Tabela Hash

Estrutura de Dados Avançada — QXD0015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Atílio Gomes Luiz
gomes.atilio@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

1º semestre/2025

Introdução

Contexto: Temos um conjunto de objetos com chaves associadas e possivelmente muitos outros dados. Precisamos realizar buscas de forma muito rápida por esses objetos a partir dos valores das chaves.

Introdução

Contexto: Temos um conjunto de objetos com chaves associadas e possivelmente muitos outros dados. Precisamos realizar buscas de forma muito rápida por esses objetos a partir dos valores das chaves.

- Tipos abstratos de dados que fornecem apenas as operações de inserção, busca e remoção são chamados de **dicionários** ou **mapas**.

Introdução

- Aplicação: Queremos carregar um dicionário da língua portuguesa na memória do computador.

Introdução

- Aplicação: Queremos carregar um dicionário da língua portuguesa na memória do computador.
  - Operações de inserção e busca serão frequentemente realizadas.

Introdução

- Aplicação: Queremos carregar um dicionário da língua portuguesa na memória do computador.
    - Operações de inserção e busca serão frequentemente realizadas.
    - Operações de remoção podem vir a ser realizadas e gostaríamos que fossem eficientes.

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$
  - inserir uma nova palavra leva $O(1)$

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$
  - inserir uma nova palavra leva $O(1)$
- Vetor ordenado - busca em $O(\lg n)$

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$
  - inserir uma nova palavra leva $O(1)$
- Vetor ordenado - busca em $O(\lg n)$
  - inserir/remover uma nova palavra leva $O(n)$

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$
  - inserir uma nova palavra leva $O(1)$
- Vetor ordenado - busca em $O(\lg n)$
  - inserir/remover uma nova palavra leva $O(n)$
- Árvore balanceada - busca/inserção/remoção em $O(\lg n)$

Introdução

Cada entrada do dicionário é composta por um par (verbete, descrição).

- **`paralelepípedo:`** `Hexaedro cujas faces, opostas e paralelas entre si, são paralelogramos.`

Primeiras opções:

- Vetor não ordenado - busca/remoção em $O(n)$
  - inserir uma nova palavra leva $O(1)$
- Vetor ordenado - busca em $O(\lg n)$
  - inserir/remover uma nova palavra leva $O(n)$
- Árvore balanceada - busca/inserção/remoção em $O(\lg n)$

Vamos ver outras possibilidades

Caso Simples: Tabela de acesso direto

Tabela de acesso direto

- Suponha que uma aplicação precisa de uma estrutura de dados na qual cada elemento tem uma chave com valor no conjunto $U = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, em que m não é muito grande.
  - Supomos que não existem chaves repetidas.

Tabela de acesso direto

- Suponha que uma aplicação precisa de uma estrutura de dados na qual cada elemento tem uma chave com valor no conjunto $U = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, em que m não é muito grande.
  - Supomos que não existem chaves repetidas.

- Podemos representar essa estrutura como um vetor $T[0..m-1]$ em que cada posição corresponde a uma chave do conjunto U.

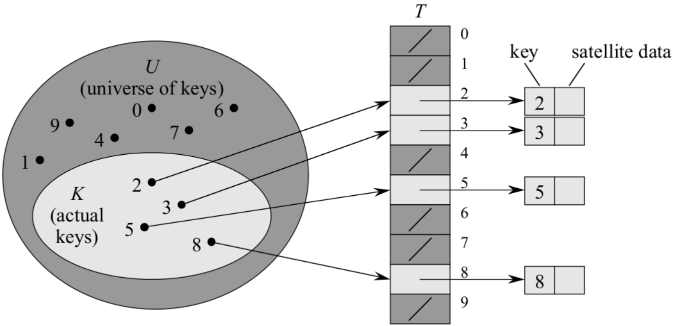


Tabela de acesso direto — Limitações

- Se o universo de possíveis chaves U for grande, então armazenar o vetor T de tamanho $|U|$ pode ser impraticável.
  - A memória é limitada.

Tabela de acesso direto — Limitações

- Se o universo de possíveis chaves U for grande, então armazenar o vetor T de tamanho $|U|$ pode ser impraticável.
    - A memória é limitada.

- O número de chaves armazenadas pode ser muito pequeno quando comparado ao tamanho do conjunto U.
    - Espaço será desperdiçado.

Tabela de acesso direto — Limitações

- Se o universo de possíveis chaves U for grande, então armazenar o vetor T de tamanho $|U|$ pode ser impraticável.
    - A memória é limitada.

- O número de chaves armazenadas pode ser muito pequeno quando comparado ao tamanho do conjunto U.
    - Espaço será desperdiçado.

- Quando o conjunto K de chaves é muito pequeno em relação ao universo U, gostaríamos de poder armazenar as chaves em uma tabela de tamanho $\Theta(|K|)$ e ao mesmo tempo manter o benefício de realizar busca, inserção e remoção em tempo $O(1)$.

Tabela Hash (Tabela de dispersão)

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.

- Tempo médio para inserção, busca e remoção: $O(1)$

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.

- Tempo médio para inserção, busca e remoção: $O(1)$

- Tempo $O(n)$ no pior caso.

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.

- Tempo médio para inserção, busca e remoção: $O(1)$

- Tempo $O(n)$ no pior caso.

Tabela hash

- Estrutura de dados onde as posições dos objetos armazenados são calculadas através de uma função que visa distribuir os elementos aleatoriamente ao longo de um vetor.
- Tempo médio para inserção, busca e remoção: $O(1)$
- Tempo $O(n)$ no pior caso.
- Usada em situações onde precisa-se apenas de operações de inserir, buscar e remover. Não se pode fazer caminhamento ordenado.

Componentes de uma tabela de dispersão

(1) Função de hashing

- Dado um conjunto U de chaves e um vetor(tabela) $T[0..m-1]$ com m posições, uma função de hashing mapeia cada chave de U em uma posição i do vetor $T[0..m-1]$, com $0 \leq i \leq m-1$.
  - As chaves nem sempre são valores numéricos. Por exemplo, as chaves podem consistir em nomes de pessoas.

Componentes de uma tabela de dispersão

(1) Função de hashing

- Dado um conjunto U de chaves e um vetor(tabela) $T[0..m-1]$ com m posições, uma função de hashing mapeia cada chave de U em uma posição i do vetor $T[0..m-1]$, com $0 \leq i \leq m-1$.
  - As chaves nem sempre são valores numéricos. Por exemplo, as chaves podem consistir em nomes de pessoas.

