

Appunti sulla Computazione Quantistica

Victor Lopata

July 2024

Contents

1	Nozioni Matematiche	2
1.1	Strutture algebriche	2
1.2	Numeri complessi	3
1.3	Spazi Vettoriali	3
1.4	Matrici	3
1.5	Notazione Dirac	4
2	Introduzione all'informazione quantistica	5
2.1	Sistemi Singoli	5
2.1.1	Misurazione di stati quantistici	5
2.1.2	Operazioni Unitarie	5
2.2	Sistemi Multipli	7
2.2.1	Prodotto Tensoriale di vettori di stati quantistici	8
2.2.2	Sistemi Entangled	8
2.2.3	Bell States	9
2.2.4	Stati GHZ e W	9
2.2.5	Misurazione	10
2.2.6	Operazioni Unitarie	12
2.3	Circuiti Quantistici	15
2.4	Limitazioni nell'informazione quantistica	18
2.4.1	Irrilevanza della fase globale	18
2.4.2	Teorema no-cloning	19
2.5	Teletrasporto Quantistico	20

1 Nozioni Matematiche

1.1 Strutture algebriche

Definition 1.1: Struttura Algebrica

Definiamo come **struttura algebrica** un insieme munito di una o più operazioni. Spesso viene indicato con la notazione (A, m) , dove A è l'insieme ed m è l'operazione.

Definition 1.2: Principali strutture algebriche

Sia (A, m) una struttura algebrica, dove A è l'insieme ed m è un'operazione binaria chiusa sull'insieme. Tale struttura può essere definita come:

- **Semigrupp**: se m è associativa.
- **Monoide**: se m è associativa e munita dell'elemento neutro.
- **Gruppo**: se m è associativa, munita dell'elemento neutro e dell'elemento inverso.
- **Gruppo abeliano**: se m è associativa, munita dell'elemento neutro e dell'inverso ed è commutativa.

Definition 1.3: Anello

Sia $(A, +, \cdot)$ una struttura algebrica. Possiamo definirla come **anello** se:

- $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**.
- (A, \cdot) è un **semigrupp**.
- La moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned} \tag{1}$$

Possiamo definirlo anche come **anello commutativo** se (A, \cdot) è munita della commutatività.

Fact 1.1

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Allora:

$$\forall x, y \in A \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \tag{2}$$

Definition 1.4: Campo

Sia $(K, +, \cdot)$ una struttura algebrica. Possiamo definirla come **campo** se:

- $(K, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**.
- $(K \setminus 0, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**.

1.2 Numeri complessi

1.3 Spazi Vettoriali

Definition 1.5: Norma Euclidiana

Sia v un vettore avente numeri complessi come entrate:

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Definiamo la sua **norma Euclidiana** come:

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2} \quad (4)$$

1.4 Matrici

Definition 1.6: Trasposta di una matrice

Sia A una matrice. Definiamo come **matrice trasposta** di A , rappresentata dal simbolo A^T , come la matrice avente il cui generico elemento con indici (i, j) è l'elemento con indice (j, i) della matrice originaria. In altre parole, la matrice trasposta di una matrice è la matrice ottenuta scambiandone le righe con le colonne.

Example 1.1

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Definition 1.7: Matrice Trasposta Coniugata

Sia A una matrice avente come entrate valori complessi. Definiamo la sua **matrice trasposta coniugata**, rappresentata dal simbolo A^\dagger , come la matrice ottenuta effettuando la trasposta e scambiando ogni valore con il suo complesso coniugato.

Example 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 3+9i & 2+i \\ 7-6i & 1-3i \end{pmatrix} \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} 3-9i & 7+6i \\ 2-i & 1+3i \end{pmatrix}$$

Definition 1.8: Matrici Unitarie

Sia U una matrice quadrata complessa. Definiamo U come una **matrice unitaria** se:

$$U^\dagger U = \mathbb{1} = U U^\dagger$$

dove U^\dagger è la matrice trasposta coniugata di U e $\mathbb{1}$ è la matrice identità.

Fact 1.2

Sia U una matrice unitaria. Allora abbiamo che:

$$\|Uv\| = \|v\| \quad \forall v \text{ vettore}$$

1.5 Notazione Dirac

2 Introduzione all'informazione quantistica

2.1 Sistemi Singoli

Definition 2.1: Stato Quantistico

Definiamo come **stato quantistico** un **vettore colonna** tale che:

- Le entrate sono **numeri complessi**
- La somma dei valori assoluti elevati alla seconda deve essere uguale ad 1.

Le entrate dei vettori colonna, rappresentate dai numeri complessi, sono chiamati anche **ampiezza**.

