Árvore Binária de Busca

Estrutura de Dados Avançada — QXD0115

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz

gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2025

Introdução

Motivação

Problema da Busca

Seja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ um conjunto de chaves satisfazendo $s_1 < s_2 < \ldots < s_n$. Chamamos S um conjunto ordenável.

Seja x um valor dado. O objetivo é verificar se $x \in S$ ou não. Em caso positivo, localizar x em S, isto é, determinar o índice j tal que $x = s_j$.

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$ usando Busca binária
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Encadeadas:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $O(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $O(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $O(\lg n)$ usando Busca binária
- Mas inserir e remover leva $O(n)$

Veremos árvores binárias de busca

- Inserção, Remoção e Busca levam $O(h)$ onde h é a altura da árvore

Árvore Binária

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição

Uma Árvore Binária T é um conjunto finito de elementos denominados **nós** ou **vértices**, tal que:

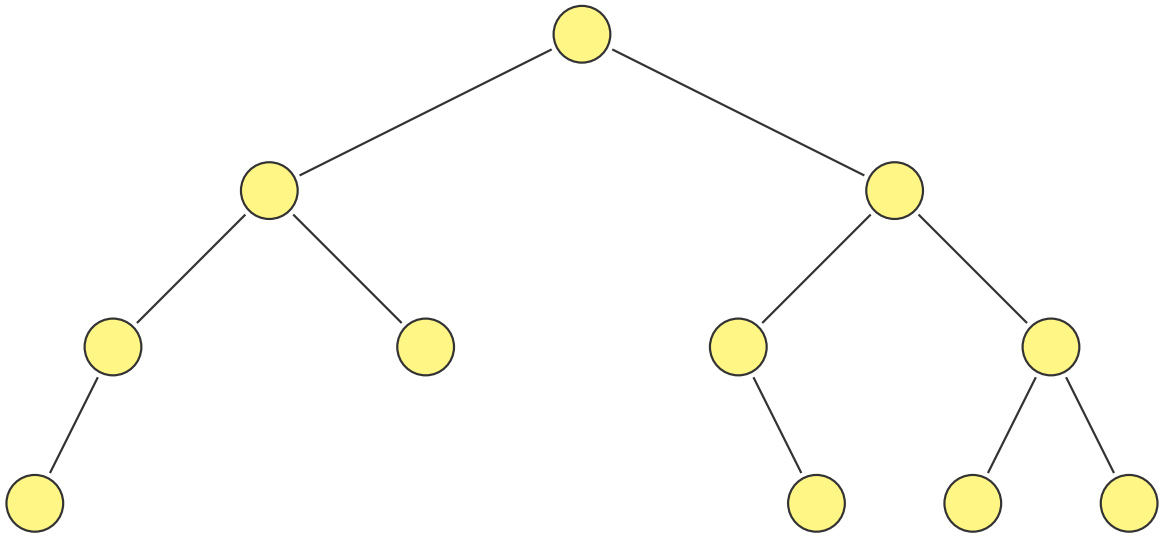
Árvore Binária

Definição

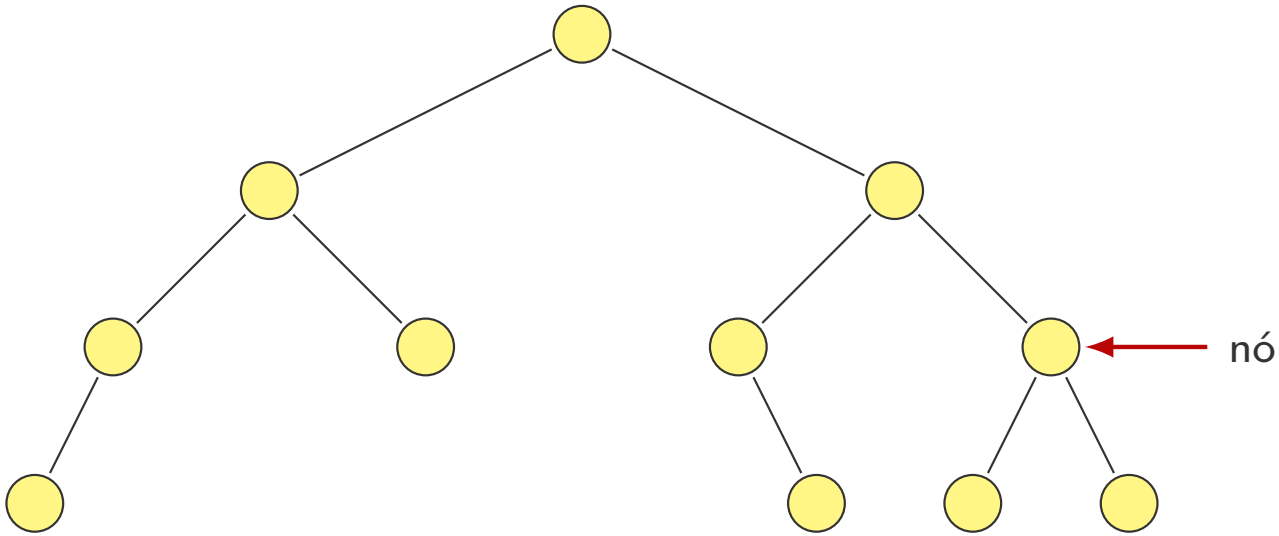
Uma Árvore Binária T é um conjunto finito de elementos denominados **nós** ou **vértices**, tal que:

- $T = \emptyset$ e a árvore é dita vazia, ou
- existe um nó r especial chamado **raiz** de T, e os restantes podem ser divididos em dois subconjuntos disjuntos T_E^r e T_D^r, que são a subárvore esquerda e direita da raiz, respectivamente, as quais são também árvores binárias.

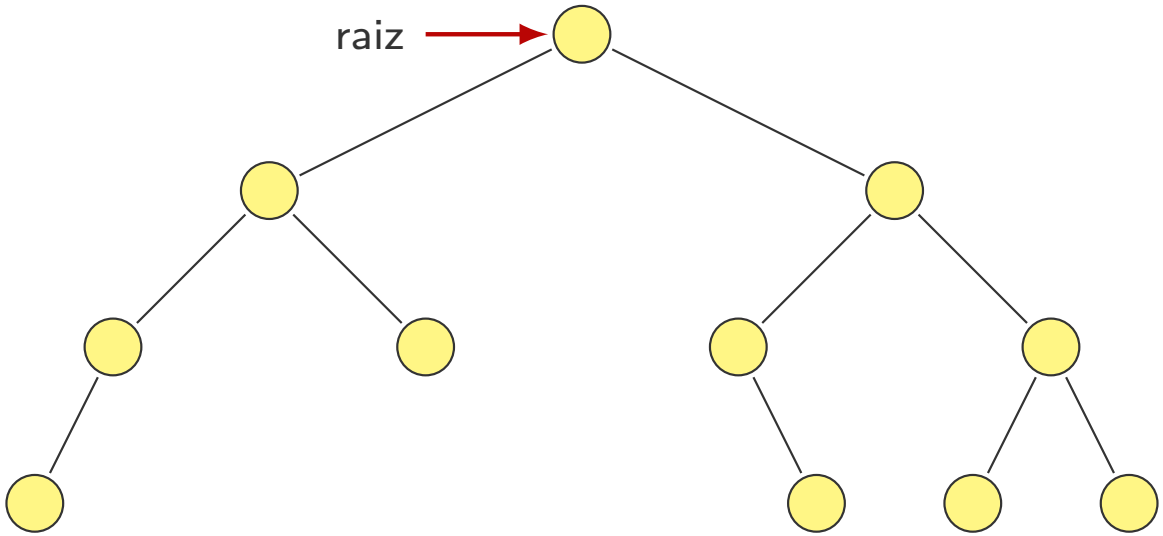
Definições Adicionais



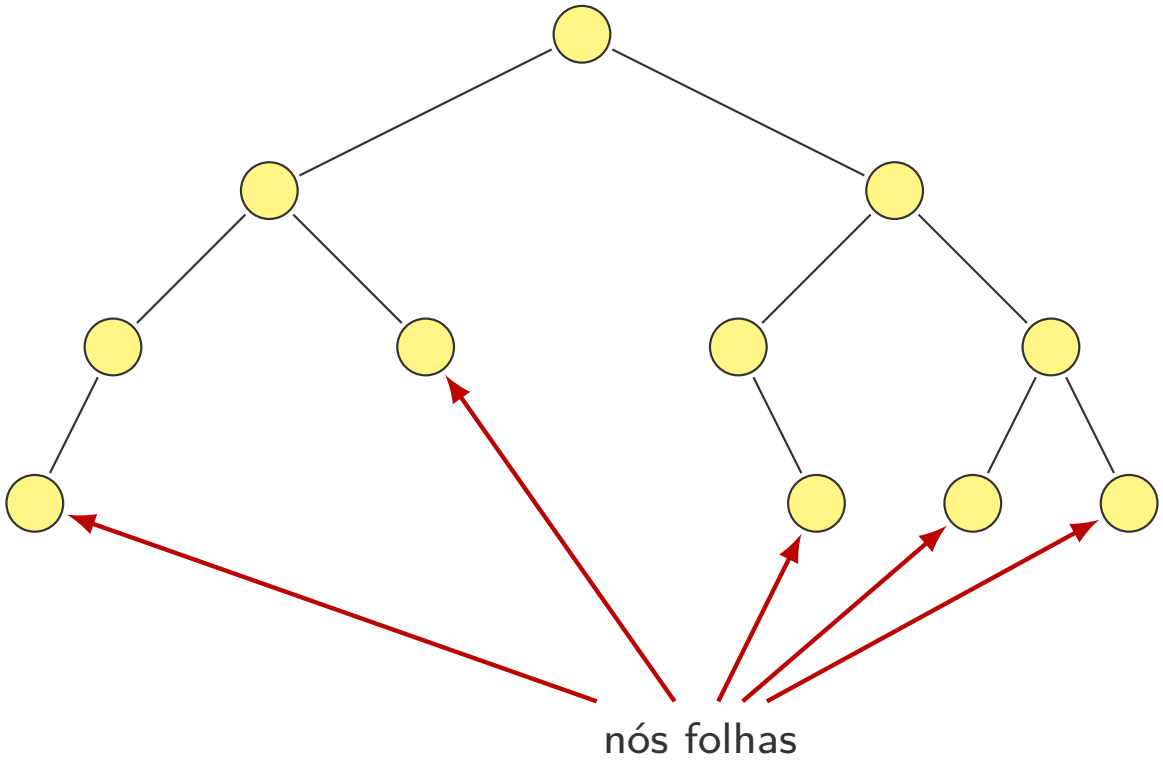
Definições Adicionais



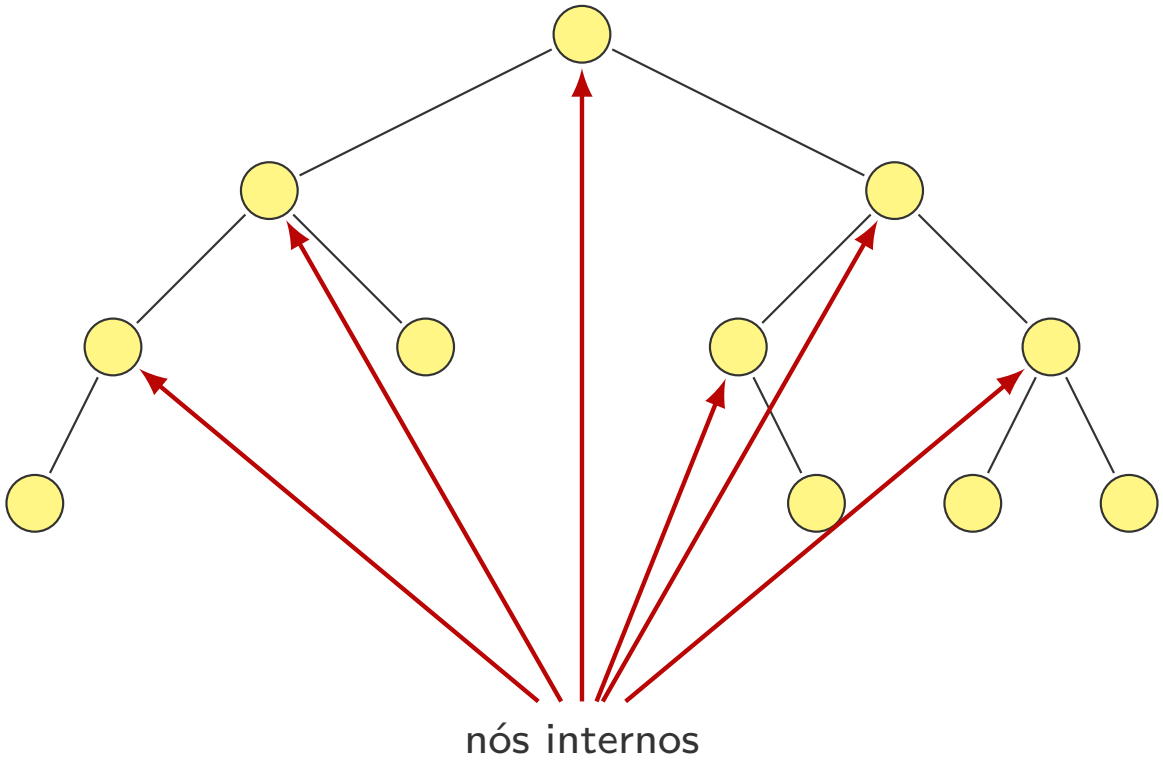
Definições Adicionais



Definições Adicionais

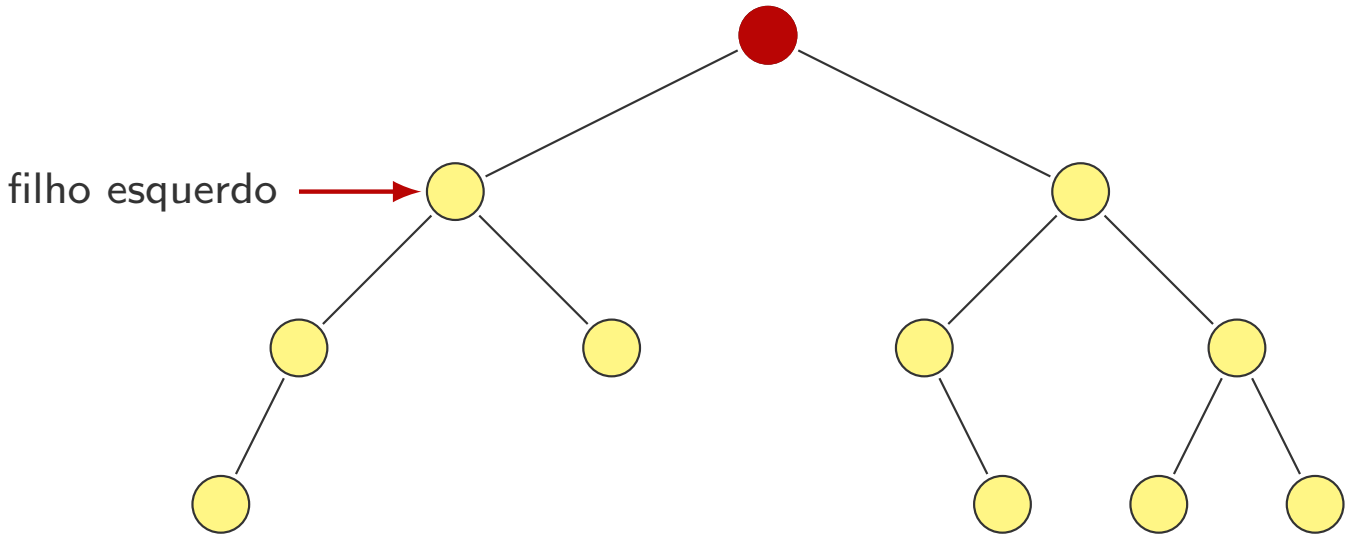


Definições Adicionais

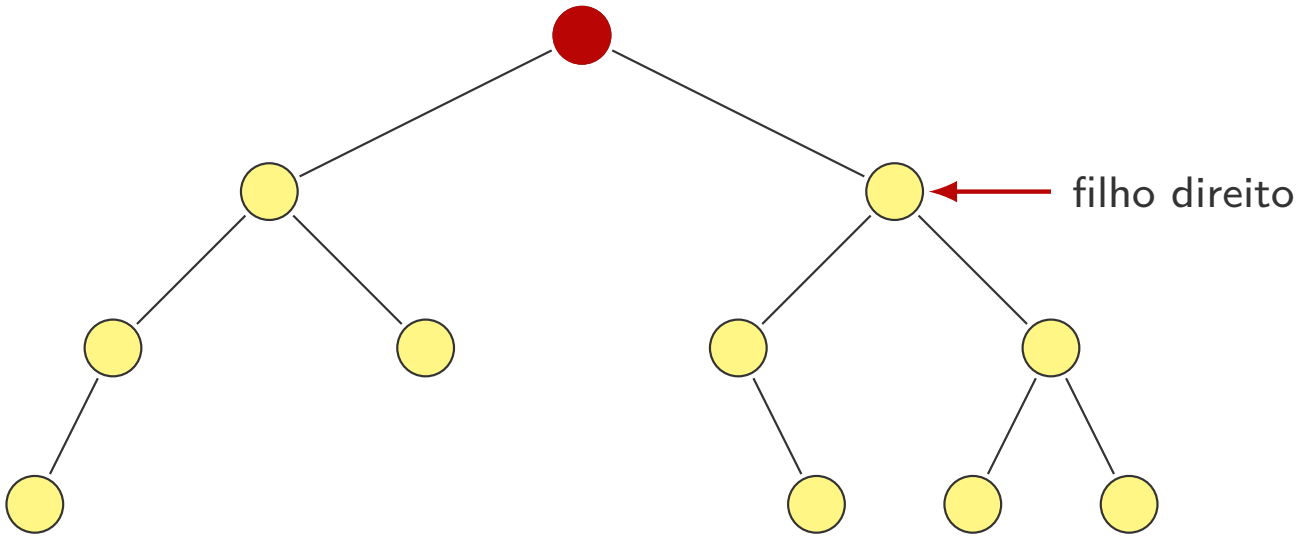


Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

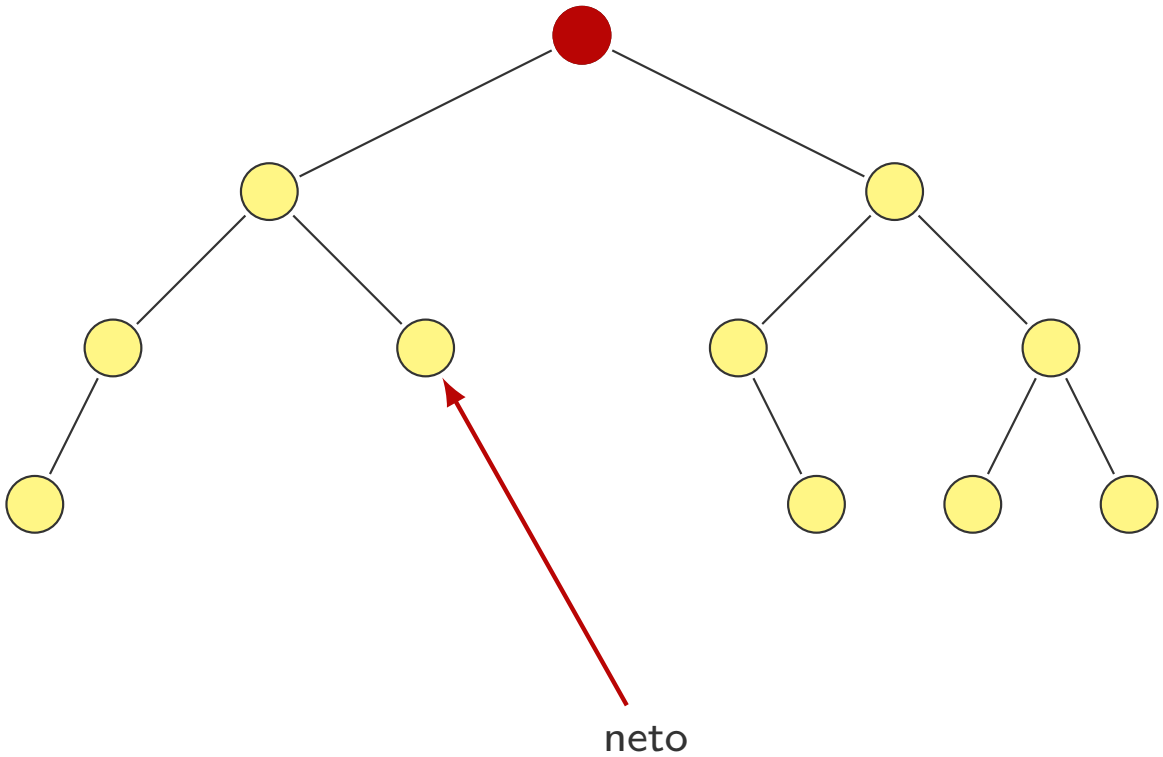


Definições Adicionais



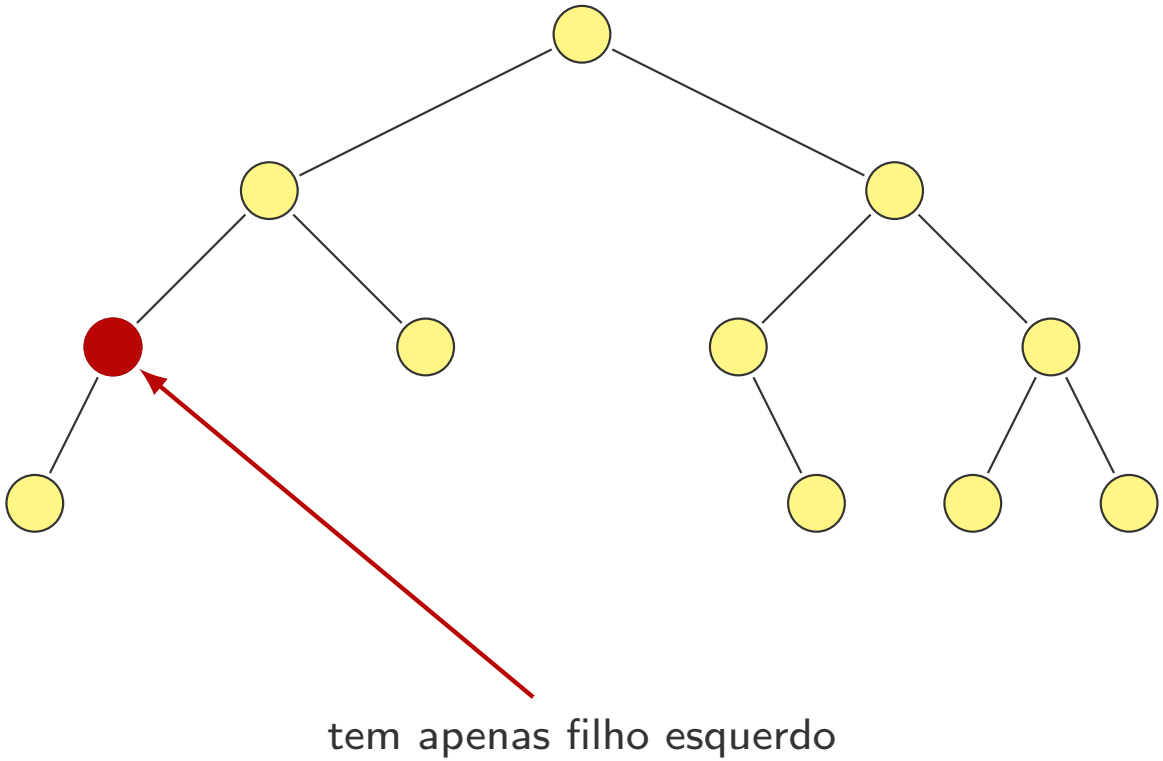
Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



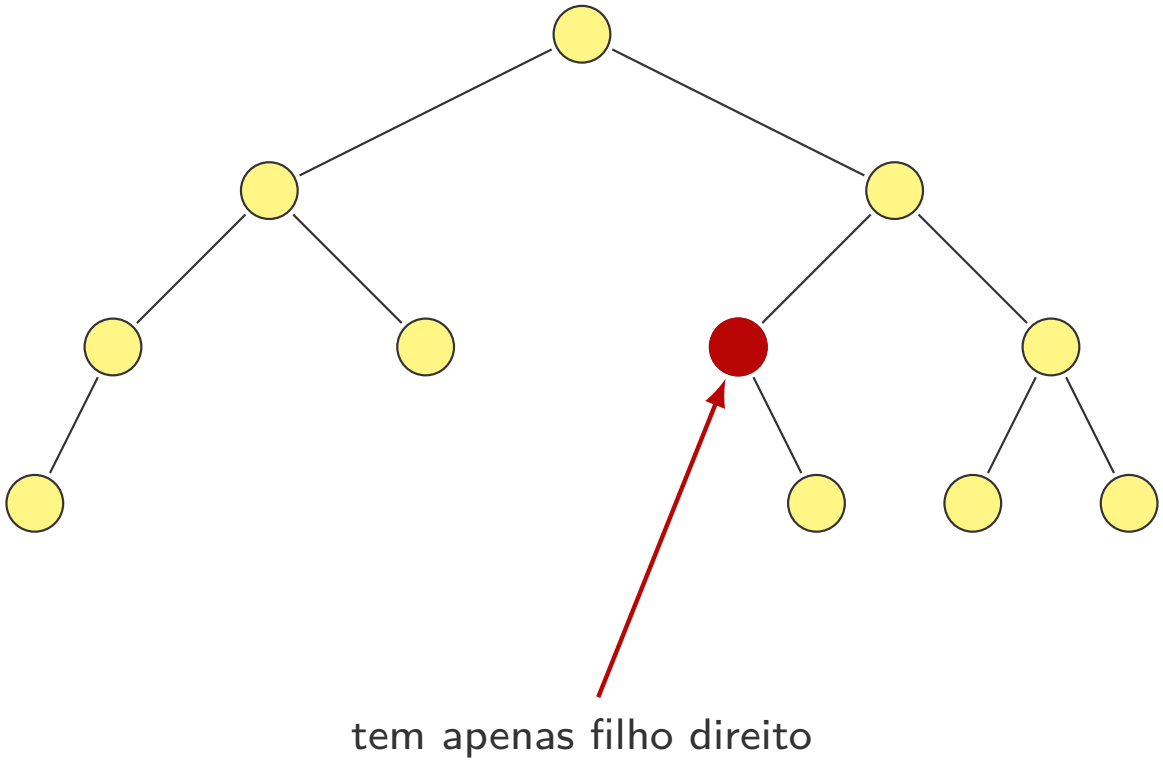
Definições Adicionais

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



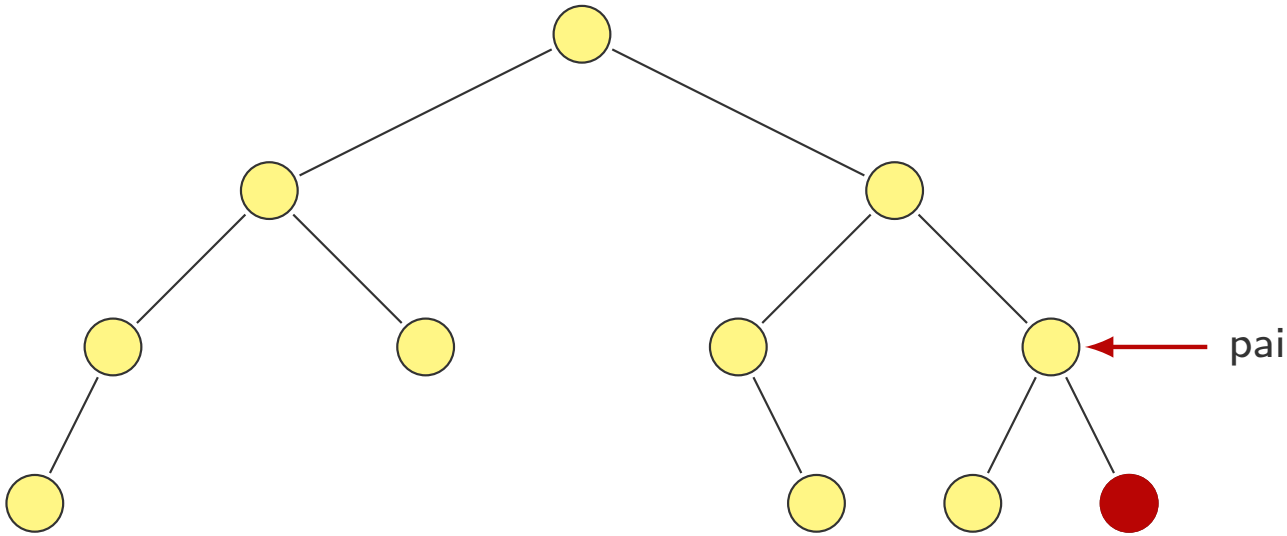
Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

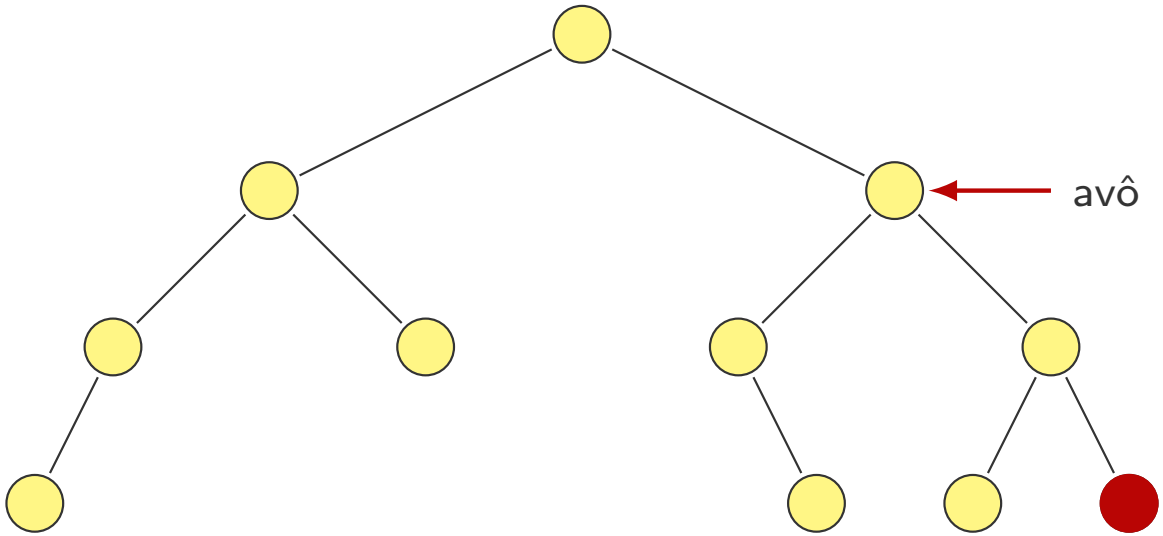


Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

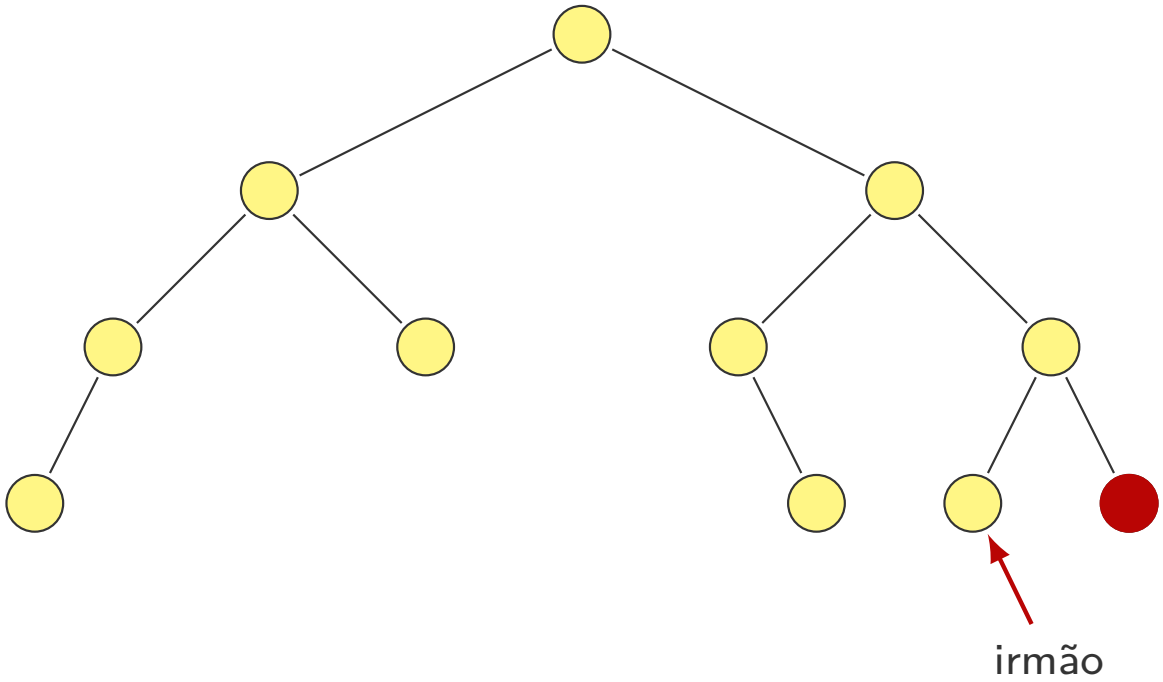


Definições Adicionais



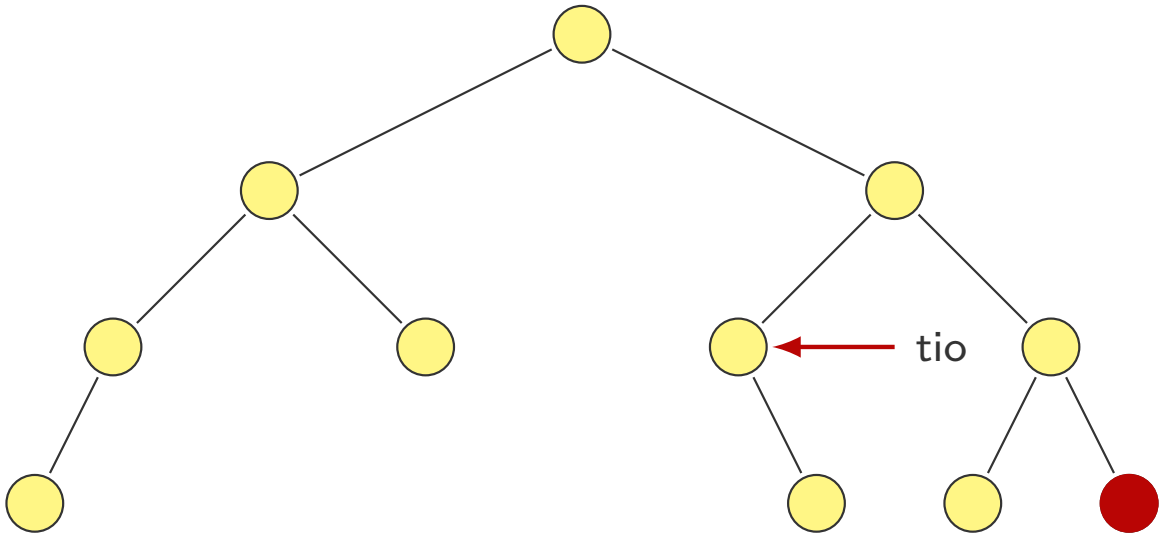
Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

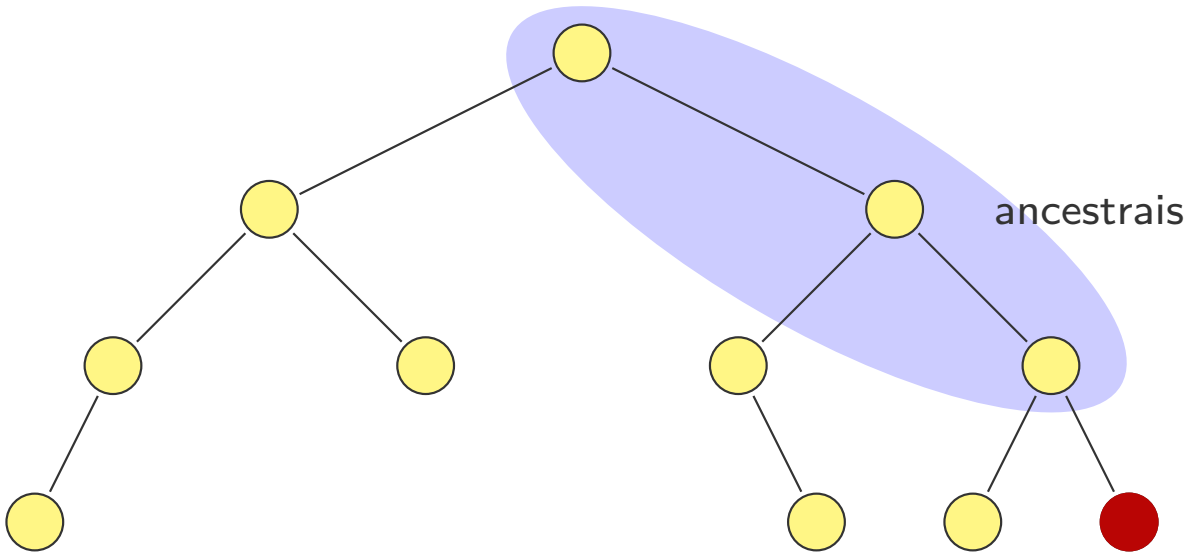


Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



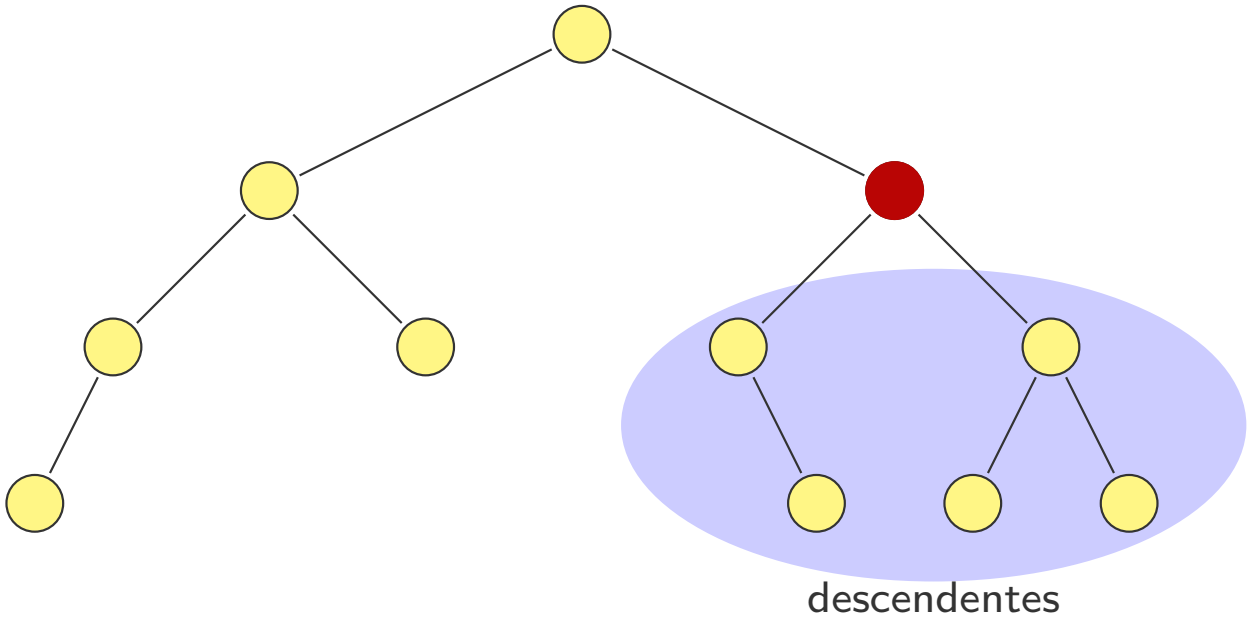
Definições Adicionais



Uma sequência de nós distintos $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tal que existe sempre entre nós consecutivos a relação "é filho de" ou "é pai de", é denominada um caminho na árvore.

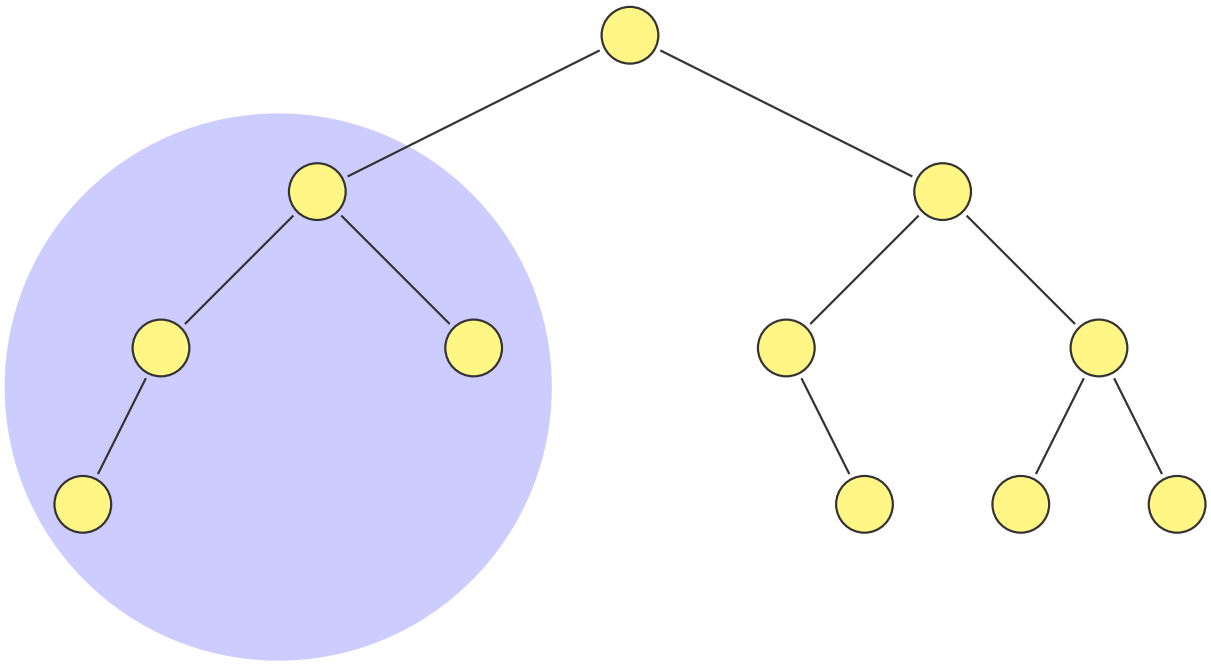
Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



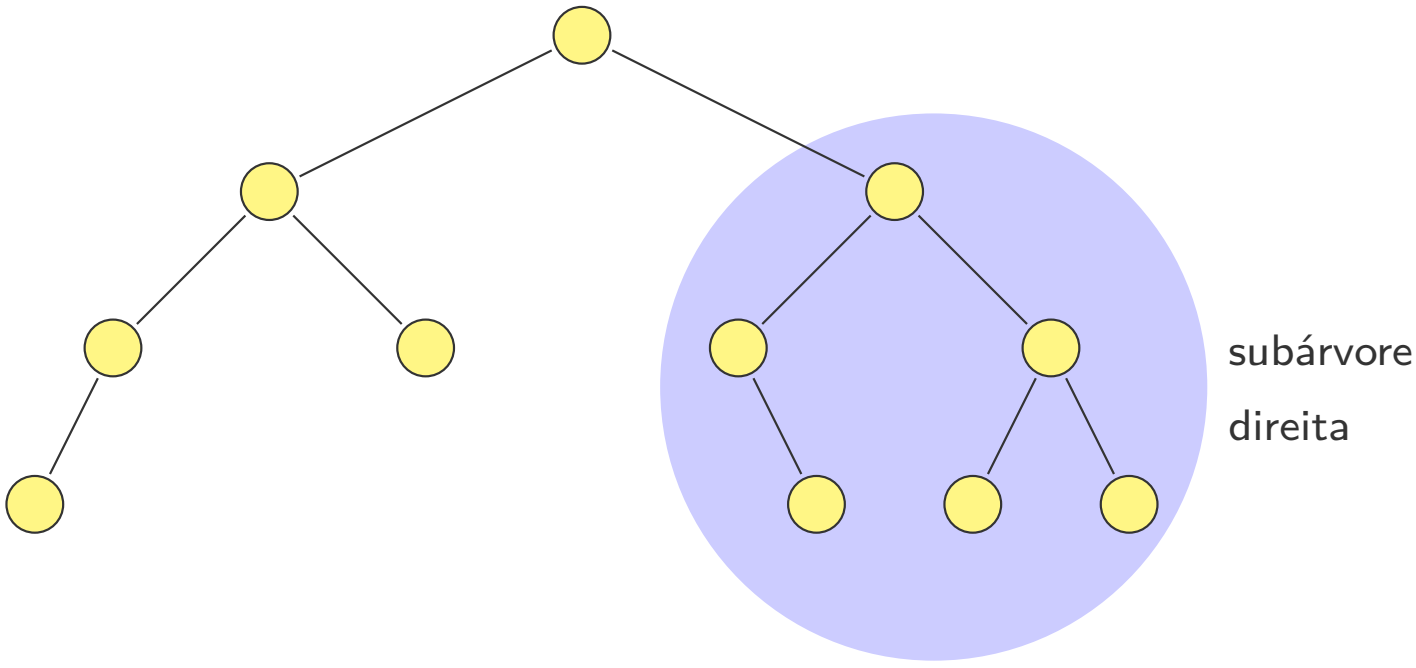
Definições Adicionais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



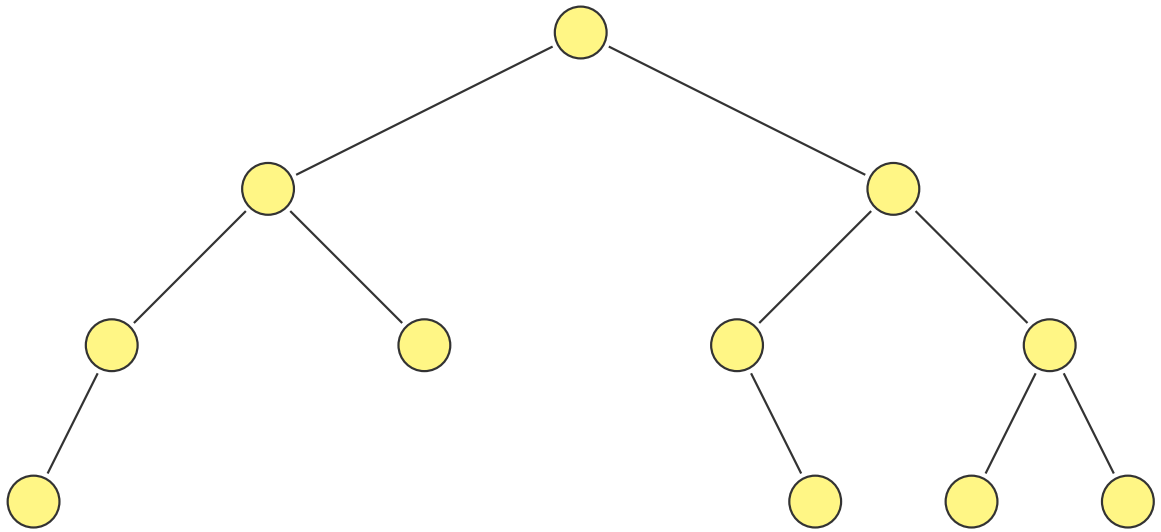
Definições Adicionais

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



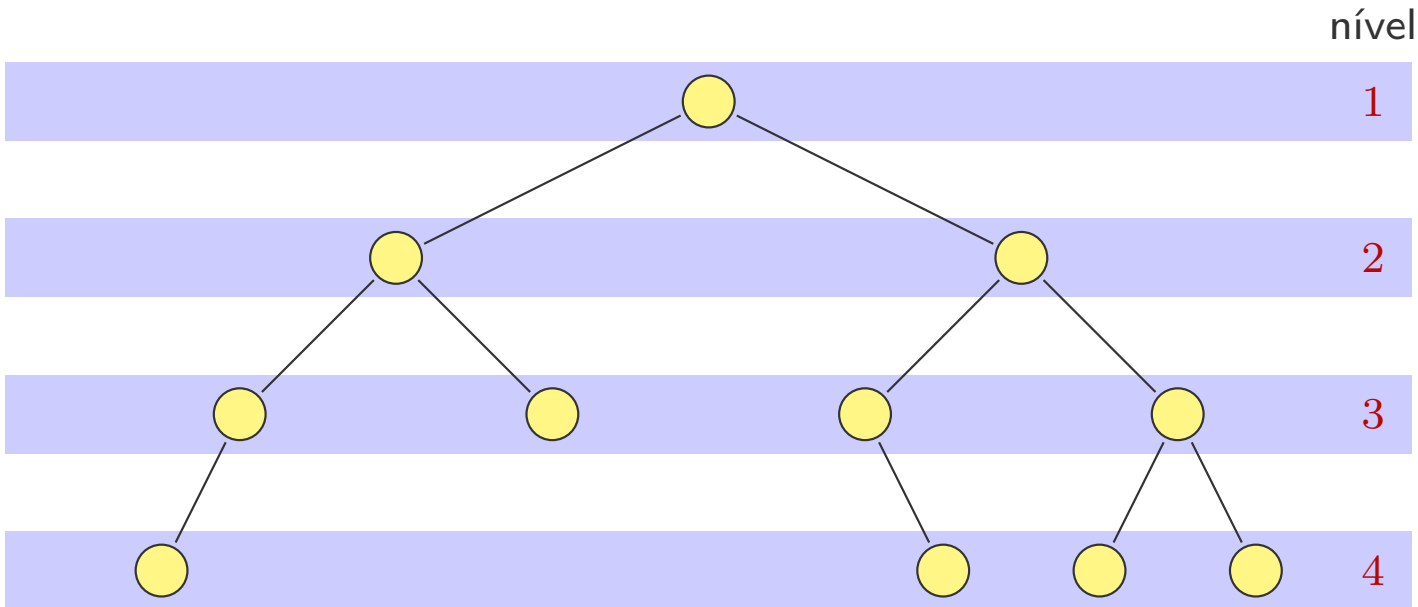
Definições — Profundidade, Nível e Altura

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



Definições — Profundidade, Nível e Altura

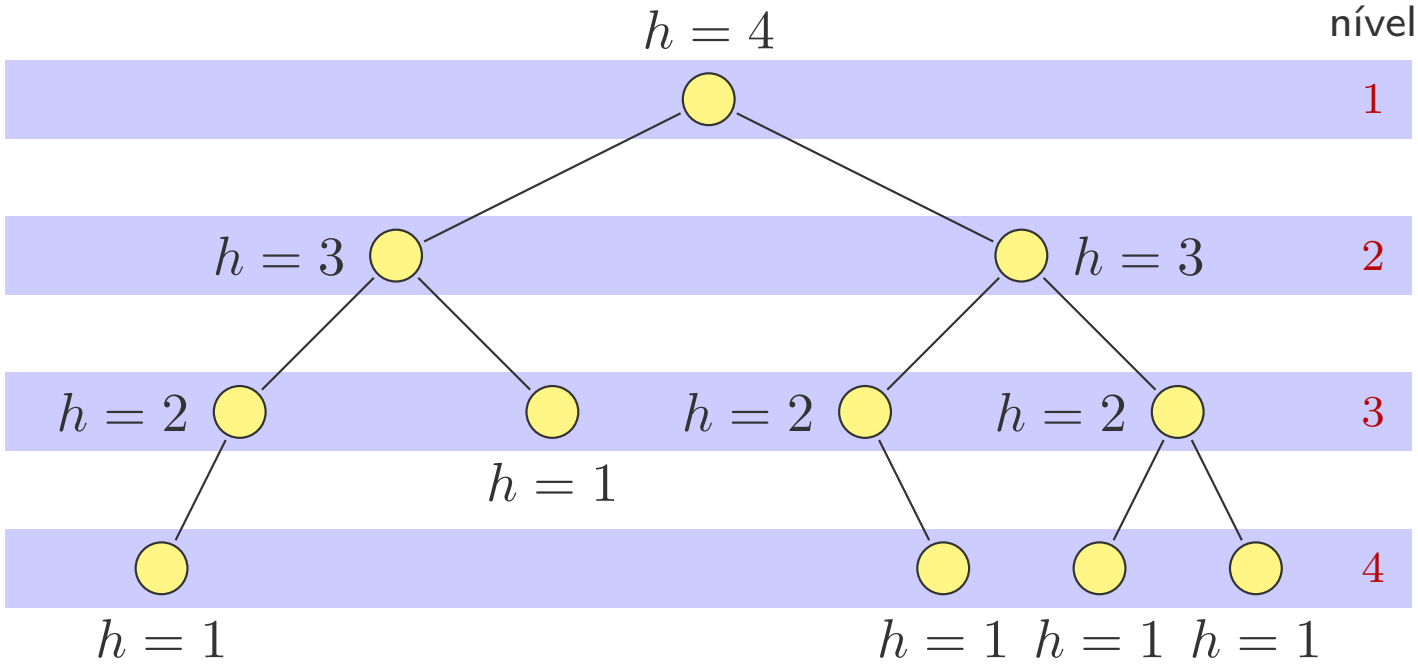
Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



Profundidade de um nó v: Número de nós no caminho de v até a raiz.
Dizemos que todos os nós com profundidade i estão no nível i.

Definições — Profundidade, Nível e Altura

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá



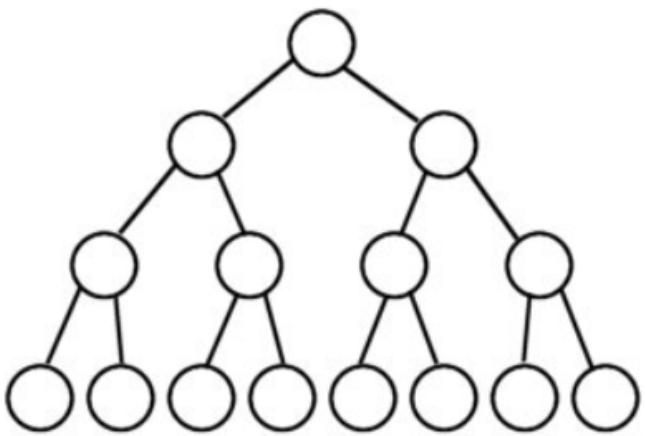
Profundidade de um nó v: Número de nós no caminho de v até a raiz. Dizemos que todos os nós com profundidade i estão no nível i.

Altura h de um nó v: Número de nós no maior caminho de v até uma folha descendente.

Árvore Binária Cheia

Definição

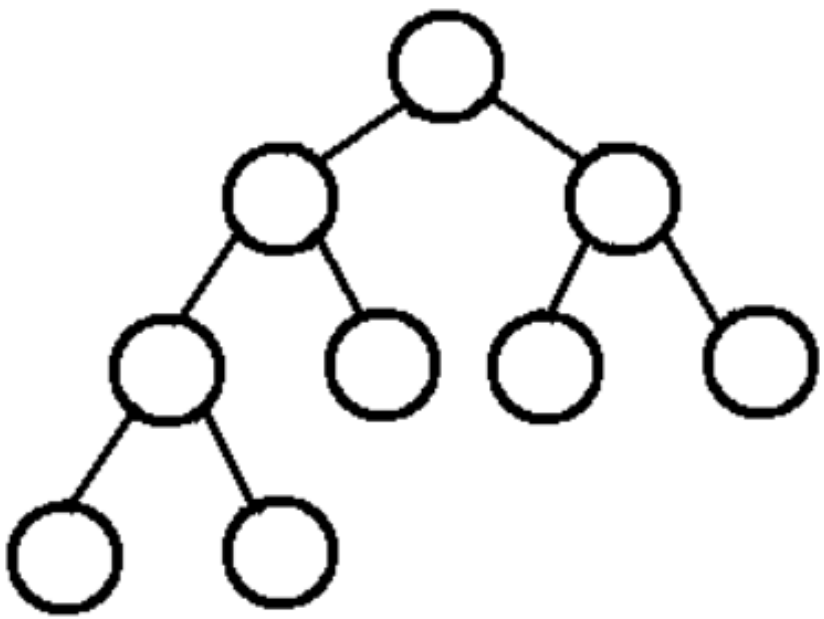
Uma **árvore binária cheia** é aquela em que, se v é um nó com alguma de suas subárvores vazias, então v se localiza no último nível.



Árvore Binária Completa

Definição

Uma **árvore binária completa** é aquela que apresenta a seguinte propriedade: se v é um nó tal que alguma subárvore de v é vazia, então v se localiza ou no último ou no penúltimo nível da árvore.



Sequência de Teoremas

Altura da árvore binária completa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Teorema 1 (Jayme e Lilian)

Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Então T possui altura mínima.

Altura da árvore binária completa

Teorema 1 (Jayme e Lilian)

Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Então T possui altura mínima.

Prova: Seja T é uma árvore binária completa com n nós, e seja T' uma árvore binária de altura mínima com n nós.

Altura da árvore binária completa

Teorema 1 (Jayme e Lilian)

Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Então T possui altura mínima.

Prova: Seja T é uma árvore binária completa com n nós, e seja T' uma árvore binária de altura mínima com n nós.

Caso 1: Se T' é também completa, então T e T' possuem a mesma altura, o que implica que T possui altura mínima.

Altura da árvore binária completa

Teorema 1 (Jayme e Lilian)

Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Então T possui altura mínima.

Prova: Seja T é uma árvore binária completa com n nós, e seja T' uma árvore binária de altura mínima com n nós.

Caso 1: Se T' é também completa, então T e T' possuem a mesma altura, o que implica que T possui altura mínima.

Caso 2: Se T' não é completa, efetua-se a seguinte operação: retirar uma folha w de seu último nível e tornar w o filho de algum nó v que possui alguma de suas subárvores vazias, localizado em algum nível acima do penúltimo.

Altura da árvore binária completa

Teorema 1 (Jayme e Lilian)

Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Então T possui altura mínima.

Prova: Seja T é uma árvore binária completa com n nós, e seja T' uma árvore binária de altura mínima com n nós.

Caso 1: Se T' é também completa, então T e T' possuem a mesma altura, o que implica que T possui altura mínima.

Caso 2: Se T' não é completa, efetua-se a seguinte operação: retirar uma folha w de seu último nível e tornar w o filho de algum nó v que possui alguma de suas subárvores vazias, localizado em algum nível acima do penúltimo.

Repete-se a operação até que não seja mais possível realizá-la, isto é, até que a árvore T'', resultante da transformação, seja completa.

Altura da árvore binária completa

Continuação da prova do Teorema 1:

T'' não pode ter altura inferior a T', pois T' é mínima.

Altura da árvore binária completa

Continuação da prova do Teorema 1:

T'' não pode ter altura inferior a T', pois T' é mínima.

T'' não pode ter altura superior a T', pois nenhum nó foi movido para baixo.

Altura da árvore binária completa

Continuação da prova do Teorema 1:

T'' não pode ter altura inferior a T', pois T' é mínima.

T'' não pode ter altura superior a T', pois nenhum nó foi movido para baixo.

Então as alturas de T' e T'' são iguais. Ou seja, T'' tem altura mínima.

Altura da árvore binária completa

Continuação da prova do Teorema 1:

T'' não pode ter altura inferior a T', pois T' é mínima.

T'' não pode ter altura superior a T', pois nenhum nó foi movido para baixo.

Então as alturas de T' e T'' são iguais. Ou seja, T'' tem altura mínima.

Como T'' é completa, conclui-se que as alturas de T e T'' também coincidem. Isto é, T possui altura mínima. □

Número mínimo e máximo de nós

Teorema 2

Dada uma árvore binária completa com altura h, seu número mínimo de nós é 2^{h-1} e seu número máximo de nós é $2^h - 1$.

Exercício: Provar este teorema. Dica: note que, numa árvore binária completa com altura h, os nós nos primeiros $h-1$ níveis formam uma árvore cheia e no último nível há k nós adicionais, tal que $1 \leq k \leq 2^{h-1}$.

Altura da árvore binária completa

Teorema 3

Se T é uma árvore binária completa com $n > 0$ nós, então T possui altura $h = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Altura da árvore binária completa

Teorema 3

Se T é uma árvore binária completa com $n > 0$ nós, então T possui altura $h = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

Prova: Seja T uma árvore binária completa com $n > 0$ nós.
Pelo Teorema 2, temos que:

$$\begin{aligned} 2^{h-1} &\leq n \leq 2^h - 1 \\ 2^{h-1} &\leq n < 2^h \\ \lg 2^{h-1} &\leq \lg n < \lg 2^h \\ h - 1 &\leq \lg n < h \end{aligned}$$

Isso implica que $\lfloor \lg n \rfloor = h - 1$, o que nos dá $h = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. ■

Relação entre altura e número de nós

Seja T uma árvore com altura h qualquer fixa.

- Pergunta: Quantos nós T tem no mínimo (em função de h)?

Relação entre altura e número de nós

Seja T uma árvore com altura h qualquer fixa.

- Pergunta: Quantos nós T tem no mínimo (em função de h)?
  - **Resposta:** T tem no mínimo h nós.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

Relação entre altura e número de nós

Seja T uma árvore com altura h qualquer fixa.

- Pergunta: Quantos nós T tem no mínimo (em função de h)?
  - **Resposta:** T tem no mínimo h nós.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

- Pergunta: Quantos nós T tem no máximo (em função de h)?

Relação entre altura e número de nós

Seja T uma árvore com altura h qualquer fixa.

- Pergunta: Quantos nós T tem no mínimo (em função de h)?
  - **Resposta:** T tem no mínimo h nós.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

- Pergunta: Quantos nós T tem no máximo (em função de h)?
  - **Resposta:** T tem no máximo $2^h - 1$ nós.
    Neste caso, T é uma árvore cheia.

Relação entre número de nós e altura (cont.)

Seja T uma árvore com número n de nós fixo.

- Pergunta: Qual a altura máxima de T (em função de n)?

Relação entre número de nós e altura (cont.)

Seja T uma árvore com número n de nós fixo.

- Pergunta: Qual a altura máxima de T (em função de n)?
  - **Resposta:** T tem no máximo n.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

Relação entre número de nós e altura (cont.)

Seja T uma árvore com número n de nós fixo.

- Pergunta: Qual a altura máxima de T (em função de n)?
  - **Resposta:** T tem no máximo n.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

- Pergunta: Qual a altura mínima de T (em função de n)?

Relação entre número de nós e altura (cont.)

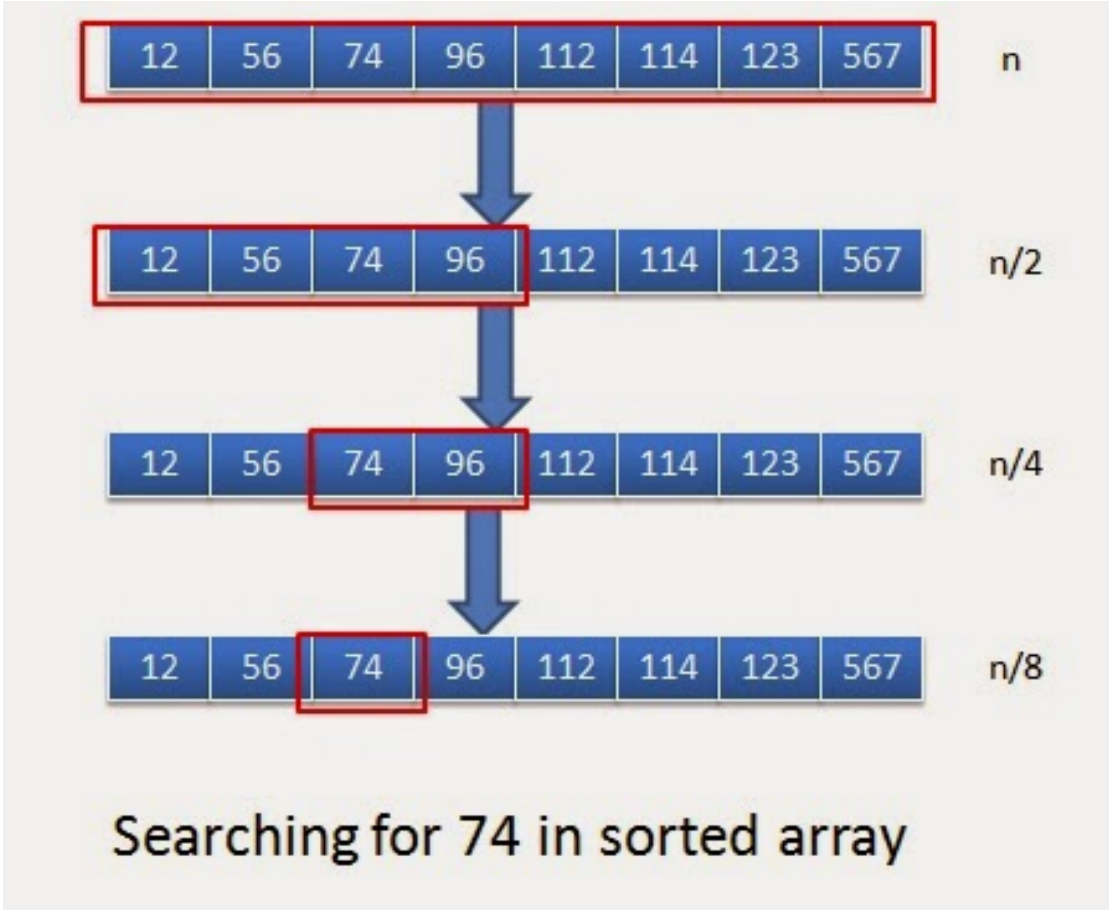
Seja T uma árvore com número n de nós fixo.

- Pergunta: Qual a altura máxima de T (em função de n)?
  - **Resposta:** T tem no máximo n.
    Neste caso, ela T é uma árvore caminho.

- Pergunta: Qual a altura mínima de T (em função de n)?
  - **Resposta:** T altura no mínimo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$.
    Neste caso, T é uma árvore completa ou pode ser transformada numa.

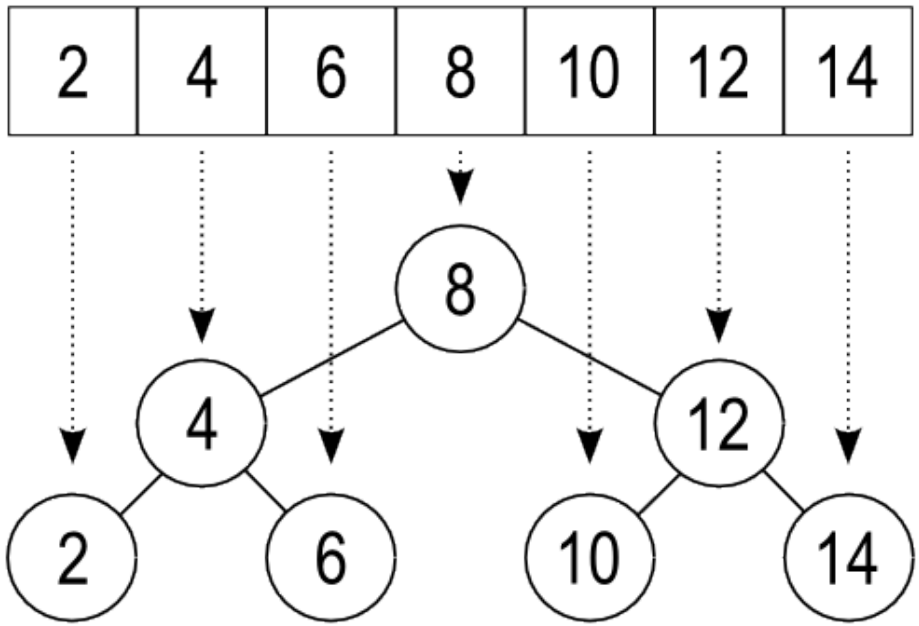
Árvore Binária de Busca

Inspiração: Busca binária



Inspiração: Busca binária

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ



Árvore Binária de Busca

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição

Seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um conjunto ordenável.

Uma Árvore Binária de Busca é uma árvore binária rotulada T com as seguintes características:

Árvore Binária de Busca

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição

Seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um conjunto ordenável.

Uma Árvore Binária de Busca é uma árvore binária rotulada T com as seguintes características:

- T possui n nós. Cada nó v de T está rotulado com um elemento $s_j \in S$ e possui como rótulo o valor $r(v) = s_j$.

Árvore Binária de Busca

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Definição

Seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um conjunto ordenável.

Uma Árvore Binária de Busca é uma árvore binária rotulada T com as seguintes características:

- T possui n nós. Cada nó v de T está rotulado com um elemento $s_j \in S$ e possui como rótulo o valor $r(v) = s_j$.
- Seja v um nó de T. Se w pertence à subárvore esquerda de v, então $r(w) < r(v)$.

Árvore Binária de Busca

Definição

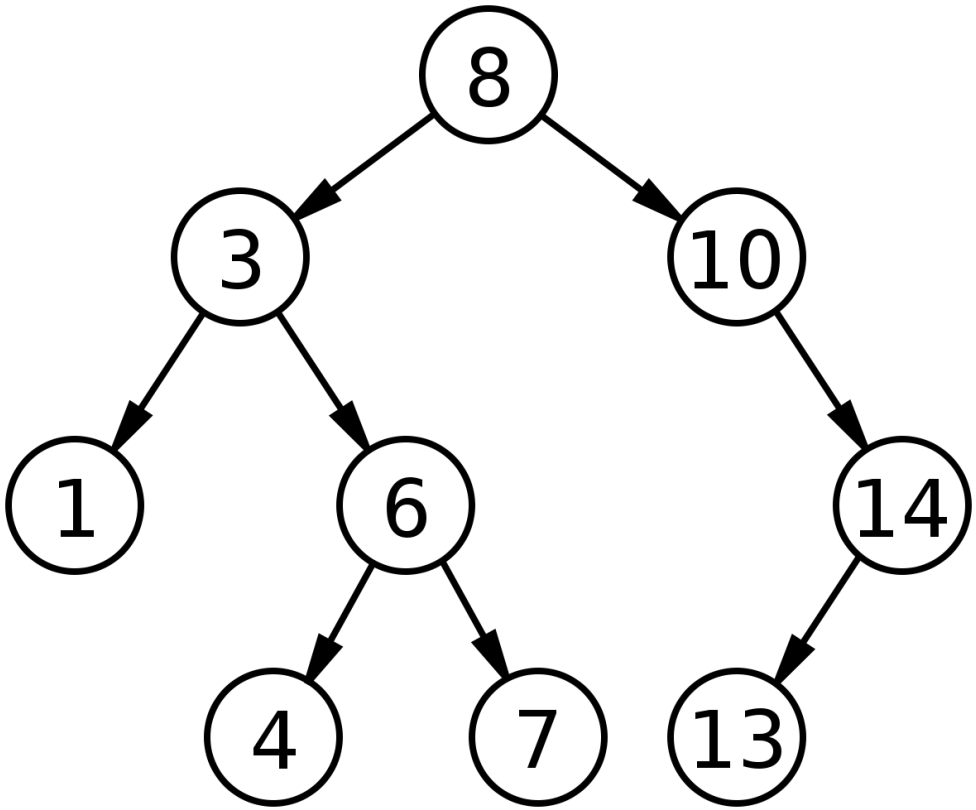
Seja $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ um conjunto ordenável.

Uma Árvore Binária de Busca é uma árvore binária rotulada T com as seguintes características:

- T possui n nós. Cada nó v de T está rotulado com um elemento $s_j \in S$ e possui como rótulo o valor $r(v) = s_j$.
- Seja v um nó de T. Se w pertence à subárvore esquerda de v, então $r(w) < r(v)$.

  Analogamente, se w pertence à subárvore direita de v, então $r(w) > r(v)$.

Exemplo



Árvore Binária de Busca

Representação no Computador

Representação — Decisões de projeto

- Em programação de computadores, os nós de uma árvore binária são definidos como um tipo de dado composto contendo pelo menos três ou quatro atributos:
  - um valor (chave a ser guardada)
  - um ponteiro para o filho esquerdo do nó
  - um ponteiro para o filho direito do nó
  - um ponteiro para o pai (obrigatório em algumas implementações)

- Para acessarmos qualquer nó da árvore, basta termos o endereço do nó raiz. Pois podemos usar recursão para fazer todo o trabalho. Portanto, a única informação inicial necessária é um ponteiro para a raiz da árvore.

Implementação do Nó da Árvore em C++

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
1  // Arquivo Node.h
2  #ifndef NODE_H
3  #define NODE_H
4
5  struct Node
6  {
7      int key;
8      Node* left;
9      Node* right;
10 };
11
12 #endif /* NODE_H */
```

TAD Árvore Binária de Busca

O tipo abstrato de dado Árvore Binária de Busca, fornece pelo menos as seguintes operações:

- Inserir chave
- Buscar chave
- Remover chave

TAD Árvore Binária de Busca

O tipo abstrato de dado Árvore Binária de Busca, fornece pelo menos as seguintes operações:

- Inserir chave
- Buscar chave
- Remover chave

Funções adicionais:

- buscar o antecessor de uma chave dada
- buscar o sucessor de uma chave dada
- buscar a menor chave
- buscar a maior chave
- retornar uma lista contendo todas as chaves em ordem crescente
- dentre outras ...

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.
- Em C++, geralmente essa memória é alocada:

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.
- Em C++, geralmente essa memória é alocada:
  1. de forma direta, usando o operador `new`

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.
- Em C++, geralmente essa memória é alocada:
  1. de forma direta, usando o operador `new`
  2. de forma indireta, usando o contêiner `std::vector`

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.
- Em C++, geralmente essa memória é alocada:
  1. de forma direta, usando o operador `new`
  2. de forma indireta, usando o contêiner `std::vector`
  3. usando smart pointers

Alocação e Liberação de Memória

- Estruturas de dados consomem memória.
- Em C++, geralmente essa memória é alocada:
  1. de forma direta, usando o operador `new`
  2. de forma indireta, usando o contêiner `std::vector`
  3. usando smart pointers
- ⚠ Atenção: Se você alocar memória usando `new`, **você deve garantir que desaloca** a memória, usando o operador `delete`, quando ela não for mais necessária no programa.

Inserção

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

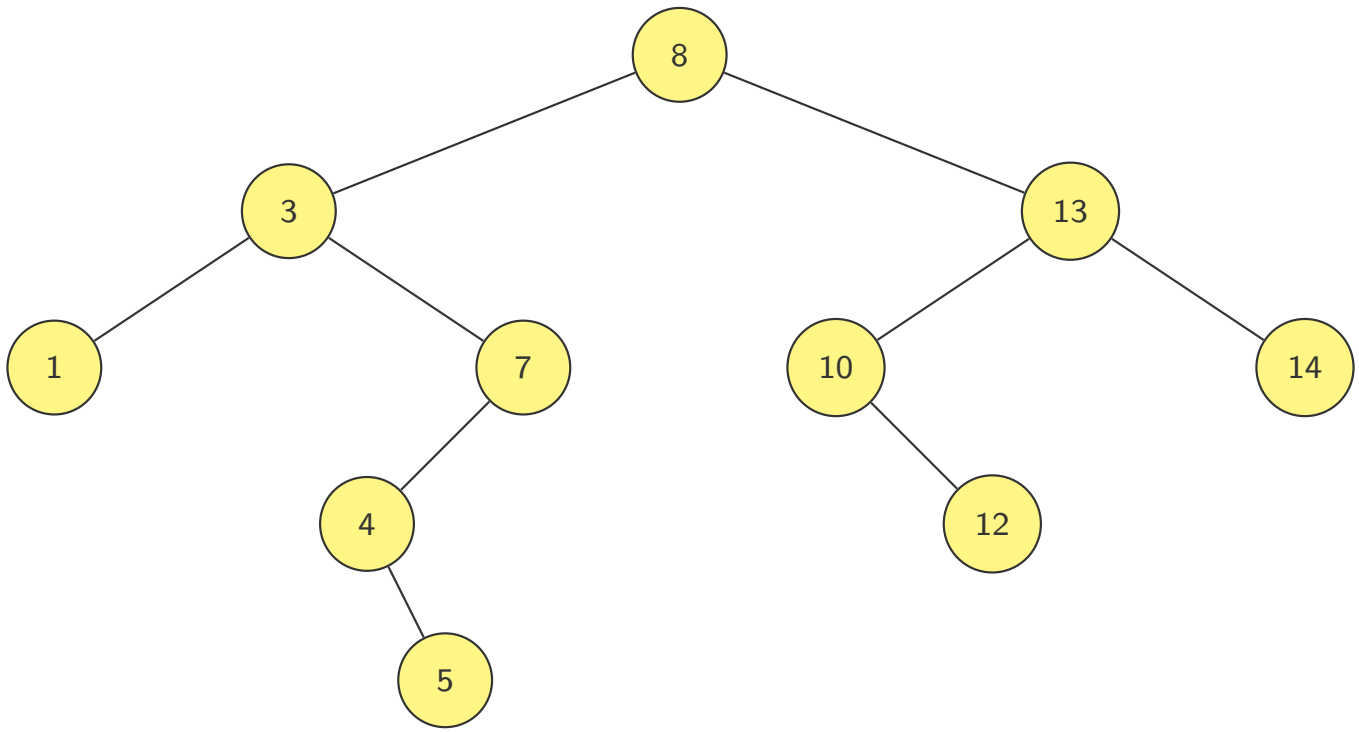
Ex: Inserindo 11

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

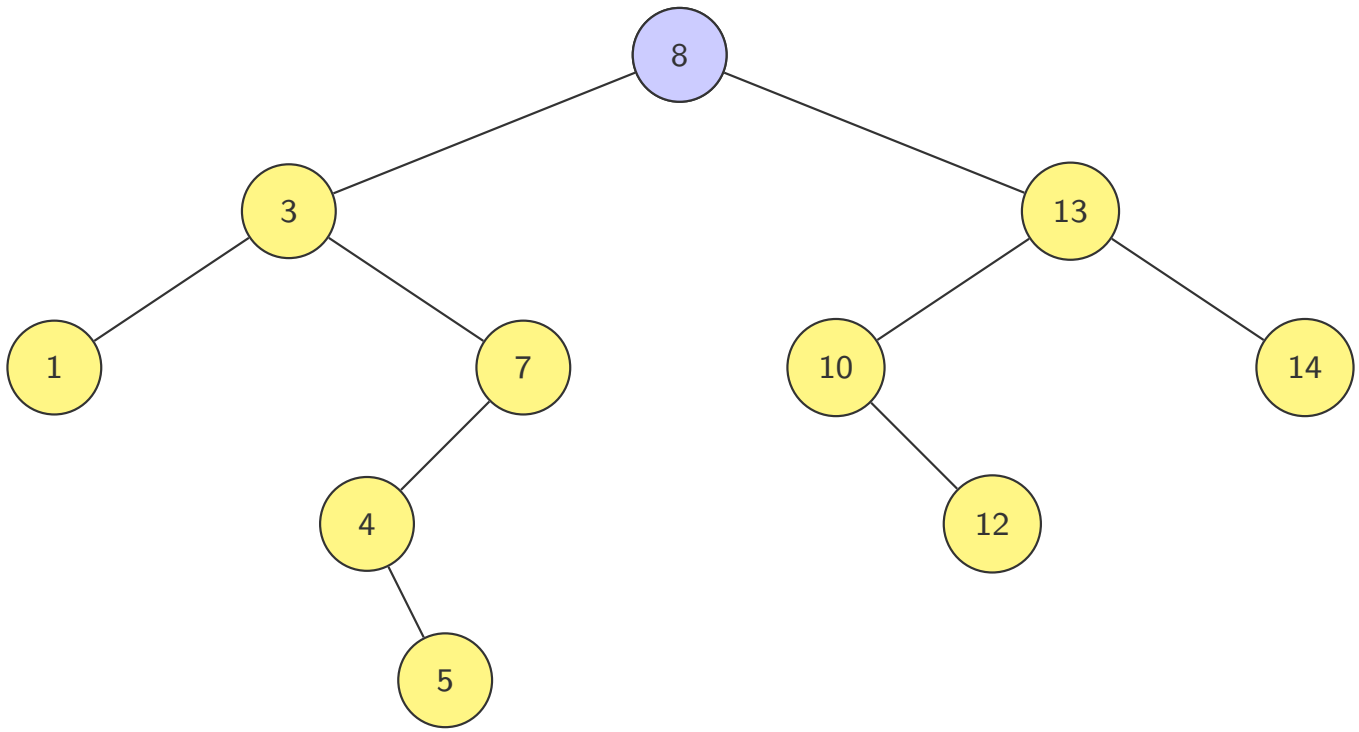


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

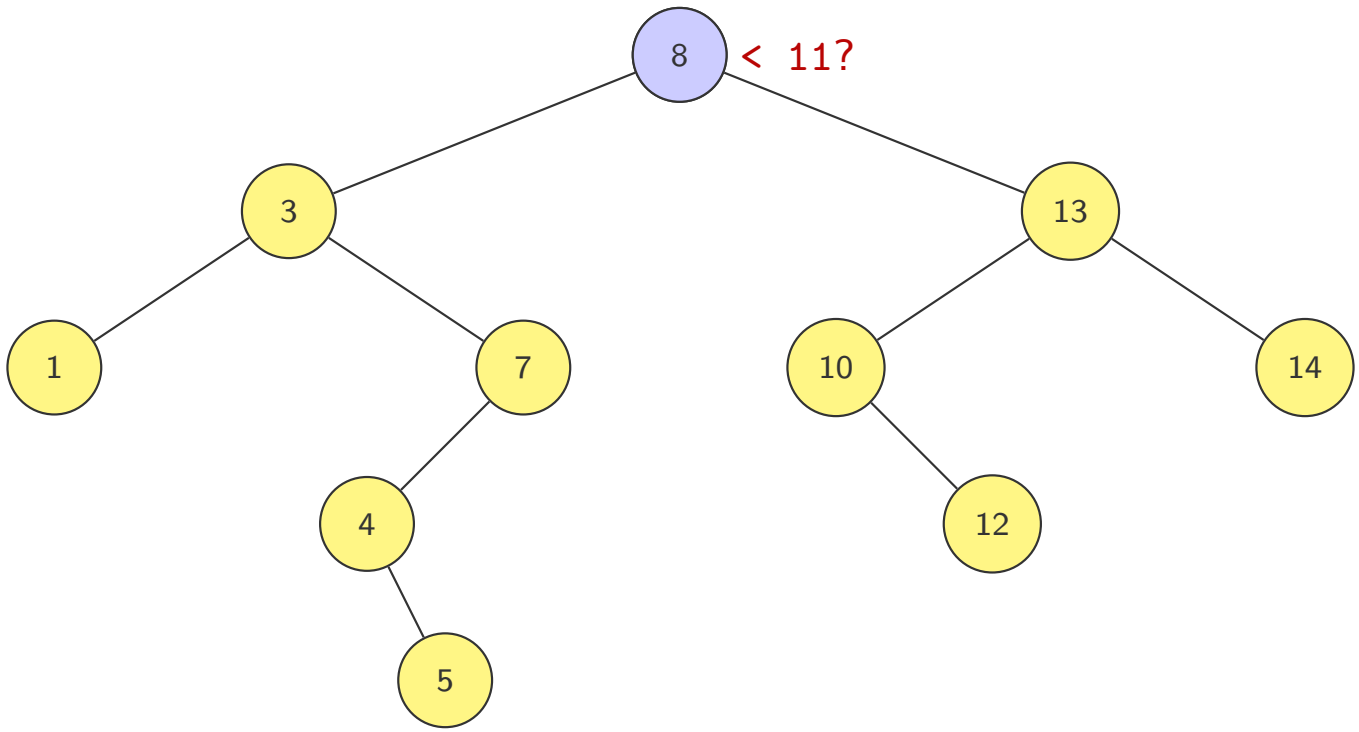


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

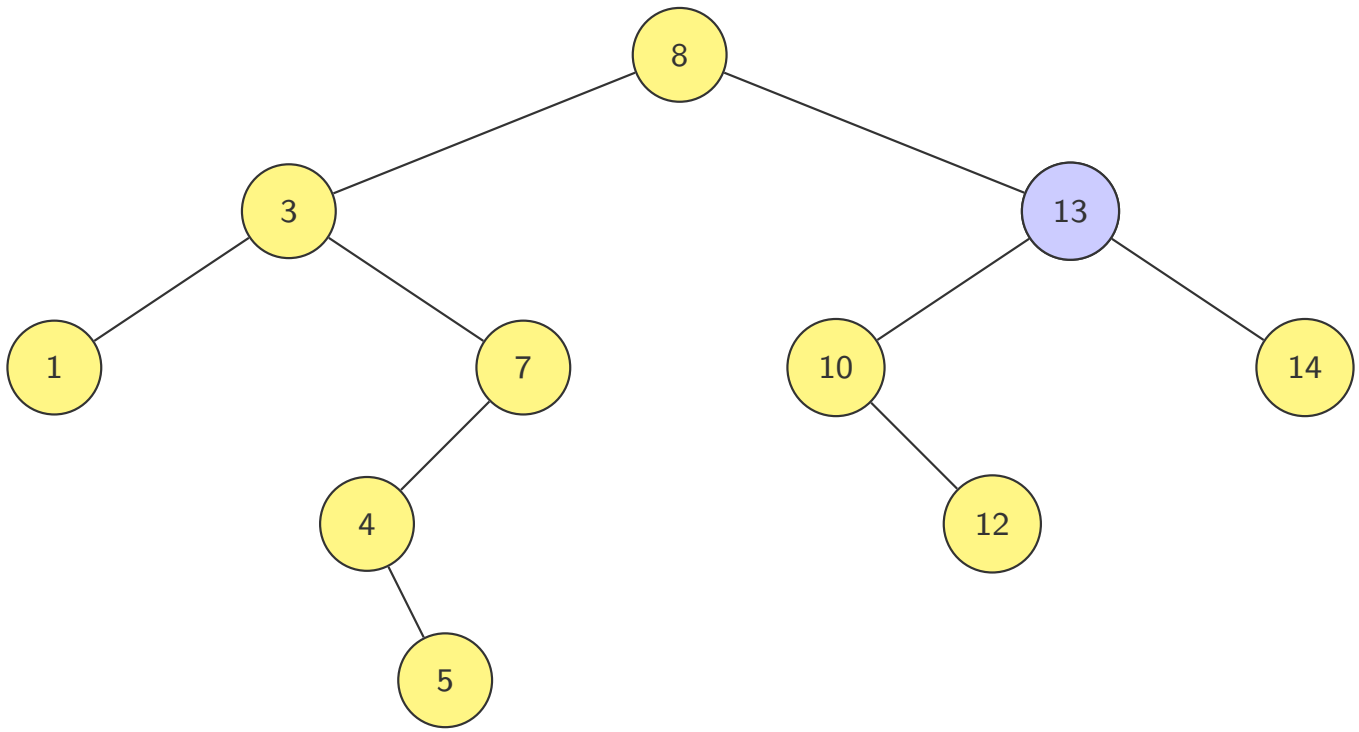


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

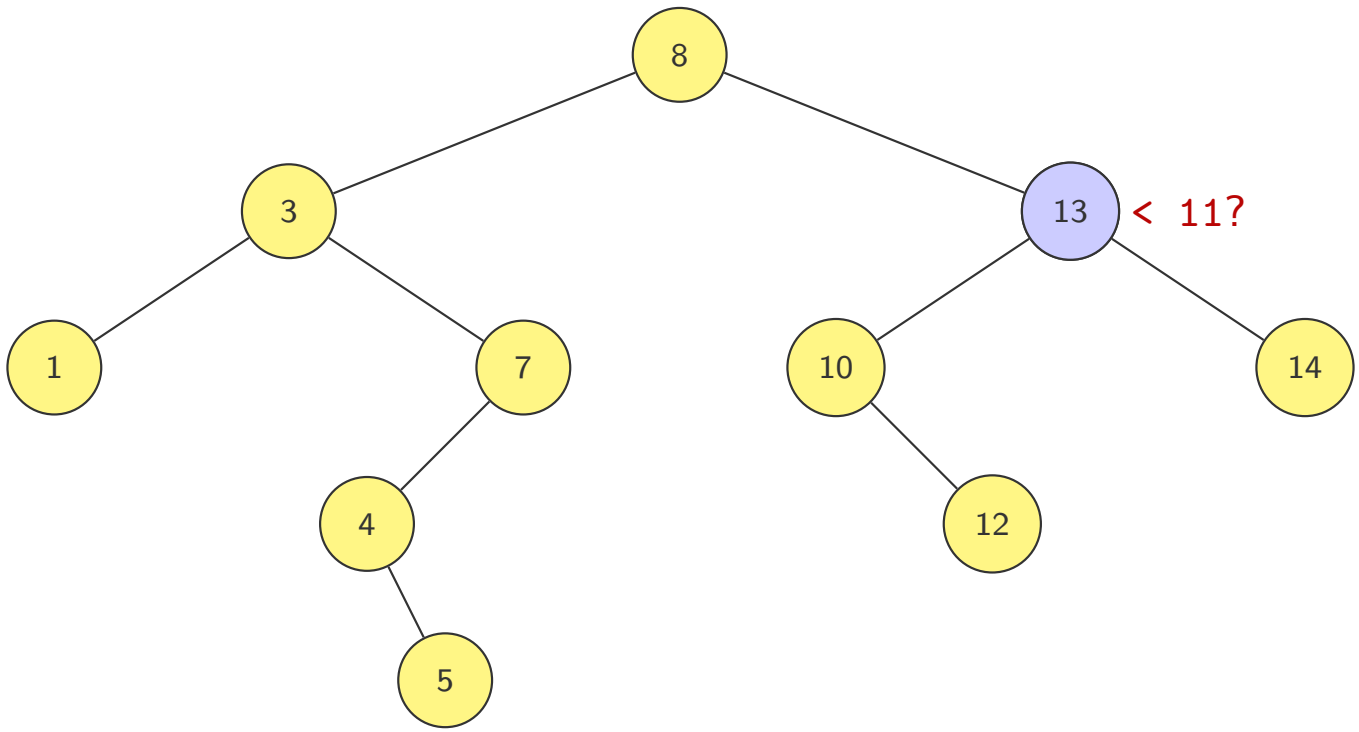


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

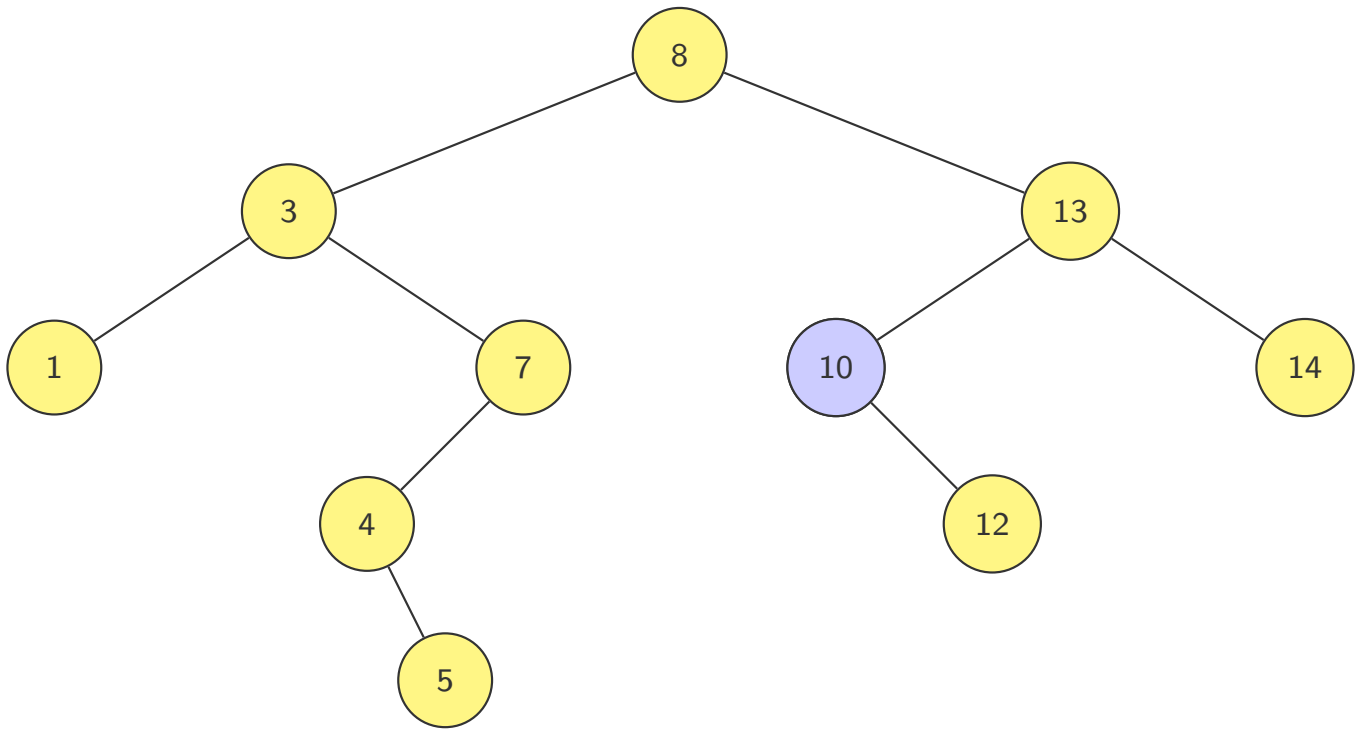


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

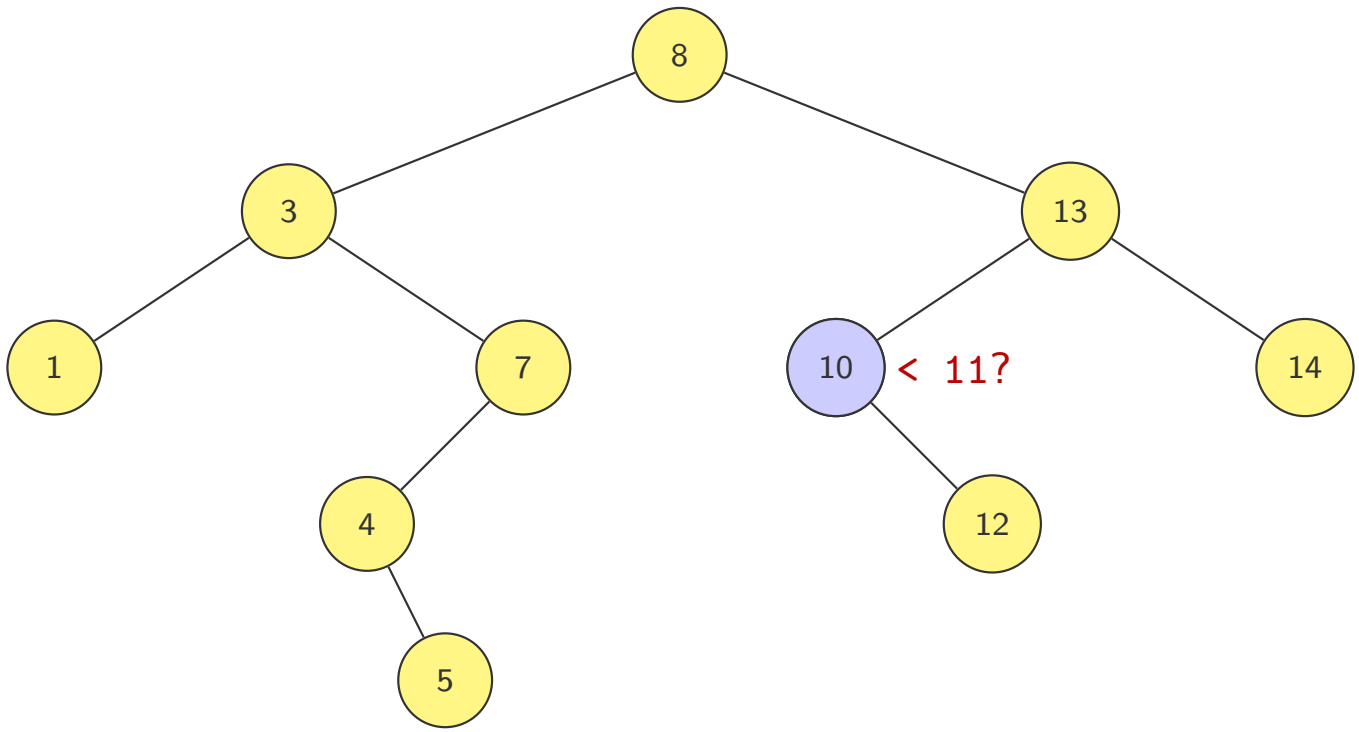


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

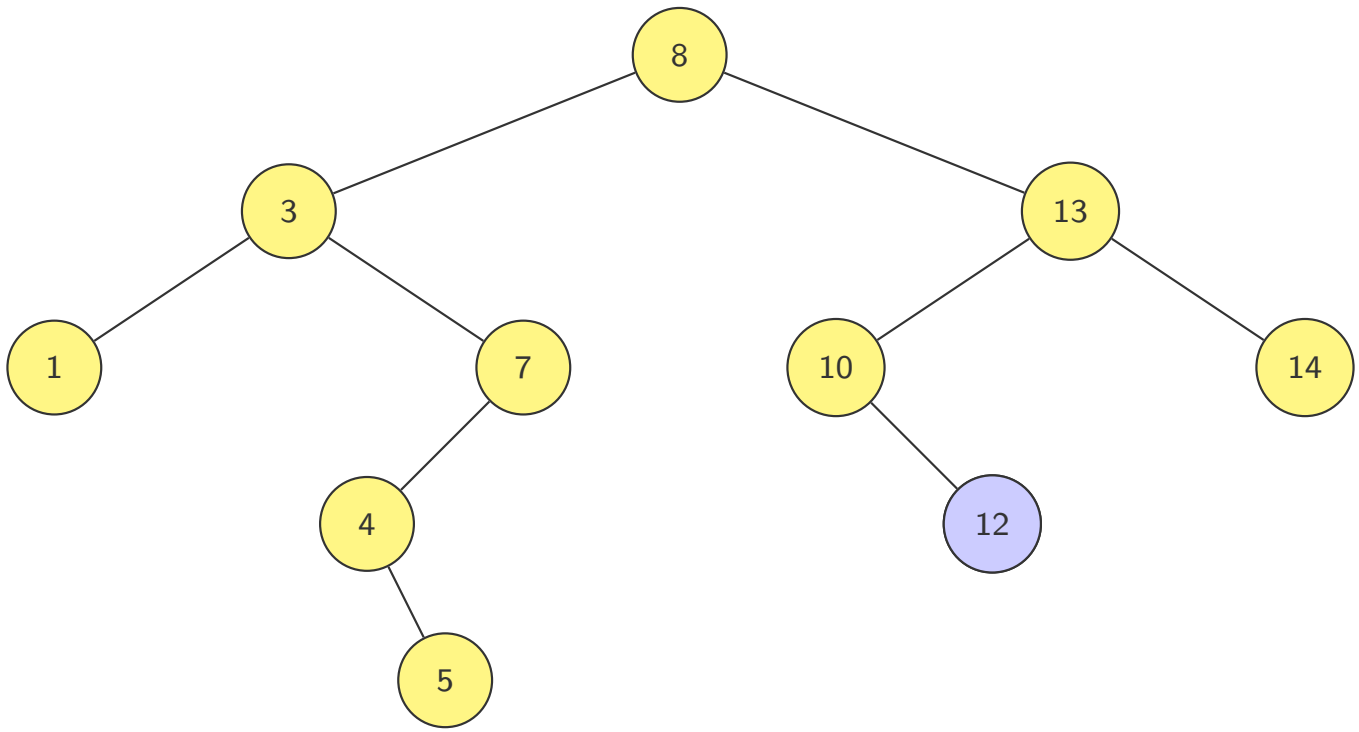


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

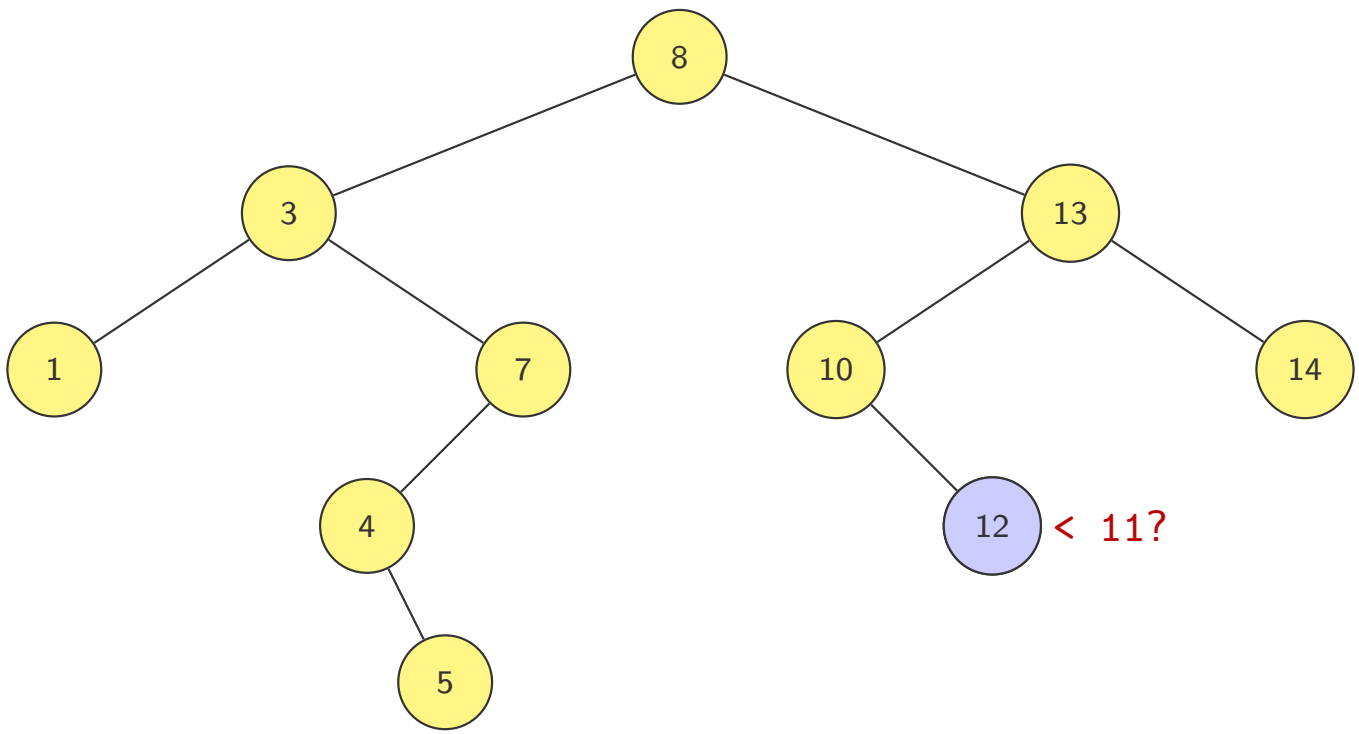


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

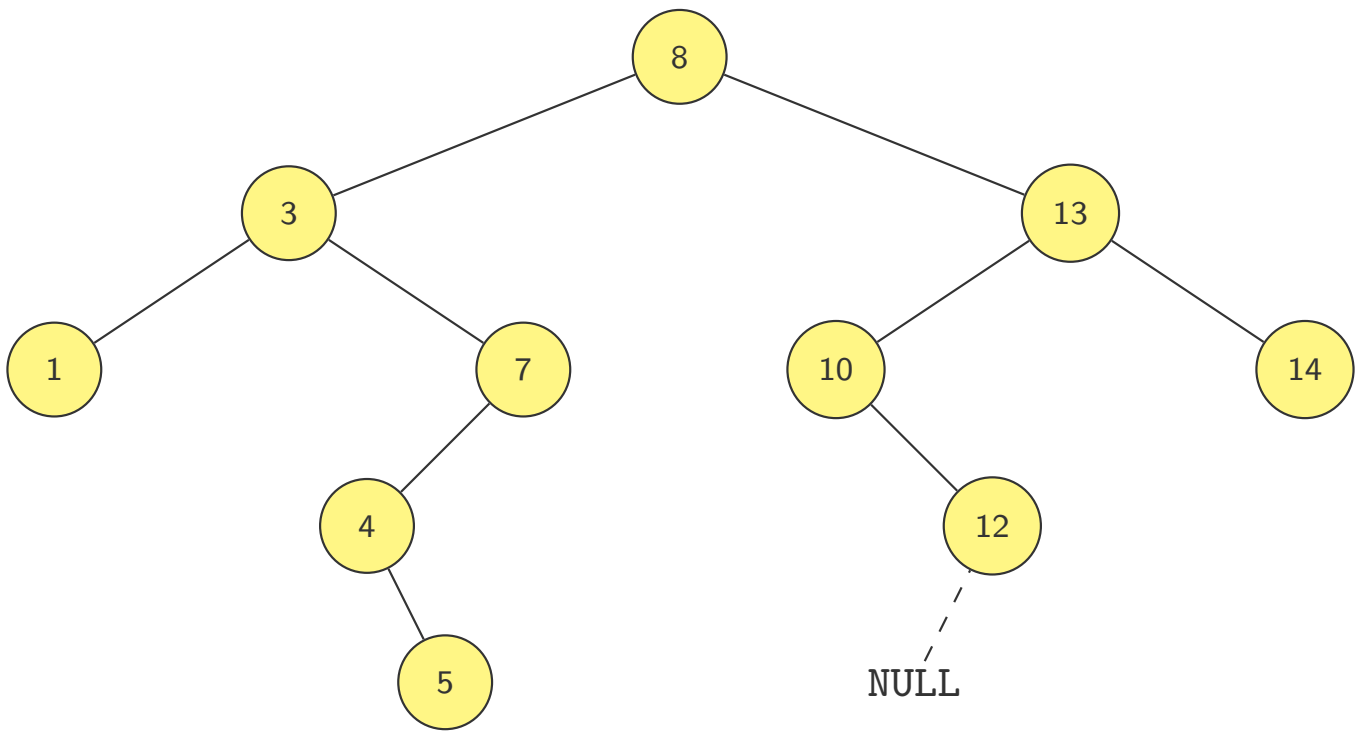


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

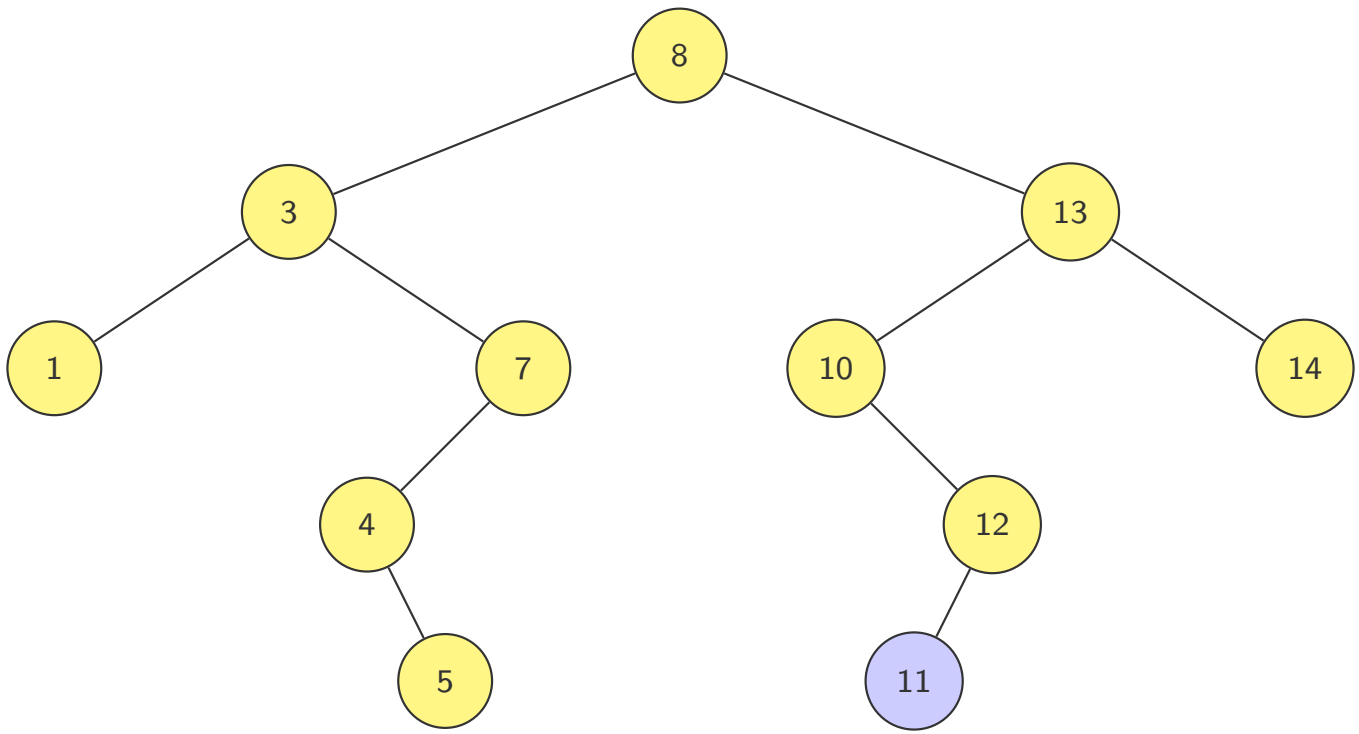


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11



Pseudocódigo da Inserção

Pseudocódigo da Inserção

Algorithm insere(Node *node, int k)

Require: ponteiro para raiz e chave a ser inserida
Ensure: ponteiro para raiz da árvore resultante

```
1: if node == nulo then
2:     cria novo nó e o retorna
3: end if
4: if k > node→key then
5:     node→right = insere(node→right, k)
6: else if k < node→key then
7:     node→left = busca(node→left, k)
8: end if
9: return node
```

Pseudocódigo da Inserção

Algorithm insere(Node *node, int k)

Require: ponteiro para raiz e chave a ser inserida
Ensure: ponteiro para raiz da árvore resultante

```
1: if node == nulo then
2:     cria novo nó e o retorna
3: end if
4: if k > node→key then
5:     node→right = insere(node→right, k)
6: else if k < node→key then
7:     node→left = busca(node→left, k)
8: end if
9: return node
```

Qual a complexidade deste algoritmo?

Busca

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

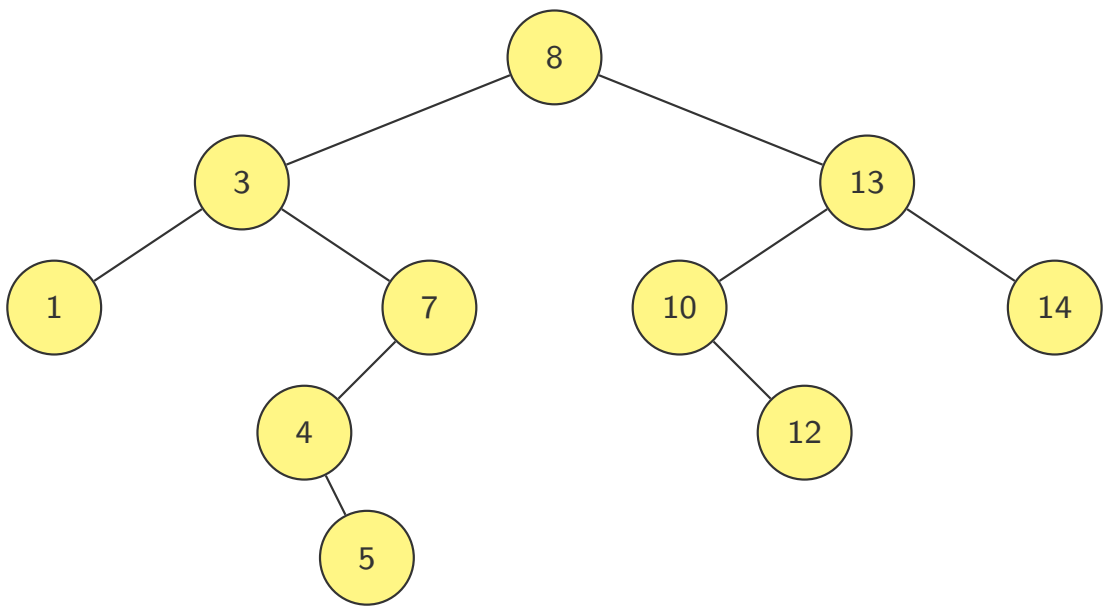
Ex: Buscando por 4

Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

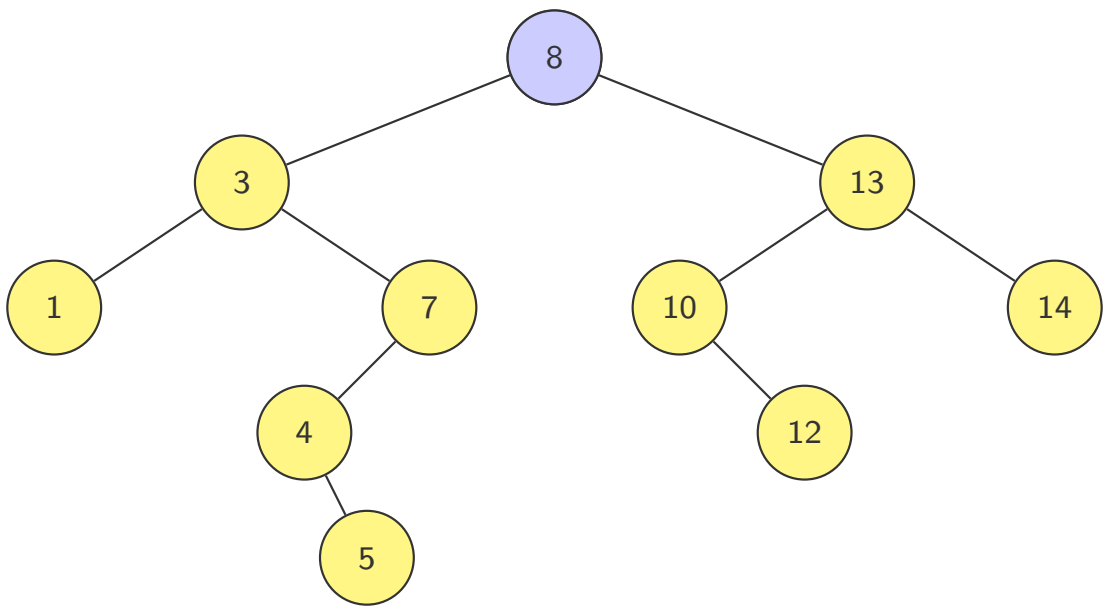


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

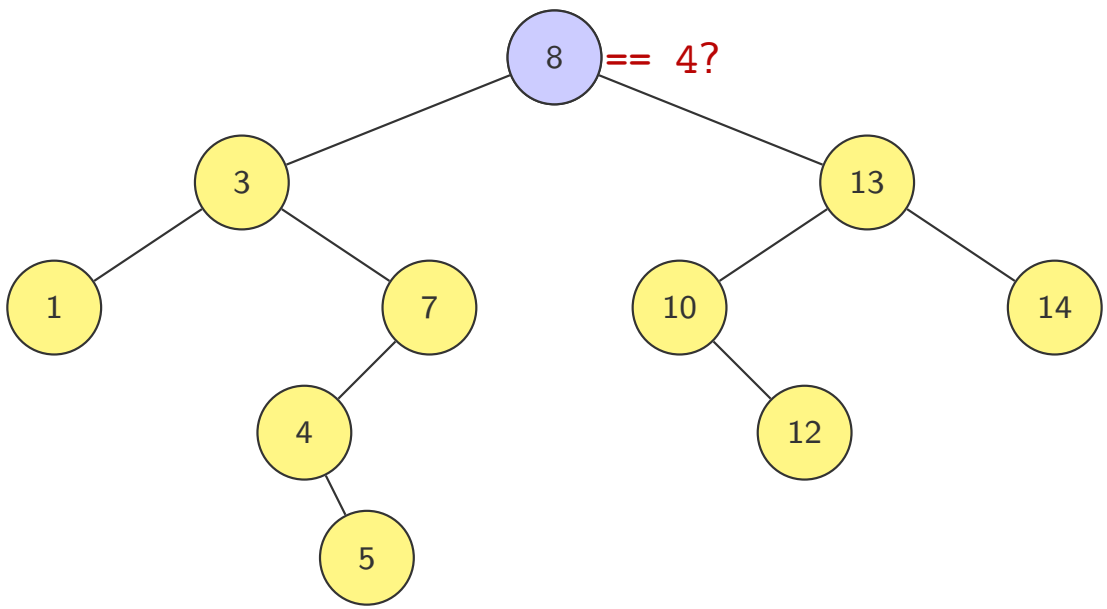


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

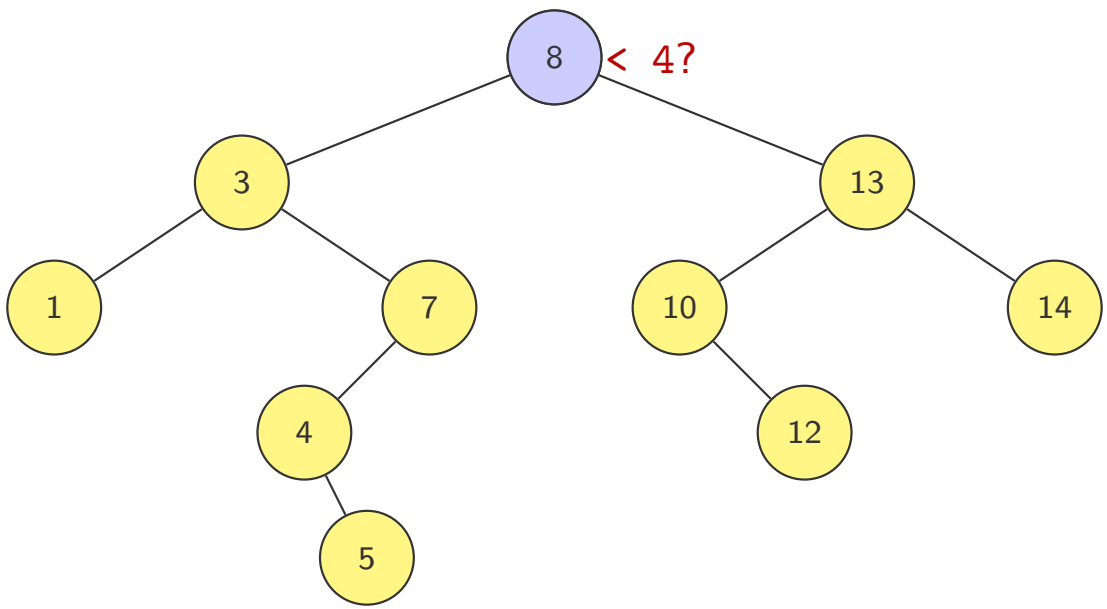


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

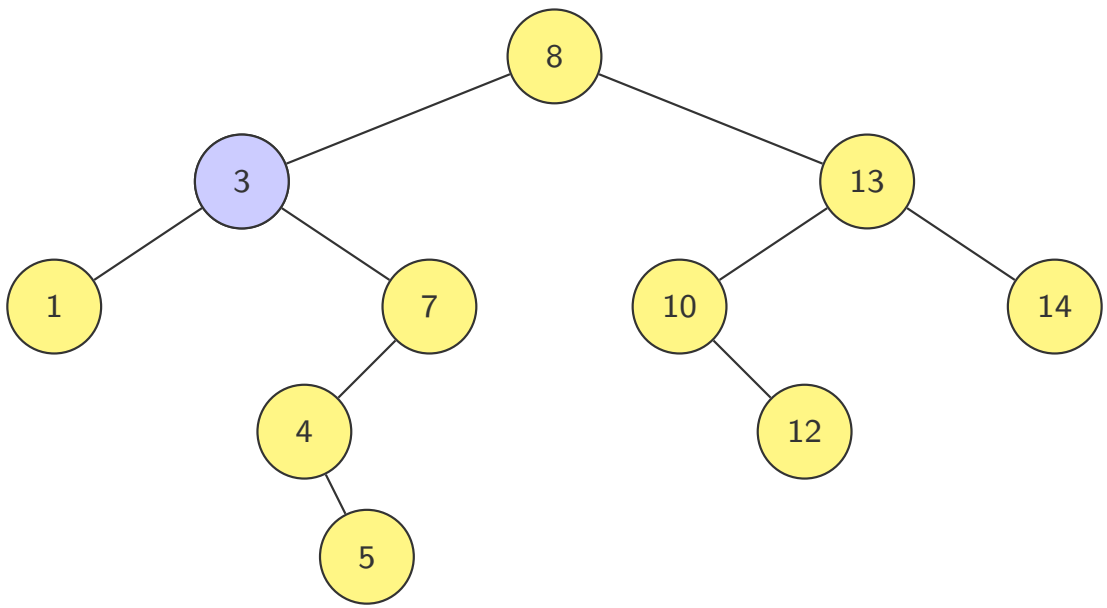


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

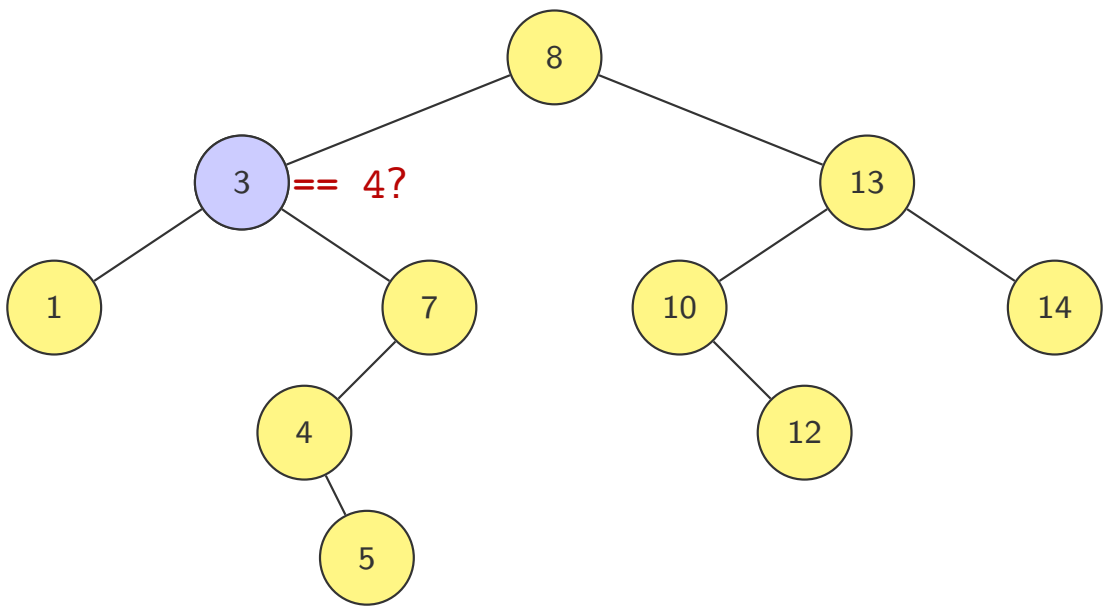


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

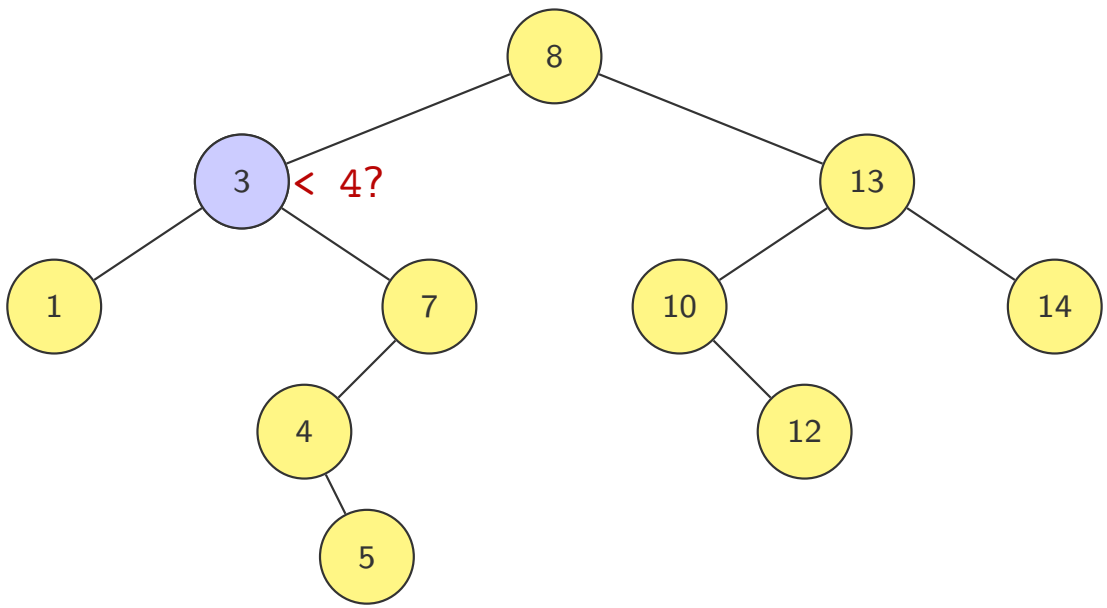


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

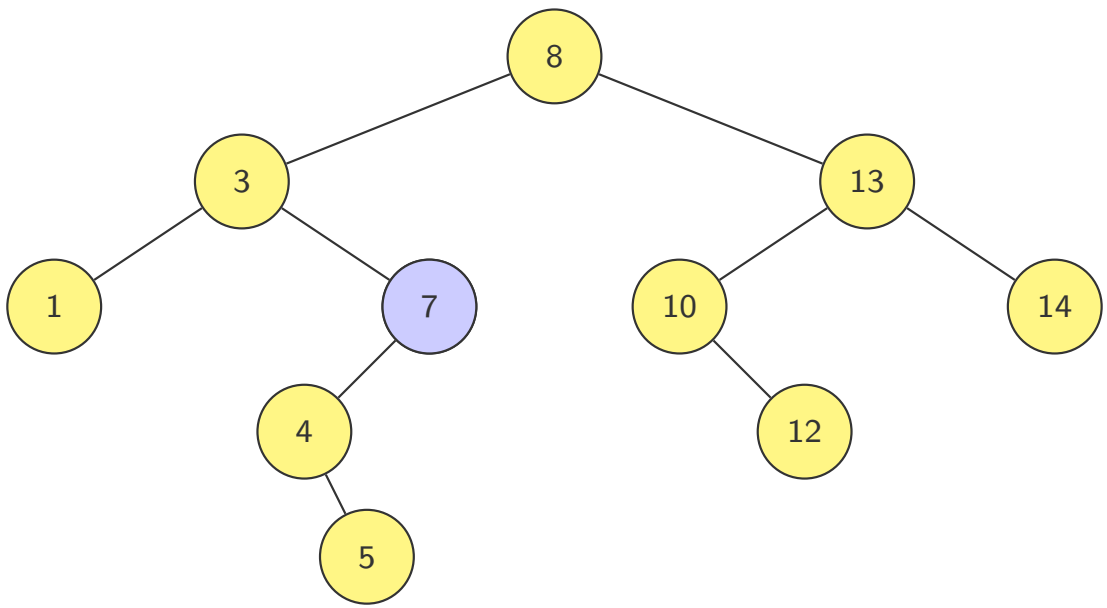


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

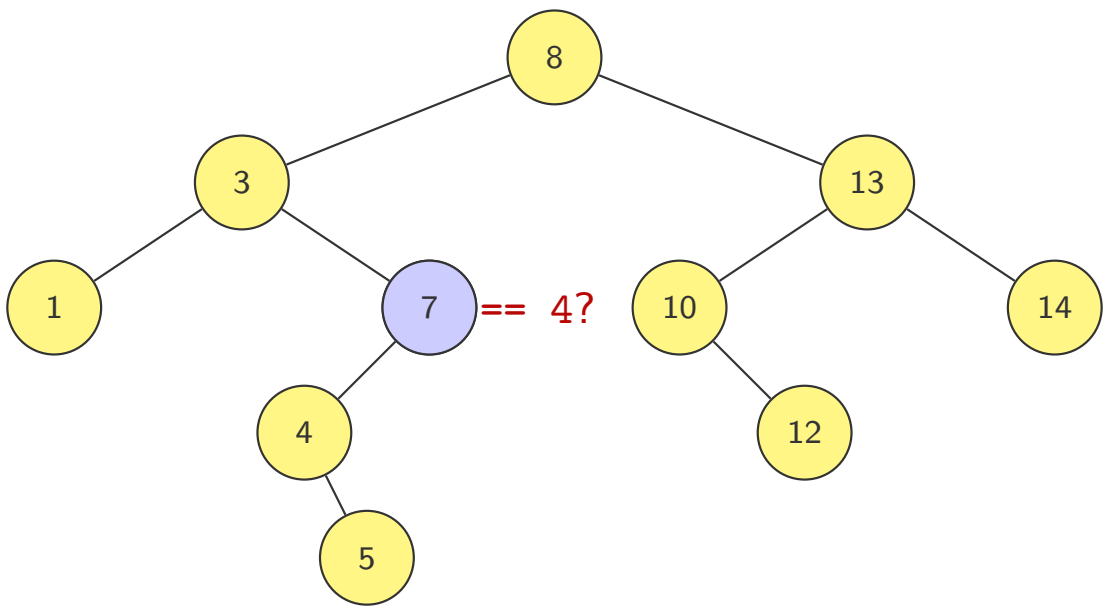


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

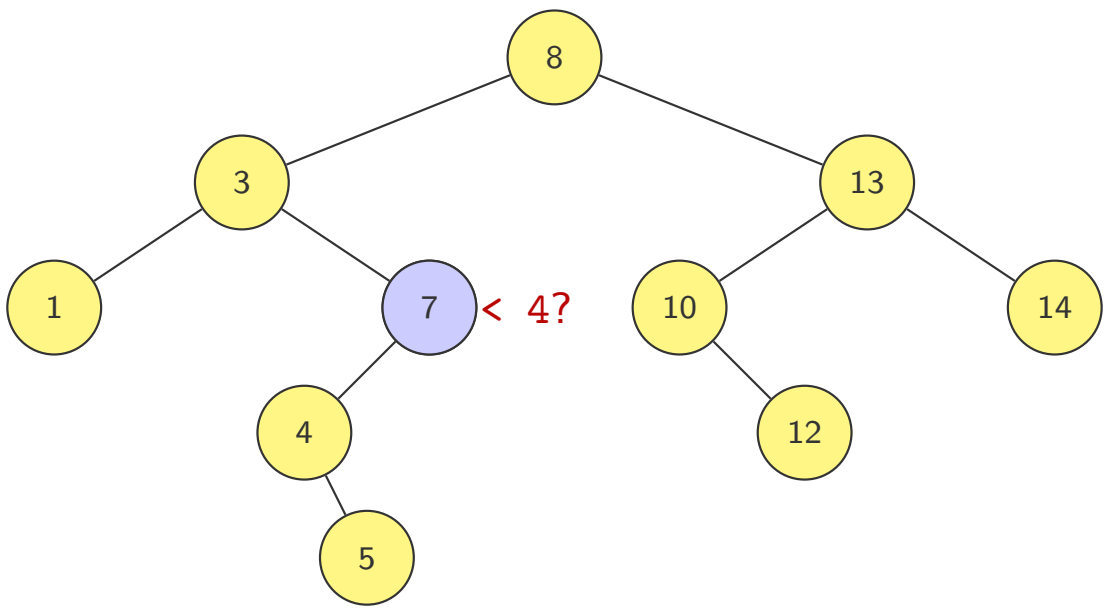


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

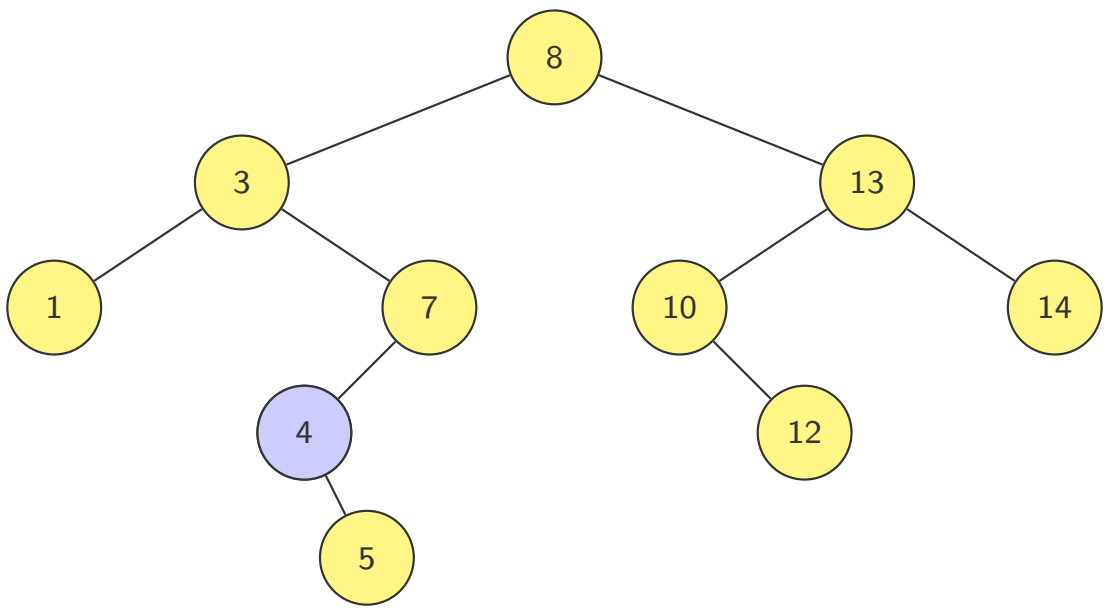


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

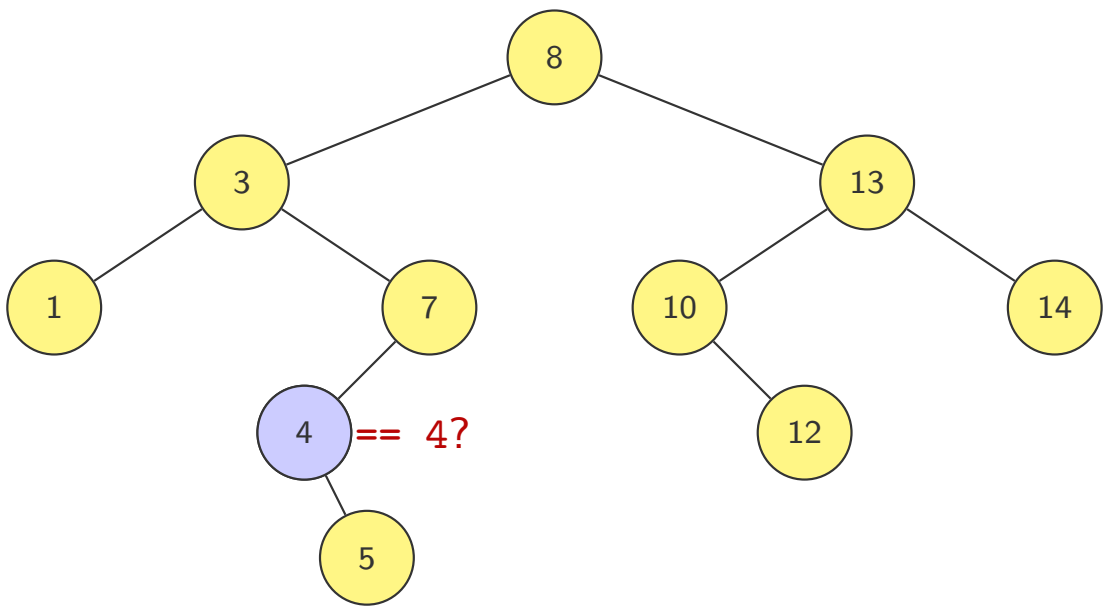


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

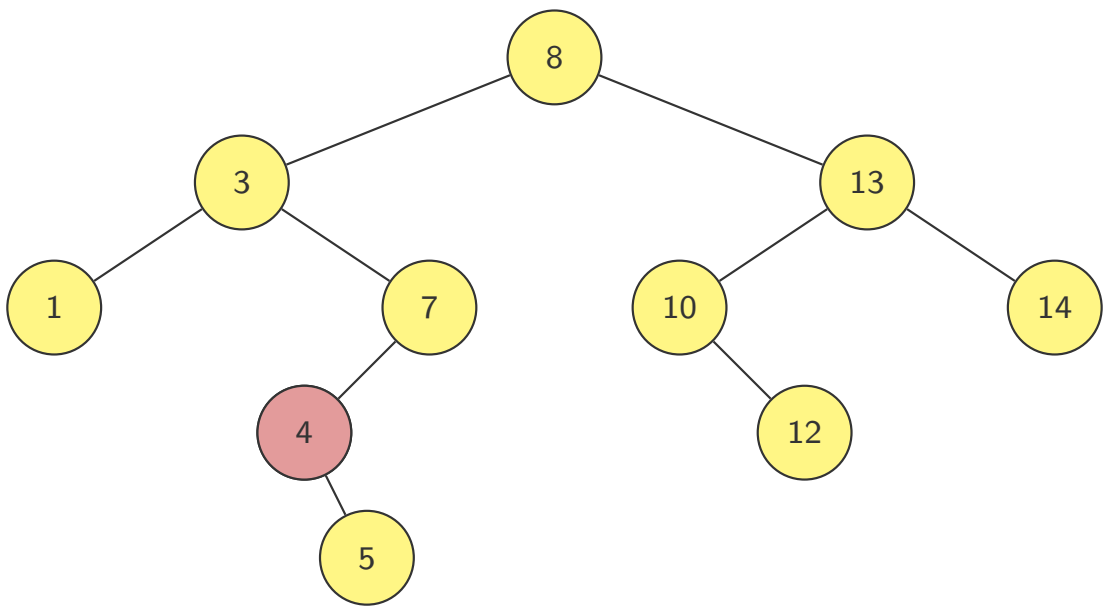


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

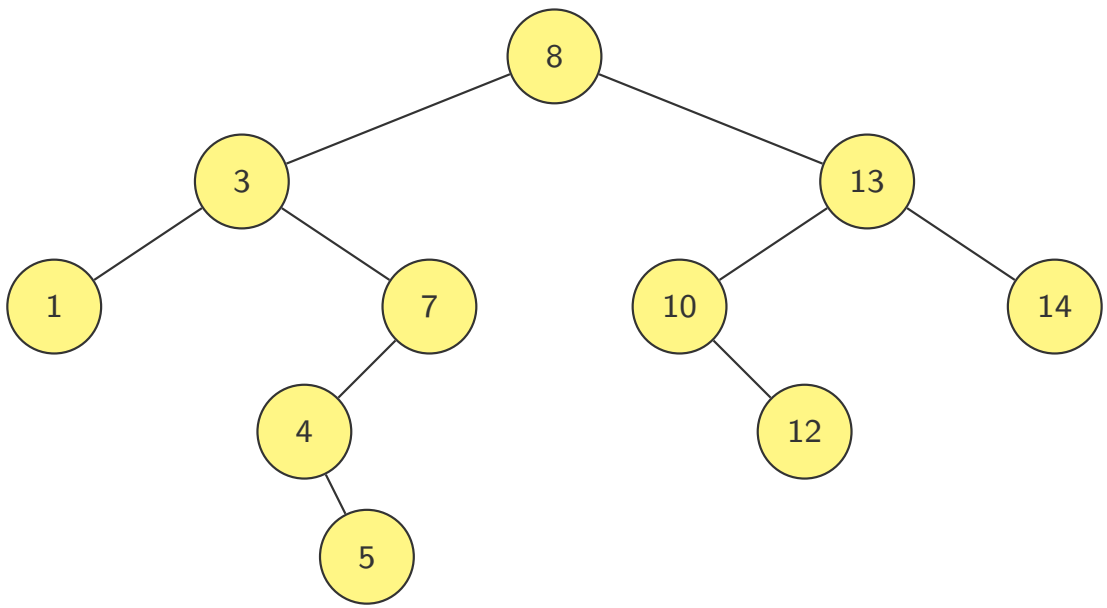


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

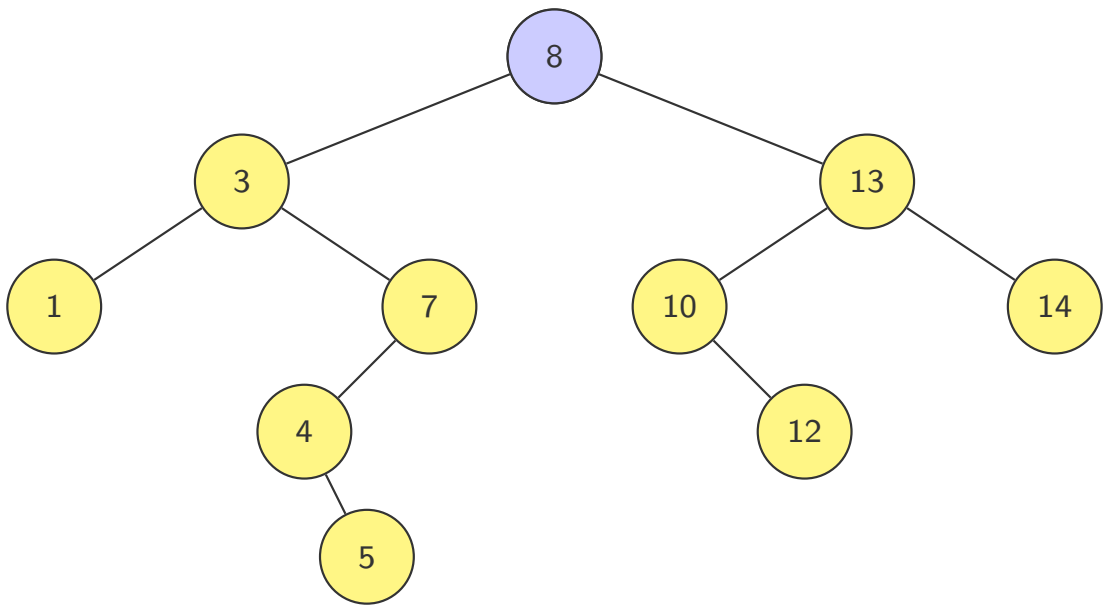


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

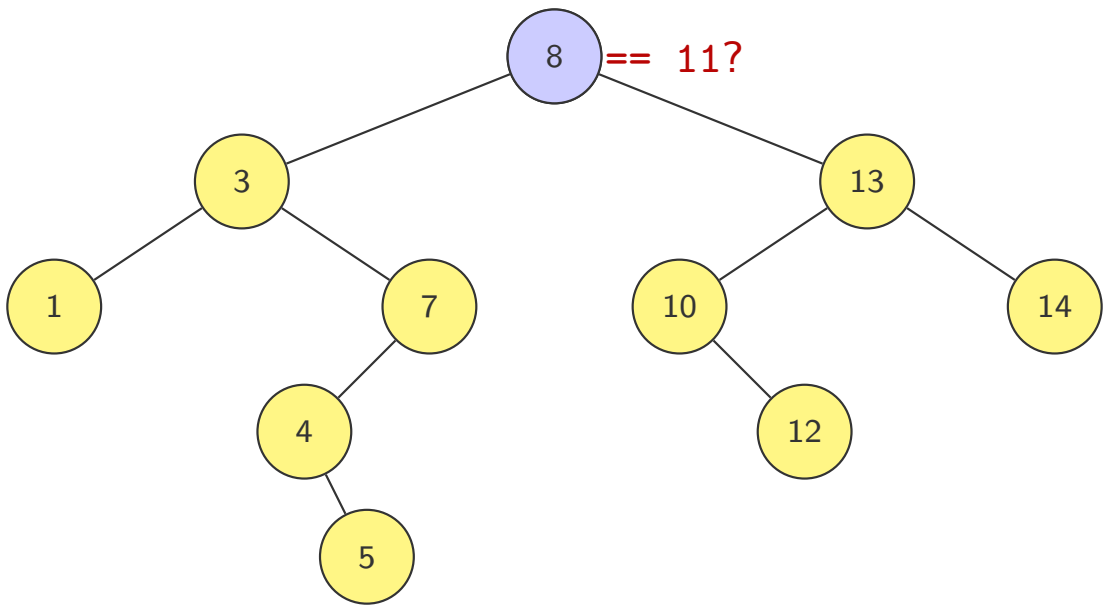


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

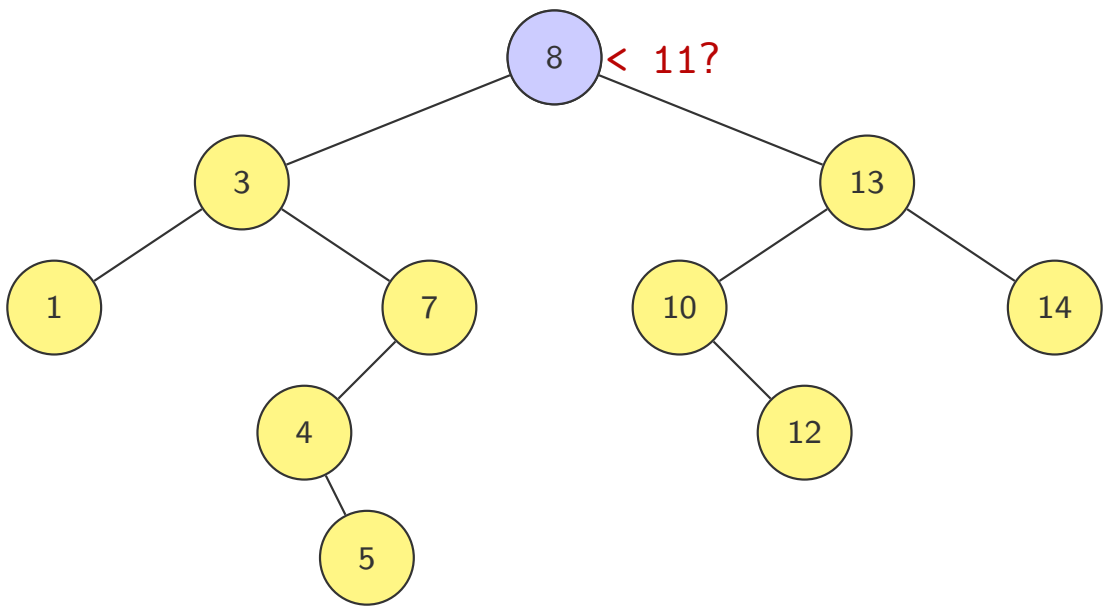


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

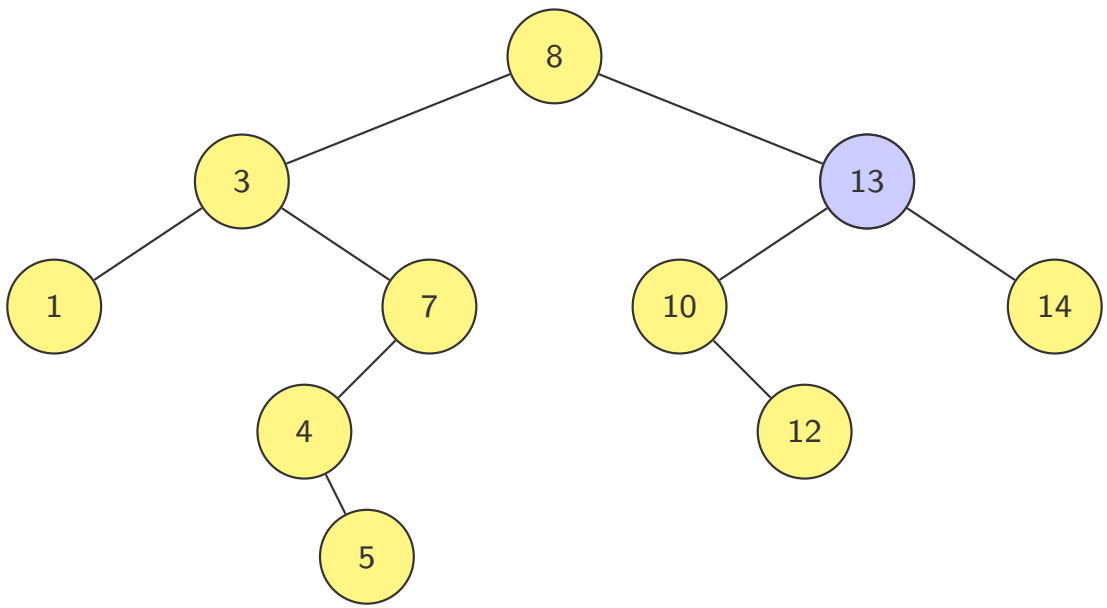


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

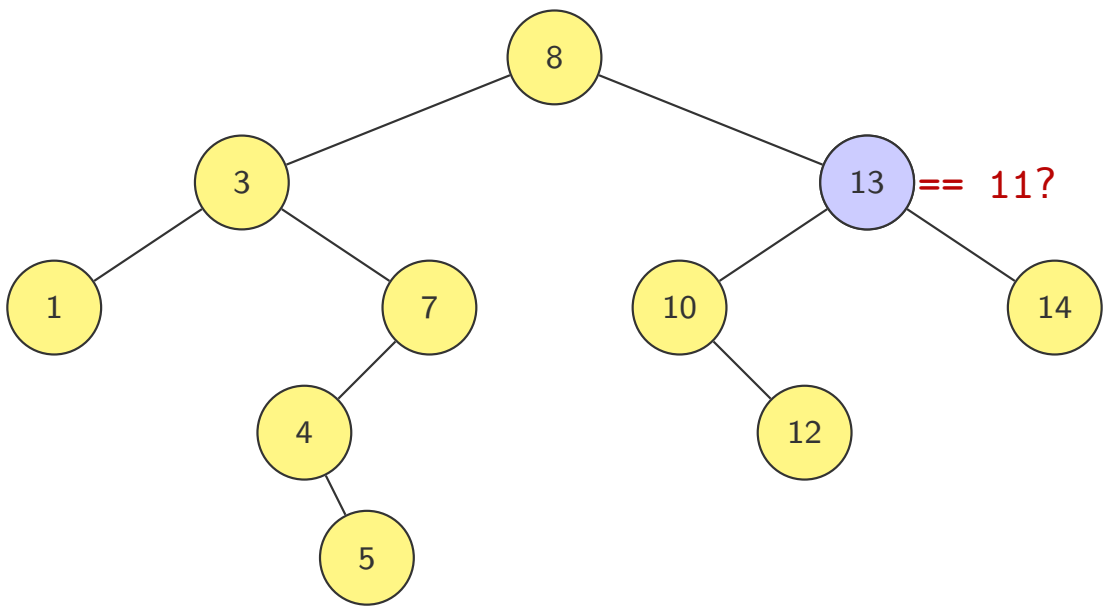


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

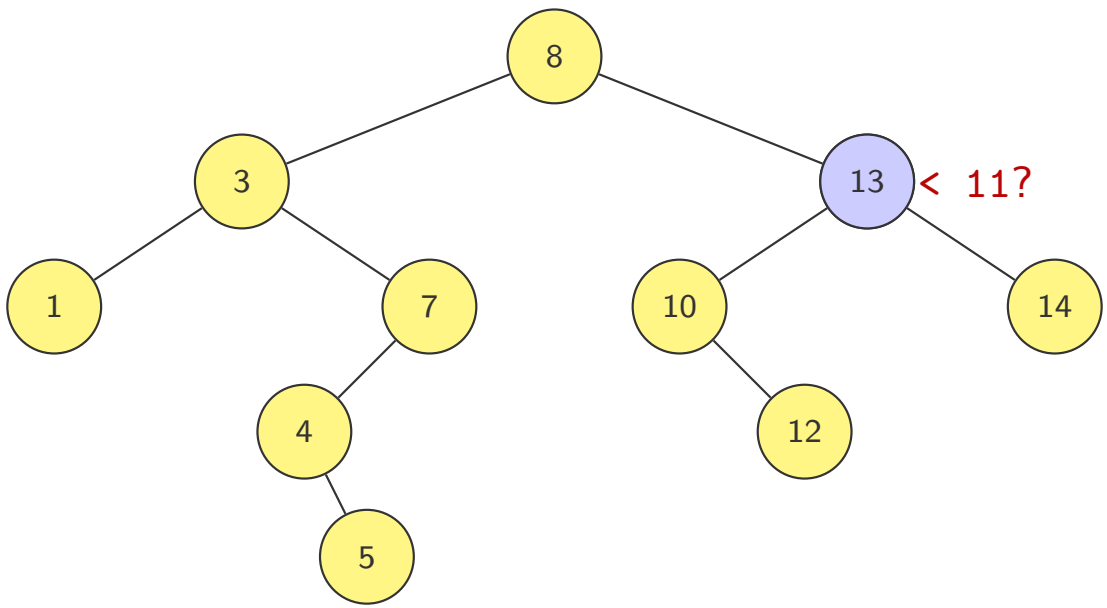


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

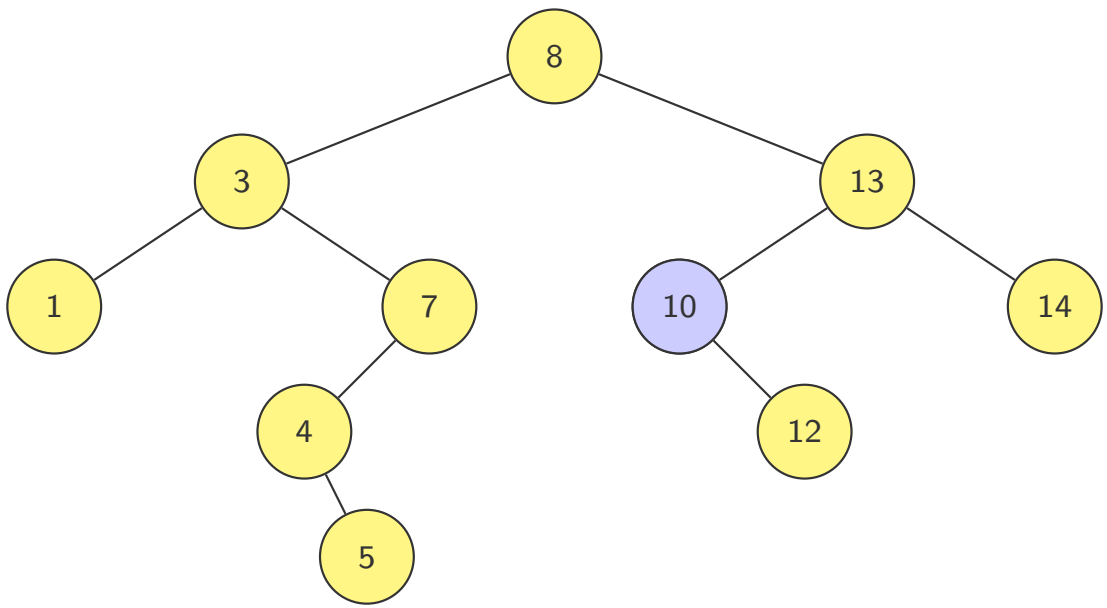


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

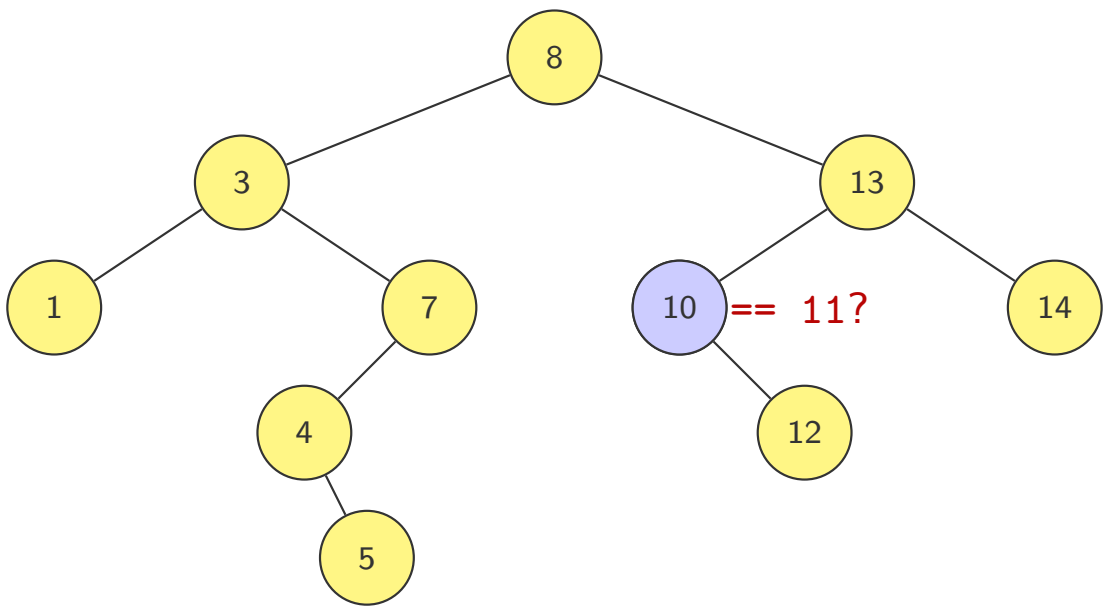


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

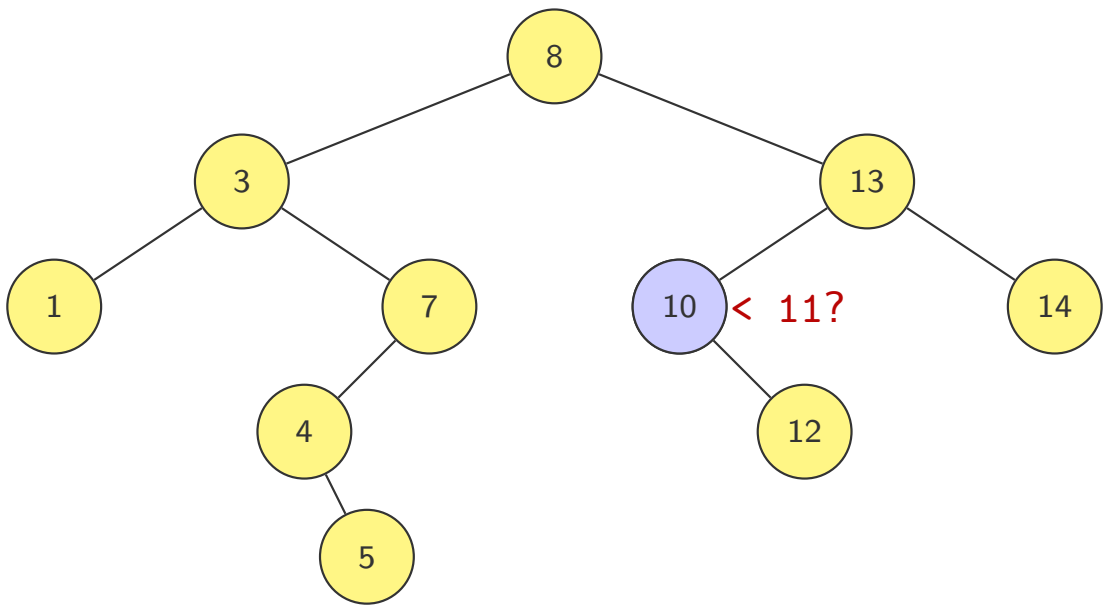


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

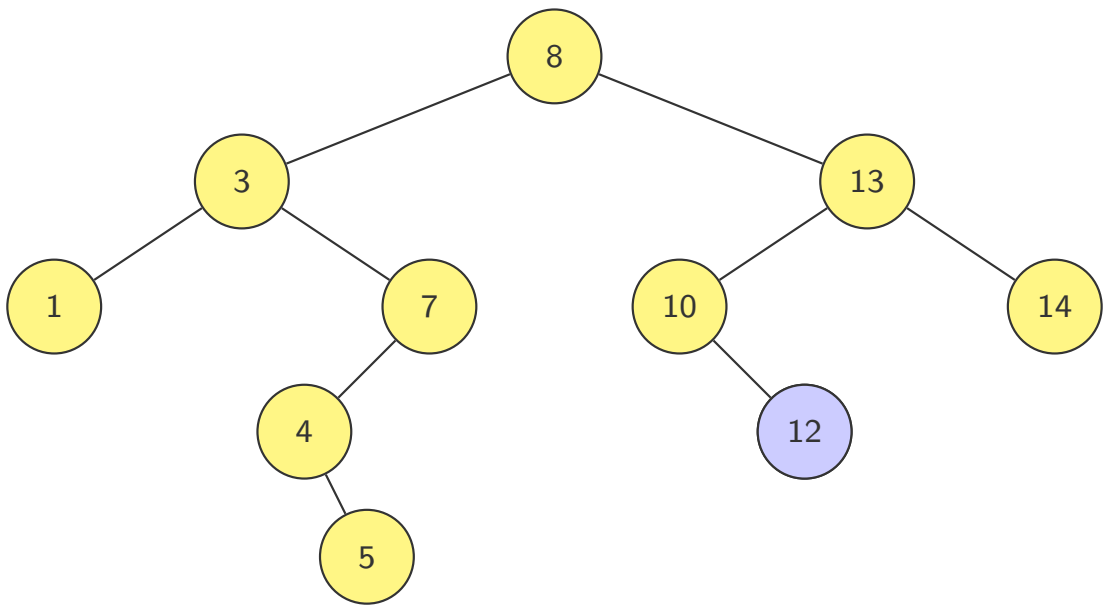


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

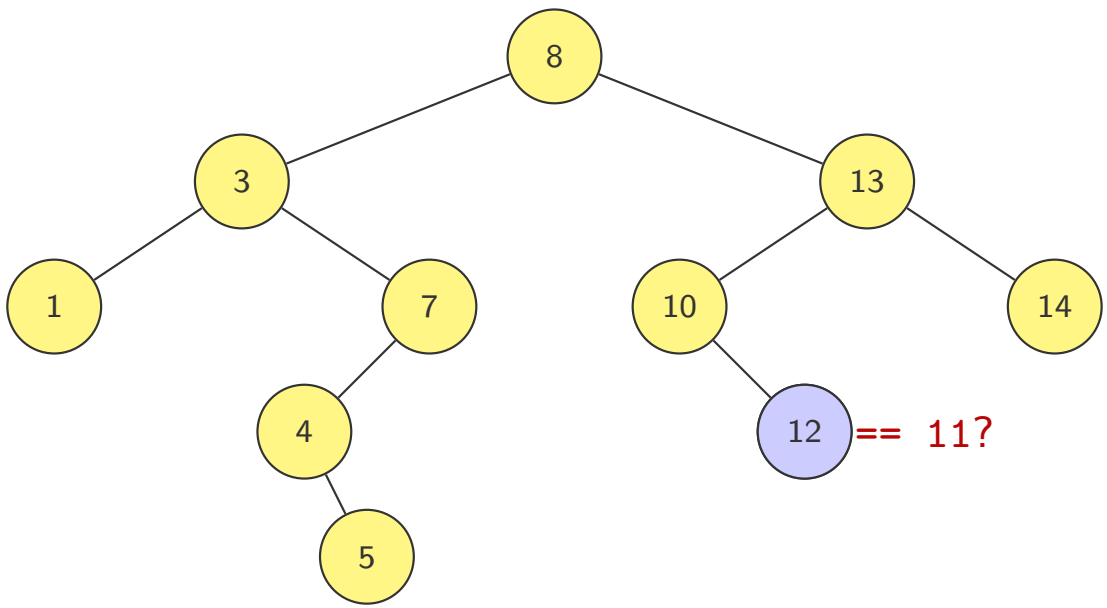


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

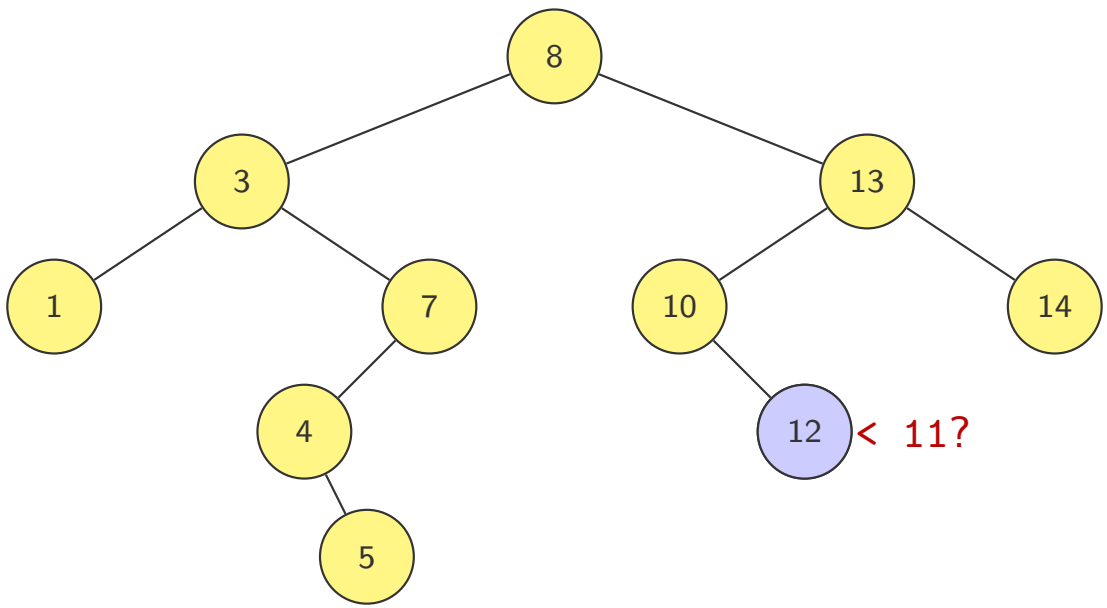


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

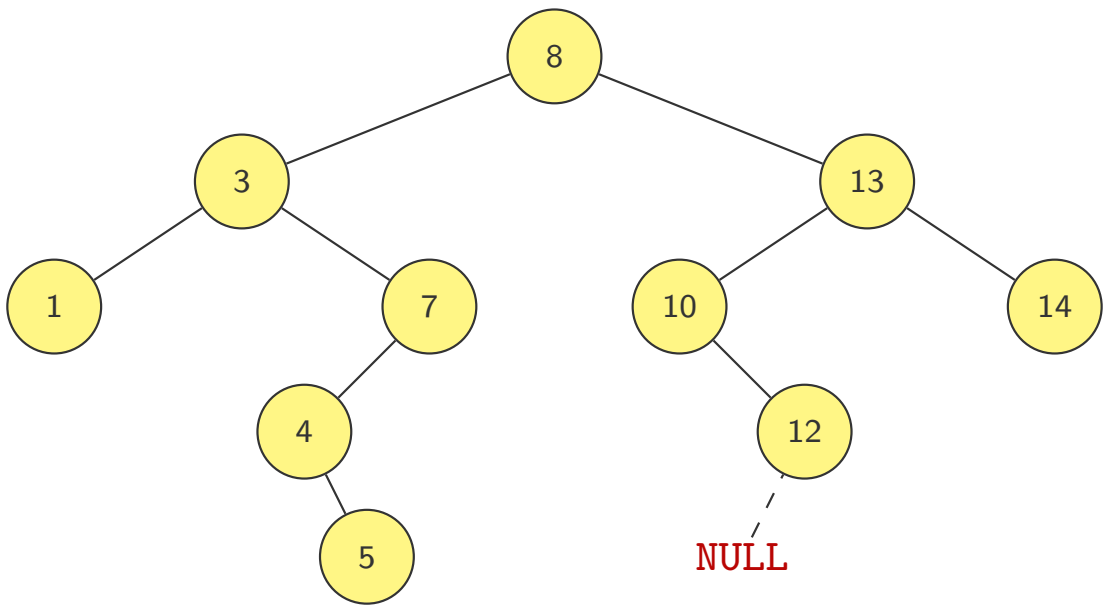


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11



Pseudocódigo da Busca

Pseudocódigo da Busca

Algorithm busca(Node *node, int k)

Require: ponteiro para raiz e chave a ser buscada

Ensure: ponteiro para o nó contendo a chave k; ou nulo caso a chave não seja encontrada

```
1: if node == nullptr or node→key == k then
2:     return node
3: end if
4: if k > node→key then
5:     return busca(node→right, k)
6: else
7:     return busca(node→left, k)
8: end if
```

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

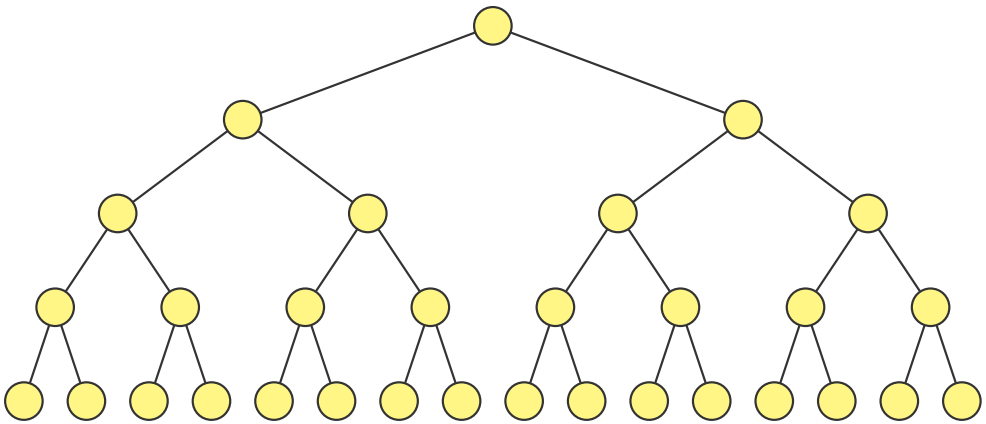
Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



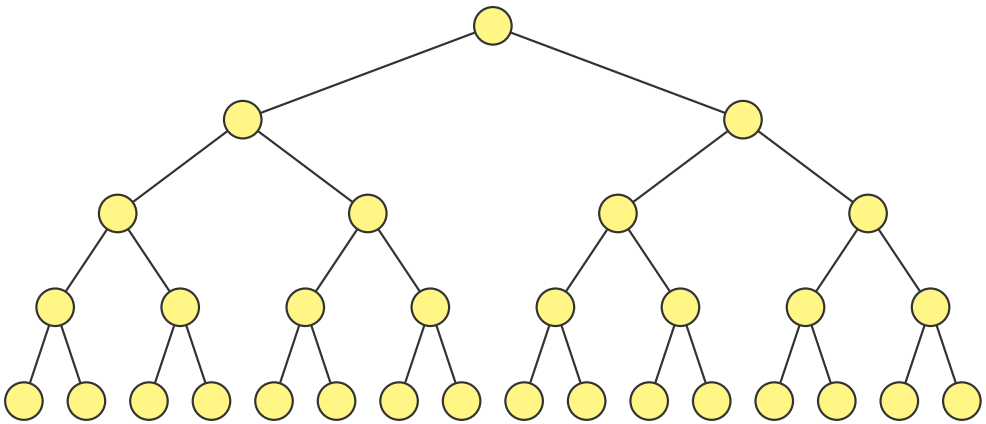
Melhor árvore: $O(\lg n)$

Eficiência da busca

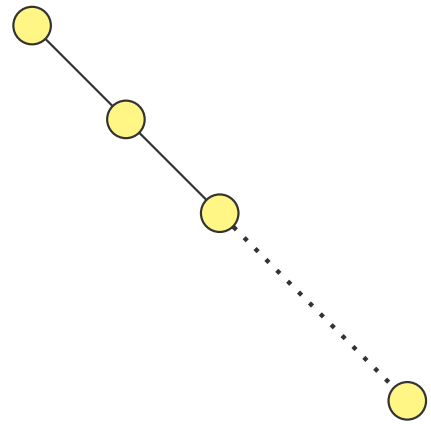
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $O(\lg n)$



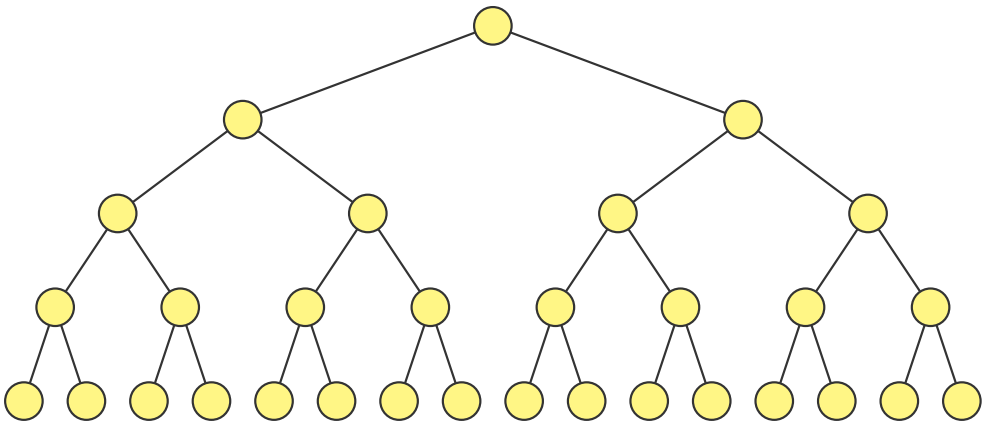
Pior árvore: $O(n)$

Eficiência da busca

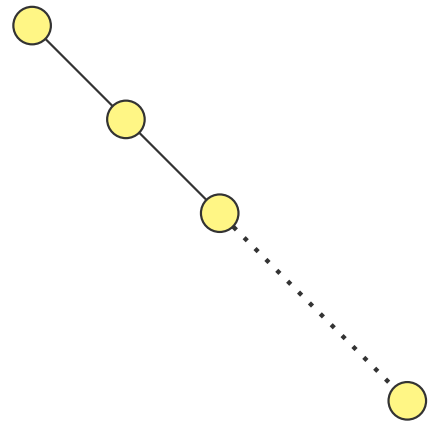
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $O(\lg n)$



Pior árvore: $O(n)$

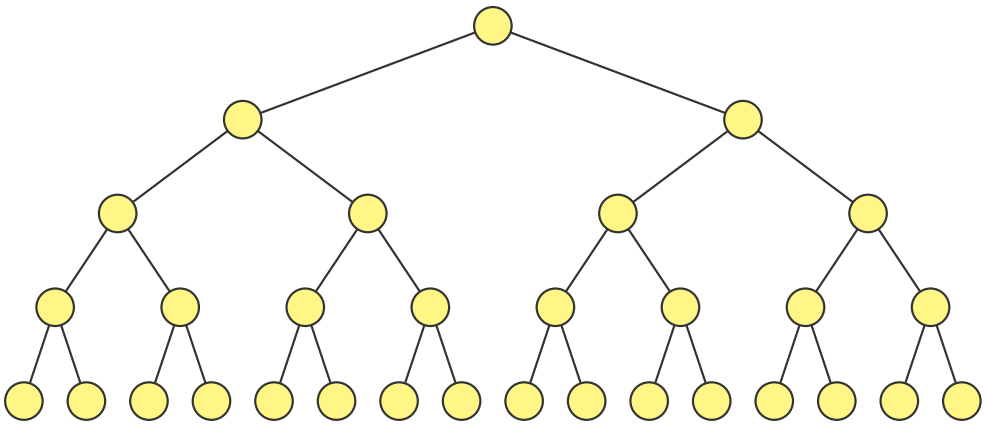
Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

Eficiência da busca

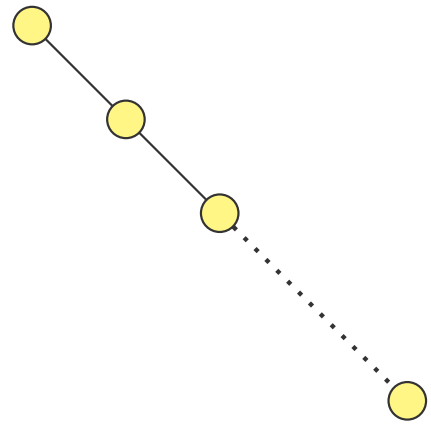
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $O(\lg n)$



Pior árvore: $O(n)$

Para ter a pior árvore basta inserir em ordem crescente...

Caso médio: em uma árvore com n elementos adicionados em ordem aleatória a busca demora (em média) $O(\lg n)$

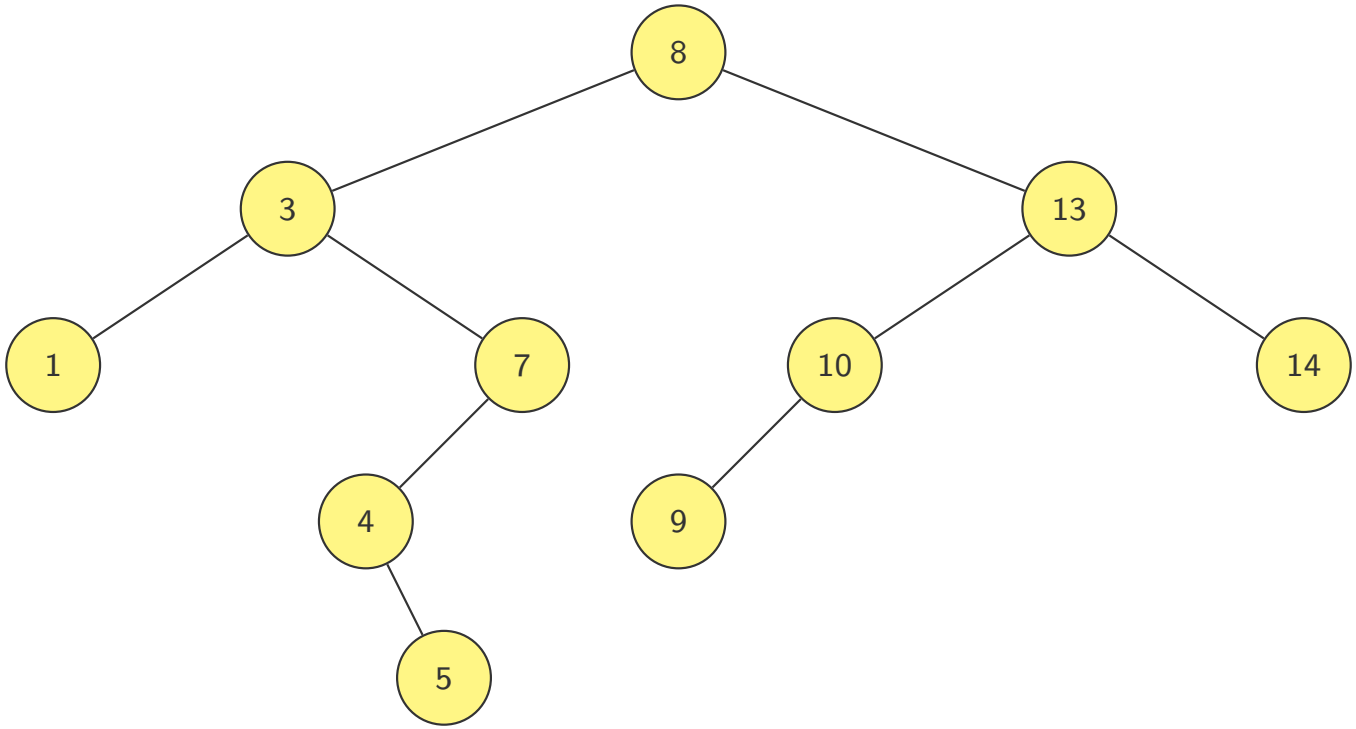
Remoção

Remoção

- Considere o problema de remover um nó de uma árvore binária de busca de tal forma que a árvore resultante continue de busca.
- Primeiro, precisamos fazer uma busca pelo nó a ser removido.
- Uma vez encontrado o nó, quais dificuldades podem surgir que dificultam a simples remoção do nó?

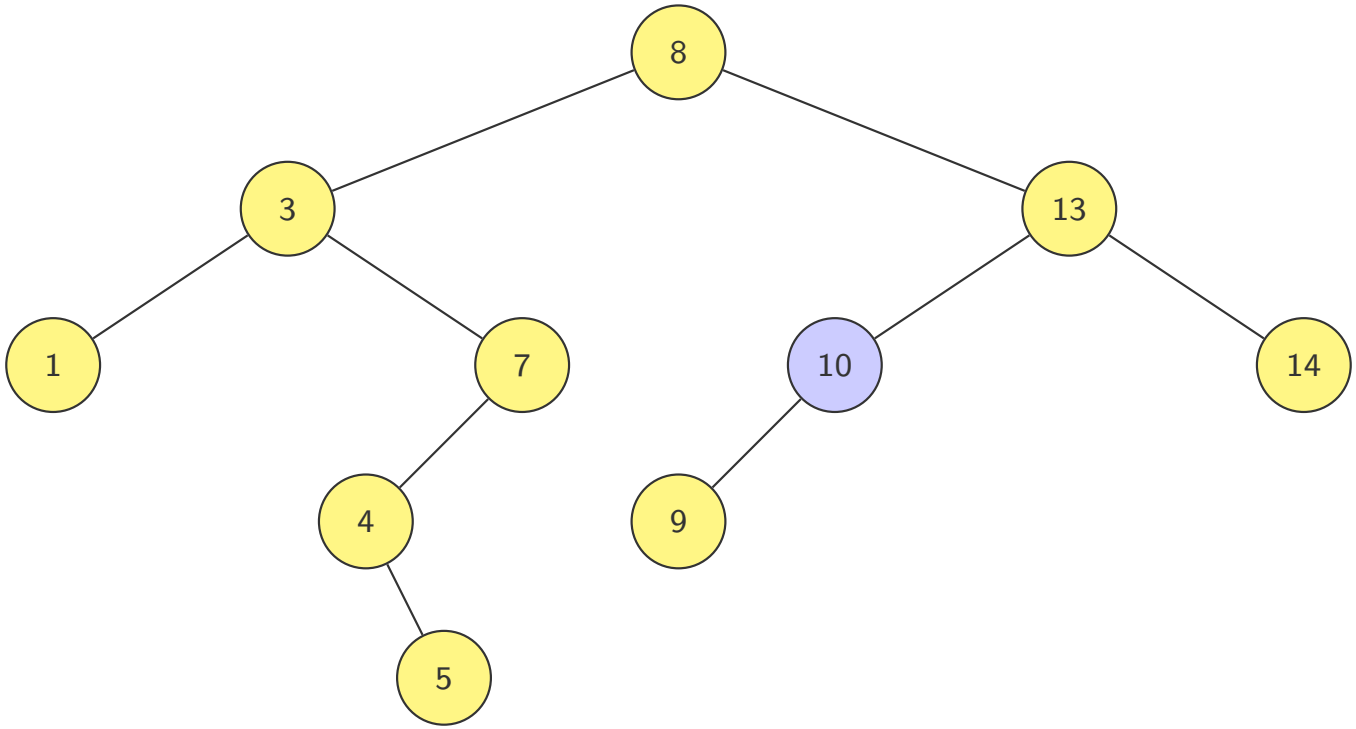
Remoção

Exemplo: queremos remover a chave 10



Remoção

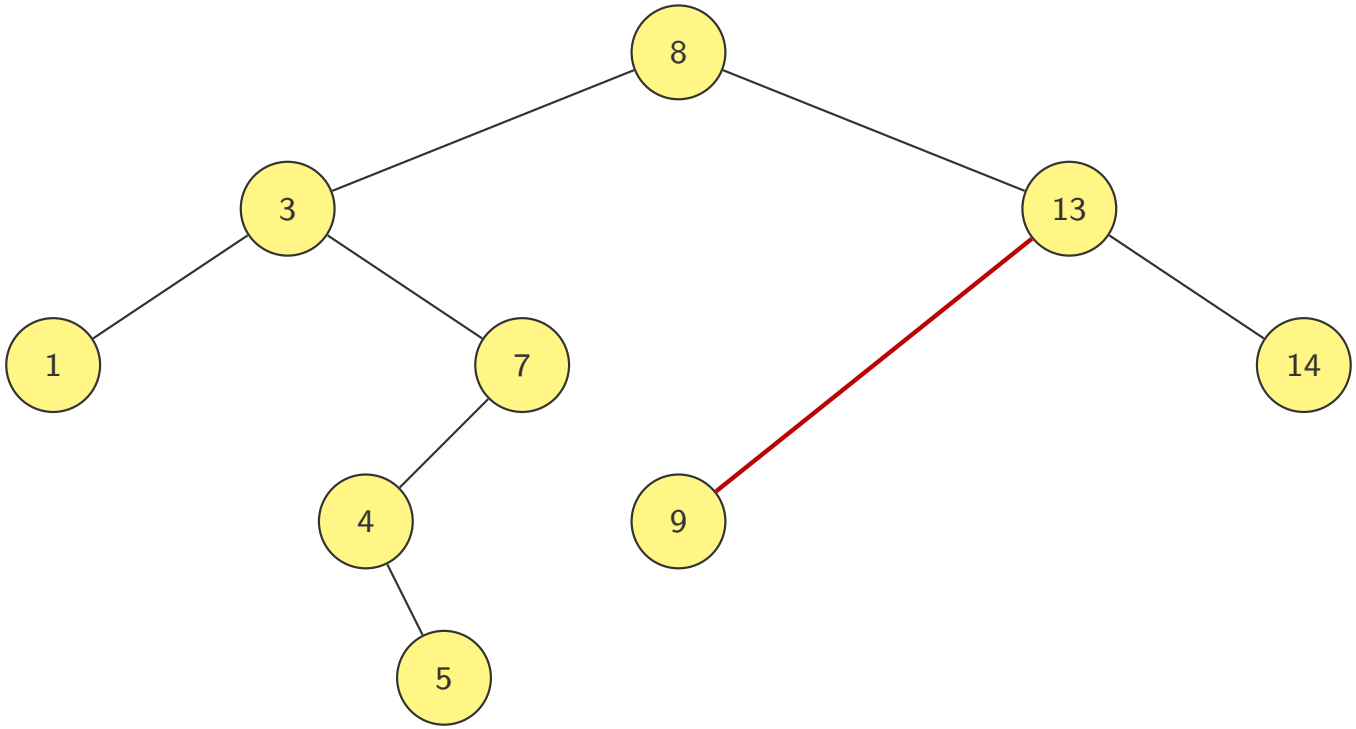
Exemplo: queremos remover a chave 10



- O nó x a ser removido pode ter exatamente um filho.

Remoção

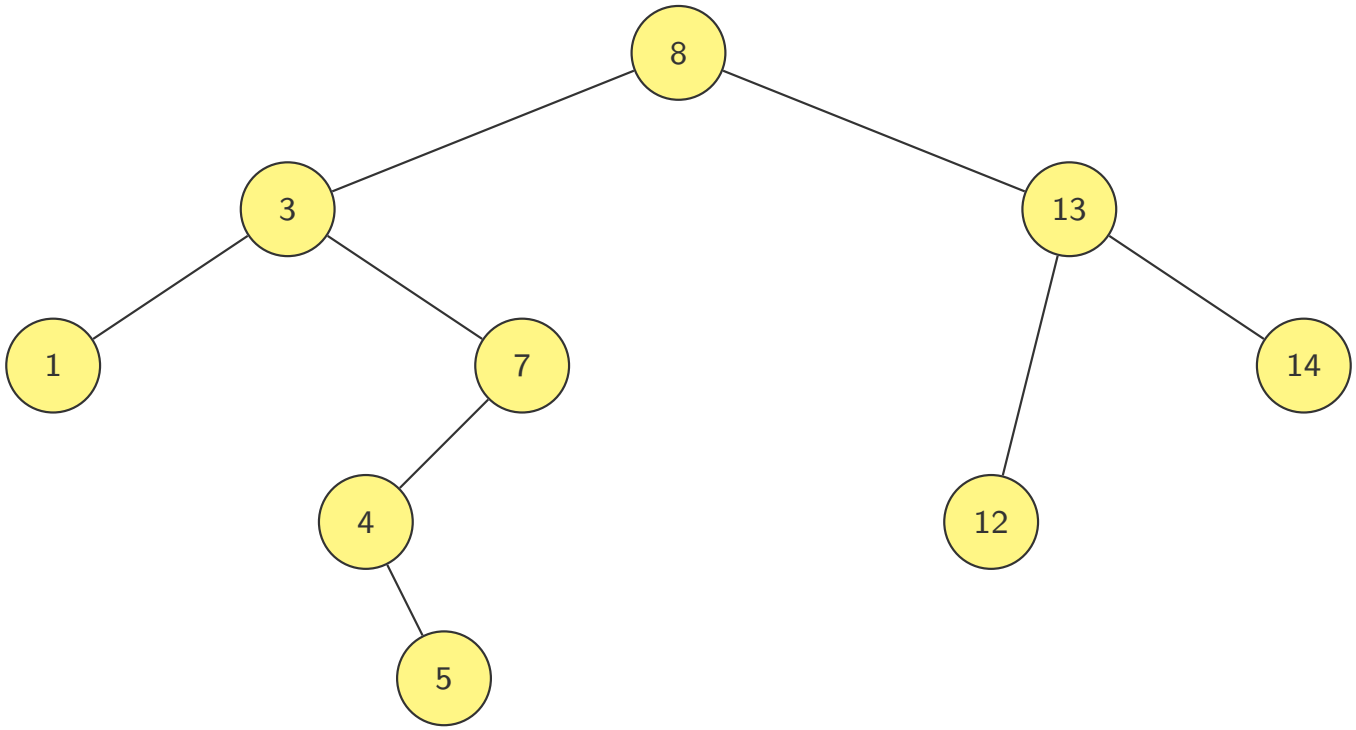
Exemplo: queremos remover a chave 10



- O nó x a ser removido pode ter exatamente um filho.
- Neste caso, fazemos o único filho de x ser filho do seu pai e depois removemos o nó x.

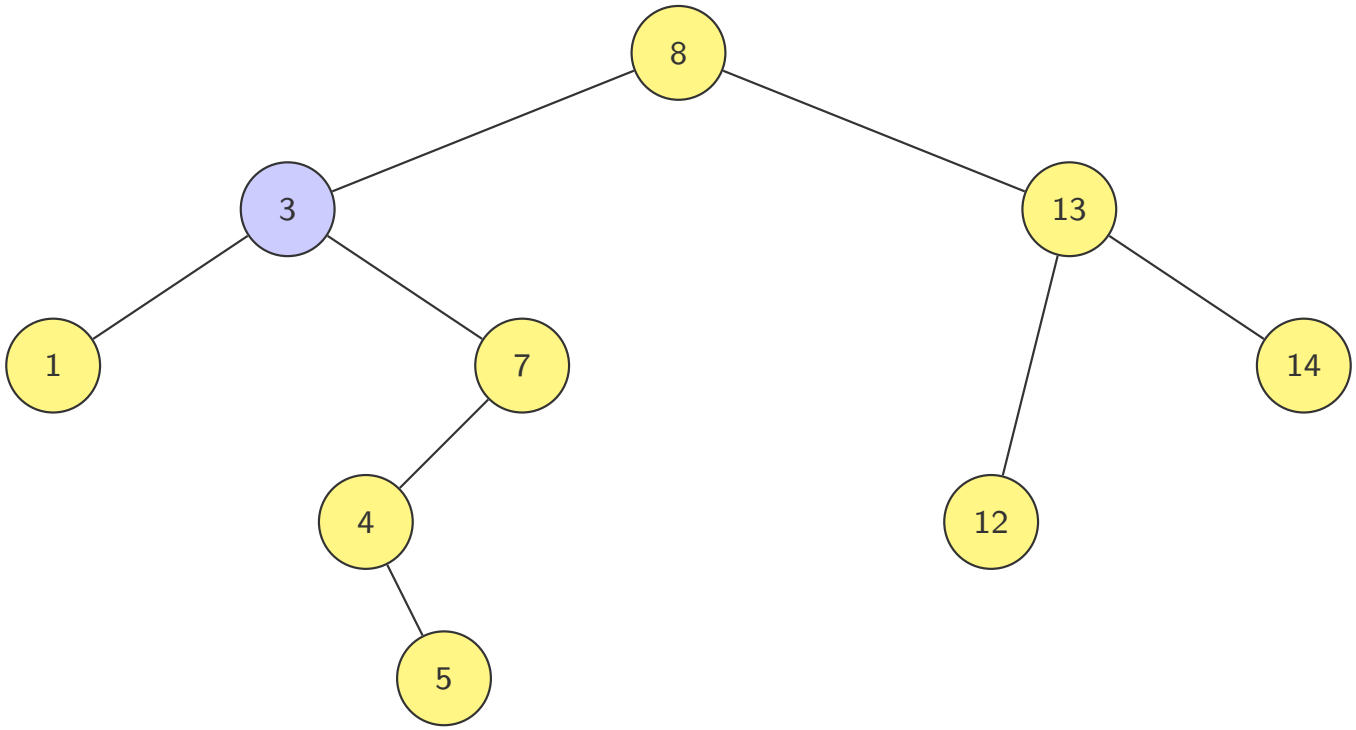
Remoção

Exemplo: removendo a chave 3



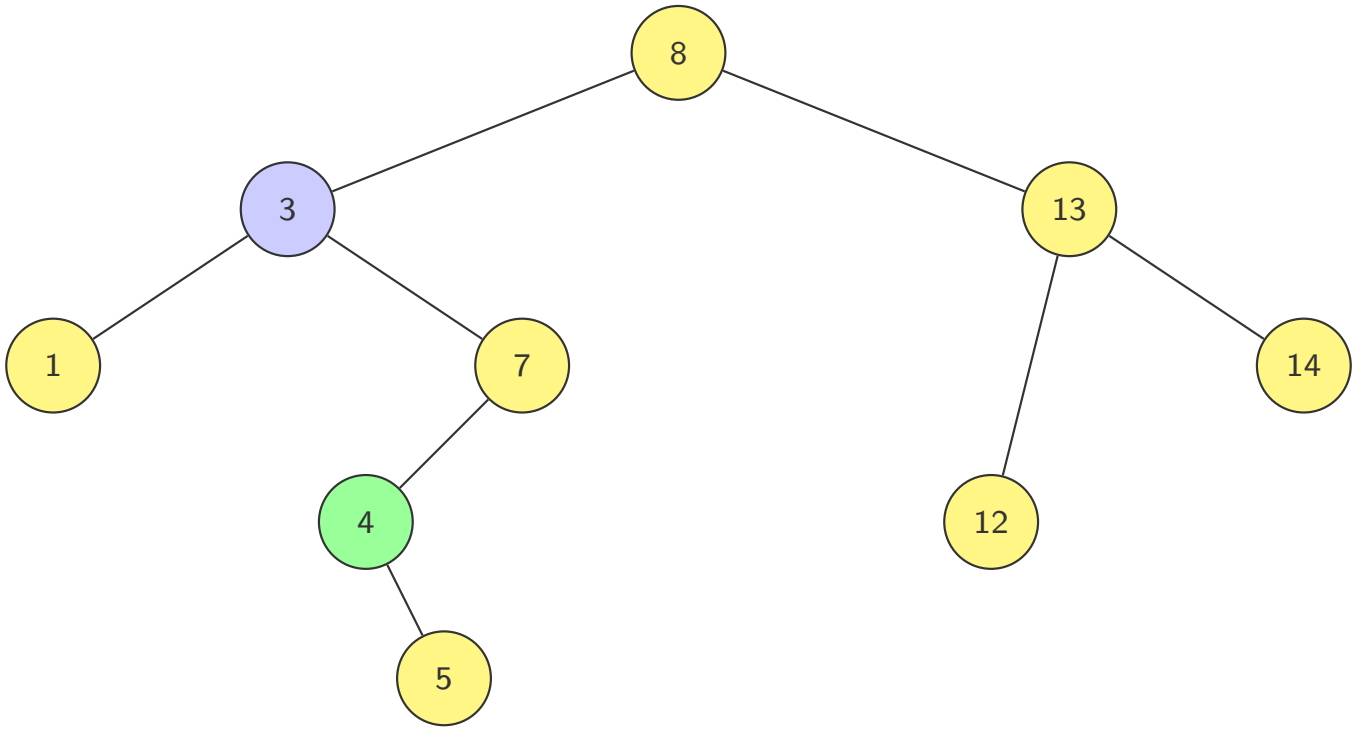
Remoção

Exemplo: removendo a chave 3



Remoção

Exemplo: removendo a chave 3

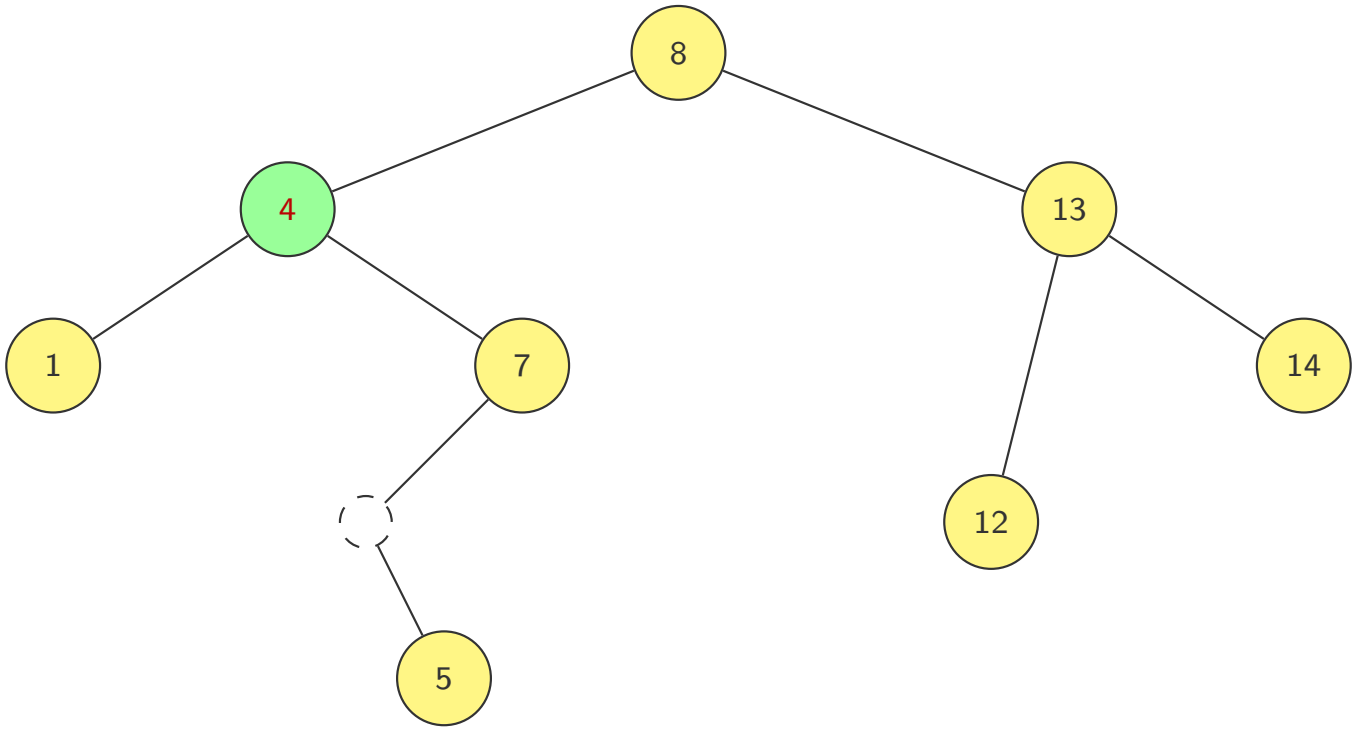


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Exemplo: removendo a chave 3

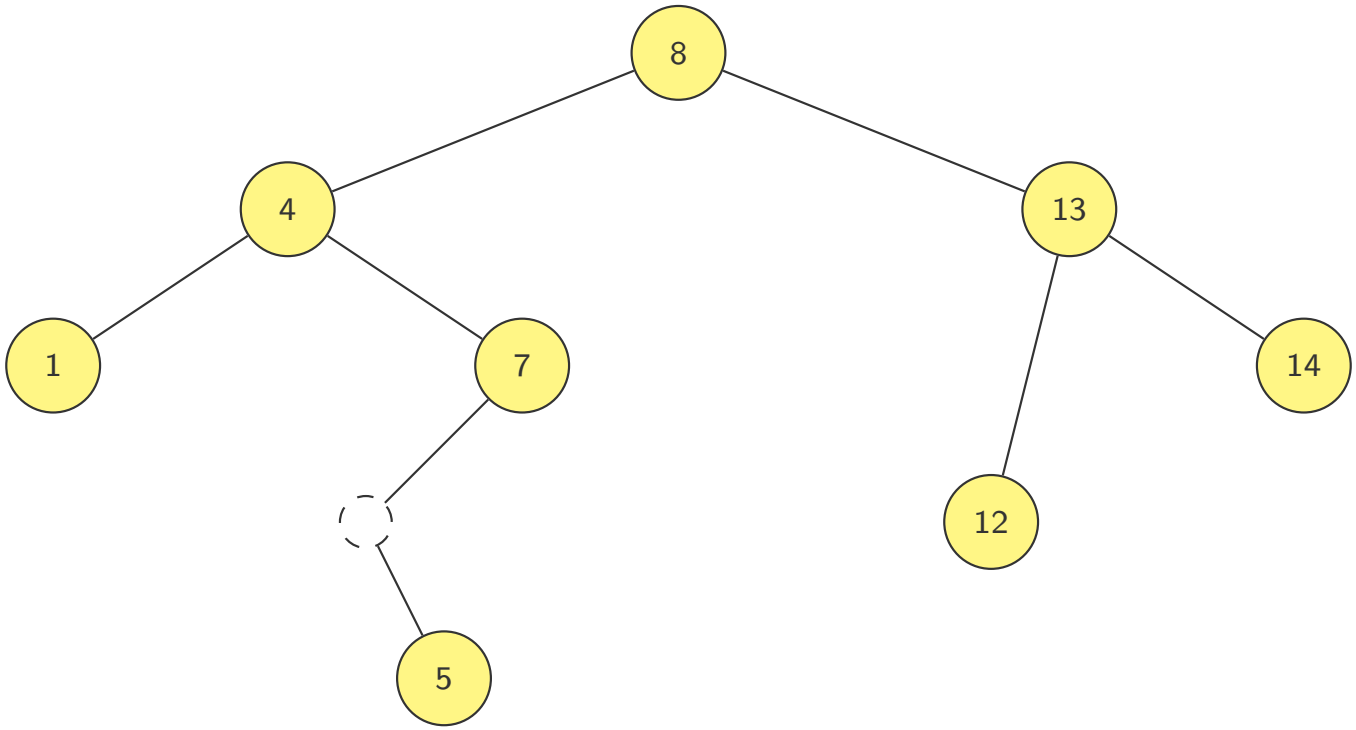


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Exemplo: removendo a chave 3



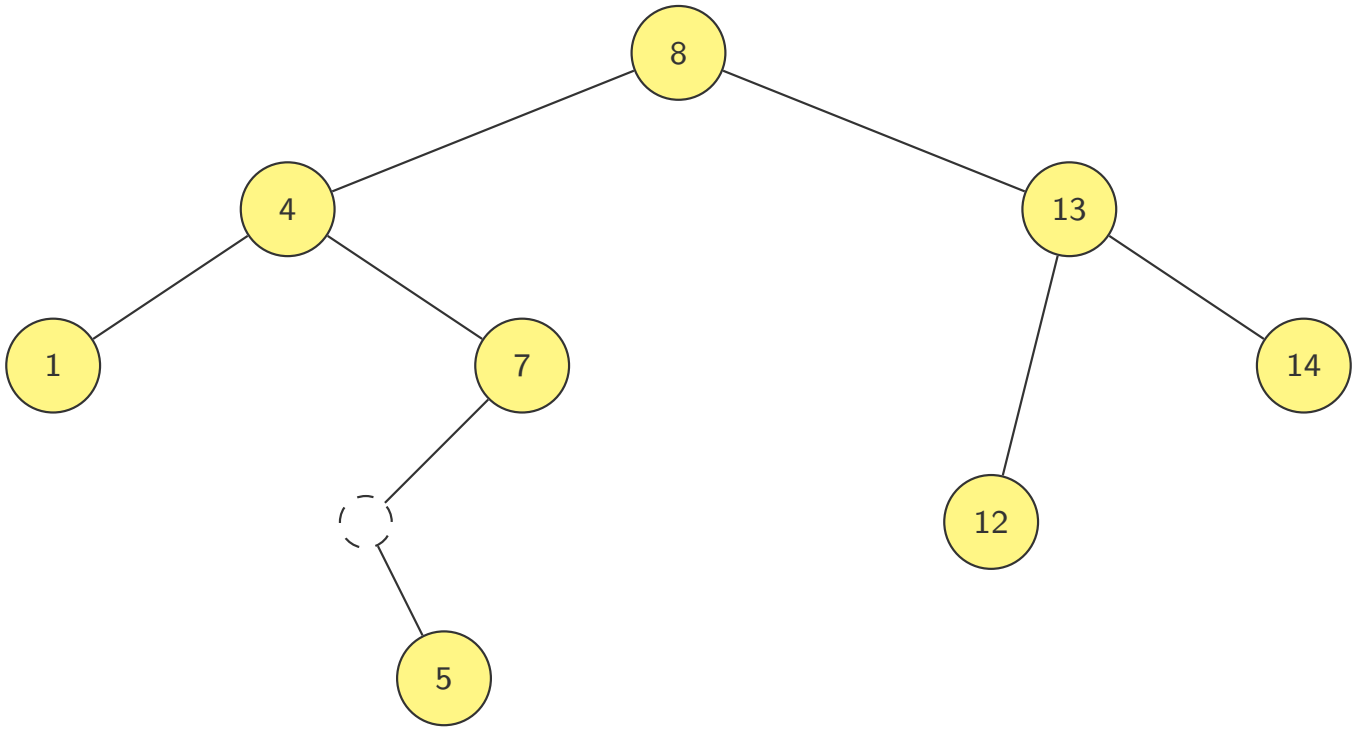
Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora colocamos o filho direito do sucessor no seu lugar

Remoção

Exemplo: removendo a chave 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

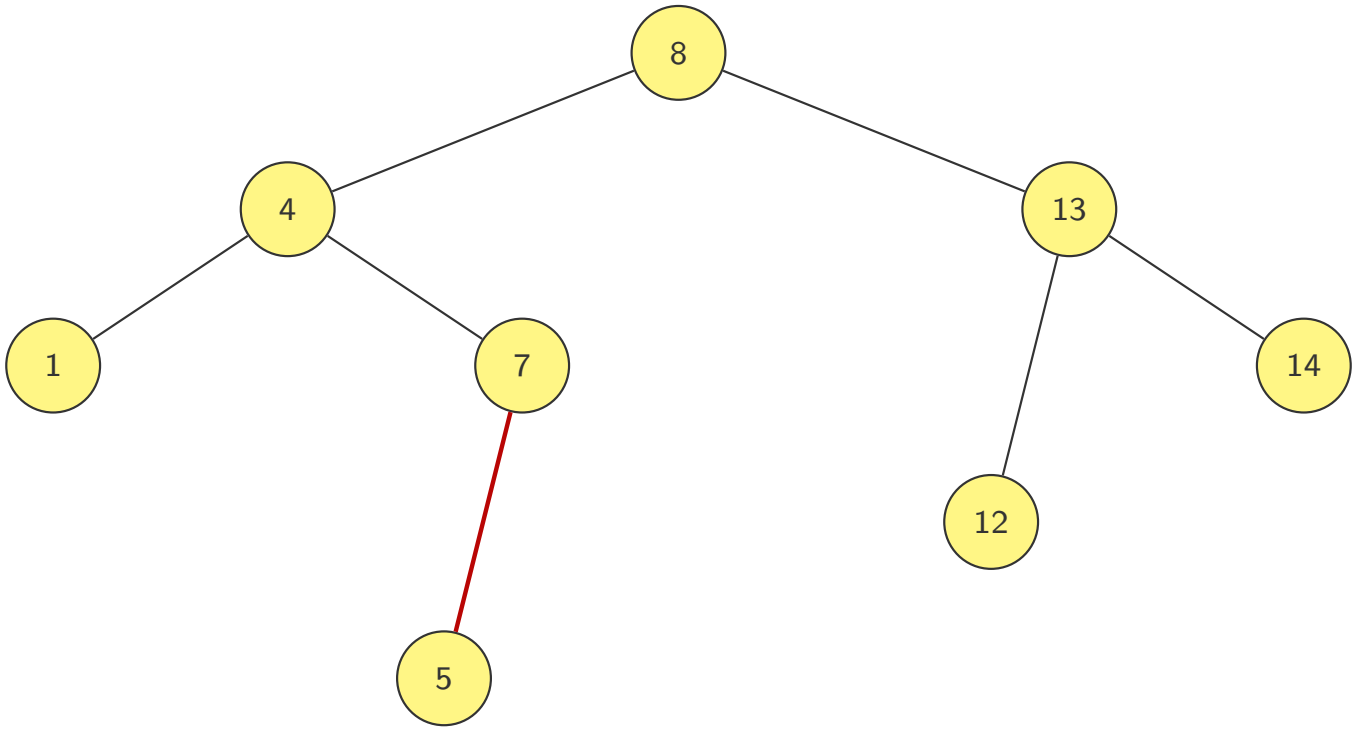
- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora colocamos o filho direito do sucessor no seu lugar

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção

Exemplo: removendo a chave 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora colocamos o filho direito do sucessor no seu lugar

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção

- Note que o nó a ser removido é a raiz de uma árvore.
  Essa raiz pode ou não ter filhos.

- Logo, trato esse problema como a remoção da raiz de uma árvore.

Remoção

- Note que o nó a ser removido é a raiz de uma árvore.
  Essa raiz pode ou não ter filhos.

- Logo, trato esse problema como a remoção da raiz de uma árvore.

Vou seguir um dos seguintes passos para remover a raiz:

1. Se a raiz **não tiver** filho direito, o filho esquerdo dela assume o papel de raiz;
2. Se a raiz **tiver** filho direito, basta fazer com que o nó sucessor à raiz assuma o papel da raiz.

Pseudocódigo da Remoção: Parte I

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
1  /**
2   * Algoritmo Recursivo
3   * Entrada: Recebe a raiz da arvore e a
4   *          chave k a ser removida
5   * Saida:   Retorna a raiz da nova arvore.
6   */
7  remove(Node *node, int k) {
8      if(node == nulo)
9          return nulo
10     if(k == node->key) // Achou o nodo a ser removido
11         return removeRoot(node); // funcao auxiliar
12     // Ainda nao achamos o nodo, vamos busca-lo
13     if(k < node->key)
14         node->left = remove(k, node->left);
15     else
16         node->right = remove(k, node->right);
17     return node;
18 }
```

Pseudocódigo da Remoção: Parte II


```
1  // Recebe um ponteiro node para a raiz de uma arvore e
2  // remove a raiz, rearranjando a arvore de modo que ela
3  // continue sendo de busca. Devolve o endereco da nova raiz
4  removeRoot(Node *node) {
5      Node *pai, *q;
6      if(node->right == nulo)
7          q = node->left;
8      else {
9          pai = node;
10         q = node->right;
11         while(q->left != nulo) {
12             pai = q;
13             q = q->left;
14         }
15         if(pai != node) {
16             pai->left = q->right;
17             q->right = node->right;
18         }
19         q->left = node->left;
20     }
21     delete node;
22     return q;
23 }
```

Remoção: Complexidade

Qual a complexidade do algoritmo de remoção?

Exercícios

Exercícios

- Conclua a implementação das funções que foram deixadas em aberto nos slides anteriores.

- Suponha que todo nó da BST tenha agora um ponteiro para nó pai. Reimplemente as operações vistas nessa aula considerando este novo ponteiro.

- Escreva uma função que receba como argumento uma BST vazia e um vetor $A[p..q]$ com $q - p + 1$ inteiros em ordem crescente e popule a BST com os inteiros do vetor A de modo que ela seja uma árvore binária de busca completa (altura igual a $\lceil \log_2 (n + 1) \rceil$). Sua função pode ter o seguinte protótipo:
  `void construirBST(BST *t, int A[], int p, int q);`

- Escreva uma função que transforme uma árvore binária de busca em um vetor crescente.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

FIM