integral más general que la vista en el Problema 11.

Problema 12 ($\int \frac{x^2 dx}{(3+4x-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$). Comencemos factorizando el denominador tanto como sea posible, esto al notar que $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, así que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(3+4x-4x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{x^2 dx}{[4-(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int \frac{x^2 dx}{[2^2-(2x+1)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Dado que el denominador tiene la forma $a^2 - v^2$, efectuamos la sustitución $2x + 1 = 2 \operatorname{sen} \theta$, por lo que $x = \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2}$, así que

$$= \int \frac{\left(\frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2}\right)^2 d\left(\frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2}\right)}{[2^2 - (2 \operatorname{sen} \theta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Al aplicar la diferencial,

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\left(\frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2}\right)^2 \cos \theta d\theta}{[2^2 - 2^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int \frac{\frac{(2 \operatorname{sen} \theta - 1)^2}{4} \cos \theta d\theta}{[2^2(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int \frac{\frac{(2 \operatorname{sen} \theta - 1)^2}{4} \cos \theta d\theta}{2^3(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{32} \int \frac{(2 \operatorname{sen} \theta - 1)^2 \cos \theta d\theta}{(1 - \operatorname{sen}^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Al aplicar la identidad trigonométrica pitagórica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{32} \int \frac{(4 \operatorname{sen}^2 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta + 1) \cos \theta d\theta}{(\cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{32} \int \frac{4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - 4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta}{\cos^3 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Al descomponer la fracción en una suma de fracciones, simplificar y posteriormente, usando las fórmulas (3.1.2) y (3.1.3) sucesivamente para descomponer en una suma de integrales,

$$= \frac{1}{8} \int \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta - \frac{1}{8} \int \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \frac{1}{\cos \theta} d\theta + \frac{1}{32} \int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Las identidades trigonométricas de razón, nos permiten reescribir las integrales anteriores como

$$= \frac{1}{8} \int \tan^2 \theta d\theta - \frac{1}{8} \int \tan \theta \sec \theta d\theta + \frac{1}{32} \int \sec^2 \theta d\theta$$

Al aplicar la identidad trigonométrica pitagórica $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta - \frac{1}{8} \int \sec \theta \tan \theta d\theta + \frac{1}{32} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int \sec^2 \theta d\theta - \frac{1}{8} \int d\theta - \frac{1}{8} \int \sec \theta \tan \theta d\theta + \frac{1}{32} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{5}{32} \int \sec^2 \theta d\theta - \frac{1}{8} \int d\theta - \frac{1}{8} \int \sec \theta \tan \theta d\theta \end{aligned}$$

Usando las fórmulas (3.1.1), (3.1.9) y (3.1.11),

$$= \frac{5}{32} \tan \theta - \frac{1}{8} \theta - \frac{1}{8} \sec \theta + C$$

Con ayuda de la tabla 4.2, es posible identificar que para el cambio de variable efectuado, $\theta = \arcsen \frac{v}{a}$, $\tan \theta = \frac{v}{\sqrt{a^2-v^2}}$ y $\sec \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}$, así que

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{32} \frac{2x+1}{\sqrt{2^2-(2x+1)^2}} - \frac{1}{8} \arcsen \left(\frac{2x+1}{2} \right) - \frac{1}{8} \frac{2}{\sqrt{2^2-(2x+1)^2}} + C \\ &= \frac{5(2x+1)}{32\sqrt{3+4x-4x^2}} - \frac{1}{8} \arcsen \left(\frac{2x+1}{2} \right) - \frac{2}{8\sqrt{3+4x-4x^2}} + C \\ &= \frac{10x+3}{32\sqrt{3+4x-4x^2}} - \frac{1}{8} \arcsen \left(\frac{2x+1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Como se vio en el problema anterior, el uso de identidades trigonométricas, junto a las fórmulas de integrales que poseen expresiones trigonométricas, permite resolver este tipo de integrales. Un paso importante, efectuado al final de la integral, es regresar la integral a una expresión en función de la variable inicial, para lo cual los triángulos de la tabla 4.2 fueron de gran ayuda.

Problema 13 ($\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+10x^2+50}}$). Comencemos notando que $(x^2+5)^2 = x^4+10x^2+25$, así que

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4+10x^2+50}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{5^2+(x^2+5)^2}}$$

Notemos que la sustitución correspondiente es $x^2+5 = 5\tan \theta$, con $2x dx = 5\sec^2 \theta d\theta$, así que

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\frac{5\sec^2 \theta d\theta}{2}}{\sqrt{5^2+(5\tan \theta)^2}} \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{5^2+5^2\tan^2 \theta}} \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{5^2(1+\tan^2 \theta)}} \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{5^2\sec^2 \theta}} \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{5\sec \theta} \\ &= \frac{5}{2} \int \sec \theta d\theta \\ &= \frac{5}{2} \ln(\tan \theta + \sec \theta) + c \end{aligned}$$