Definition 2.2: Stato Quantistico (definizione alternativa)

Possiamo definire uno stato quantistico anche come un vettore colonna v che ha come entrate numeri complessi tale che $\|v\| = 1$.

Example 2.1: Stati Quantistici

- $|0\rangle$
- $|1\rangle$
- $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$
- $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$

Stati quantistici che non hanno una particolare denominazione vengono indicate con le lettere ψ o ϕ . Ad esempio

$$|\psi\rangle = \frac{1+2i}{3}|0\rangle - \frac{2}{3}|1\rangle$$

2.1.1 Misurazione di stati quantistici

2.1.2 Operazioni Unitarie

Le operazioni che si possono applicare sugli stati quantistici sono rappresentate dalle **matrici unitarie** (Definizione 1.4).

Observation 2.1

Se v è uno stato quantistico, allora anche Uv è uno stato quantistico.

Vediamo alcune delle più famose ed importanti operazione unitarie su un singolo Qubit:

• **Pauli Operations:**

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

• **Hadamard Operation:**

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

• **Phase Operations:**

$$P_\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Theta} \end{pmatrix} \quad S = P_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad T = P_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vediamo ora degli esempi sull'applicazione di queste operazioni sugli stati quantistici.

1. $H|0\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |+\rangle$
2. $H|1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = |-\rangle$
3. $H|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$
4. $H|-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$
5. $T|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$
6. $T|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
7. $T|+\rangle = T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}T|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}T|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1+i}{2}|1\rangle$
8. $HSH = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$
9. $(HSH)^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.2 Sistemi Multipli

I sistemi multipli possono esser visti come singoli sistemi composti tra di loro.

Definition 2.3: Stati quantistici nei Sistemi Multipli

Gli stati quantistici nei sistemi multipli sono rappresentati sempre dai vettori colonna, le cui entrate hanno numeri complessi (come negli stati quantistici dei sistemi singoli) e gli indici dei vettori sono posizionati in corrispondenza del prodotto cartesiano tra gli insiemi degli stati di ciascun sistema.

Sia quindi v tale vettore, deve soddisfare sempre:

$$\|v\| = 1$$

Example 2.2

Ad esempio, siano X ed Y sistemi che rappresentano qubits e vogliamo rappresentare il sistema multiplo (X, Y) . Allora il suo insieme degli stati classici è definito dal prodotto cartesiano:

$$\{0, 1\} \times \{0, 1\} = \{00, 01, 10, 11\}$$

Quindi un esempio di stato quantistico per il sistema multiplo (X, Y) può essere:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle$$

Esistono molti modi su come rappresentare i vettori degli stati quantistici di sistemi multipli. Ecco alcuni di uso comune:

$$|0\rangle|1\rangle$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|0\rangle_X |1\rangle_Y$$

Oppure possiamo, ovviamente, scriverlo esplicitamente:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

2.2.1 Prodotto Tensoriale di vettori di stati quantistici

Come per i vettori probabilistici, il prodotto tensoriale tra due vettori di stati quantistici produce un nuovo vettore di stato quantistico.

Theorem 2.1: Chiusura prodotto tensoriale

Siano $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ due stati quantistici rispettivamente di X e di Y . Il prodotto tensoriale tra i due stati quantistici produce uno stato quantistico.

Proof.

$$\begin{aligned} |||\phi\rangle \otimes |\psi\rangle|| &= \sqrt{\sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} |\langle ab | \phi \otimes \psi \rangle|^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} \sum_{b \in \Gamma} |\langle a | \phi \rangle \langle b | \psi \rangle|^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{a \in \Sigma} |\langle a | \phi \rangle|^2 \sum_{b \in \Gamma} |\langle b | \psi \rangle|^2} = \\ &= ||\phi\rangle|| ||\psi\rangle|| \end{aligned}$$

Sappiamo che $||\phi\rangle|| = 1$ e $||\psi\rangle|| = 1$. Di conseguenza $|||\phi\rangle \otimes |\psi\rangle|| = 1$, dimostrando che $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ è uno vettore di uno stato quantistico. \square

Tale teorema viene generalizzato in per **più di due sistemi**; siano $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$ vettori di stati quantistici dei sistemi X_1, \dots, X_n . Allora il prodotto tensoriale $|\phi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\phi_n\rangle$ produce un vettore di uno stato quantistico del sistema (X_1, \dots, X_n) . È facilmente dimostrabile considerando la dimostrazione del precedente teorema.

Sia $|\phi\rangle$ uno stato quantistico del sistema X e sia $|\psi\rangle$ uno stato quantistico del sistema Y ; allora, il vettore $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ rappresenta uno stato quantistico per il sistema multiplo (X, Y) . Ricordiamo che il prodotto tensoriale rappresenta **l'indipendenza** tra i due sistemi, di conseguenza gli stati dei due sistemi non hanno niente a che vedere l'uno con l'altro.

