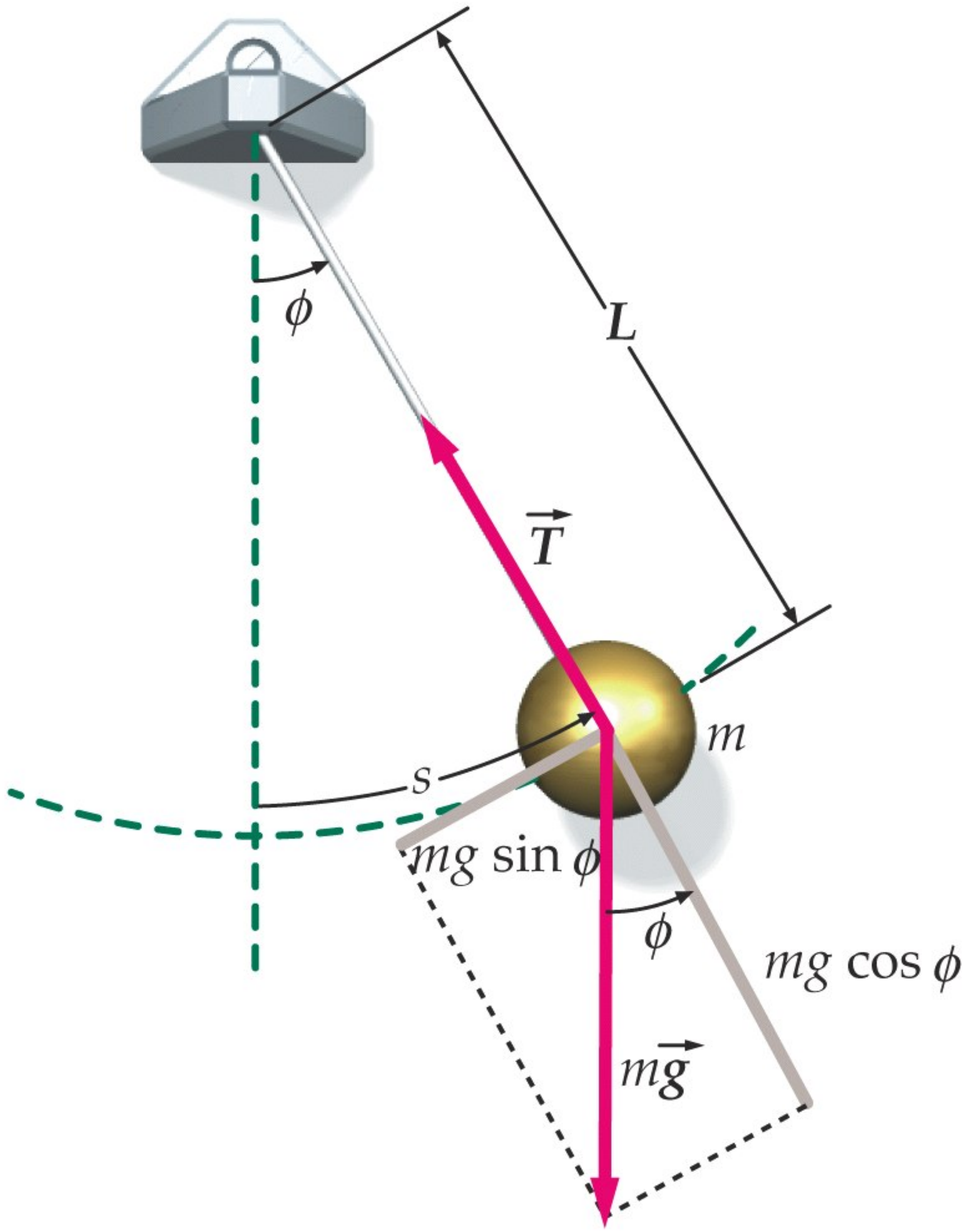
Método de Euler para el movimiento de un péndulo

Victor Hugo López Lugo

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación de un péndulo se modela mediante la siguiente expresión:



$$\theta(t), \alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(\mathbf{t})}{d\mathbf{t^2}}$$

Donde $\alpha(t)$ es la aceleración angular.

$$m * l^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mglsin(\theta) = 0$$
$$\theta(0) = \theta_{inic}$$
$$\omega(0) = \omega_{inic}$$

Se identifica cada término de la ecuación al ponerla en la forma estandar:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \frac{d\theta(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

Proponiendo el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$$

Despejando a la ecuación diferencial de segundo orden, se tiene lo siguiente:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l} sin(\theta)$$
$$f(x,t) = -\frac{g}{l} sin(\theta)$$

Ahora, utilizando el cambio de variable antes propuesto, se tiene lo siguiente:

$$u_0 = \theta \longrightarrow \frac{du_0}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} = u_1$$

Por otra parte:

$$u_1 = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \longrightarrow \frac{du_1}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = f(\mathbf{u},t) = -\frac{g}{l} sin(u_0)$$