De nuevo, con ayuda de la figura de la tabla 4.2, podemos ver que $\tan \theta = \frac{v}{a}$ y $\sec \theta = \frac{\sqrt{a^2+v^2}}{a}$, con lo que

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{2} \ln \left(\frac{x^2+5}{5} + \frac{\sqrt{x^4+10x^2+50}}{5} \right) + c \\ &= \frac{5}{2} \ln \left(\frac{x^2+5+\sqrt{x^4+10x^2+50}}{5} \right) + c \\ &= \frac{5}{2} \ln(x^2+5+\sqrt{x^4+10x^2+50}) - \frac{5}{2} \ln(5) + c \end{aligned}$$

Finalmente, tomemos $C = c - \frac{5}{2}\ln(5)$, entonces

$$= \frac{5}{2}\ln\left(x^2 + 5 + \sqrt{x^4 + 10x^2 + 50}\right) + C$$

4.2.1. EJERCICIOS

4.2.2. PROBLEMAS

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \quad (4.2.1)$$

4.3. INTEGRACIÓN POR PARTES

La tabla 3.5 posee la fórmula de derivada y de diferencial para el producto uv , lo cual es conocido como la **Regla de Leibniz**. En dicha tabla no aparece una fórmula para la obtención de la integral de un producto, ya que un solo factor, por muy simple que sea, puede complicar bastante la integral.

Consideremos el la fórmula (3.4.5), $\int \frac{dx}{e^{2x}}$. La aparición del factor x en el numerador, complica enormemente el proceso de integración, pues hasta ahora no tenemos los elementos necesarios para determinar $\int \frac{x dx}{e^{2x}}$, más aún, la aparición de factores adicionales en una integral “sencilla” o “que ya sabemos realizar”. Por más pequeño que sea el cambio realizado, puede complicar mucho una integral.

A continuación expondremos la idea detrás de la integración por partes. Comencemos con la fórmula (2.1.6),

$$d(uv) = u dv + v du$$

De lo anterior tenemos que

$$u dv = d(uv) - v du$$

Integrando ambos lados,

$$\begin{aligned} \int u dv &= \int (d(uv) - v du) \\ &= \int d(uv) - \int v du \end{aligned}$$

Finalmente, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (4.3.1)$$

La fórmula 4.3.1 es conocida como la **Fórmula de Integración Por Partes** y su uso tiene como objetivo pasar de la integral $\int u dv$ a la integral $\int v du$, de manera que esta última sea más sencilla.

Como pudimos ver en los problemas 9 y 10, asumir que du está compuesto por el resto de términos de la expresión puede causar errores importantes en el proceso de integración, sin embargo al efectuar una integración por partes, tras elegir u , el resto de términos conforman dv , sin embargo la elección de u y dv no siempre es evidente.

Además de buscar que $\int v du$ sea más sencilla que la integral inicial, para la obtención de v a partir de la elección de dv , es necesario que dv se pueda integrar fácilmente, mientras que la obtención de du a partir de u consiste simplemente en diferenciar u , lo cual es bastante más sencillo.

Problema 14 ($\int x e^x dx$). Supongamos que $u = xe^x$, con lo que $dv = dx$, de esta forma $du = (xe^x + e^x)dx$ y $v = x$. Luego, usando la fórmula (4.3.1) de integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= xe^x(x) - \int (x)(xe^x + e^x)dx \\ &= x^2 e^x - \int x^2 e^x dx - \int x e^x dx.\end{aligned}$$

Sin embargo, la aparición de $\int x^2 e^x dx$, que es de un grado mayor que la integral inicial, indica que el problema es de mayor dificultad, así que hay que intentar con una elección distinta de u . Supongamos que $u = e^x$, con lo que $dv = x dx$, de esta forma $du = e^x dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx \\ &= \frac{x^2}{2} e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx,\end{aligned}$$

De nuevo nos encontramos con $\int x^2 e^x dx$, es decir, se presentó la misma dificultad que con la elección de variables anteriores. Tomemos ahora $u = x$ y $dv = e^x dx$, así que $du = dx$ y $v = e^x$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C.\end{aligned}$$

Como pudimos ver en el Problema 14, es muy importante que la elección de u permita que $\int v du$ sea más sencilla que la integral inicial y no se vuelva más complicada.

Problema 15 ($\int x \ln x$). Una manera de resolver esta integral de manera bastante natural es mediante el cambio de variable $x = e^y$. Intentemos un procedimiento alterno usando el proceso de integración por partes.