2.2.2 Sistemi Entangled

Esistono vettori di sistemi quantistici che non sono il prodotto tensoriale tra due vettori di sistemi quantistici. Prendiamo come esempio il seguente stato quantistico:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \quad (5)$$

Non esistono stati tali che il loro prodotto tensoriale sia equivalente allo stato di sopra.

Proof. Siano, per assurdo, $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ i due stati tali che:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

Deve essere necessariamente

$$\langle 0|\phi\rangle\langle 1|\phi\rangle = \langle 01|\phi \otimes \psi\rangle$$

implicando che:

$$\langle 0|\phi\rangle = 0 \vee \langle 1|\phi\rangle = 0$$

ma questo porta ad una contraddizione; infatti

$$\langle 0|\phi\rangle\langle 0|\psi\rangle = \langle 00|\phi \otimes \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge \langle 1|\phi\rangle\langle 1|\psi\rangle = \langle 11|\phi \otimes \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

nessuna delle due equazioni produce 0. \square

Lo stato rappresentato dal vettore dell'equazione 5, rappresenta una **correlazione** tra i due sistemi. Diciamo che questi sono **entangled (impigliati)**.

2.2.3 Bell States

Definition 2.4: Stati di Bell

Definiamo gli **stati di Bell** i seguenti stati quantistici:

1. $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
2. $|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$
3. $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$
4. $|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$

La collezione dei quattro stati $\{|\phi^+\rangle, |\phi^-\rangle, |\psi^+\rangle, |\psi^-\rangle\}$ forma la **base di Bell**: qualsiasi vettore di uno stato quantistico a due qubit può essere espresso come una combinazione lineare dei quattro stati di Bell.

2.2.4 Stati GHZ e W

Vediamo ora alcuni stati quantistici importanti di 3 qubit:

- **Stato GHZ:**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle \tag{6}$$

- **Stato Z:**

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|100\rangle \tag{7}$$

Nessuno di questi due stati possono essere prodotti da stati quantistici attraverso il prodotto tensore.

2.2.5 Misurazione

Sia (X_1, \dots, X_n) un sistema multiplo avente come insieme degli stati $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$. Sia il sistema nello stato $|\phi\rangle$; allora, la probabilità di ottenere lo stato generico $(a_1, \dots, a_n) \in \Sigma$ dopo la misurazione è data dalla formula:

$$|\langle a_1, \dots, a_n | \psi \rangle|^2 \quad (8)$$

Vogliamo ora **misurare parzialmente** il sistema, quindi ottenere il nuovo stato quantistico dopo una misurazione parziale del sistema. Iniziamo a vedere come funziona per due sistemi, per poi generalizzare a più sistemi.

Sia quindi X e Y due sistemi aventi rispettivamente Σ e Γ come insieme degli stati classici. Supponiamo che stia in uno stato generico $|\psi\rangle$. Rappresentiamolo con la Dirac-notation:

$$|\psi\rangle = \sum_{(a,b) \in \Sigma \times \Gamma} \alpha_{ab} |ab\rangle$$

Supponiamo di voler misurare solo il sistema X , allora la probabilità che X sia in uno stato $a \in \Sigma$ è uguale ad:

$$\sum_{b \in \Gamma} |\langle ab | \psi \rangle|^2 = \sum_{b \in \Gamma} |\alpha_{ab}|^2$$

Dopo la misurazione di X , il suo stato cambia in $|a\rangle$. Cosa succede allo stato di Y ? Per rispondere a questa domanda bisogna descrivere il nuovo stato di (X, Y) sotto l'assunzione che X è stata misurata ottenendo lo stato a .

Come primo passo, rappresentiamo lo stato $|\psi\rangle$ in questa maniera:

$$|\psi\rangle = \sum_{a \in \Sigma} |a\rangle \otimes |\phi_a\rangle$$

dove

$$|\phi_a\rangle = \sum_{b \in \Gamma} \alpha_{ab} |b\rangle$$

Possiamo osservare che:

$$\sum_{b \in \Gamma} |\alpha_{ab}|^2 = \|\phi_a\|^2$$

Abbiamo quindi che, il nuovo stato del sistema (X, Y) dopo la misurazione di X (con risultato a), è pari a

$$|a\rangle \otimes \frac{|\phi_a\rangle}{\|\phi_a\|}$$

$|a\rangle \otimes |\phi_a\rangle$ rappresenta la parte di $|\psi\rangle$ consistente con la misurazione di X . Andiamo poi a *normalizzare* il vettore, dividendo per la sua norma Euclidea ,

corrispondente a $|\phi\rangle$; quest'ultimo passaggio serve per portare lo stato ad avere la norma Euclidiana valida per gli stati quantistici, ovvero uguale ad 1.