(2) Tratamento de colisão

- Duas chaves podem ser mapeadas no mesmo slot.
- Neste caso, teremos uma colisão, ou seja, duas ou mais chaves são mapeadas para a mesma posição da tabela.
- Atenção: Devemos tratar uma colisão quando ela ocorrer.

Tratamento de colisão por encadeamento exterior

Encadeamento Exterior

broca

boca

bolo

bela

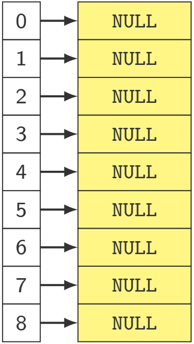
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca

boca

bolo

bela

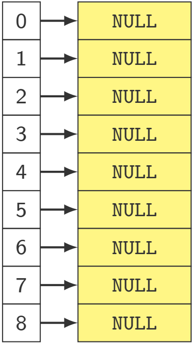
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca

boca

bolo

bela

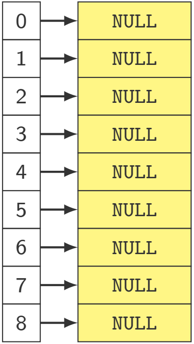
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca

bolo

bela

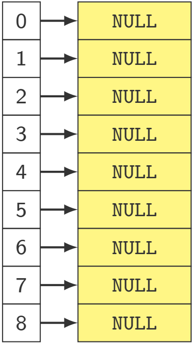
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	NULL
1	NULL
2	NULL
3	broca
4	NULL
5	NULL
6	NULL
7	NULL
8	NULL

Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo

bela

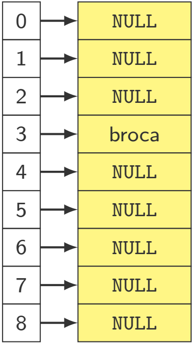
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca ⇝ `h("broca") = 3`

boca ⇝ `h("boca") = 0`

bolo

bela

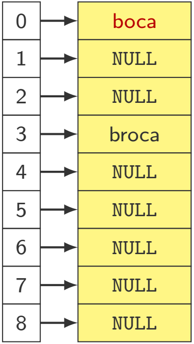
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca ⇝ `h("broca") = 3`

boca ⇝ `h("boca") = 0`

bolo ⇝ `h("bolo") = 5`

bela

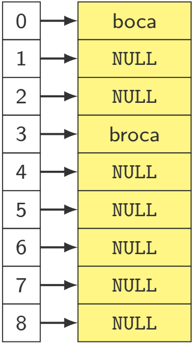
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela

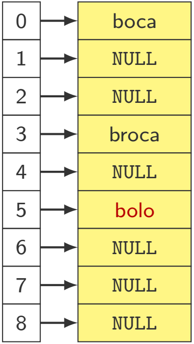
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	NULL
2	NULL
3	broca
4	NULL
5	bolo
6	NULL
7	NULL
8	NULL

Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

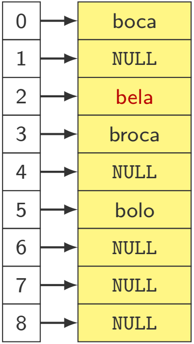
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

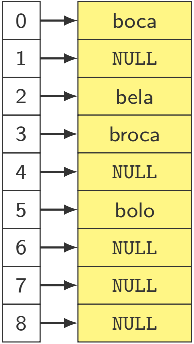
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca ⇝ `h("broca") = 3`

boca ⇝ `h("boca") = 0`

bolo ⇝ `h("bolo") = 5`

bela ⇝ `h("bela") = 2`

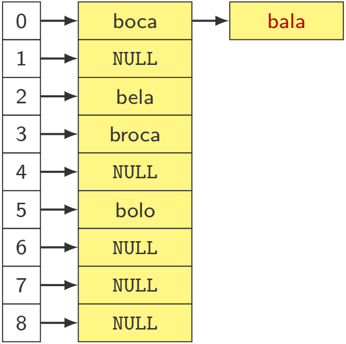
bala ⇝ `h("bala") = 0`

dia

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

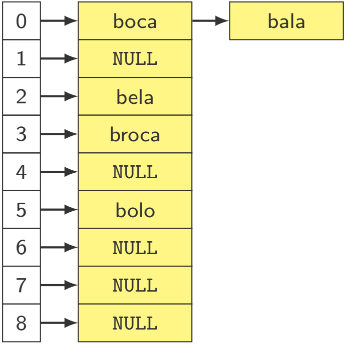
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

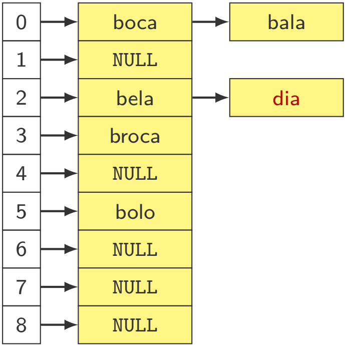
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

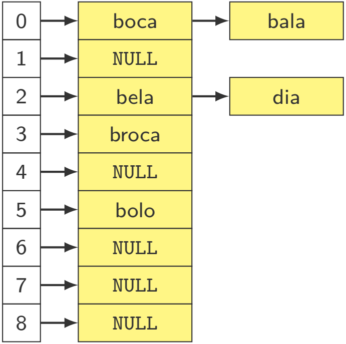
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

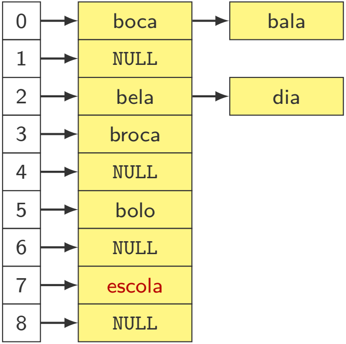
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

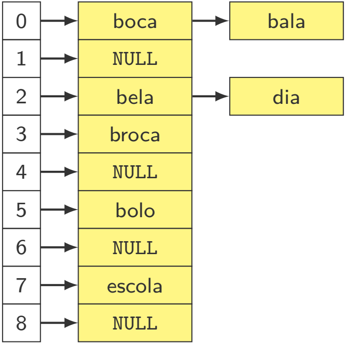
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito") = 0`