La sugerencia anterior y la idea de que $u = x$ redujo el grado de la integral en el Problema 14, sugiere la elección de $u = x$, con lo que dv queda determinada como $dv = \ln x \, dx$, así que $du = dx$ y $v = \int x \ln x \, dx$, que aunque puede resolverse mediante otra integral por partes³, por la complejidad que conlleva, por ahora consideraremos como una elección incorrecta, ya que volvimos al problema inicial, así que supondremos $u = \ln x$, con lo que $dv = x \, dx$, $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \frac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int u \, dv \\ &= uv - \int v \, du \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Como hemos visto, a diferencia de las derivadas, no existe un recetario bien definido de cuando utilizar un método o una fórmula. A partir del capítulo sobre integración por partes de ?, podemos obtener la tabla 4.3 con “sugerencias” respecto a la manera en la que se pueden elegir las variables para pasar de una integral complicada a otra más sencilla:

u	dv
Algebraica	Trigonométrica
Algebraica	Exponencial
Exponencial	Trigonométrica
Logarítmica	dx
Logarítmica	Algebraica
Inversa trigonométrica	dx
Inversa trigonométrica	Algebraica

Aunque los Problemas 14 y 15 respaldan la información presentada en la tabla 4.3, hay que considerar que es posible encontrarse con integrales que, al intentar resolverse guiados por la tabla anterior, $\int v \, du$ sea más complicada que $\int u \, dv$, o bien, no sea posible obtener explícitamente $v = \int dv$, por lo que no debemos descartar otras posibles elecciones de u y dv .

Es natural pensar que para calcular la integral $\int x^2 e^x \, dx$, sin conocer el resultado del Problema 14, basta con efectuar el método de integración por partes 2 veces. Más aún, la aplicación iterativa del método de integración por partes, nos permite resolver integrales como la siguiente:

Problema 16 ($\int x^m e^x$, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). A partir de la fórmula (3.1.6) y el Problema 14, tenemos los primeros 2 casos:

$$\int x^m e^x = \begin{cases} e^x + C & , \text{ si } m=0 \\ e^x(x-1) + C & , \text{ si } m=1 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

³Véase el Problema 17.

Supongamos que $m = 2$, tomemos entonces $u = x^2$ y $dv = e^x dx$, de manera que $du = 2x dx$, y de la ecuación 4.3.2, tenemos que $v = e^x$, así que

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx\end{aligned}$$

De la ecuación 4.3.2, tenemos que

$$\begin{aligned}&= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C \\ &= e^x(x^2 - 2x + 2) + C\end{aligned}$$

Análogamente podemos obtener $\int x^3 e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$. De manera general, podemos obtener la siguiente expresión recursiva

$$\int x^m e^x = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx$$

Una expresión explícita de la integral aparece en el ejercicio 4.3.7.

En ocasiones, el uso repetido de la fórmula de integración por partes, puede llevar incorrectamente a volver a la integral inicial, pues ocurre lo siguiente

$$\int u dv = uv - \int v du = uv - \left(vu - \int u dv \right) = \int u dv$$

Sin embargo, existen integrales específicas en las que aunque parece que se volvió a la integral inicial, se trata de integrales que se concluyen con un despeje, tal es el caso del Problema 17.

Problema 17 ($\int e^x \sen x dx$). Veamos que al tomar $u = e^x$, tenemos que $dv = \sen x dx$, $du = e^x dx$ y $v = -\cos x$, entonces

$$\begin{aligned}\int e^x \sen x dx &= -e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

Si tomamos u de manera que $dv = e^x dx$, volveríamos a la integral inicial. Entonces tomemos $u = e^x$, con lo que $dv = \cos x dx$, $du = e^x dx$ y $v = \sen x$, entonces

$$\int e^x \sen x dx = -e^x \cos x + e^x \sen x - \int e^x \sen x dx$$

Podemos ver que aunque aparece la misma integral a ambos lados de la igualdad, éstas poseen coeficientes distintos, así que podemos despejar de la siguiente manera, además de agregar la constante de integración:

$$\begin{aligned}2 \int e^x \sen x dx &= -e^x \cos x + e^x \sen x \\ \int e^x \sen x dx &= \frac{-e^x \cos x + e^x \sen x}{2} + C \\ &= e^x \left(\frac{\sen x - \cos x}{2} \right) + C\end{aligned}$$

Un problema interesante en el que se combinan los dos artificios de integración estudiados hasta ahora es el siguiente:

Problema 18 ($\int \sqrt{x^2 + 1} dx$). Usando la tabla 4.2, efectuemos la sustitución $x = \tan \theta$, de manera que $dx = \sec^2 \theta d\theta$, entonces

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \sqrt{\tan^2 \theta + 1} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec^3 \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \int \sec^3 \theta d\theta &= \int \sec \theta \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= \int \sec \theta d\theta + \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\ &= \ln(\tan \theta + \sec \theta) + \int \tan^2 \sec \theta d\theta \end{aligned}$$

Supongamos que $u = \tan \theta$, con lo que $du = \sec^2 \theta d\theta$, $v = \sec \theta$, así que

$$\begin{aligned} &= \ln(\tan \theta + \sec \theta) + \tan \theta \sec \theta - \int \sec^3 \theta d\theta \\ 2 \int \sec^3 \theta d\theta &= \ln(\tan \theta + \sec \theta) + \tan \theta \sec \theta \\ \int \sec^3 \theta d\theta &= \frac{\ln(\tan \theta + \sec \theta) + \tan \theta \sec \theta}{2} + C \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Al sustituir 4.3.4 en 4.3.3, obtenemos