Example 2.3

Consideriamo lo stato di due qubit (X, Y)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|11\rangle$$

Inizialmente scriviamo lo stato nella seguente forma:

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right) + |1\rangle \otimes \left(\frac{i}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right)$$

La probabilità che, dopo la misurazione, X stia nello stato 0 è pari a

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

implicando che lo stato di (X, Y) diventa:

$$|0\rangle \otimes \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = |0\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle \right)$$

I passaggi sono identici nel caso in cui la misurazione di X sia 1.

Vediamo ora cosa succede allo stato se misuriamo Y . Iniziamo rappresentando (analogamente) lo stato $|\psi\rangle$ nel modo che ci fa più comodo:

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \right) \otimes |0\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \right) \otimes |1\rangle$$

Ipotizziamo quindi che, dopo la misurazione, Y stia nello stato di 0; la sua probabilità è pari a:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle \right\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Allora il nuovo stato di (X, Y) diventa:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{6}}|1\rangle}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \otimes |0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle \right) \otimes |0\rangle$$

Tali passaggi possono essere effettuati per n sistemi congiunti: il passaggio chiave è ordinare e rappresentare lo stato $|\psi\rangle$ nel modo che ci fa più comodo.

2.2.6 Operazioni Unitarie

Come per lo stato singolo, usiamo le **matrici unitarie** per rappresentare operazioni quantistiche su sistemi composti. Gli indici dellerighe e delle colonne di tale matrice sono posizionati in corrispondenza del prodotto cartesiano tra gli insiemi degli stati di ciascun sistema.

Example 2.4

Siano X e Y due sistemi aventi rispettivamente $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ e $\Gamma = \{0, 1\}$ come insiemi degli stati. L'insieme dello stato multiplo (X, Y) corrisponde a $\Sigma \times \Gamma = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$. Ecco un esempio di una matrice unitaria rappresentante un'operazione sul sistema (X, Y) :

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Per dimostrare che sia **unitaria** basta verificare che $U^\dagger U = \mathbb{1} = U U^\dagger$. Appliciamo tale operazione allo stato $|11\rangle$:

$$U|11\rangle = \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{i}{2}|11\rangle - \frac{1}{2}|20\rangle - \frac{i}{2}|30\rangle$$

Notiamo che le ampiezze di $U|11\rangle$ corrispondono alla seconda colonna della matrice unitaria.

Immaginiamo ora di avere le operazioni U_1, \dots, U_n applicabili rispettivamente sui sistemi X_1, \dots, X_n . Se le operazioni vengono operate **indipendentemente** sui sistemi, allora l'operazione combinata sul sistema (X_1, \dots, X_n) è rappresentata dalla matrice unitaria $U_1 \otimes \dots \otimes U_n$.

Una situazione comune è l'applicare operazioni solo su un sottoinsieme dei sistemi multipli. Ad esempio, sia (X, Y) un sistema e vogliamo applicare l'operazione U_Y sul sistema X ; questo implica la non applicazione di alcuna operazione su Y , ovvero applicare la funzione identità su di esso. Ricapitolando, applicare un'operazione su X e non fare niente su Y equivale applicare l'operazione rappresentata dalla matrice unitaria $U_X \otimes \mathbb{1}_Y$. Lo stesso procedimento può essere applicato se non si vuole fare niente sul sistema X ed applicare U_Y ad Y : $\mathbb{1}_X \otimes U_Y$.

Observation 2.2

Non tutte le matrici unitarie possono essere espresse come prodotto tensoriale di matrici unitarie; questo fatto dipende dalla **dipendenza** che i sistemi hanno.

Vediamo qualche esempio di operazioni comuni che non possono essere rappresentate dal prodotto tensoriale di altre operazioni.

- **Operazione SWAP:** Siano X ed Y due sistemi che condividono lo stesso insieme di stati Σ . L'operazione di **SWAP** sul sistema (X, Y) è l'operazione che scambia le informazioni tra i due sistemi. Tale operazione è rappresentata dalla seguente matrice unitaria:

$$\mathbf{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia, ad esempio, $\Sigma = \{0, 1\}$. Allora:

$$\mathbf{SWAP}|01\rangle = |10\rangle$$

Più in generale, tale operazione soddisfa:

$$\mathbf{SWAP}|a\rangle|b\rangle = |b\rangle|a\rangle \quad \forall a, b \in \Sigma$$

Vediamo come si comporta con gli stati di Bell:

$$\mathbf{SWAP}|\phi^+\rangle = |\phi^+\rangle$$

$$\mathbf{SWAP}|\phi^-\rangle = |\phi^-\rangle$$

$$\mathbf{SWAP}|\psi^+\rangle = |\psi^+\rangle$$

$$\mathbf{SWAP}|\psi^-\rangle = -|\psi^-\rangle$$

- **Operazione Controlled- U** Sia Q un sistema rappresentante un qubit ed R un qualsiasi altro sistema arbitrario. Sia U un'operazione applicabile su R . Definiamo l'operazione **Controlled- U** , applicabile sul sistema multiplo (Q, R) , come segue:

$$CU = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1}_R + |1\rangle\langle 1| \otimes U$$

In parole semplici, se $X = 0$ applica $\mathbb{1}$ ad R . Altrimenti, se $X = 1$, applica U ad R .

Ad esempio, il **Controlled-NOT** è rappresentabile come:

$$CX = |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \phi_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo ora **CSWAP**:

$$\mathbf{CSWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa operazione è meglio conosciuta come **operazione di Fredkin** (più comunemente Fredkin gate), e funziona nel seguente modo:

$$\mathbf{CSWAP}|0bc\rangle = |0bc\rangle$$

$$\mathbf{CSWAP}|1bc\rangle = |1cb\rangle$$

Infine, vediamo l'operazione **controlled-controlled-NOT**, o anche **CCX**. È comunemente conosciuta come l'operazione di **Toffoli** (Toffoli gate), e la sua matrice è rappresentata come:

$$\mathbf{CCX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3 Circuiti Quantistici

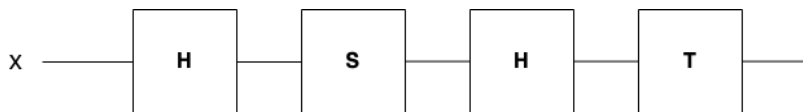


Figure 1

Definition 2.5: Circuito

Definiamo come **circuito** un modello di computazione nella quale l'informazione è trasportata dai 'fili' (wires) attraverso una rete di 'porte' (gates), le quali rappresentano l'operazione applicata all'informazione trasportata.

Nel modello quantistico, i fili e le porte rappresentano rispettivamente i qubits e le operazioni applicabili su di essi. Ad esempio, la figura 1 rappresenta l'applicazione delle operazioni H , S , H e T su un singolo qubit. I circuiti quantistici hanno spesso i qubits inizializzati a $|0\rangle$. Se preferiamo, è possibile rappresentare alla fine del circuito il nuovo stato a seguito delle trasformazioni, come mostrato nella figura 2.

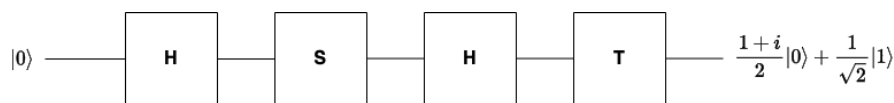


Figure 2

La figura 3, invece, mostra un'operazione su un sistema multiplo, a due qubit. La prima, intuitivamente, rappresenta l'operazione di Hadamard; la seconda, invece, è il controlled-NOT, dove il cerchio riempito rappresenta il qubit di controllo, mentre il \otimes rappresenta il qubit target.

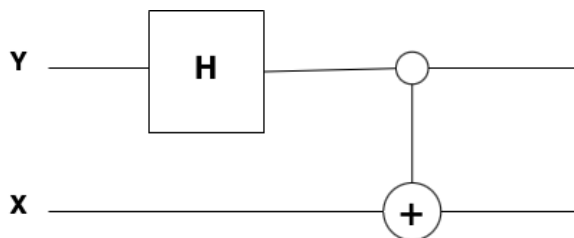


Figure 3

Notiamo anche che nel modello è implicito l'applicazione dell'operazione identità sul qubit X . Sia quindi U la matrice unitaria rappresentante le due

operazioni. U è definita come:

$$U = (\mathbb{1} \otimes H) (|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \phi_X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} U|00\rangle &= |\phi^+\rangle \\ U|01\rangle &= |\phi^-\rangle \\ U|10\rangle &= |\psi^+\rangle \\ U|11\rangle &= -|\psi^-\rangle \end{aligned}$$

I fili con due linee rappresentano i classici bit. Vengono utilizzati dopo aver eseguito una misurazione come mostrato nella figura 4.