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

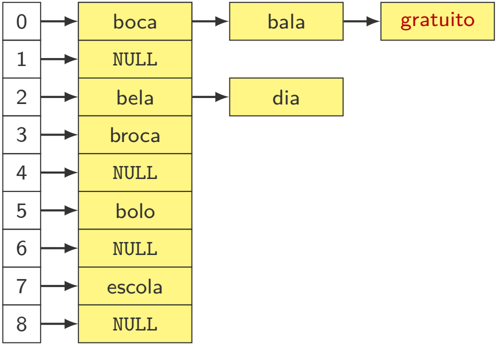
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito") = 0`

ilha



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

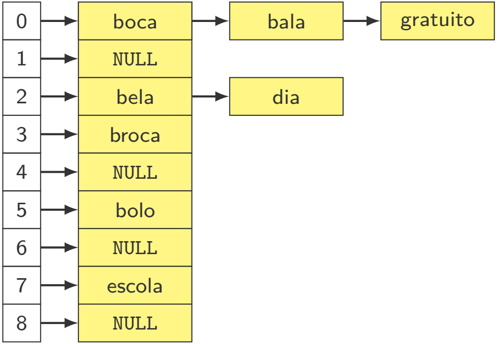
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito") = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha") = 6`



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Encadeamento Exterior

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca") = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca") = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo") = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela") = 2`

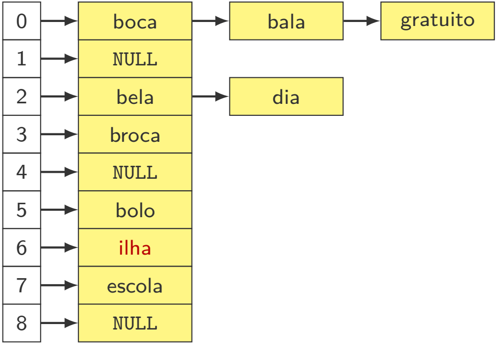
bala $\rightsquigarrow$ `h("bala") = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia") = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola") = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito") = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha") = 6`



Ideia:

- Dada uma tabela com $M = 9$ slots, usamos uma função hash para associar cada chave a um número inteiro (entre 0 e 8)

Complexidade do caso médio para tabela hash com encadeamento exterior

Algumas definições necessárias

- **Definição:** O fator de carga de uma tabela hash é o valor $\alpha = n/M$, onde n é o número de chaves armazenadas e M é o tamanho da tabela.

Algumas definições necessárias

- **Definição:** O fator de carga de uma tabela hash é o valor $\alpha = n/M$, onde n é o número de chaves armazenadas e M é o tamanho da tabela.

Algumas definições necessárias

- **Definição:** O fator de carga de uma tabela hash é o valor $\alpha = n/M$, onde n é o número de chaves armazenadas e M é o tamanho da tabela.

- **Definição:** Uma função de hashing h é uniforme se a probabilidade de que $h(x)$ seja igual a k é $1/M$ para toda chave x e todos os endereços $k \in \{0, \ldots, M-1\}$.

Algumas definições necessárias

- **Definição:** O fator de carga de uma tabela hash é o valor $\alpha = n/M$, onde n é o número de chaves armazenadas e M é o tamanho da tabela.

- **Definição:** Uma função de hashing h é uniforme se a probabilidade de que $h(x)$ seja igual a k é $1/M$ para toda chave x e todos os endereços $k \in \{0, \ldots, M-1\}$.

- **Definição:** Seja A um algoritmo, $\{E_1, \ldots, E_m\}$ o conjunto de todas as entradas possíveis de A. Denote por t_i o número de passos efetuados por A quando a entrada for E_i. Seja p_i a probabilidade de ocorrência da entrada E_i. A complexidade do caso médio de A é dada por

$$\sum_{i=1}^{m} p_i t_i = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \cdots + p_n t_n.$$

Complexidade do caso médio da busca malsucedida

Complexidade da busca malsucedida

Teorema 1. Numa tabela hash que utiliza função de hashing uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca sem sucesso é igual ao fator de carga α.

Complexidade do caso médio da busca malsucedida

Demonstração:

- Seja $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, numa tabela hash T.

Complexidade do caso médio da busca malsucedida

Demonstração:

- Seja $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, numa tabela hash T.

- Como a função de hashing é uniforme, existe a mesma probabilidade $1/M$ da busca ser efetuada em qualquer uma das M listas encadeadas.

Complexidade do caso médio da busca malsucedida

Demonstração:

- Seja $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, numa tabela hash T.

- Como a função de hashing é uniforme, existe a mesma probabilidade $1/M$ da busca ser efetuada em qualquer uma das M listas encadeadas.

- Seja L_i a lista onde a busca se efetua e $|L_i|$ o seu comprimento. Então,

$$N(T) = \frac{1}{M}|L_0| + \frac{1}{M}|L_1| + \cdots + \frac{1}{M}|L_{M-1}| = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}|L_i|.$$

Complexidade do caso médio da busca malsucedida

Demonstração:

- Seja $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, numa tabela hash T.

- Como a função de hashing é uniforme, existe a mesma probabilidade $1/M$ da busca ser efetuada em qualquer uma das M listas encadeadas.

- Seja L_i a lista onde a busca se efetua e $|L_i|$ o seu comprimento. Então,

$$N(T) = \frac{1}{M}|L_0| + \frac{1}{M}|L_1| + \cdots + \frac{1}{M}|L_{M-1}| = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}|L_i|.$$

- Como existe um total de n elementos, $\sum_{i=0}^{M-1}|L_i| = n$. Logo,

$$N(T) = \frac{n}{M} = \alpha. \qquad \blacksquare$$

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

Teorema 2. Numa tabela hash que utiliza função de hashing uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2M}$. □

Demonstração:

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

Teorema 2. Numa tabela hash que utiliza função de hashing uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2M}$. □

Demonstração:

- Seja T uma tabela hash e $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca com sucesso.

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

> **Teorema 2.** Numa tabela hash que utiliza função de hashing uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2M}$. □

Demonstração:

- Seja T uma tabela hash e $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca com sucesso.

- Sabe-se que a inclusão de cada chave nas listas encadeadas é realizada sempre no final da lista. Supondo a ausência de exclusões nas listas, a posição de cada chave em relação à cabeça da lista se mantém constante.

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

Teorema 2. Numa tabela hash que utiliza função de hashing uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a $1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2M}$. □

Demonstração:

- Seja T uma tabela hash e $N(T)$ o número médio de comparações efetuadas em uma busca com sucesso.
- Sabe-se que a inclusão de cada chave nas listas encadeadas é realizada sempre no final da lista. Supondo a ausência de exclusões nas listas, a posição de cada chave em relação à cabeça da lista se mantém constante.
- Cada uma das n chaves tem a mesma probabilidade $\frac{1}{n}$ de ser pesquisada.

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

- Logo, o número médio de comparações para localizar uma chave x, com sucesso, localizada em uma certa lista L_i, é igual ao comprimento médio de L_i na ocasião em que a chave foi inserida em L_i, adicionado de uma unidade (correspondente à comparação final com a própria chave x).

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

- Logo, o número médio de comparações para localizar uma chave x, com sucesso, localizada em uma certa lista L_i, é igual ao comprimento médio de L_i na ocasião em que a chave foi inserida em L_i, adicionado de uma unidade (correspondente à comparação final com a própria chave x).

- Supondo que x tenha sido a $(j+1)$-ésima chave a ser incluída, o comprimento médio de L_i é j/M. Logo,

Complexidade do caso médio da busca bem sucedida

- Logo, o número médio de comparações para localizar uma chave x, com sucesso, localizada em uma certa lista L_i, é igual ao comprimento médio de L_i na ocasião em que a chave foi inserida em L_i, adicionado de uma unidade (correspondente à comparação final com a própria chave x).

- Supondo que x tenha sido a $(j+1)$-ésima chave a ser incluída, o comprimento médio de L_i é j/M. Logo,

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{1}{n}\left(1+\frac{0}{M}\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{M}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-1}{M}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1+\frac{j}{M}\right) = 1+\frac{n(n-1)}{2nM} = 1+\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2M}. \quad \square \end{aligned}$$

Interpretação dos resultados

- Se o tamanho da tabela for proporcional ao número de elementos, então temos que $n = O(M)$.

Interpretação dos resultados

- Se o tamanho da tabela for proporcional ao número de elementos, então temos que $n = O(M)$.

- Ou seja, $\alpha = n/M = O(M)/M = O(1)$.

Interpretação dos resultados

- Se o tamanho da tabela for proporcional ao número de elementos, então temos que $n = O(M)$.

- Ou seja, $\alpha = n/M = O(M)/M = O(1)$.

- Tanto a complexidade média de busca sem sucesso quanto a da busca com sucesso são constantes.

Interpretação dos resultados

- Se o tamanho da tabela for proporcional ao número de elementos, então temos que $n = O(M)$.

- Ou seja, $\alpha = n/M = O(M)/M = O(1)$.

- Tanto a complexidade média de busca sem sucesso quanto a da busca com sucesso são constantes.

A fim de garantir que as listas não se tornem muito longas, geralmente, mantém-se o invariante

$$\frac{n}{M} \leq 1$$

Para isso, pode ser necessário aumentar o tamanho da tabela e reconstruí-la, essa operação é chamada de rehashing.

Função de hashing

Função de hashing

Definição

Dado um conjunto de chaves K e um inteiro positivo M, uma função de hashing é uma função $h\colon K \to \{0, 1, \ldots, M-1\}$ que idealmente satisfaz as seguintes condições:

- produz um número baixo de colisões.
- é facilmente computável.
- é uniforme: a probabilidade de que $h(x)$ seja igual ao índice i dever ser $1/M$ para todas as chaves $x \in K$ e todos os endereços $i \in \{0, \ldots, M-1\}$.

Função de hashing

- Na prática, é conveniente implementar uma função de hashing h como a composição de duas funções f e g.

Função de hashing

- Na prática, é conveniente implementar uma função de hashing h como a composição de duas funções f e g.
  - A função de codificação f mapeia chaves em inteiros não negativos (hash codes):

$$f\colon K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Função de hashing

- Na prática, é conveniente implementar uma função de hashing h como a composição de duas funções f e g.
  - A função de codificação f mapeia chaves em inteiros não negativos (hash codes):
  $$f\colon K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$
  - A função de compressão g mapeia `hash codes` em inteiros no conjunto $\{0, 1, \dots, M-1\}$:
  $$g\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \{0, \dots, M-1\}$$

Função de hashing

- Na prática, é conveniente implementar uma função de hashing h como a composição de duas funções f e g.
  - A função de codificação f mapeia chaves em inteiros não negativos (hash codes):
    $$f\colon K \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$$
  - A função de compressão g mapeia `hash codes` em inteiros no conjunto $\{0, 1, \dots, M-1\}$:
    $$g\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \{0, \dots, M-1\}$$
- Assim, o valor de hashing $h(x)$ de uma chave $x \in K$ é dado por
  $$h(x) = g(f(x)).$$

Primeira componente da função de hashing:
Função de codificação

Função de codificação — Strings

- Strings estão entre os tipos mais comuns de chaves.
- Temos um conjunto de chaves K do tipo string e queremos construir uma função de codificação $f\colon K \to \mathbb{Z}^+$. Vamos supor que o tipo de retorno da função é um inteiro sem sinal `unsigned int` ou `size_t`.

Função de codificação — Strings

- Strings estão entre os tipos mais comuns de chaves.

- Temos um conjunto de chaves K do tipo string e queremos construir uma função de codificação $f\colon K \to \mathbb{Z}^+$. Vamos supor que o tipo de retorno da função é um inteiro sem sinal `unsigned int` ou `size_t`.

- Pergunta: Dado um valor do tipo `string`, como transformá-lo em um valor do tipo `unsigned int`?

Função de codificação — Strings

- Strings estão entre os tipos mais comuns de chaves.

- Temos um conjunto de chaves K do tipo string e queremos construir uma função de codificação $f\colon K \to \mathbb{Z}^+$. Vamos supor que o tipo de retorno da função é um inteiro sem sinal `unsigned int` ou `size_t`.

- Pergunta: Dado um valor do tipo `string`, como transformá-lo em um valor do tipo `unsigned int`?
  - **Fato:** Uma string é composta por uma cadeia de caracteres. Cada caractere é um inteiro positivo cujo valor é determinado na tabela ASCII.

  - Ideia: Vamos usar o valor ASCII de cada caractere da chave para compor o valor de retorno da função.

Função de codificação — Strings

- Por exemplo, 'c' $= 99$, 'a' $= 97$ e 't' $= 116$, então essa função hash produziria $99 + 97 + 116 = 312$ para a string "cat".

```c
size_t string_hash_ruim (const char *x, size_t len) {
   size_t sum = 0;
   for (size_t i = 0; i < len; ++i)
      sum += x[i];
   return sum;
}
```

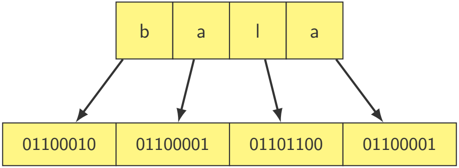
Função de codificação — Strings

- Por exemplo, 'c' = 99, 'a' = 97 e 't' = 116, então essa função hash produziria $99 + 97 + 116 = 312$ para a string "cat".

```
size_t string_hash_ruim (const char *x, size_t len) {
    size_t sum = 0;
    for (size_t i = 0; i < len; ++i)
        sum += x[i];
    return sum;
}
```

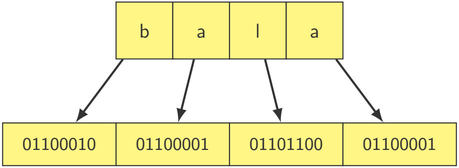
- Essa é uma função de codificação simples, mas não é muito boa. Por exemplo, produz o mesmo valor para "act" como para "cat".
- Uma função de codificação para strings mais sofisticada deve certamente depender de todos os caracteres e da ordem deles.

Função de codificação — Strings



Como podemos calcular o número x que representa "bala"?

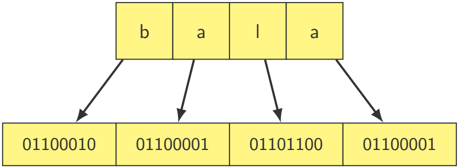
Função de codificação — Strings



Como podemos calcular o número x que representa "bala"?

- $x = \texttt{'b'} \cdot 127^3 + \texttt{'a'} \cdot 127^2 + \texttt{'l'} \cdot 127^1 + \texttt{'a'} \cdot 127^0$

Função de codificação — Strings

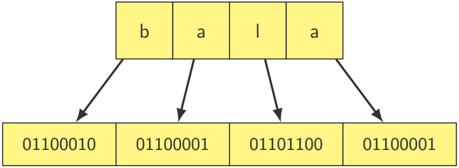


Como podemos calcular o número x que representa "bala"?

- $x = \texttt{'b'} \cdot 127^3 + \texttt{'a'} \cdot 127^2 + \texttt{'l'} \cdot 127^1 + \texttt{'a'} \cdot 127^0$

que pode ser reescrito como

Função de codificação — Strings



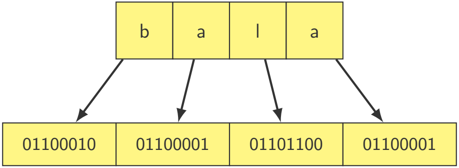
Como podemos calcular o número x que representa "bala"?

- $x = \texttt{'b'} \cdot 127^3 + \texttt{'a'} \cdot 127^2 + \texttt{'l'} \cdot 127^1 + \texttt{'a'} \cdot 127^0$

que pode ser reescrito como

- $x = (((\texttt{'b'}) \cdot 256 + \texttt{'a'}) \cdot 127 + \texttt{'l'}) \cdot 127 + \texttt{'a'}$

Função de codificação — Strings



Como podemos calcular o número x que representa "bala"?

- $x = \texttt{'b'} \cdot 127^3 + \texttt{'a'} \cdot 127^2 + \texttt{'l'} \cdot 127^1 + \texttt{'a'} \cdot 127^0$

que pode ser reescrito como

- $x = (((\texttt{'b'}) \cdot 256 + \texttt{'a'}) \cdot 127 + \texttt{'l'}) \cdot 127 + \texttt{'a'}$

Caso o valor de x fique muito grande para caber em um `unsigned int`, uma operação modulo M é executada internamente, em que M é o valor do maior `unsigned int`.

Função de codificação — Strings

```
// teste.cpp
size_t string_hash ( const char *x, size_t len ) {
   size_t code = 0, RADIX = 127;
   for (size_t i = 0; i < len; ++i)
      code = ( code * RADIX ) + x[i];
   return code;
}
```

Função de codificação — Strings

```
// teste.cpp
size_t string_hash ( const char *x, size_t len ) {
   size_t code = 0, RADIX = 127;
   for (size_t i = 0; i < len; ++i)
      code = ( code * RADIX ) + x[i];
   return code;
}
```

Exemplos com $BASE = 127$:

- "casa" $=$ 204369132
- "asac" $=$ 200560404
- "saca" $=$ 237141228

Função de codificação — `float`

- Ideia: trataremos o número de ponto flutuante como uma sequência de bytes. Em C++ um `float` utiliza 32 bits (4 bytes).

- Como um `char` é armazenado em 8 bits (1 byte), podemos interpretar um `float` de 32 bits como um vetor de 4 caracteres.

Função de codificação — `float`

- Ideia: trataremos o número de ponto flutuante como uma sequência de bytes. Em C++ um `float` utiliza 32 bits (4 bytes).

- Como um `char` é armazenado em 8 bits (1 byte), podemos interpretar um `float` de 32 bits como um vetor de 4 caracteres.

- C++ fornece uma função chamada std::memcpy que é usada para copiar blocos de memória (bytes) de um lugar para outro. Ela está definida no cabeçalho <cstring>. Assinatura da função:
    - `void* memcpy(void* dest, const void* src, std::size_t count);`
    - `dest` Ponteiro para o destino (onde os dados serão copiados).
    - `src` Ponteiro para a origem (de onde os dados serão copiados).
    - `count` Número de bytes a serem copiados.

Função de codificação — `float`

```
std::size_t float_hash (float x) {
    constexpr std::size_t n = sizeof(x);
    char bytes[n];
    std::memcpy(bytes, &x, n);
    return string_hash(bytes, n);
}
```

Função de codificação — `float`

```cpp
std::size_t float_hash (float x) {
    constexpr std::size_t n = sizeof(x);
    char bytes[n];
    std::memcpy(bytes, &x, n);
    return string_hash(bytes, n);
}
```

Exemplos usando `hash_float`:

- $23.564 = 34846198$
- $87.6 = 105279891$
- $89.096 = 80667418$
- $67.8 = 18446744073498939962$
- $3.23413 = 18446744073701287409$

Função genérica: strings e tipos primitivos

```
#include <iostream> // generic.cpp
#include <string>
#include <type_traits>
```

```
template<typename T>
size_t generic_hash(const T& v) {
    if constexpr (std::is_same<T, std::string>::value) {
        // trata std::string
        return string_hash(v.c_str(), v.size());
    } else {
        // trata tipos primitivos genericamente
        constexpr std::size_t n = sizeof(T);
        char bytes[n];
        std::memcpy(bytes, &v, n);
        return string_hash(bytes, n);
    }
}
```

- **if constexpr** é um condicional em tempo de compilação disponível desde o C++17. Ele garante que apenas o ramo relevante do código seja compilado. Ele garante que o primeiro bloco só será compilado se for passado um `std::string`.

Template de classe
std::hash

std::hash

- O C++ possui o cabeçalho `<functional>` no qual está definido o template `std::hash` da seguinte maneira:

```
namespace std {
  template< typename T > class hash;
}
```

std::hash

- O C++ possui o cabeçalho `<functional>` no qual está definido o template `std::hash` da seguinte maneira:

```
namespace std {
  template< typename T > class hash;
}
```

- Em `<functional>` há especializações desse template para todos os tipos primitivos, como `int`, `float`, `double`, etc. e também para `std::string`.

- Em resumo: um objeto da classe `std::hash<T>` é um objeto sem estado que implementa o operador `()`. Esse operador recebe como parâmetro um valor do tipo `T` e retorna seu `hash code` como `size_t`.

std::hash — Exemplo de uso

```cpp
#include <iostream> //hash01.cpp
#include <string>
#include <functional> // para std::hash
using namespace std;

int main () {
  string name { "Ana Almeida" };
  hash<string> ff;
  cout << name << " = " << ff(name) << endl;

  int i = 24, j = -24;
  hash<int> hint;
  cout << i << " = " << hint( i ) << endl;
  cout << j << " = " << hint( j ) << endl;

  double d = 23.45, e = 24.35;
  cout << d << " = " << hash<double>()( d ) << endl;
  cout << e << " = " << hash<double>()( e ) << endl;
  return 0;
}
```

std::hash — Tipos definidos pelo usuário

Também podemos especializar o template `std::hash` para definir hash codes para tipos que nós mesmos definirmos.

```cpp
#include <iostream> // hash02.cpp
#include <string>
#include <functional>

struct Name {
   std::string first;
   std::string last;
};

namespace std {
   template <>
   class hash< Name > {
      public:
         size_t operator()( const Name & p ) const {
            auto n1 = std::hash<string>()(p.first);
            auto n2 = std::hash<string>()(p.last);
            return n1 ^ n2; // XOR operation
         }
   };
}
```

std::hash — Tipos definidos pelo usuário (cont.)

```cpp
int main () {
  Name p1 {"Ana", "Almeida" };
  Name p2 {"Aan", "Ameidal" };

  size_t key1 = std::hash<Name>()( p1 );
  size_t key2 = std::hash<Name>()( p2 );

  std::cout << key1 << std::endl;
  std::cout << key2 << std::endl;

  return 0;
}
```

Função de codificação como uma classe própria

```
#include <iostream> // hash03.cpp
#include <functional>

struct Name {
    std::string first;
    std::string last;
};

class hashName {
public:
    size_t operator()( const Name &name ) const {
        auto n1 = std::hash<std::string>()(name.first);
        auto n2 = std::hash<std::string>()(name.last);
        return n1 ^ n2;
    }
};

int main () {
  Name p3 { "Pedro", "Paulo" };
  size_t key3 = hashName()( p3 );
  std::cout << key3 << std::endl;
  return 0;
}
```

Segunda componente da função de hashing: Função de compressão

Recapitulando funções hash...

- Implementamos uma função hash h como a composição de duas funções f e g.
  - A função de codificação f mapeia chaves em inteiros não negativos (hash codes):
  $$f\colon K \to \mathbb{Z}^+$$
  - A função de compressão g mapeia hash codes em inteiros no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$:
  $$g\colon \mathbb{Z}^+ \to \{0, \ldots, M-1\}$$

Recapitulando funções hash...

- Implementamos uma função hash h como a composição de duas funções f e g.
  - A função de codificação f mapeia chaves em inteiros não negativos (hash codes):
  $$f\colon K \to \mathbb{Z}^+$$
  - A função de compressão g mapeia hash codes em inteiros no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$:
  $$g\colon \mathbb{Z}^+ \to \{0, \ldots, M-1\}$$

Veremos a seguir como implementar uma função de compressão usando o método da divisão.

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \dots, M-1\}$

- Ideia: usar a função módulo para obter o resto da divisão de x pelo tamanho M da tabela hash.

$$g(x) = x \; \textbf{mod} \; M$$

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$

- Ideia: usar a função módulo para obter o resto da divisão de x pelo tamanho M da tabela hash.

$$g(x) = x \textbf{ mod } M$$

Exemplo: supondo hash(“bala”) $= 1.650.551.905$, temos

$$g(\text{hash(“bala”)}) = 1.650.551.905 \textbf{ mod } 1783 = 277$$

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$

- Ideia: usar a função módulo para obter o resto da divisão de x pelo tamanho M da tabela hash.

$$g(x) = x \textbf{ mod } M$$

Exemplo: supondo hash("bala") $= 1.650.551.905$, temos

$$g(\text{hash(“bala”)}) = 1.650.551.905 \textbf{ mod } 1783 = 277$$

Escolhendo M:

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$

- Ideia: usar a função módulo para obter o resto da divisão de x pelo tamanho M da tabela hash.

$$g(x) = x \textbf{ mod } M$$

Exemplo: supondo hash("bala") $= 1.650.551.905$, temos

$$g(\text{hash(“bala”)}) = 1.650.551.905 \textbf{ mod } 1783 = 277$$

Escolhendo M:

- escolher M como uma potência de 2 não é uma boa ideia:

Método da divisão

- **Objetivo:** Construir função g que mapeia qualquer inteiro x não negativo no conjunto $\{0, 1, \ldots, M-1\}$

- Ideia: usar a função módulo para obter o resto da divisão de x pelo tamanho M da tabela hash.

$$g(x) = x \textbf{ mod } M$$

Exemplo: supondo hash(“bala”) $= 1.650.551.905$, temos

$$g(\text{hash(“bala”)}) = 1.650.551.905 \textbf{ mod } 1783 = 277$$

Escolhendo M:

- escolher M como uma potência de 2 não é uma boa ideia:
  - considera apenas os bits menos significativos. Exemplo:

Método da divisão — M como potência de 2

- Suponha $M = 2^j$ e a chave armazenada numa palavra de memória de 16 bits.

Método da divisão — M como potência de 2

- Suponha $M = 2^j$ e a chave armazenada numa palavra de memória de 16 bits.
- Se $j = 5$, a função $g(x)$ produzirá endereços que resultam dos últimos cinco bits da chave, isto é, $g(x)$ não levará nunca em consideração os dígitos mais significativos de x.

Método da divisão — M como potência de 2

- Suponha $M = 2^j$ e a chave armazenada numa palavra de memória de 16 bits.
- Se $j = 5$, a função $g(x)$ produzirá endereços que resultam dos últimos cinco bits da chave, isto é, $g(x)$ não levará nunca em consideração os dígitos mais significativos de x.

x	g(x) $= x \mod 32$	binário(x)
16838	6	100000111**00110**
5758	30	10110011**11110**
17515	11	100010001**01011**
31051	11	111100101**01011**
5627	27	10101111**11011**
23010	2	101100111**00010**
7419	27	11100111**11011**
16212	20	11111101**10100**
4086	22	1111111**10110**

Método da divisão — M como potência de 2

- Suponha $M = 2^j$ e a chave armazenada numa palavra de memória de 16 bits.
- Se $j = 5$, a função $g(x)$ produzirá endereços que resultam dos últimos cinco bits da chave, isto é, $g(x)$ não levará nunca em consideração os dígitos mais significativos de x.

x	g$(x) = x \mod 32$	binário(x)
16838	6	10000011100**0110**
5758	30	1011001**11110**
17515	11	1000100011**01011**
31051	11	1111001010**01011**
5627	27	1010111**11011**
23010	2	1011001111**00010**
7419	27	1110011**11011**
16212	20	1111110101**0100**
4086	22	1111111**10110**

- Outra escolha ruim: Se M for par, $g(x)$ será par quando x for par e será ímpar caso contrário.

Escolhendo o tamanho M da tabela hash

- Dica: normalmente escolhemos M como um número primo.

Escolhendo o tamanho M da tabela hash

- Dica: normalmente escolhemos M como um número primo.
- Dica do Sedgewick: Escolha uma potência de 2 que esteja próxima do valor desejado de M. Depois, adote para M o número primo que esteja logo abaixo da potência escolhida.

Escolhendo o tamanho M da tabela hash

- Dica: normalmente escolhemos M como um número primo.
- Dica do Sedgewick: Escolha uma potência de 2 que esteja próxima do valor desejado de M. Depois, adote para M o número primo que esteja logo abaixo da potência escolhida.

k	2^k	M
7	128	127
8	256	251
9	512	509
10	1024	1021
11	2048	2039
12	4096	4093
13	8192	8191
14	16384	16381
15	32768	32749
16	65536	65521
17	131072	131071
18	262144	262139

Método da divisão — Implementação

```cpp
#include <iostream> // hashFunction02a.cpp
#include <iomanip>
#include <functional>
using namespace std;

// funcao de codificacao + uncao de compressao
size_t hash_code( const float& chave, size_t tableSize )
{
    return std::hash<float>()(chave) % tableSize;
}

int main()
{
    for(int i = 1; i <= 10; ++i)
    {
        cout << "hash_code(" << setw(3) << right << i * 0.5
             << ") = " << hash_code(i * 0.5, 251) << endl;
    }
}
```

Implementação da tabela hash com tratamento de colisão por encadeamento exterior

Detalhes de implementação

- Implementaremos a tabela hash como um template de classe chamado **HashTable**. O template terá dois parâmetros: `T` para a chave e `V` para o valor associado à chave.
  - Dentro da classe, esses dois valores serão representados como um tipo composto. Para isso, usaremos o tipo `std::pair` padrão do C++.

Detalhes de implementação

- Implementaremos a tabela hash como um template de classe chamado **HashTable**. O template terá dois parâmetros: `T` para a chave e `V` para o valor associado à chave.
  - Dentro da classe, esses dois valores serão representados como um tipo composto. Para isso, usaremos o tipo `std::pair` padrão do C++.

- A tabela hash com tratamento de colisão por encadeamento exterior consiste em um vetor $T[0..M-1]$ com M slots, onde cada slot é uma lista encadeada contendo as chaves mapeadas naquele slot.
  - Não vamos programar do zero.
  - Vamos usar um `std::vector` em que cada elemento é uma lista `std::list` de elementos do tipo `std::pair<T,V>`

Classe `std::pair`

- `std::pair`: Esta classe acopla um par de valores, que podem ser de diferentes tipos (T1 e T2). Está definido no cabeçalho `<utility>`.

Classe `std::pair`

- `std::pair`: Esta classe acopla um par de valores, que podem ser de diferentes tipos (T1 e T2). Está definido no cabeçalho `<utility>`.

- O primeiro elemento é acessado pelo atributo público '`first`' e o segundo elemento é acessado pelo atributo público '`second`' e a ordem é fixa `(first, second)`.

Classe `std::pair`

- `std::pair`: Esta classe acopla um par de valores, que podem ser de diferentes tipos (T1 e T2). Está definido no cabeçalho `<utility>`.

- O primeiro elemento é acessado pelo atributo público '`first`' e o segundo elemento é acessado pelo atributo público '`second`' e a ordem é fixa `(first, second)`.

- `std::pair` fornece uma maneira de armazenar dois objetos heterogêneos como uma única unidade. O par pode ser atribuído, copiado e comparado.

- Um template de função útil que vamos usar é a função `std::make_pair`. Esta função recebe como argumento dois valores dos tipos T1 e T2 e retorna um `std::pair<T1, T2>`

Classe std::pair — Exemplo

```cpp
// pair.cpp
#include <utility>      // std::pair
#include <iostream>     // std::cout
using std::cout;

int main () {
  std::pair <int,int> bar(3,4);
  std::pair <int,int> foo;
  foo = std::make_pair (10,20);

  cout << "foo: " << foo.first;
  cout << ", " << foo.second << '\n';

  cout << "bar: " << bar.first;
  cout << ", " << bar.second << '\n';

  return 0;
}
```

Outra técnica de tratamento de colisão: Endereçamento aberto

Endereçamento aberto

- Existem vários métodos para armazenar N chaves em uma tabela de tamanho $M > N$, os quais utilizam os slots vazios na própria tabela para resolver as colisões. Esses métodos são chamados endereçamento aberto (open addressing)

Endereçamento aberto

- Existem vários métodos para armazenar N chaves em uma tabela de tamanho $M > N$, os quais utilizam os slots vazios na própria tabela para resolver as colisões. Esses métodos são chamados endereçamento aberto (open addressing)

- Características:
  - evita percorrer usando ponteiros e alocação e desalocação de memória nas inserções e remoções.

Endereçamento aberto

- Existem vários métodos para armazenar N chaves em uma tabela de tamanho $M > N$, os quais utilizam os slots vazios na própria tabela para resolver as colisões. Esses métodos são chamados endereçamento aberto (open addressing)

- Características:
  - evita percorrer usando ponteiros e alocação e desalocação de memória nas inserções e remoções.
  - se a tabela encher, uma alternativa é criar uma tabela maior
    - e mudar a função de hashing

Endereçamento aberto

- Existem vários métodos para armazenar N chaves em uma tabela de tamanho $M > N$, os quais utilizam os slots vazios na própria tabela para resolver as colisões. Esses métodos são chamados endereçamento aberto (open addressing)

- Características:
  - evita percorrer usando ponteiros e alocação e desalocação de memória nas inserções e remoções.
  - se a tabela encher, uma alternativa é criar uma tabela maior
    - e mudar a função de hashing
  - No endereçamento aberto, a tabela pode ser preenchida até ficar cheia. Uma consequência disso é que o fator de carga $\alpha = \frac{n}{M}$ nunca é maior do que 1.