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{\ln(\tan \theta + \sec \theta) + \tan \theta \sec \theta}{2} + C$$

Ahora, a partir de la tabla 4.2, podemos concluir que

$$= \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x\sqrt{x^2 + 1}}{2} + C$$

Problema 19 ($\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}}$). Para resolver esta integral, comencemos resolviendo $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$, pues la usaremos varias veces a lo largo de la solución. Tomemos $n = -\frac{1}{2}$ y $v = 1 - e^x$, con lo que $dv = -e^x dx$. Sustituyendo estos valores en 3.1.4

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}} &= -\frac{(1-e^x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C \\ &= -2\sqrt{1-e^x} + C \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Volviendo a la integral principal, tomemos $u = e^{2x}$ y $dv = \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$, con lo que $du = 2e^{2x} dx$ y, de acuerdo a 4.3.5, $v = -2\sqrt{1-e^x}$, así que usando la fórmula de integración por partes,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} &= e^{2x} (-2\sqrt{1-e^x}) - \int (-2\sqrt{1-e^x}) 2e^{2x} dx \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \int e^{2x}\sqrt{1-e^x} dx \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \int e^{2x} \frac{1-e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx - 4 \int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}} dx\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} + 4 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx \\ 5 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx\end{aligned}\quad (4.3.6)$$

Tomemos ahora $u = e^x$ y $dv = \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^x}}$, con lo que $du = e^x dx$ y $v = -2\sqrt{1-e^x}$, así que

$$\begin{aligned}&= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} + 4 \left[(e^x)(-2\sqrt{1-e^x}) - \int (-2\sqrt{1-e^x})e^x dx \right] \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} + 8 \int e^x\sqrt{1-e^x} dx \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} + 8 \int e^x \frac{1-e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} + 8 \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx - 2 \left(4 \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}} dx \right)\end{aligned}$$

De las ecuaciones 4.3.5 y 4.3.6, tenemos que

$$\begin{aligned}&= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} + 8(-2\sqrt{1-e^x}) - 2 \left(5 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} + 2e^{2x}\sqrt{1-e^x} \right) \\ &= -2e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} - 16\sqrt{1-e^x} - 10 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} - 4e^{2x}\sqrt{1-e^x} \\ &= -6e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} - 16\sqrt{1-e^x} - 10 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}}\end{aligned}$$

Entonces,

$$5 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} + 10 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} = -6e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} - 16\sqrt{1-e^x}$$

Así que

$$15 \int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} = -6e^{2x}\sqrt{1-e^x} - 8e^x\sqrt{1-e^x} - 16\sqrt{1-e^x}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} dx}{\sqrt{1-e^x}} &= -\frac{6}{15}e^{2x}\sqrt{1-e^x} - \frac{8}{15}e^x\sqrt{1-e^x} - \frac{16}{15}\sqrt{1-e^x} + C \\ &= -\frac{2}{15}\sqrt{1-e^x}(3e^{2x} + 4e^x + 8) + C\end{aligned}$$

4.3.1. EJERCICIOS

$$\int x^m e^x dx = e^x \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i \frac{m!}{(m-i)!} x^{m-i} \right) + C \text{ para } m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (4.3.7)$$

4.3.2. PROBLEMAS

$$\int \cos^2 y dy \quad (4.3.8)$$

4.4. DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

Cuando la integral es de la forma $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son ambos polinomios, el primer paso a realizarse de manera natural, es simplificar la fracción mediante el algoritmo de la división, es decir, elegir $S(x)$ y $P(x)$ tales que $S(x) = \frac{R(x)-P(x)}{Q(x)}$ es un polinomio, posiblemente constante, y que $P(x)$ es de grado menor que $Q(x)$, de esta forma la integral queda de la forma

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx &= \int \left(S(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \right) dx \\ &= \int S(x) dx + \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx\end{aligned}$$

Como $S(x)$ es un polinomio, es fácilmente integrable usando solamente las fórmulas 3.1.2 a 3.1.4. Un método para efectuar algunos casos de la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}$ es la llamada descomposición de fracciones parciales, que aunque solía ser un tema puramente algebraico, ya no es tan estudiado y se explica a continuación.

Comencemos explicando de manera ilustrativa uno de los casos:

Supongamos que al factorizar $Q(x)$, todos sus factores son lineales y distintos, es decir $Q(x) = \prod_i (a_i x + b_i)$, tales que si $i \neq j$, entonces $(a_i - a_j)x + (b_i - b_j) \neq 0$. Es posible elegir $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_i \frac{A_i}{a_i x + b_i}$$

Al efectuar explícitamente la suma e igualar los coeficientes de los polinomios de los numeradores, se obtiene un sistema lineal de ecuaciones para determinar los coeficientes A_i , para posteriormente usar la fórmula (3.1.3) para descomponer la integral en varias integrales más sencillas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \sum_i \frac{A_i}{a_i x + b_i} dx \\ &= \sum_i \int \frac{A_i}{a_i x + b_i} dx\end{aligned}$$

Para no quedar solo con coeficientes, vale la pena efectuar una integral de este tipo para terminar de entender la utilidad del método:

Problema 20 ($\int \frac{x^3+8x^2+22x+29}{x^2+8x+15} dx$). Comencemos notando que $\frac{2x^3+16x^2+37x+29}{x^2+8x+15} = 2x + \frac{7x+29}{x^2+8x+15}$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+8x^2+22x+29}{x^2+8x+15} dx &= \int \left(2x + \frac{7x+29}{x^2+8x+15} \right) dx \\ &= 2 \int x dx + \int \frac{7x+29}{x^2+8x+15} dx \\ &= x^2 + \int \frac{7x+29}{x^2+8x+15} dx\end{aligned}\tag{4.4.1}$$

Notando que $x^2+8x+15 = (x+5)(x+3)$, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{7x+29}{x^2+8x+15} &= \frac{A_1}{x+5} + \frac{A_2}{x+3} \\ &= \frac{A_1(x+3) + A_2(x+5)}{(x+5)(x+3)} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x + (3A_1+5A_2)}{x^2+8x+15}\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $A_1 + A_2 = 7$ y $3A_1 + 5A_2 = 29$. La solución de tal sistema es $A_1 = 3, A_2 = 4$, así que

$$\frac{7x+29}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+5} + \frac{4}{x+3}\tag{4.4.2}$$

Al sustituir 4.4.2 en 4.4.1, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+8x^2+22x+29}{x^2+8x+15} dx &= x^2 + \int \left(\frac{3}{x+5} + \frac{4}{x+3} \right) dx \\ &= x^2 + 3 \int \frac{dx}{x+5} + 4 \int \frac{dx}{x+3} \\ &= x^2 + 3\ln(x+5) + 4\ln(x+3) + C \\ &= x^2 + \ln[(x+5)^3(x+3)^4] + C\end{aligned}$$

La tabla 4.4 permite ver el tipo de descomposición en fracciones parciales correspondiente a algunos los casos de factorización de $Q(x)$ más estudiados.

Caso	Factorización de $Q(x)$	Descripción	Descomposición correspondiente
I	$\prod_{i=1}^n (a_i x + b_i)$ t.q. si $i \neq j$, entonces $(a_i - a_j)x + (b_i - b_j) \neq 0$	Factores lineales distintos	$\sum_i \frac{A_i}{a_i x + b_i}$
II	$(ax + b)^n$	Potencia de un factor lineal	$\sum_{i=1}^n \frac{B_i}{(ax+b)^i}$
II III	$\prod_{i=1}^n (a_i x^2 + b_i x + c_i)$ t.q. si $i \neq j$, entonces $(a_i - a_j)x^2 + (b_i - b_j)x + (c_i - c_j) \neq 0$	Factores cuadráticos distintos	$\sum_i \frac{C_i x + D_i}{a_i x^2 + b_i x + c_i}$
IV	$(ax^2 + bx + c)^n$	Potencia de un factor cuadrático	$\sum_{i=1}^n \frac{E_i x + F_i}{(ax^2 + bx + c)^i}$

La tabla 4.4 sirve para obtener descomposiciones en fracciones parciales de combinaciones de los distintos casos, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Problema 21 ($\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2}$). Notemos que $y^3 - 2y^2 = y^2(y+2)$, así que requerimos utilizar los casos I y III de la tabla 4.4. Sean B_1, B_2, A_1 tales que

$$\begin{aligned}
\frac{4y^2-8}{y^3+2y^2} &= \frac{B_1}{y} + \frac{B_2}{y^2} + \frac{A_1}{y+2} \\
&= \frac{B_1 y(y+2) + B_2(y+2) + A_1 y^2}{y^2(y+2)} \\
&= \frac{(A_1 + B_1)y^2 + (2B_1 + B_2)y + 2B_2}{y^3 + 2y^2}.
\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los numeradores, obtenemos el sistema $A_1 + B_1 = 4$, $2B_1 + B_2 = 0$ y $2B_2 = -8$, con soluciones $A_1 = 2, B_1 = 2, B_2 = -4$, así que la integral pasa a tener la forma

$$\begin{aligned}
\int \frac{4y^2-8}{y^3+2y^2} dy &= \int \left(\frac{2}{y} - \frac{4}{y^2} + \frac{2}{y+2} \right) dy \\
&= 2 \int \frac{dy}{y} - 4 \int y^{-2} dy + 2 \int \frac{dy}{y+2} \\
&= 2 \ln y - 4 \frac{y^{-1}}{-1} + 2 \ln(y+2) + C \\
&= \ln [y^2(y+2)^2] + \frac{4}{y} + C.
\end{aligned}$$