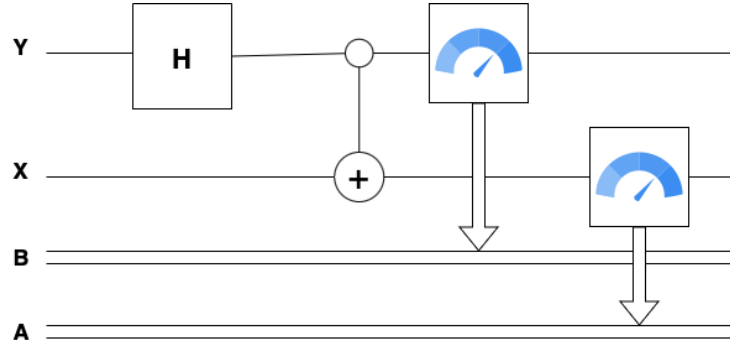


Figure 4

È spesso conveniente rappresentare i fili dei bit dopo la misurazione sullo stesso livello dei fili dei qubit, come mostrato nella figura 5

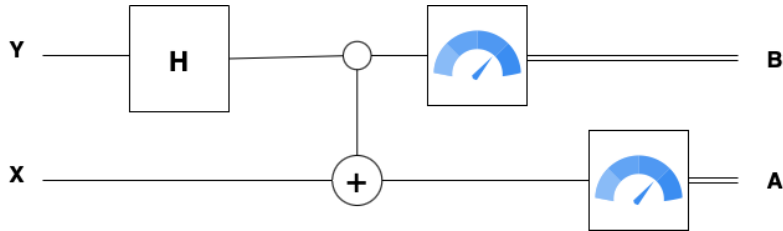


Figure 5

Ecco alcune porte comunemente usate per 1 o più qubit:

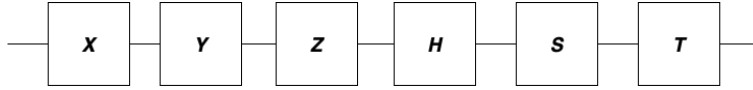


Figure 6

La figura 6 rappresenta le operazioni che si fanno su un singolo qubit, abbiamo in ordine: σ_x , σ_y , σ_z , Hadamard e le due Phase Operations.

La porta Not possiamo rappresentarla anche come nella figura 7.

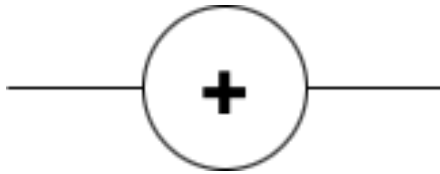


Figure 7: Not gate

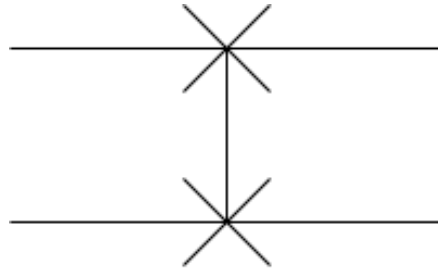


Figure 8: SWAP gate

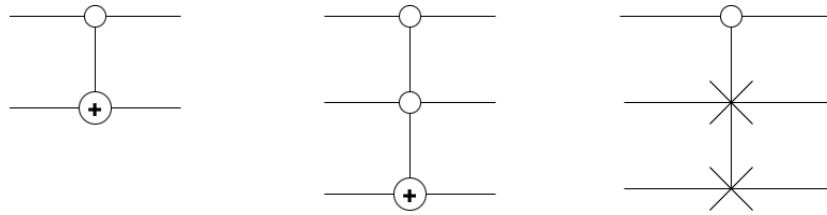


Figure 9

La figura 8 rappresenta la porta SWAP. Infine la figura 9 rappresentano le porte di controllo, rispettivamente **controlled-NOT**, **controlled-controlled-NOT** e **controlled-SWAP**.

Operazioni arbitrarie sono rappresentate da rettangoli nominati con il nome dell'operazione unitaria. La figura 10 mostra un esempio. La figura a destra è la versione controllata.

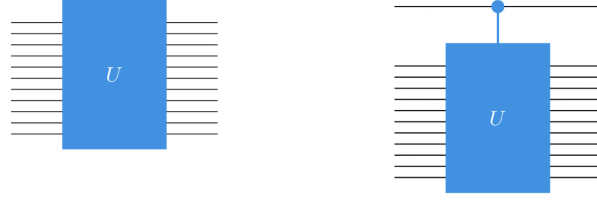


Figure 10

2.4 Limitazioni nell'informazione quantistica

2.4.1 Irrilevanza della fase globale

Siano $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ due vettori unitari che rappresentano due stati quantistici. Assumiamo che esista un numero complesso α , con $|\alpha| = 1$, tale che:

$$|\phi\rangle = \alpha|\psi\rangle$$

Allora diciamo che i vettori $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ **differiscono di una fase globale**. Diciamo anche che α è la fase globale.