Entonces, la derivada del vector $\mathbf{u}$ se puede expresar en términos de las variables u_0 y u_1 gracias a las dos expresiones anteriores, por lo que:

$$\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dt}} = \begin{pmatrix} \frac{du_0}{dt} \\ \frac{du_1}{dt} \end{pmatrix} = F(\mathbf{u},t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{-g}{l} sin(u_0) \end{pmatrix}$$

con condiciones iniciales:

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} \theta_{inic} \\ \omega_{inic} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto para aplicar el método de Euler para resolver ecuaciones de segundo orden, es necesario realizar un cambio de

Método de Euler

En matemáticas y computación, el método de Euler, llamado así en honor de Leonard Euler, es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor incicial dado.

El método de Euler es uno de los métodos más usuales para resolver ecuaciones del siguiente tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$y(x_i) = ?$$

Consiste en multiplicar los intervalos que va desde x_0 a x_f en n subintervalos de ancho h, es decir:

$$h = \frac{x_f - x_0}{n}$$

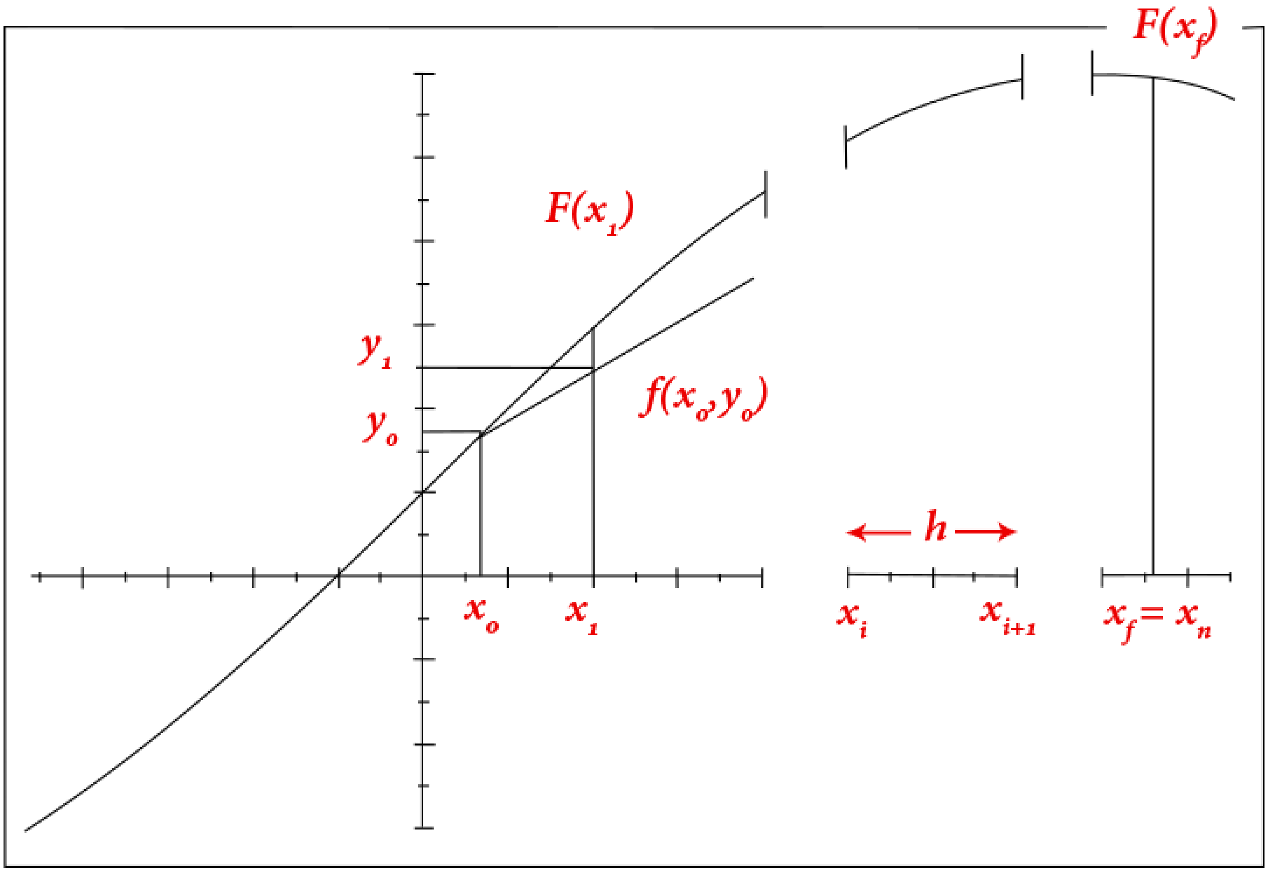
de manera que se obtiene un conjunto discreto de $n+1$ puntos: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ del intervalo de interés $[x_0, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumple lo siguiente:

$$x_i = x_0 + ih, 0 \leq i \leq n$$

La condición inicial $y(x_0) = y_0$, representa el punto $P(x_0, y_0)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación de la ecuación del planteamiento inicial, la cual se denotará como: $F(x,y) = y$. Ya teniendo el punto P_0 se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto: por lo tanto:

$$F'(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_P$$

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por P_0 y de pendiente $f(x_0, y_0)$. Esta recta aproxima $F(x)$ en una vecinidad de x_0. Tómese la recta como reemplazo de $F(x)$ y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1. Entonces, se puede deducir según la Gráfica:



