微积分在成本和收益中的应用

August Sean VictorJhaan

2023 2024 2025

目录

- 边际函数
- 总成本和边际成本
- 用微分求平均成本
- 总收益和边际收益
- 微分和利润最大化

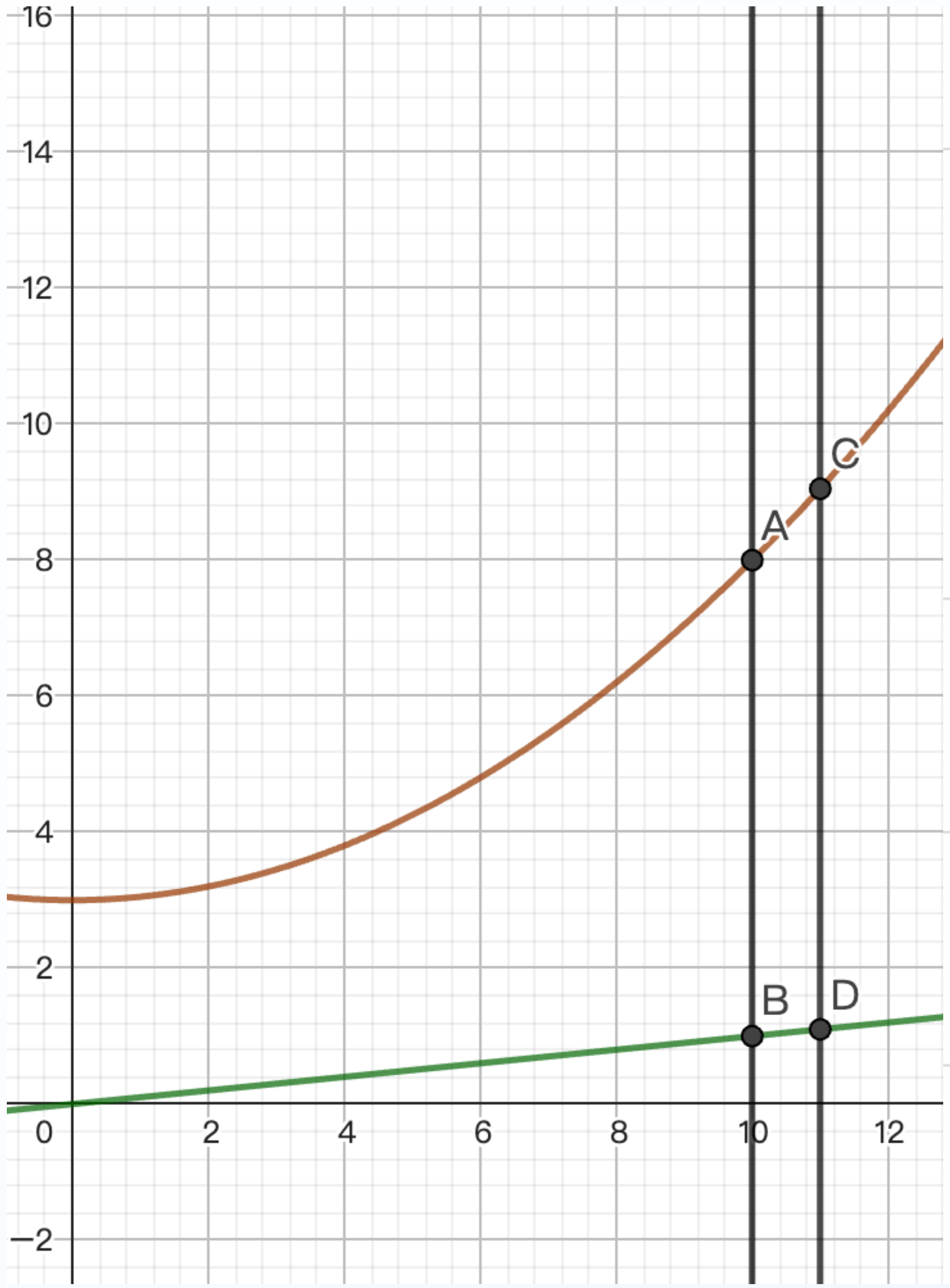
1，边际函数

- f’(x)是f(x)的边际函数
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x0+\Delta x)-f(x0)}{\Delta x}\rightarrow$ f(x)在x0~(x0+Δx)的平均变化速度
- 求极限：f(x)在x=x0处，x产生一单位改变，y近似改变f’(x)个单位
- 这被称为f(x)在点x=x0的变化率，或者边际函数值

2，总成本和边际成本

- 总成本（total cost）：生产一定数量的产品所需要的全部经济资源的价值
- 边际成本（marginal cost）：当产量增加一个单位时总成本的变化量