Consideriamo, quindi, un sistema che sta in uno dei due stati, $|\phi\rangle$ o $|\psi\rangle$ e che differiscono di una fase globale. Analizziamo cosa succede durante la misurazione. Nel caso in cui il sistema si trovi nello stato $|\psi\rangle$, abbiamo che la probabilità di misurare uno stato classico $a \in \Sigma$ è:

$$|\langle a|\psi\rangle|^2$$

Nel secondo caso, in cui lo stato sia $|\phi\rangle$, la probabilità che la misurazione dia come risultato lo stato $a \in \Sigma$ è:

$$|\langle a|\phi\rangle|^2 = |\alpha\langle a|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2|\langle a|\psi\rangle|^2 = |\langle a|\psi\rangle|^2$$

perchè $|\alpha|^2 = 1$. Notiamo che la probabilità di misurare uno stato classico a è esattamente lo stesso per i due stati.

Consideriamo ora l'applicazione di un'operazione unitaria U su entrambi gli stati. Nel caso in cui lo stato iniziale è $|\psi\rangle$, allora dopo l'applicazione il nuovo stato diventa:

$$U|\psi\rangle$$

Nel caso, invece, in cui lo stato iniziale è $|\phi\rangle$, dopo l'applicazione lo stato diventa:

$$U|\phi\rangle = \alpha U|\psi\rangle$$

Notiamo che i due stati risultanti differiscono dalla stessa fase globale α .

Concludiamo che, i due stati che differiscono da una fase globale sono completamente indistinguibili. Per questo, $|\phi\rangle$ e $|\psi\rangle$ sono considerati **equivalenti**, e sono visti effettivamente come lo stesso stato.

Example 2.5

Ad esempio $|-\rangle$ e $-|-\rangle$ differiscono per la fase globale -1 , quindi possono essere considerati lo stesso stato.

2.4.2 Teorema no-cloning

Theorem 2.2: No-cloning

Siano X ed Y due sistemi che condividono lo stesso insieme di stati classici Σ (avente almeno 2 elementi). Allora, possiamo affermare che **non** esiste uno stato quantistico $|\phi\rangle$ di Y e un'operazione unitaria U sul sistema composto (X, Y) tale che

$$U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in X$$

Proof. Σ deve contenere almeno due elementi. Scegliamo, quindi, $a, b \in \Sigma$, con $a \neq b$. Supponiamo **per assurdo** che esista uno stato quantistico $|\phi\rangle$ e un'operazione unitaria U sul sistema composto (X, Y) tale che

$$U(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in X$$

Nel nostro caso:

$$U(|a\rangle \otimes |\phi\rangle) = |a\rangle \otimes |a\rangle \wedge U(|b\rangle \otimes |\phi\rangle) = |b\rangle \otimes |b\rangle$$

Consideriamo il caso in cui $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$. Sfruttando la caratteristica della linearità del prodotto tensoriale nel primo argomento ed la linearità del prodotto matrice-vettore nel secondo argomento, abbiamo che:

$$\begin{aligned} & U\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes |\phi\rangle\right) \\ &= U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle \otimes |\phi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \otimes |\phi\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

Svolgendo i conti senza sfruttare la linearità degli argomenti, notiamo che:

$$\begin{aligned} & U\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes |\phi\rangle\right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle\right) \neq \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle \otimes |a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle \otimes |b\rangle \end{aligned}$$

□

Observation 2.3

La **clonazione perfetta** non esiste, ma è possibile clonare con una percentuale di accuratezza limitata.

Observation 2.4

È possibile clonare perfettamente stati appartenenti a una base standard, come gli stati classici dei qubits.

Costruiamo un circuito in grado di clonare uno stato classico del qubit, utilizzando l'operazione del **control-not**:

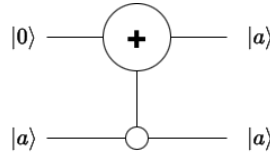


Figure 11

2.5 Teletrasporto Quantistico

Definition 2.6: Teletrasporto Quantistico

Definiamo come **teletrasporto quantistico** il protocollo tale che la sua funzione è il trasporto di informazione sfruttando gli e-bit (stati quantistici entangled).

Siano, quindi, Alice (mittente) e Bob (destinatario) due entità che vogliono scambiarsi un qubit. Assumiamo che entrambe le entità condividano un e-bit: Alice conserva il qubit **A** e Bob il qubit **B** e la loro unione formano lo stato **entangled** $|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$. Alice vuole 'spedire' il qubit **Q**, ovvero far in modo che Bob abbia un qubit avente lo stesso stato. Bob ed Alice non conoscono alcuna informazione riguardo allo stato **Q**. Non vi sono assunzioni riguardo a quest'ultimo, quindi potrebbe essere anche uno stato entangled con un altro stato.

La figura 12 mostra il circuito che descrive il funzionamento del protocollo.

Observation 2.5

Notiamo che il qubit **Q** che Alice vuole trasmettere a Bob viene distrutto, richiamando quindi il teorema no-cloning. Questo è il costo del teletrasporto quantistico.

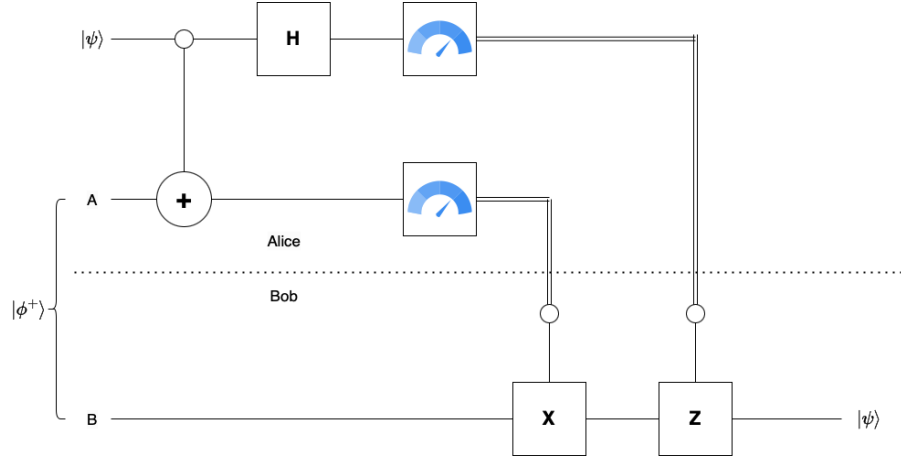


Figure 12

Andiamo ora ad analizzare il funzionamento del circuito. Sia Q nello stato generico

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Sia (B, A, Q) il sistema che dello stato del circuito. Lo stato iniziale di tale sistema è:

$$|\phi^+\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|110\rangle + \beta|001\rangle + \beta|111\rangle)$$

Lo stato dopo aver applicato l'operazione controlled-not diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|000\rangle + \alpha|110\rangle + \beta|011\rangle + \beta|101\rangle)$$

Applichiamo ora l'operazione di Hadamard, trasformando lo stato in:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|00\rangle|+\rangle + \alpha|11\rangle|+\rangle + \beta|01\rangle|-\rangle + \beta|10\rangle|-\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha|000\rangle + \alpha|001\rangle + \alpha|110\rangle + \alpha|111\rangle + \beta|010\rangle - \beta|011\rangle + \beta|100\rangle - \beta|101\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |00\rangle + \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) |01\rangle + \frac{1}{2} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) |10\rangle + \frac{1}{2} (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) |11\rangle \end{aligned}$$

Analizziamo i possibili casi di misurazione:

- La probabilità di misurare $A = 0$ e $Q = 0$ è di

$$\left\| \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |00\rangle \right\|^2 = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{4}$$

e lo stato (B, A, Q) diventa:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |00\rangle$$

In questo caso, Bob non deve applicare alcuna operazione.

- La probabilità di misurare $A = 0$ e $Q = 1$ è di

$$\left\| \frac{1}{2} (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) |01\rangle \right\|^2 = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 - |\beta|^2) = \frac{1}{4}$$

e lo stato (B, A, Q) diventa:

$$(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) |01\rangle$$

In questo caso, Bob deve applicare l'operazione Z al suo qubit B , ovvero:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |01\rangle$$

- La probabilità di misurare $A = 1$ e $Q = 0$ è di

$$\left\| \frac{1}{2} (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) |10\rangle \right\|^2 = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{4}$$

e lo stato (B, A, Q) diventa:

$$(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) |10\rangle$$

In questo caso, Bob deve applicare l'operazione X al suo qubit B , ovvero:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |10\rangle$$

- La probabilità di misurare $A = 1$ e $Q = 1$ è di

$$\left\| \frac{1}{2} (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) |11\rangle \right\|^2 = \frac{1}{4} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = \frac{1}{4}$$

e lo stato (B, A, Q) diventa:

$$(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) |11\rangle$$

In questo caso, Bob deve applicare l'operazione X e Z al suo qubit B , ovvero:

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) |11\rangle$$

Osserviamo che in tutti i casi, lo stato di B è uguale a $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, ovvero lo stato iniziale di Q ; abbiamo, quindi, teletrasportato l'informazione del qubit Q da Alice a Bob.