Problema 22 ($\int \frac{4x^2+3x+8}{x^5+4x^3+4x} dx$). Notemos que $x^5 + 4x^3 + 4x = x(x^2 + 2)^2$, así que se usan los

casos I y IV de la tabla 4.4. Sean A_1, E_1, E_2, F_1 y F_2 tales que

$$\begin{aligned}\frac{4x^2 + 3x + 8}{x^5 + 4x^3 + 4x} &= \frac{A_1}{x} + \frac{E_1x + F_1}{x^2 + 2} + \frac{E_2x + F_2}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{A_1(x^2 + 2)^2 + (E_1x + F_1)x(x^2 + 2) + (E_2x + F_2)x}{x(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{(A_1 + E_1)x^4 + F_1x^3 + (4A_1 + 2E_1 + E_2)x^2 + (2F_1 + F_2)x + 4A_1}{x^5 + 4x^3 + 4x}\end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los numeradores, obtenemos el sistema

$$A_1 + E_1 = 0, F_1 = 0, 4A_1 + 2E_1 + E_2 = 4, 2F_1 + F_2 = 3, 4A_1 = 8,$$

cuya solución es $A_1 = 2, E_1 = -2, E_2 = 0, F_1 = 0, F_2 = 3$, así que podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 + 3x + 8}{x^5 + 4x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{(x^2 + 2)^2} \right) \\ &= 2 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{2x dx}{x^2 + 2} + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + 3 \int \frac{dx}{(x^2 + \sqrt{2}^2)^2}\end{aligned}$$

Notemos que en la integral restante podemos usar la sustitución trigonométrica $x = \sqrt{2} \tan \theta$ de la tabla 4.2, así que $dx = \sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta$, luego

$$\begin{aligned}&= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + 3 \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{(2 \tan^2 \theta + 2)^2} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + 3 \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{[(2)(\tan^2 \theta + 1)]^2} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + 3 \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{[2 \sec^2 \theta]^2} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + 3 \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{4 \sec^4 \theta} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + \frac{3\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\ &= 2 \ln x - \ln(x^2 + 2) + \frac{3\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

Ya que $\cos^2 \theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$, entonces⁴

$$\begin{aligned} &= 2\ln x - \ln(x^2 + 2) + \frac{3\sqrt{2}}{4} \int \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \\ &= 2\ln x - \ln(x^2 + 2) + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int \cos 2\theta d\theta + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int d\theta \\ &= \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right) + \frac{3\sqrt{2}}{16} \int 2\cos 2\theta d\theta + \frac{3\sqrt{2}}{8} \int d\theta \\ &= \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right) + \frac{3\sqrt{2}}{16} \sin 2\theta + \frac{3\sqrt{2}}{8} \theta + C \end{aligned}$$

Además, como $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$, entonces

$$= \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right) + \frac{3\sqrt{2}}{8} \sin \theta \cos \theta + \frac{3\sqrt{2}}{8} \theta + C$$

Finalmente, usando la tabla 4.2, podemos notar que $\sin \theta = \frac{v}{\sqrt{a^2 + v^2}}$, $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v^2}}$ y $\theta = \arctan \frac{v}{a}$, así que

$$\begin{aligned} &= \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right) + \frac{3\sqrt{2}}{8} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \\ &= \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right) + \frac{3x}{4x^2 + 8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Aunque parece que el proceso se puede extender de manera intuitiva para aquellos casos en que $Q(x)$ se puede factorizar hasta polinomios de grado mayor a 2, los sumandos de la descomposición no necesariamente se pueden integrar en los reales, tal es el caso de

$$\int \frac{x + 5}{x^3 - 2x^2 + x + 7} dx$$

cuya expresión explícita requiere de temas de variable compleja para ser expresada.

4.4.1. EJERCICIOS

4.4.2. PROBLEMAS

4.5. EXPONENTES RACIONALES

Hasta ahora hemos trabajado con expresiones en las que la variable sobre la que estamos integrando posee un exponente entero, sin embargo vale la pena estudiar también aquellas integrales que poseen expresiones con exponentes racionales.

La manera más simple de abordar tales integrales es efectuar un cambio de variable algebraico siguiendo el proceso que se describe a continuación, suponiendo sin pérdida de generalidad que la variable sobre la que estamos integrando es x .

1. Sea (d_1, d_2, \dots) la lista de todos los denominadores de los exponentes de todas las apariciones de x en la integral. En caso de contar con exponentes enteros, estos poseerán, naturalmente, denominador 1.

2. Sea $m = \text{mcm}(d_1, d_2, \dots)$ el mínimo común múltiplo de tales denominadores.
3. Realizamos el cambio de variable $x = z^m$.

El cambio de variable anterior permite convertir la integral en una que posee solo exponentes enteros, permitiéndonos emplear de forma usual las herramientas utilizadas en secciones previas.

Problema 23 ($\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$). Notemos que los denominadores de los exponentes que aparecen son ambos 2 y 4, con $\text{mcm}(2, 4) = 4$, así que el cambio de variable a efectuarse es $x = z^4$. Luego,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \int \frac{4z^3 dz}{z^2 + z} \\
 &= 4 \int \frac{z^2 dz}{z + 1} \\
 &= 4 \int \frac{z^2 - 1 + 1}{z + 1} dz \\
 &= 4 \left(\int \frac{z^2 - 1}{z + 1} dz + \int \frac{dz}{z + 1} \right) \\
 &= 4 \int (z - 1) dz + 4 \int \frac{dz}{z + 1} \\
 &= 4 \int z dz - 4 \int dz + 4 \ln(z + 1) \\
 &= 4 \frac{z^2}{2} - 4z + 4 \ln(z + 1) + C \\
 &= 2z^2 - 4z + 4 \ln(z + 1) + C
 \end{aligned}$$

Problema 24 ($\int \frac{6 \sqrt[30]{x}(\sqrt[3]{x}+1)+5\sqrt[3]{x}+10}{30 \sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x}+1)} dx$). Notemos que es posible reescribir la en forma de exponentes racionales:

$$\int \frac{6 \sqrt[30]{x}(\sqrt[3]{x} + 1) + 5\sqrt[3]{x} + 10}{30 \sqrt[6]{x^5}(\sqrt[3]{x} + 1)} dx = \int \frac{6x^{\frac{1}{30}}(x^{\frac{1}{3}} + 1) + 5x^{\frac{1}{3}} + 10}{30x^{\frac{5}{6}}(x^{\frac{1}{3}} + 1)} dx$$

Los denominadores de los exponentes son 30, 3, 3, 6, 3, en orden de aparición, entonces el cambio de variable a efectuarse es $x = z^{30}$, así que podemos reescribir la integral como

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{6(z^{30})^{\frac{1}{30}} \left[(z^{30})^{\frac{1}{3}} + 1 \right] + 5(z^{30})^{\frac{1}{3}} + 10}{30(z^{30})^{\frac{5}{6}} \left[(z^{30})^{\frac{1}{3}} + 1 \right]} d(z^{30}) \\
&= \int \frac{6z(z^{10} + 1) + 5z^{10} + 10}{30z^{25}(z^{10} + 1)} (30z^{29}) dz \\
&= \int \frac{6z(z^{10} + 1) + 5z^{10} + 10}{z^{25}(z^{10} + 1)} z^{29} dz \\
&= \int \frac{6z(z^{10} + 1)z^{29}}{z^{25}(z^{10} + 1)} dz + \int \frac{5z^{10} + 10}{z^{25}(z^{10} + 1)} z^{29} dz \\
&= \int 6z^5 dz + \int \frac{5z^{14} + 10z^4}{z^{10} + 1} dz \\
&= \int 6z^5 dz + \int 5z^4 dz + \int \frac{5z^4 dz}{z^{10} + 1} \\
&= 6 \int z^5 dz + 5 \int z^4 dz + \int \frac{5z^4 dz}{z^{10} + 1}
\end{aligned}$$

Las primeras dos integrales se resuelven utilizando la fórmula (3.1.4), mientras que para la tercera integral usaremos el caso 2 de la tabla 4.2, es decir, realizamos el cambio de variable $z^5 = \tan \theta$, para el cual $5z^4 dz = d(z^5) = d(\tan \theta) = \sec^2 \theta d\theta$

$$\begin{aligned}
&= z^6 + z^5 + \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta + 1} \\
&= z^6 + z^5 + \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} \\
&= z^6 + z^5 + \int d\theta \\
&= z^6 + z^5 + \theta + C
\end{aligned}$$

De la tabla 4.2, se sigue que $\theta = \arctan z^5$, así que

$$= z^6 + z^5 + \arctan z^5 + C$$

Finalmente, como $x = z^{30}$, entonces

$$= \sqrt[5]{x} + \sqrt[6]{x} + \arctan(\sqrt[6]{x}) + C$$

4.6. INTEGRALES DE DIFERENCIAS BINOMIAS

Las diferencias binomias son expresiones de la forma $x^w(a + bx^t)^{\frac{p}{q}}$ con $t > 0$ y $\frac{p}{q}$ irreducible. En Granville et al. (1980) se explican los cambios de variable que suelen servir para resolver integrales de diferencias binomias que cumplen la condición 1 o la condición 2.

1. Si $\frac{w+1}{t} \in \mathbb{Z}$, se realiza el cambio de variable $u = (a + bx^t)^{\frac{1}{q}}$

Para verificar la utilidad de este cambio de variable, definamos $m = \frac{w+1}{t}$ para observar que

$$\begin{aligned}\int x^w (a + bx^t)^{\frac{p}{q}} dx &= \frac{1}{t} \int x^{w-t+1} (a + bx^t)^{\frac{p}{q}} (tx^{t-1} dx) \\ &= \frac{1}{t} \int x^{t(\frac{w+1}{t}-1)} (a + bx^t)^{\frac{p}{q}} (tx^{t-1} dx)\end{aligned}$$

Al efectuar el cambio de variable indicado, notemos que $x^t = \frac{u^q - a}{b}$ y $qu^{q-1} du = btx^{t-1} dx$, así que

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{t} \int \left(\frac{u^q - a}{b} \right)^{m-1} u^p \frac{qu^{q-1}}{b} du \\ &= \frac{q}{tb^m} \int u^{p+q-1} (u^q - a)^{m-1} du\end{aligned}$$

Ya que $m - 1 \in \mathbb{Z}$, entonces todos los exponentes son enteros, entonces la integral obtenida es más sencilla que la integral inicial.

Problema 25 ($\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^3}}$). Notemos que para este caso, que también puede resolverse usando la fórmula (3.1.4), tenemos que $w = 2$, $t = 3$, $p = -1$ y $q = 2$, así que $\frac{w+1}{t} = \frac{2+1}{3} = 1$, entonces podemos usar el caso 1. Sea $u^2 = 4 + x^3$, con lo que $2u du = 3x^2 dx$, así que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^3}} &= \int \frac{2u du}{3u} \\ &= \frac{2}{3} \int du \\ &= \frac{2}{3} u + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{4+x^3} + C\end{aligned}$$

2. Si $\frac{w+1}{t} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, se realiza el cambio de variable $u = \left(\frac{a+bx^t}{x^t} \right)^{\frac{1}{q}}$

Definamos $m = \frac{w+1}{t} + \frac{p}{q}$ y veamos que al escribir la integral de la forma

$$\begin{aligned}\int x^w (a + bx^t)^{\frac{p}{q}} dx &= \int x^{w+\frac{pt}{q}+t+1} \left(\frac{1}{x^t} \right)^{\frac{p}{q}} (a + bx^t)^{\frac{p}{q}} x^{-t-1} dx \\ &= -\frac{1}{at} \int x^{w+\frac{pt}{q}+t+1} \left(\frac{a + bx^t}{x^t} \right)^{\frac{p}{q}} (-atx^{-t-1} dx) \\ &= -\frac{1}{at} \int x^{w+1+\frac{pt}{q}+t} \left(\frac{a + bx^t}{x^t} \right)^{\frac{p}{q}} (-atx^{-t-1} dx) \\ &= -\frac{1}{at} \int x^{t(\frac{w+1}{t}+\frac{p}{q}+1)} \left(\frac{a + bx^t}{x^t} \right)^{\frac{p}{q}} (-atx^{-t-1} dx)\end{aligned}$$

Al efectuar el cambio de variable, podemos ver que $x^t = \frac{a}{u^q - b}$ y $qu^{q-1}du = -atx^{-t-1}dx$, entonces

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{at} \int \left(\frac{a}{u^q - b} \right)^{m+1} u^p qu^{q-1} du \\ &= -\frac{a^{m+1}}{t} \int \frac{u^{p+q-1} du}{(u^q - b)^{m+1}} \end{aligned}$$

Como $m+1 \in \mathbb{Z}$, entonces todos los exponentes son enteros, lo cual simplifica la integral respecto a la integral original.

Problema 26 $\left(\int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}} \right)$. Para esta integral, tenemos que $w = -2$, $t = 4$, $p = -3$ y $q = 4$.

Aunque $\frac{w+1}{t} = \frac{-2+1}{4} \notin \mathbb{Z}$, lo cual descarta el uso del caso 1, tenemos que $\frac{w+1}{t} + \frac{p}{q} = \frac{-2+1}{4} - \frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$.

Como realizaremos el cambio de variable $u^4 = 4x^{-4} - 1$, tenemos que $4u^3 du = -16x^{-5}dx$. Completamos la integral al escribirla como

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(4-x^4)^{\frac{3}{4}}} &= -\frac{1}{16} \int \frac{-16x^{-5}dx}{x^{-3}(4-x^4)^{\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{16} \int \frac{-16x^{-5}dx}{\left(\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{3}{4}}(4-x^4)^{\frac{3}{4}}} \\ &= -\frac{1}{16} \int \frac{-16x^{-5}dx}{\left(\frac{4-x^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{16} \int \frac{4u^3 du}{u^3} \\ &= -\frac{1}{16} \int 4 du \\ &= -\frac{1}{4}u + C \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{4-x^4}{x^4}} + C \end{aligned}$$

En los Problemas 25 y 26 pudimos notar que en ocasiones es posible resolver las integrales de diferencias binomias, sin embargo la idea de utilizar estos cambios de variable en específico, puede funcionar en integrales de expresiones que no son propiamente diferencias binomias.

5. ALGUNAS INTEGRALES RESUELTAS

Con el fin de explorar el uso de los distintos artificios de integración, a continuación se exponen algunas integrales junto a su método de resolución.

REFERENCIAS

Aguilar, A. (2009). *Matemáticas simplificadas 2ª edición*, CONAMAT. México: Pearson.

Flanders, H. (1989). *Differential forms with applications to the physical sciences*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, second edition.

Granville, W. A., Smith, P. F., Longley, W. R., and Byington, S. T. (1980). *Cálculo diferencial e integral*. Number 515.307 G735. Limusa eD. F DF.