- 边际成本 = $\frac{\Delta total\ cost}{\Delta quantity} \rightarrow$ 相当于总成本函数的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

举个：



$f(x) = \frac{1}{20} x^2 + 3$

$f'(x) = f'(x) = \frac{1}{10} x$

A = 交点(f, eq1) = (10, 8)

B = 交点(f′, eq1) = (10, 1)

C = 交点(f, eq2) = (11, 9.05)

D = 交点(f′, eq2) = (11, 1.1)

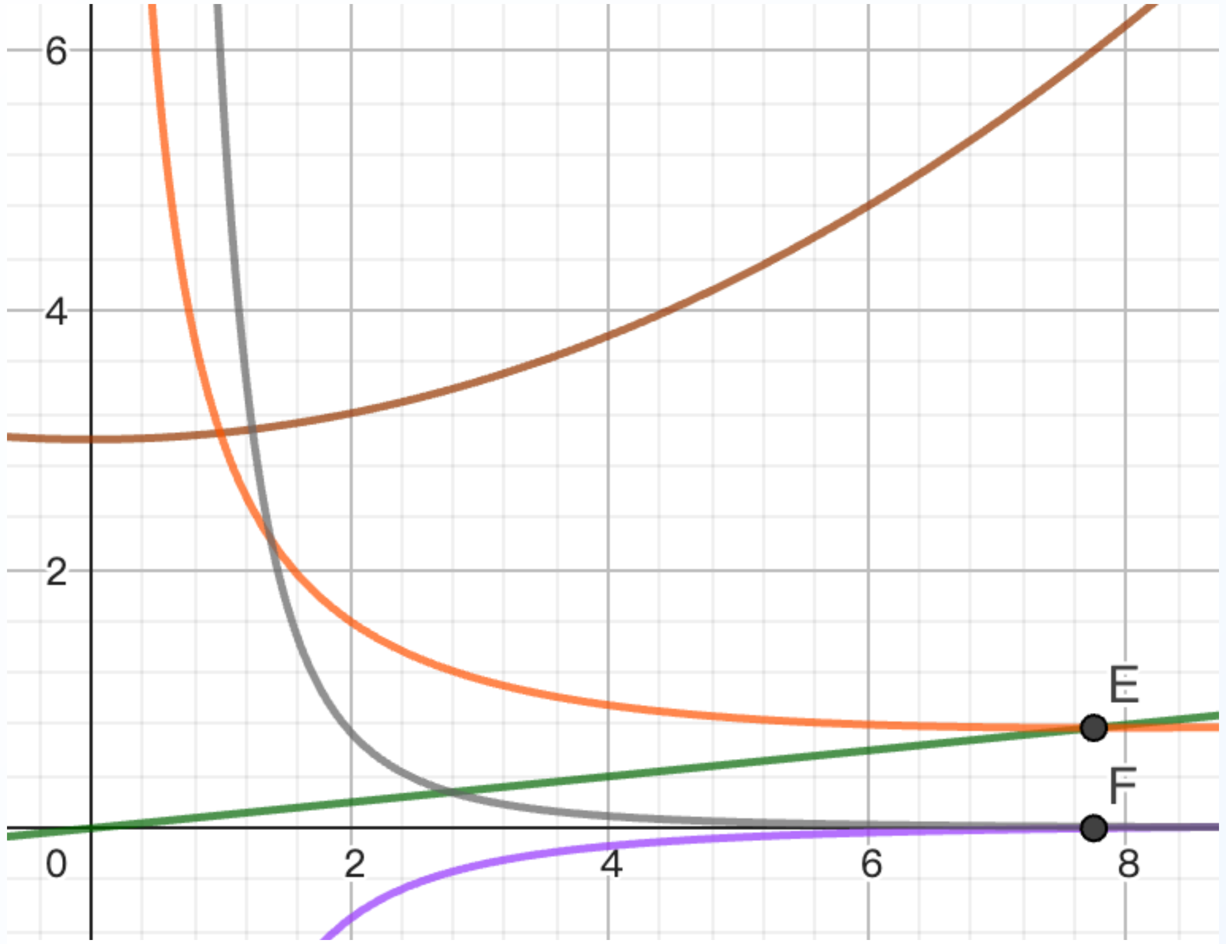
- 棕色为总成本曲线（只取y轴右侧
- （注：f(0)=3,3为企业的固定成本）（fixed/variable costs）*
- 绿色为总成本曲线微分得到的函数
- 当总产量为10：
- 总成本为8
- 绿色曲线的y值为1
- 当总产量增加1个单位：
- 总成本为9.05
- 可见增加的成本为1.05，≈1
- 绿色曲线x0的y值变化展现了增加1单位产量后总成本的变化 → 边际成本曲线*

3，用微分求最低平均成本

- 为什么要求平均成本的最低值：平均成本决定售价的下限，企业需要尽可能实现低成本
- 如何求平均成本曲线的解析式：
- 假设总成本曲线：$C(Q)=\frac{1}{20}Q^3+3$
- 平均成本等于总成本除以数量：$\bar{C}(Q) = \frac{1}{20} \times \frac{Q^2}{Q} + \frac{3}{Q} = \frac{1}{20}Q + \frac{3}{Q}$

- 微分：$\bar{C}'$（Q）$=\frac{x^2-60}{20x^2}$
- 当$\bar{C}'$（Q）=0，有$\bar{C}$（Q）的最大值或最小值
- 解得当x=7.75时，$\bar{C}'(Q)=0$
- （$\bar{C}''(Q)=\frac{6}{x^3}$ 带入x=7.75的结果大于0
- 所以当x=7.75时，$\bar{C}$（Q）有最小值

实际情况：



E = 极值点(g, −1.75, 29.9)

= (7.75, 0.77)

F = 零值点(g′, −1.75, 29.9)

= (7.75, 0)

$g'(x) = g'(x)$

$= \frac{x^2 - 60}{20\,x^2}$

$g''(x) = g''(x)$

$= \frac{6}{x^3}$

- 回忆一遍：
- 棕色曲线为总成本曲线
- 绿色曲线为边际成本曲线
- 黄色曲线为平均成本曲线
- 本质就是总成本曲线一次微分
- 紫色为平均成本的微分
- 灰色为平均成本的二次微分

- E求的是极值点、F是零值点
- 两点横坐标均为7.75
- 所以：
- 当该企业实际生产7.75个商品时，其平均成本（售价）最低

4，总收益和边际收益

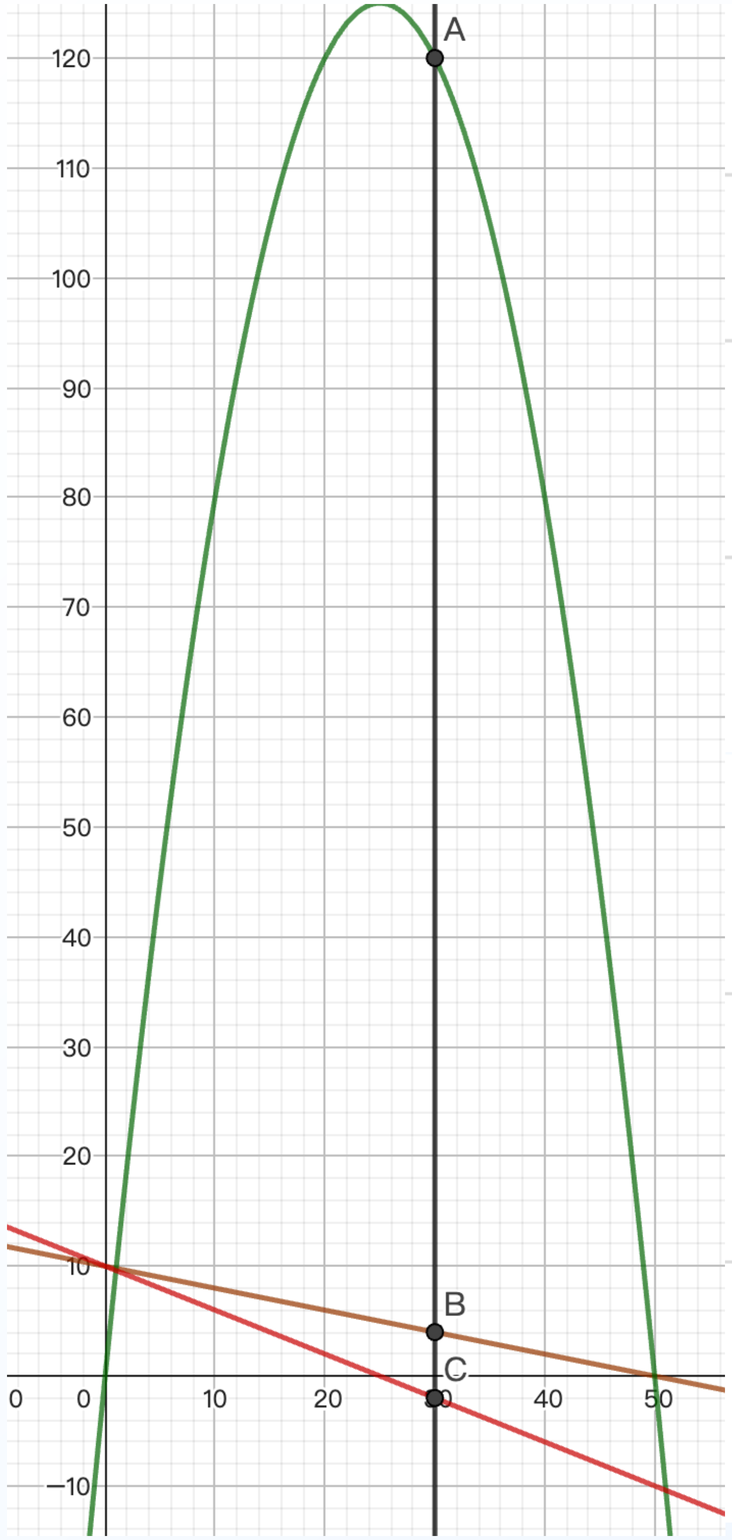
- 和总成本和边际成本同理：
- 如果总收益函数为R（Q），边际收益函数为R’（Q）
- 如果总利润函数为L（Q），边际利润函数为L’（Q）
- total/marginal revenue/profit
- 备注：四种函数
- demand（售价）函数：P（Q）
- 总收益函数：R（Q）=Q×（P（Q））
- 平均收益：$\bar{R}$（Q）
- 边际收益：R’（Q）

举个🌰 ：

- 已知价格函数$P=10-\frac{Q}{5}$，求当$Q=30$时，总收益、平均收益和边际收益分别为多少？

- $R(Q)=Q\times P(Q)=10Q - \frac{Q^2}{5}$，所以$R(30)=300 - \frac{900}{5}=120$
- $\bar{R}(Q)=P(Q)=10 - \frac{Q}{5}$，所以$\bar{R}(30)=10 - 6=4$
- $R'(Q)$:
- $R(Q)=10Q - \frac{Q^2}{5}$，$R'(Q)=10-\frac{2}{5}Q$
- 所以$R'(30)=-2$

实际情况：



$f(x) = 10 - \frac{x}{5}$

$eq1 : x = 30$

$g(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$

$h(x) = 10 - \frac{2}{5}x$

A = 交点(g, eq1)

= (30, 120)

B = 交点(f, eq1)

= (30, 4)

C = 交点(h, eq1)

= (30, -2)

- 棕色曲线为价格函数和平均收益函数
- 绿色曲线为总收益函数
- 红色曲线为边际收益函数
- 所以：当Q=30时：
- 售价和平均收益为4
- 总收益为120
- 边际收益为-2 *

5,微分和利润最大化

- 经济角度推导：为什么当边际收益等于边际成本时利润最大化?
- 少生产一个商品时，边际收益大于边际成本，仍然有利润空间
- 多生产一个商品时，边际收益小于边际成本，生产这个商品是亏本的
- 所以：当最后一个商品的边际成本等于边际收益时，企业实现利润最大化

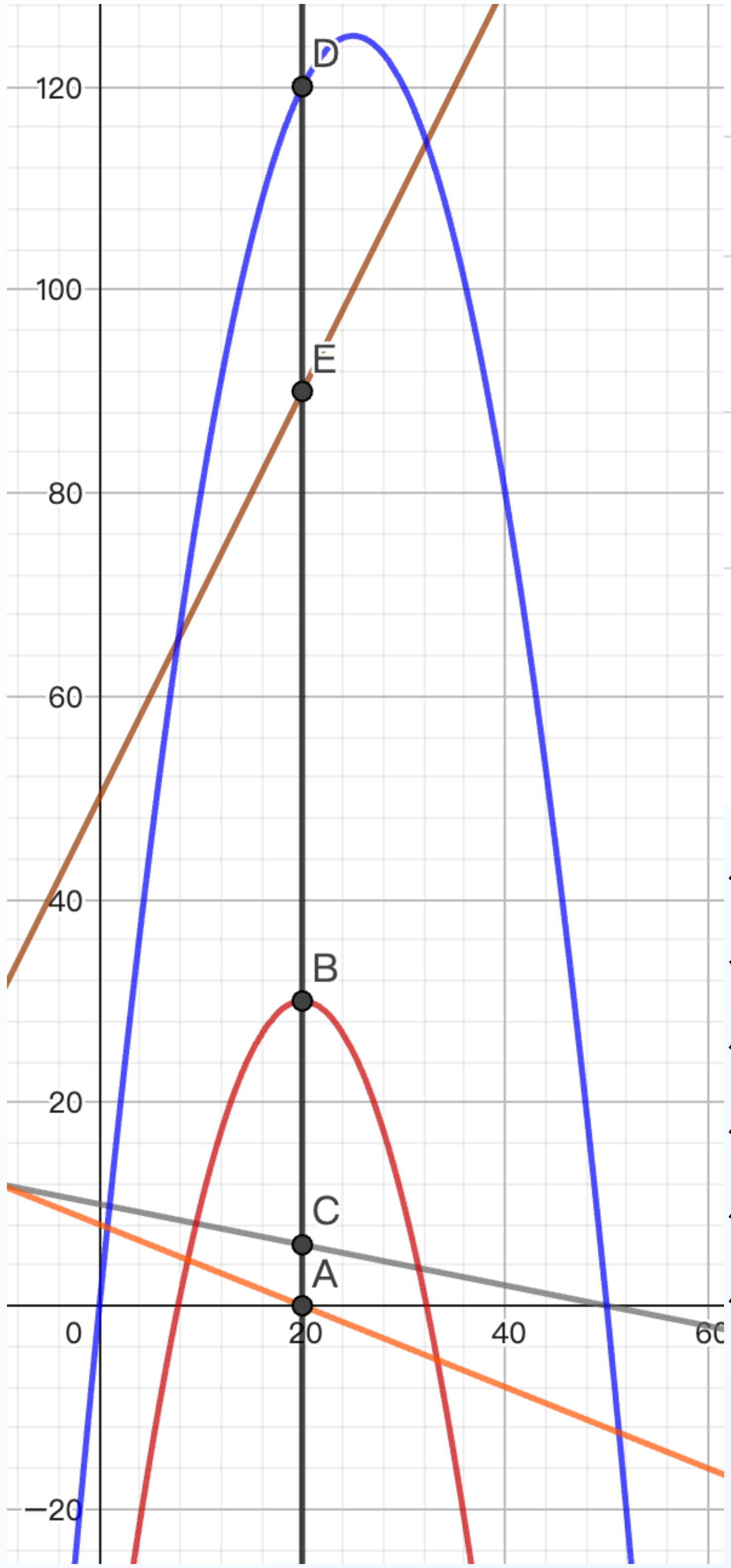
- 式子角度推导：假设总利润为L
- 总利润函数L(Q)=R(Q)-C(Q)
- L’(Q)=R’(Q)-C’(Q)
- L(Q)取得最大值的必要条件为L’(Q)=0，即 R’(Q)=C’(Q)
- 所以：取得利润最大化的条件为边际收益=边际成本，即边际利润为0

最后一个🌰：

- 和上面一个🌰相似，假设$P=10-\frac{Q}{5}$，$C=50+2Q$
- 求当产量为多少的时候，利润最大？

- 已知L(Q)取得最大值的必要条件为$L'(Q)=0$，即 $R'(Q)=C'(Q)$
- $L(Q)=8Q-\frac{Q^2}{5}-50$
- $L'(Q)=8-\frac{2}{5}Q$
- $L'(Q)=0 \rightarrow Q=20$
- ($L''(Q)=-\frac{2}{5}<0$,所以所求为最大值)
- 另一个角度：$R'(20)=2, C'(20)=2\ \therefore R'(20)=C'(20)$

实际情况（边际利润为0）：



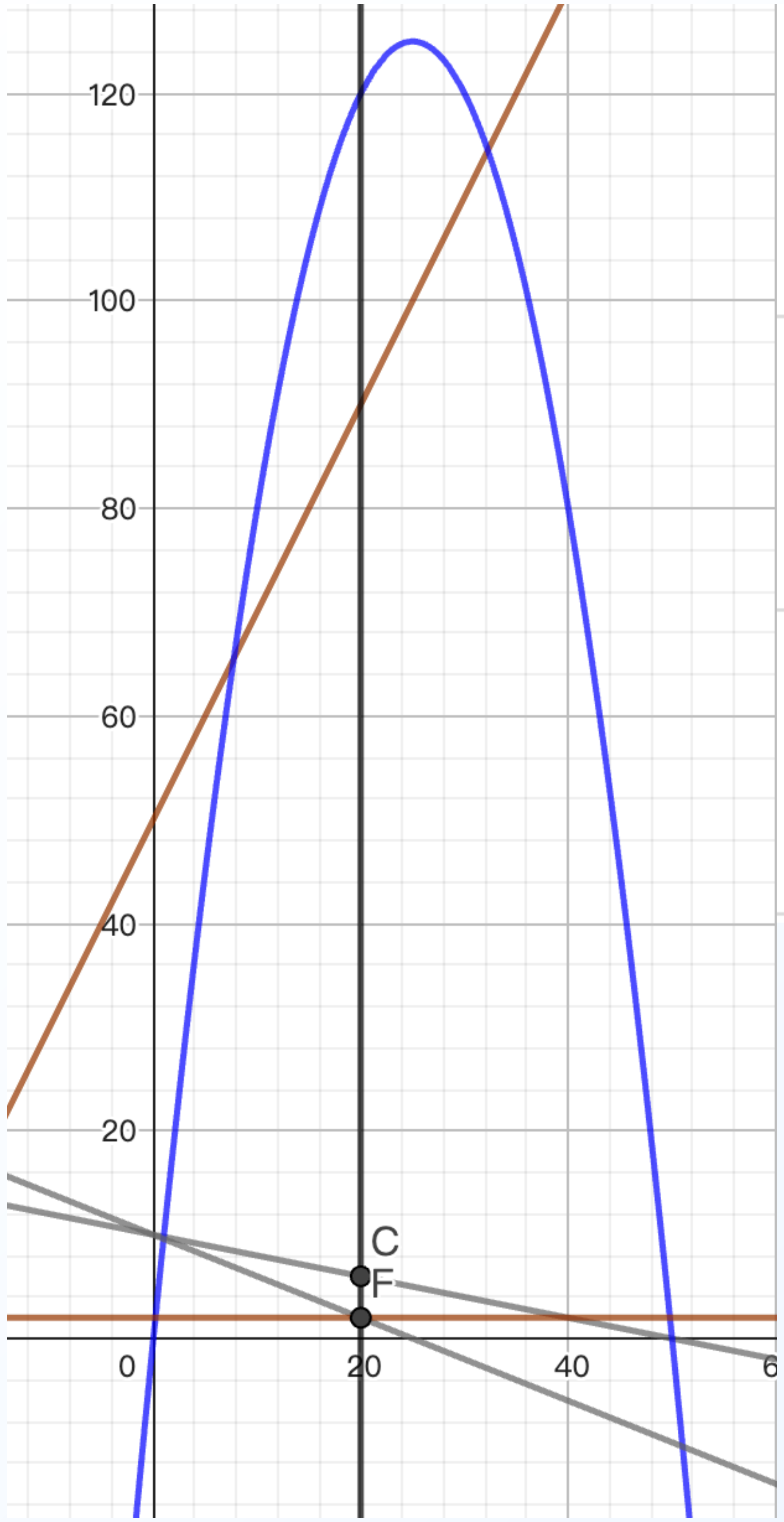
	$f(x) = 10 - \frac{x}{5}$	A ＝ 零点(h′) ＝ (20, 0)
	$g(x) = 50 + 2x$	B ＝ 极值点(h) ＝ (20, 30)
	$h(x) = 8x - \frac{x^2}{5} - 50$	C ＝ 交点(f, eq1) ＝ (20, 6)
	$p(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$	D ＝ 交点(p, eq1) ＝ (20, 120)
	$h'(x) = h'(x) = \frac{-2}{5}x + 8$	E ＝ 交点(g, eq1) ＝ (20, 90)

点A：边际利润为0，指出此时销量为20
点C：单价
点D：总收益
点E：总成本
点B：总利润（总收益－总成本）

- 灰色为需求曲线
- 棕色为总成本函数
- 紫色为总收益函数
- 红色为总利润函数
- （总收益－总成本）
- (在图像中表现为AB=DE)
- 橙色为总利润函数的微分
- 在x=20时y=0

- 可见此时总利润最大
- 所以：当h’(Q)，即边际利润函数为0时，
  实现了总利润最大化

实际情况（如果你非要看MR=MC……）：



$p'(x) = p'(x)$

$= \frac{-2}{5}x + 10$

$g'(x) = g'(x)$

$= 2$

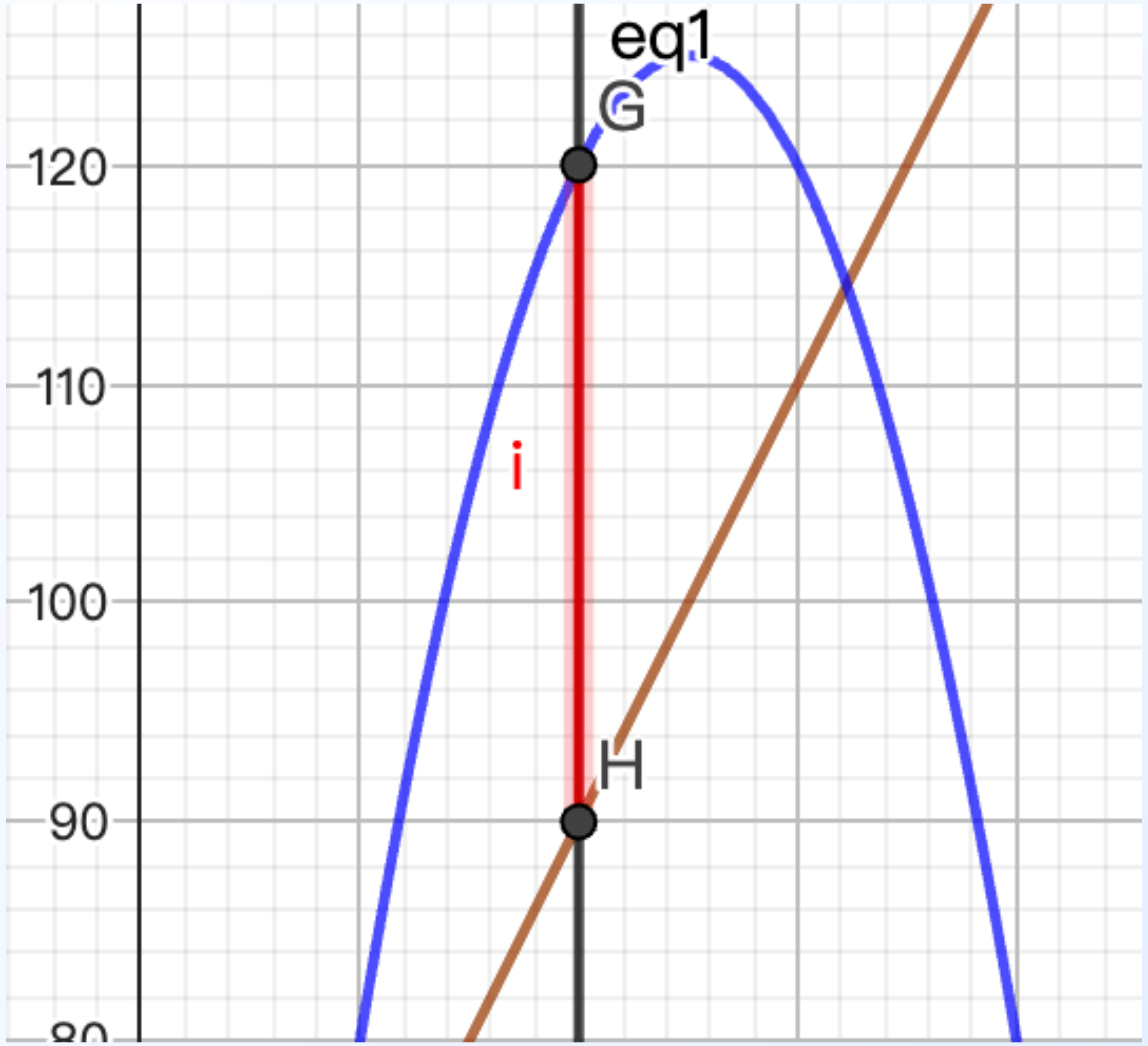
$F = $ 交点(p', g')

$= (20, 2)$

- 复习一遍：
- 蓝色曲线为总收益曲线
- 其对应的边际收益曲线为浅灰色的直线
- 棕色曲线为总成本曲线
- 其对应的边际成本曲线为平行于x轴的金色线*
- 两者交点F的横坐标为20

后话：

- 其实这里只是把课本用纯文科思维所推导出来的结论用图像的形式证明出来而已
- 实际中只需要找出蓝色线（总收益曲线）和棕色线（总成本曲线）的差额哪里最大就行



+ 关注