

MAT4514 - PROCESSUS STOCHASTIQUES

---

# TP

## Filtrage de Kalman couple

---

Victor Gertner - Louis-Ferdinand Marignier

13 août 2024



## Table des matières

I	Systèmes linéaires gaussiens cachés .....	2
III	Filtrage de Kalman couple .....	5
IV	Comparaison des deux modèles .....	8

# I Systèmes linéaires gaussiens cachés

**1. Rappeler comment dans le modèle (1) – (2), on passe de  $\hat{x}_{n|n}$  et  $\hat{P}_{n|n}$  à  $\hat{x}_{n+1|n+1}$  et  $\hat{P}_{n+1|n+1}$ .**

*Réponse :* Soit  $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  un vecteur gaussien, tel que :

$$\mathbb{E}[Z] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[Y] \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{V}\text{ar}[Z] = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_Y \end{pmatrix}$$

Alors on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y] &= \mathbb{E}[X] + \Sigma_{X,Y}^T \Sigma_Y^{-1} (Y - \mathbb{E}[Y]) \\ \mathbb{V}\text{ar}[X|Y] &= \Sigma_X - \Sigma_{X,Y}^T \Sigma_Y^{-1} \Sigma_{X,Y} \end{aligned}$$

On s'intéresse donc au vecteur  $Z = \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix}$ , les bruits étant centrés on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z|y_{1:n}] &= F_n \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_n|y_{1:n}] \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= F_n \begin{pmatrix} \hat{x}_{n|n} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n+1}^1 \\ M_{n+1}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ensuite, pour la variance, on a la propriété suivante :

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[X|Y]] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[X|Y]]$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\text{ar}[Z|y_{1:n}] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}\text{ar}[Z|x_n, y_n]|y_{1:n}] + \mathbb{V}\text{ar}[\mathbb{E}[Z|x_n, y_n]|y_{1:n}] \\ &= B \mathbb{V}\text{ar} \left[ \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} \right] B^T + A \mathbb{V}\text{ar} \left[ \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \middle| y_{1:n} \right] A^T \\ &= B \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} B^T + A \begin{pmatrix} \mathbb{V}\text{ar}[X_n|y_{1:n}] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A^T = \begin{pmatrix} \Sigma_{n+1}^1 & \Sigma_{n+1}^2 \\ \Sigma_{n+1}^3 & \Sigma_{n+1}^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et on obtient enfin :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1|n+1} &= M_{n+1}^1 + \Sigma_{n+1}^2 (\Sigma_{n+1}^4)^{-1} (y_{n+1} - M_{n+1}^2) \\ \hat{P}_{n+1|n+1} &= \Sigma_{n+1}^1 - \Sigma_{n+1}^2 (\Sigma_{n+1}^4)^{-1} \Sigma_{n+1}^3 \end{aligned}$$

**4. Tracer sur une même figure la vraie trajectoire et la trajectoire observée, d'une couleur différente.**

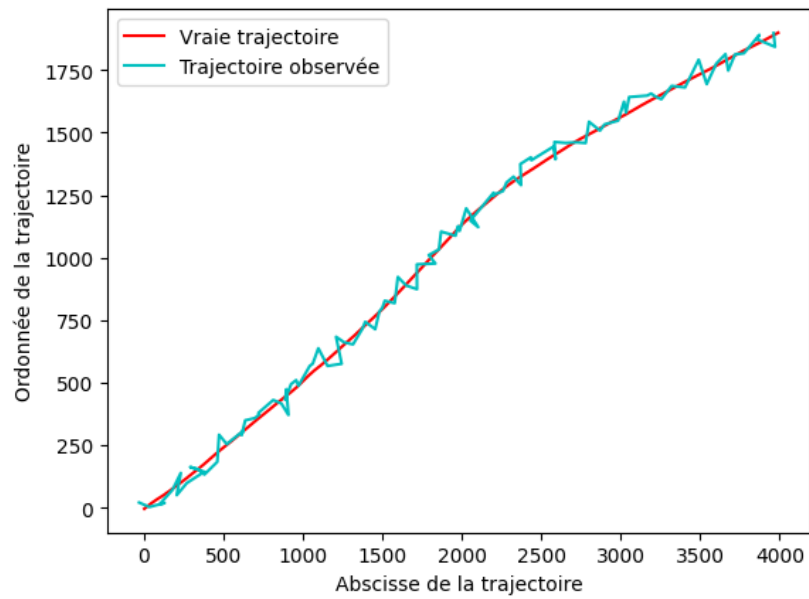


FIGURE 1 – Graphe de la vraie trajectoire et la trajectoire observée

7. Tracer sur une première figure la position vraie, estimée et observée en abscisse en fonction du temps ; sur une seconde figure, la position vraie, estimée et observée en ordonnée en fonction du temps ; et enfin la vraie trajectoire, la trajectoire observée et la trajectoire estimée par le filtre de kalman.

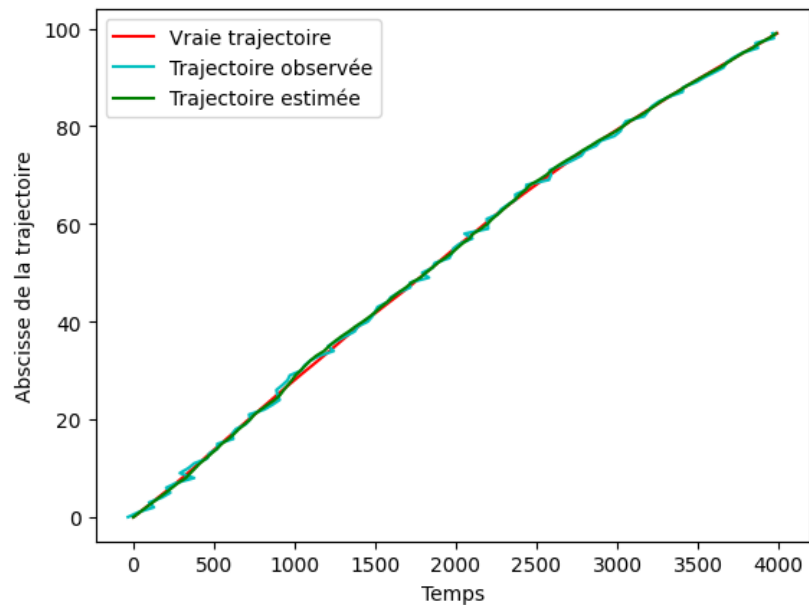


FIGURE 2 – Graphe des abscisses des trajectoires véritable, observée et estimée en fonction du temps

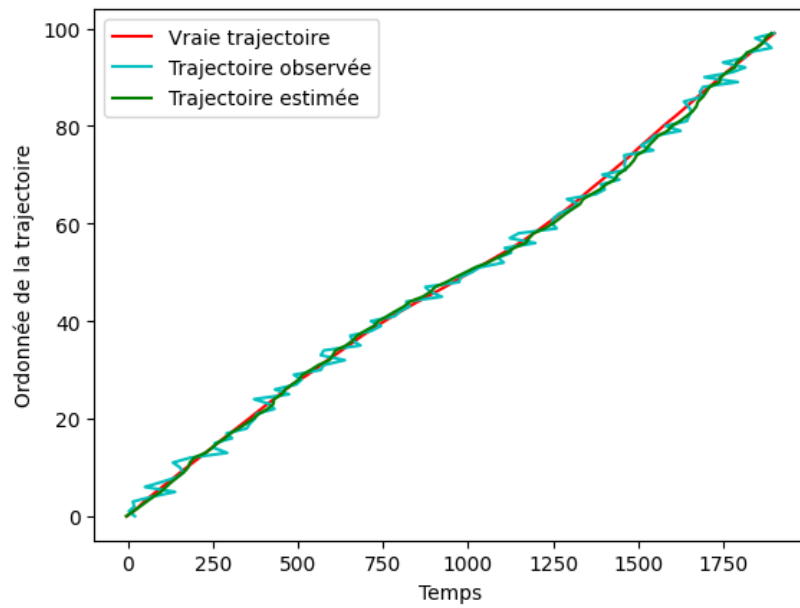


FIGURE 3 – Graphe des ordonnées des trajectoires véritable, observée et estimée en fonction du temps

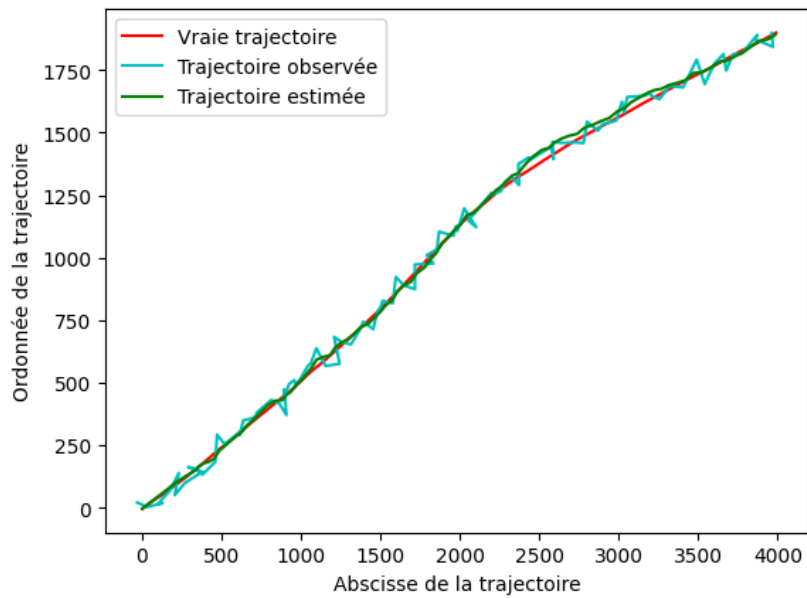


FIGURE 4 – Graphe des trajectoires véritable, observée et estimée par le filtre de Kalman

### III Filtrage de Kalman couple

8. Montrer que le système linéaire gaussien caché est un couple particulier avec :

$$A_n = \begin{pmatrix} F_n & 0_{4 \times 2} \\ H_{n+1}F_n & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \\ H_{n+1} & I_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

Réponse : On a le système général d'équation d'un couple :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + B_n \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix}$$

Remplaçons  $A_n$  et  $B_n$  :

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & 0 \\ H_{n+1}F_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ H_{n+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix}$$

En développant, on trouve :

$$\begin{cases} X_{n+1} = F_n X_n + U_{n+1} \\ Y_{n+1} = H_{n+1} F_n X_n + H_{n+1} U_{n+1} + V_{n+1} \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_{n+1} = F_n X_n + U_{n+1} \\ Y_{n+1} = H_{n+1} (F_n X_n + U_{n+1}) + V_{n+1} \end{cases}$$

Ce qui se réécrit :

$$\boxed{\begin{cases} X_{n+1} = F_n X_n + U_{n+1} \\ Y_{n+1} = H_{n+1} X_{n+1} + V_{n+1} \end{cases}}$$

On retrouve bien le système linéaire gaussien caché.

**6. Donner la valeur obtenue entre vos états estimés et les vrais états générés.**

Réponse : On trouve une valeur de RMSE égale à 0,102.

11. Tracer sur une même figure la vraie trajectoire et la trajectoire observée, d'une couleur différente. Cette étape vous permettra de vérifier que vos fonctions sont écrites correctement.

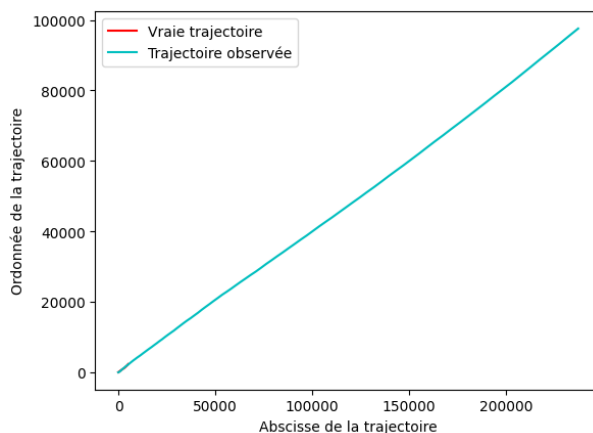


FIGURE 5 – Graphe de la vraie trajectoire et la trajectoire observée

14. Calculer l'erreur quadratique moyenne, puis sa racine divisée par la taille de la séquence (N) entre vos états estimés et les vrais états générés.

*Réponse :* On trouve une erreur quadratique moyenne égale à 1833,9 et une valeur de RMSE égale à 0,428.

15. Tracer sur une première figure la position vraie, estimée et observée en abscisse en fonction du temps ; sur une seconde figure, la position vraie, estimée et observée en ordonnée en fonction du temps ; et enfin la vraie trajectoire, la trajectoire observée et la trajectoire estimée par le filtre de Kalman.

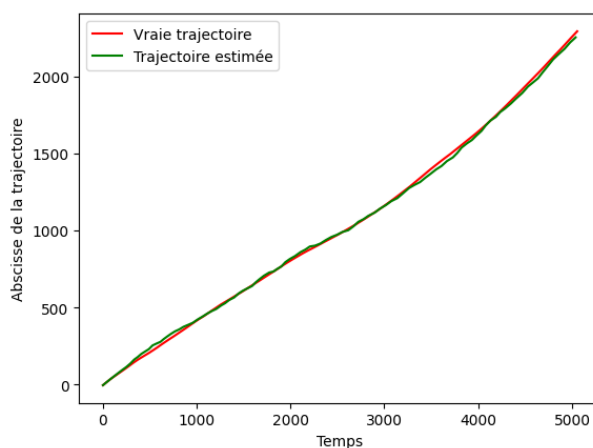


FIGURE 6 – Graphe des abscisses des trajectoires véritable et estimée en fonction du temps

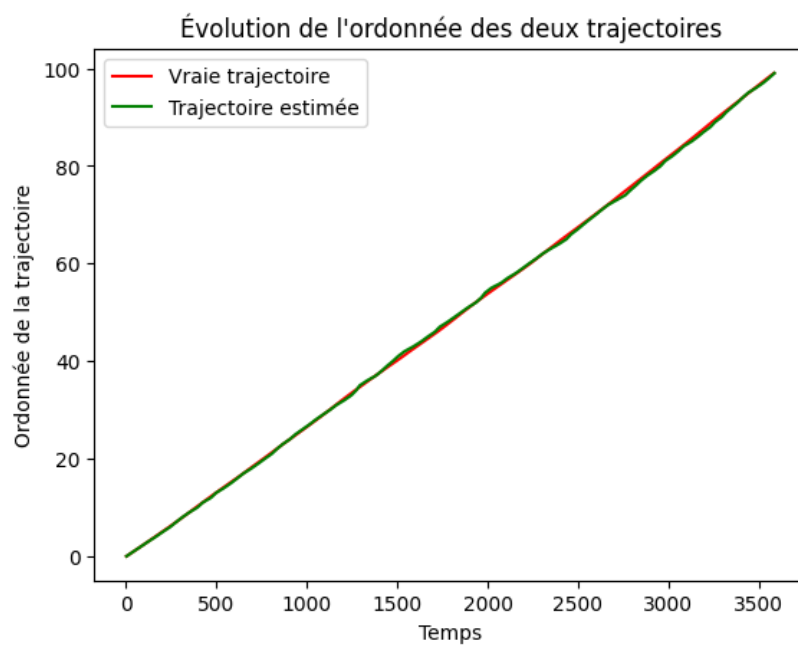


FIGURE 7 – Graphe des ordonnées des trajectoires véritable et estimée en fonction du temps

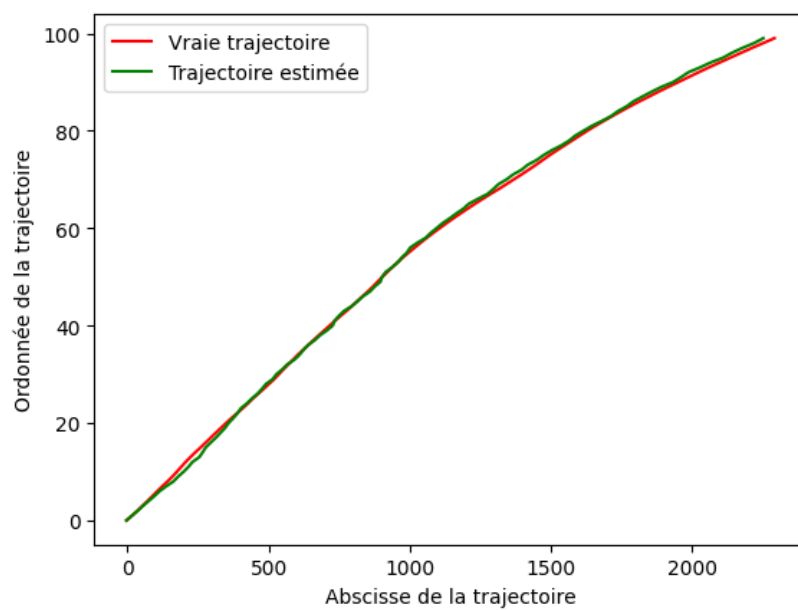


FIGURE 8 – Graphe des trajectoires véritable et estimée par le filtre de Kalman couple



## IV Comparaison des deux modèles

**20. Afficher et comparer les trajectoires estimées obtenues avec la trajectoire générée. Calculer et comparer les taux d'erreurs RMSE.**

*Réponse :* Ici, on estime les paramètre du modèle de filtrage de Kalman couple. On obtient les trajectoires suivantes :

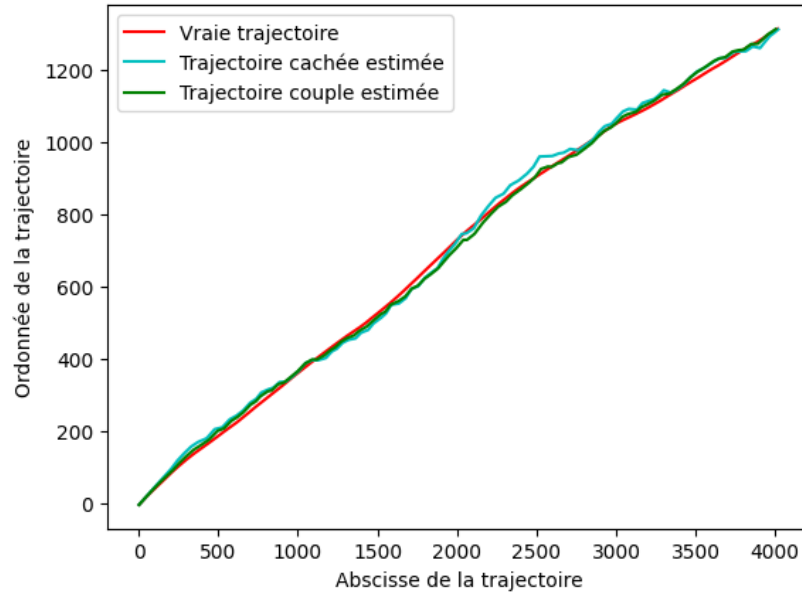


FIGURE 9 – Graphe des trajectoire veritable, de l'estimation par filtrage de Kalman et de l'estimation par filtrage de Kalman couple

Modèle	RMSE
Caché	0,089
Couple	0,076

TABEAU 1 – Comparaison des modèle lors de l'estimation du modèle caché

On a une RMSE plus faible pour le modèle couple, c'est assez étonnant, puisqu'on estimé les paramètres de ce modèle. Cette obsvertation nous laisse penser que le filtre de Kalman couple est plus adapté à notre cas d'étude.

**23. Estimer la trajectoire avec le filtre de Kalman couple avec les vrais paramètres et le filtre de Kalman caché avec les paramètres estimés à la question précédente. Afficher et comparer les trajectoires estimées obtenues avec la trajectoire générée. Calculer et comparer les taux d'erreurs RMSE.**

*Réponse* : On estime les paramètres du système linéaire gaussien caché, on obtient les trajectoires suivantes :

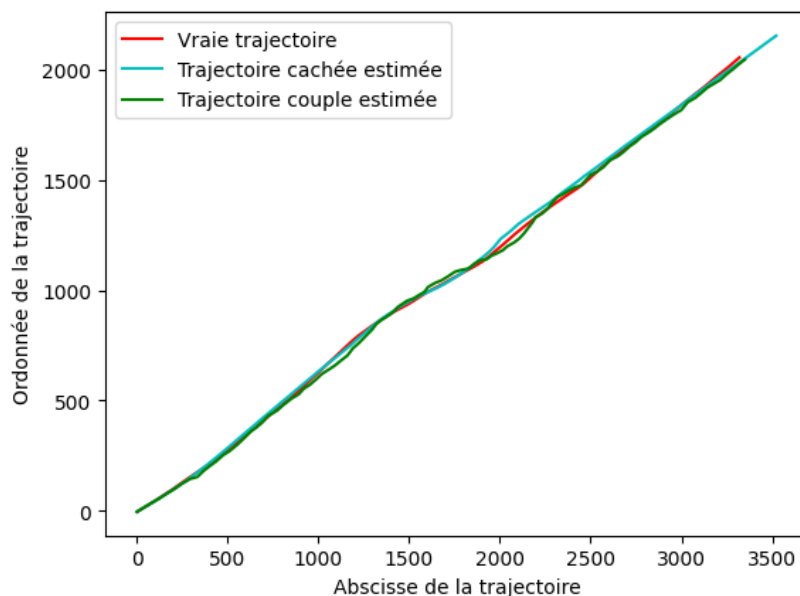


FIGURE 10 – Graphe des trajectoire veritable, de l'estimation par filtrage de Kalman et de l'estimation par filtrage de Kalman couple

Et on trouve les valeurs de RMSE suivantes :

Modèle	RMSE
Caché	0,404
Couple	0,103

TABLEAU 2 – Comparaison des modèle lors de l'estimation du modèle caché

On trouve donc une valeur plus élevée pour le modèle caché, c'est cohérent puisque c'est celui qu'on estime. Et ça semble confirmer que le modèle couple est plus performant.

**24. Reprendre toute l'étude des questions 16 à 23 en faisant varier les bruits  $\sigma_Q^2$ ,  $\sigma_{px}^2$  et  $\sigma_{py}^2$ . Conclure sur la comparaison entre les deux modèles.**

*Réponse* : Faisons varier les variances pour voir l'impact sur les les RMSE, au dessus des tableau est indiqué quel modèle on estime :

Couple		Caché	
Modèle	RMSE	Modèle	RMSE
Caché	0,092	Caché	0,506
Couple	0,083	Couple	0,111

TABLEAU 3 – RMSE pour  $\sigma_Q^2 = 1$ ,  $\sigma_{px}^2 = 30$  et  $\sigma_{py}^2 = 30$

Couple		Caché	
Modèle	RMSE	Modèle	RMSE
Caché	0,220	Caché	0,921
Couple	0,179	Couple	0,173

TABLEAU 4 – RMSE pour  $\sigma_Q^2 = 3$ ,  $\sigma_{px}^2 = 50$  et  $\sigma_{py}^2 = 50$

Couple		Caché	
Modèle	RMSE	Modèle	RMSE
Caché	0,494	Caché	1,919
Couple	0,421	Couple	0,490

TABLEAU 5 – RMSE pour  $\sigma_Q^2 = 10$ ,  $\sigma_{px}^2 = 100$  et  $\sigma_{py}^2 = 100$

Couple		Caché	
Modèle	RMSE	Modèle	RMSE
Caché	0,003	Caché	0,027
Couple	0,003	Couple	0,003

TABLEAU 6 – RMSE pour  $\sigma_Q^2 = 0,1$ ,  $\sigma_{px}^2 = 0,5$  et  $\sigma_{py}^2 = 0,5$

Nous remarquons que dans tous les cas, le filtrage de Kalman couple permet une approximation de la trajectoire plus précise. De plus, nous remarquons que celle-ci est plus résistante au bruit, en effet la RMSE pour le filtrage de Kalman couple augmente peu avec le bruit en comparaison au filtrage de Kalman caché qui, lui, est bien plus sensible, cela est d'autant plus vrai lorsqu'on estime les paramètres de ce filtrage caché.

Ainsi, on peut conclure en disant que, dans notre cas d'étude (c'est-à-dire, la poursuite d'une suite avec dynamique « à peu près » linéaire et vitesse est constante), le filtre de Kalman couple est plus performant que le filtre de Kalman caché, en étant plus résistant au bruit et plus performant de façon générale. Cela vient du fait que nous avons pu montrer que le filtre de Kalman caché est un cas spécifique du filtre de kalman couple et donc moins général.