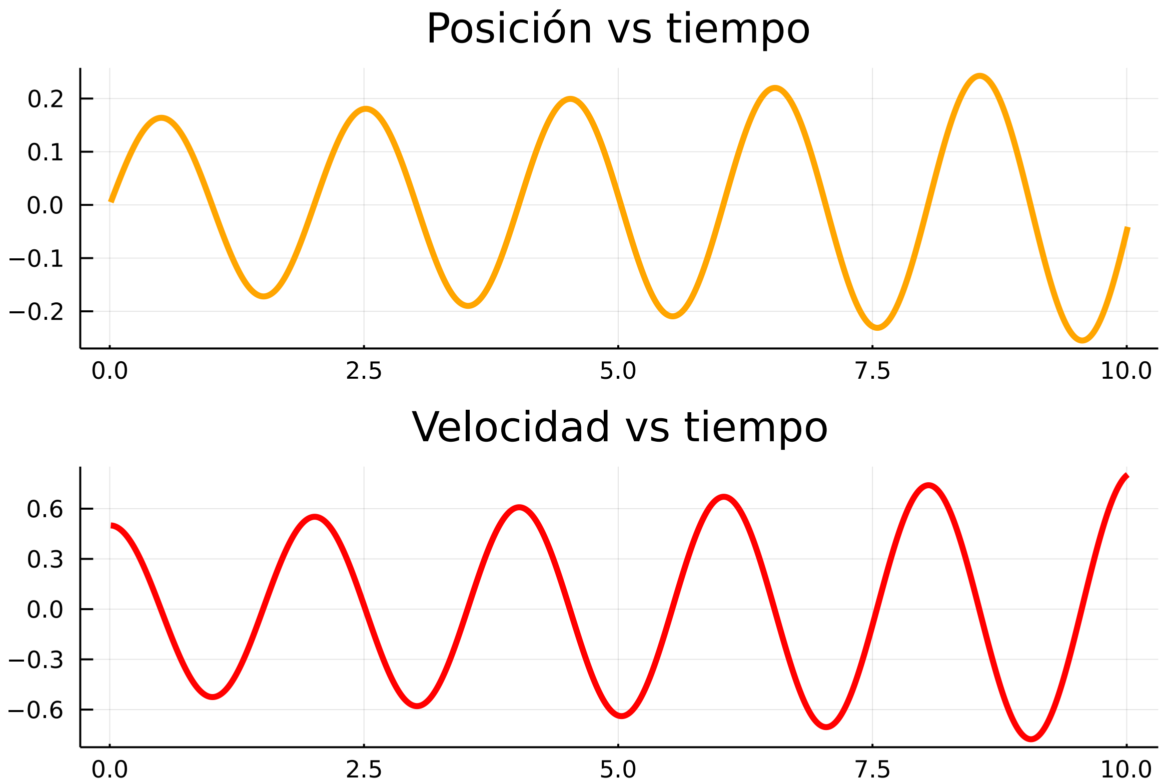
Implementación del código

In [2]:
```
using Plots
```

In [4]:
```
m = 1
l = 1
g = 9.81
#condicion inicial
t = 0
thetainc = 0
omegainc = 0.5
u = [thetainc,omegainc]
function F(u,t)
    #v = [u[2],(-g/l)*sin(u[1])]
    return [u[2],(-g/l)*sin(u[1])]
end

#solución

tsol = []
thetasol = [u[1]]
omegasol = [u[2]]
dt = 0.01
tfin = 10

while t<tfin
    u = u + F(u,t)*dt
    t = t + dt
    push!(thetasol,u[1])
    push!(omegasol,u[2])
    push!(tsol,t)
end

thetasol1= deleteat!(thetasol,1)
omegasol1= deleteat!(omegasol,1)

posición = sum(thetasol1)/length(thetasol1)
velocidad = sum(omegasol1)/length(omegasol1)

println("La posición promedio es: ",posición )
println("La velocidad angular promedio es: ", velocidad)

p1 = plot(tsol,thetasol1,lw = 3, color = :orange, title = "Posición vs tiempo"
)
p2 = plot(tsol,omegasol1,lw=3,color = :red, title = "Velocidad vs tiempo")
plot(p1, p2, legend = false, layout = (2, 1))

#savefig("movimiento.pdf")
```

```
La posición promedio es: -0.0031830281499130248
La velocidad angular promedio es: -0.0038177341245185107
```

Out[4]:



In [ ]: