Instituto Politécnico Nacional

Programa de Licenciatura en Matemática Algorítmica

Proyecto de Investigación

Máximos y Mínimos

Autor:
Martínez Huicochea Victor Hugo

Profesor:
Aguilar Gúzman Jorge

Cálculo Multivariable

México, Ciudad de México
2 de julio de 2023

Índice

1. Resumen.

En este trabajo escrito se realizo una pequeña investtigación de los Máximos y Mínimos cuadrados. Desde el qué son, datos de relevancia y el como surgen, todo mientras indagamos poco a poco sobre la naturaleza de los mismos.

2. Introducción.

Uno de los principales usos de las derivadas ordinarios es encontrar máximos y mínimos. Ante la introduccón del uso de más variables para modelar una función, sirge la necesidad de localizar o saber si existen máximos o mínimos dentro de la función dada.

3. Puntos Estacionarios o Críticos

Supongamos que existe un campo esxcalar f que es diferenciable en un punto P, si $\nabla f(P) = \overrightarrow{0}$. En este caso el punto P se llama **Punto Estacionario o crítico** de f. Dichos puntos son de gran importacia, pues nos permiten encontrar los máximos y mínimos deseados, además de los puntos silla

4. Máximos y Mínimos Absolutos

Se dice que un campo escalar f tiene un **máximo absoluto** en un punto P de un conjunto S de R^n si

$$\forall x \in S \text{ se cumple que } f(x) \leq f(P)$$

El número f(P) se llama máximo absoluto de f en S. Así mismo, se dice que un campo escalar f tiene un **mínimo absoluto** en un punto P de un conjunto S de R^n si

$$\forall x \in S \text{ se cumple que } f(x) \geq f(P)$$

En este caso, el número f(P) se llama mínimo absoluto de f en S.

5. Máximos y Mínimos Relativos

Se dice que una función f tienen un **máximo local o relativo** en un punto P si sucede que:

$$\forall x \in S \text{ se cumple que } f(x) \leq f(P) \text{ Para alguna } B(P) \in S$$

Igualmente dice que una función f tienen un **mínimo local o relativo** en un punto P si sucede que:

$$\forall x \in S \text{ se cumple que } f(x) \geq f(P) \text{ Para alguna } B(P) \in S$$

Así mismo se dice que f(P) es un **valor mínimo o máximo local**

6. Puntos Ensilladura o Puntos Silla

Cuando P es un punto estacionario, se llama de **ensilladura**, si existe una Bola en P que cumple con:

$B(P)$ contiene puntos tales que $f(P) < f(x)$ Para algunos puntos en x y para otros se cumple que $f(P) > f(x)$

7. Máximos y Mínimos en superficies de Nivel

Un ejemplo de esto puede verse en la ecuación de la forma z=f(x,y) que puede considerarse una superficie de nivel de un campo escalar, cuya ecuación puede verse como:

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

Si f es diferenciable, podemos obtener el **gradiente** del campo, dado por el vector:

$$\nabla F = \left[\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)), \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)), -1\right]$$

Nos interesa saber cuando una función tiene una tangente nula, por lo que utilizaremos la ecuación de plano tangente respecto a un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$. Así, dicha ecuación respecto al punto P es:

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

Con:

$$A = D_1 f(x_0, y_0) y B = D_2 f(x_0, y_0)$$

Nótese como cuando A y B son 0, entonces la ecuación del plano se hace cero. Ante esto, se dice que el punto P es **Punto crítico**

8. Fórmulas de Taylor

Si un campo escalar diferenciable f tiene un punto crítico en P, la naturaleza de este quedará determinada por el signo algebraico de f(x)-f(P) si x esta cerca de P. Tomando $x = P + y$ tenemos entonces la **Fórmula de Taylor de primer orden**, la cual dice:

$$f(P+y) - f(P) = \nabla f(P) \cdot y + \|y\| E(P,y) \text{ ,donde } E(P,y) \longrightarrow 0 \text{ cuando } y \longrightarrow 0$$

Utilizando también la **Fórmula de Taylor de Segundo orden** que nos dice que si f es un campo escalar con derivadas parciales segundas D_{ij} continuas en una bola B(P) entonces tenemos que:

$$f(P+y) - f(P) = \nabla f(P) \cdot y + \frac{1}{2!} y H(P) y^t + \|y\|^2 E_2(P,y)$$

Recordemos que $\nabla f(P) = 0$ y que $\|y\| E(P,y)$,tiende a $E(P,y) \longrightarrow 0$ cuando $y \longrightarrow 0$, tenemos entonces que:

$$f(P+y) - f(P) = \frac{1}{2} y H(P) y^t$$

La cual es una forma cuadrática, por lo que la naturaleza del punto crítico se puede determinar mediante la Hesiana evaluada en P

9. La Matriz Hessiana respecto al punto crítico

Una matriz A se dice que es definida positiva, si se cumple que:

$$x^t A x > 0 \forall x \neq 0$$

Equivalentemente una matriz A se dice que es definida negativa, si se cumple que:

$$x^t A x < 0 \forall x \neq 0$$

Ahora, sea f un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas, designamos a H(P) como la matriz Hessiana respecto a P un punto crítico, por lo visto anteriormente tenemos que si:

- Si H(P) es definida positiva, f tienen un **mínimo relativo** en P
- Si H(P) es definida negativa, f tiene un **máximo relativo** en P
- Si H(P) no se determina, es un **Punto de Ensilladura**

10. Criterio de las segundas derivadas para determinar extremos de funciones de dos variables

En el caso n=2, el punto críticose puede determinar mediante el signo algebráico de la segunda derivada $D_{1,1}f(P)$ y del determinante de la matríz Hessiana Así tenemos los siguientes casos

- Si $det(H(P)) < 0$, f tiene un **Punto de Ensilladura**
- Si $det(H(P)) > 0 \wedge D_{1,1} > 0$, f tiene un **mínimo relativo** en P
- Si $det(H(P)) > 0 \wedge D_{1,1} < 0$, f tiene un **máximo relativo** en P
- Si $det(H(P)) = 0$, no se puede aplicar el crierio

11. Un ejemplo practico

Encuentre los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Como vimos anteriormente, primero obtenemos el gradiente:

$$\nabla F = \left[\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)), \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))\right] = \left[4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x\right]$$

Como el gradiente es continuo, evaluamos para obtener cuando vale el vector 0, para esto se puede resolver el sistema de ecuaciones, ya sea mediante algebra, o reduciendo matrices, así obtenemos que:
Puntos Críticos:

- (0,0)
- (1,1)
- (-1,-1)

A continuación obtenemos el Hessiano, el cual es:

$$H(f(x, y)) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

Evaluando en los puntos tenemos:

$$det(H(f(0, 0))) = det\left[\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\right] = -16$$

$$det(H(f(1, 1))) = \left[\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}\right] = 128$$

$$det(H(f(-1, -1))) = \left[\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}\right] = 128$$

En el punto (0,0) como su determinante es menor a 0 tenemos entonces que es un **punto silla**
En el punto (1,1) como su determinante es mayor a 0 y $D_{x,x} = 12 > 0$ entonces se tiene que es un **punto mínimo**
Lo mismo ocurre en el punto (-1,-1) como su determinante es mayor a 0 y $D_{x,x} = 12 > 0$ entonces se tiene que támbien es un **punto mínimo**

Referencias

[1] Apostol, T. M. (2009). Calculus.

[2] Stewart, J., Watson, S., Clegg, D. K. (2020). Multivariable Calculus, International Metric Edition.