Endereçamento aberto — Inserção

- Para executar a inserção usando endereçamento aberto, examinamos sucessivamente a tabela hash (**sondamos**) até encontrar uma posição vazia na qual inserir a chave.

Endereçamento aberto — Inserção

- Para executar a inserção usando endereçamento aberto, examinamos sucessivamente a tabela hash (**sondamos**) até encontrar uma posição vazia na qual inserir a chave.

Endereçamento aberto — Inserção

- Para executar a inserção usando endereçamento aberto, examinamos sucessivamente a tabela hash (**sondamos**) até encontrar uma posição vazia na qual inserir a chave.

- **Exemplo:** queremos inserir a chave maria neste array. O problema é que não sabemos de antemão quais slots estão vazios. Qual abordagem ingênua poderíamos usar?

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	
8	

Endereçamento aberto — Inserção

- **Ideia:** Em vez de seguir a ordem de sondagem $0, 1, \ldots, m-1$ (o que exige o tempo de busca $O(n)$), fazemos com que a sequência de posições sondadas dependa da chave que está sendo inserida.

Endereçamento aberto — Inserção

- Para determinar quais serão as posições a sondar, estendemos a <u>função de hashing</u> para incluir o número da sondagem (a partir de 0) como uma segunda entrada. Assim, a função de hashing se torna:

$$h\colon U \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \;\to\; \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Endereçamento aberto — Inserção

- Para determinar quais serão as posições a sondar, estendemos a função de hashing para incluir o número da sondagem (a partir de 0) como uma segunda entrada. Assim, a função de hashing se torna:

$$h\colon U \times \{0, 1, \ldots, m-1\} \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

- Com endereçamento aberto, exigimos que, para toda chave k, a **sequência de sondagem**

$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m-1) \rangle$$

seja uma permutação de $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$, de modo que toda posição da tabela hash seja eventualmente considerada uma posição para uma nova chave, à medida que a tabela é preenchida.

Sondagem Linear

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca

boca

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca ⇝ `h("broca",0) = 3`

boca

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca ⇝ `h("broca",0) = 3`

boca

bolo

bela

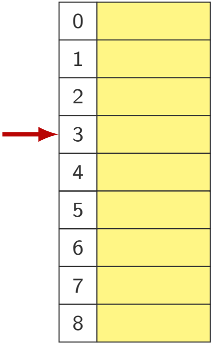
bala

dia

escola

gratuito

ilha



Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca ⇝ `h("broca",0) = 3`

boca

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca ⇝ `h("broca",0) = 3`

boca ⇝ `h("boca",0) = 0`

bolo ⇝ `h("bolo",0) = 5`

bela ⇝ `h("bela",0) = 2`

bala ⇝ `h("bala",0) = 0`

dia ⇝ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\leadsto$ `h("broca",0) = 3`

boca $\leadsto$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\leadsto$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\leadsto$ `h("bela",0) = 2`

bala $\leadsto$ `h("bala",0) = 0`

dia $\leadsto$ `h("dia",0) = 2`

escola $\leadsto$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\leadsto$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha $\leadsto$ `h("ilha",0) = 6`

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha",0) = 6`

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha",0) = 6`

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha",0) = 6`

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Endereçamento aberto com sondagem linear

broca $\rightsquigarrow$ `h("broca",0) = 3`

boca $\rightsquigarrow$ `h("boca",0) = 0`

bolo $\rightsquigarrow$ `h("bolo",0) = 5`

bela $\rightsquigarrow$ `h("bela",0) = 2`

bala $\rightsquigarrow$ `h("bala",0) = 0`

dia $\rightsquigarrow$ `h("dia",0) = 2`

escola $\rightsquigarrow$ `h("escola",0) = 7`

gratuito $\rightsquigarrow$ `h("gratuito",0) = 0`

ilha $\rightsquigarrow$ `h("ilha",0) = 6`

0	boca
1	bala
2	bela
3	broca
4	dia
5	bolo
6	gratuito
7	escola
8	ilha

Inserindo:

- procuramos posição
- se houver espaço, guardamos
- se não houver espaço, procuramos a próxima posição livre (módulo M)

Sondagem linear (linear probing)

- Dada uma *função de hashing* comum $h' : U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$, à qual nos referimos como uma **função hash auxiliar**, o método de **sondagem linear** usa a função hash

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Sondagem linear (linear probing)

- Dada uma *função de hashing* comum $h' \colon U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$, à qual nos referimos como uma **função hash auxiliar**, o método de **sondagem linear** usa a função hash

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

- Obs.1: Note que $\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$ é uma permutação de $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$.

- Obs.2: Como a sondagem inicial determina toda a sequência de sondagem, há somente m sequências de sondagem distintas.

Sondagem linear (linear probing)

- Dada uma *função de hashing* comum $h' \colon U \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$, à qual nos referimos como uma **função hash auxiliar**, o método de **sondagem linear** usa a função hash

$$h(k,i) = (h'(k) + i) \bmod m, \text{ para } i = 0, 1, \ldots, m-1.$$

- Obs.1: Note que $\langle h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1) \rangle$ é uma permutação de $\langle 0, 1, \ldots, m-1 \rangle$.

- Obs.2: Como a sondagem inicial determina toda a sequência de sondagem, há somente m sequências de sondagem distintas.

- A sondagem linear sofre de um problema conhecido como **agrupamento primário** (primary clustering): longas sequências de posições ocupadas se acumulam, aumentando o tempo médio de busca.

Implementação da Tabela

Endereçamento aberto — Implementação da Tabela

- Como os elementos serão agora guardados na própria tabela, precisamos saber quando uma posição da tabela está vazia (disponível) e quando ela contém um elemento válido (não está disponível).

Endereçamento aberto — Implementação da Tabela

- Como os elementos serão agora guardados na própria tabela, precisamos saber quando uma posição da tabela está vazia (disponível) e quando ela contém um elemento válido (não está disponível).

- Para isso, podemos supor que cada slot j da tabela $T[0..M-1]$ contém um objeto $T[j]$ que possui os seguintes campos:
  - `status:` indica se o slot está ou não disponível. Pode assumir os valores `EMPTY`, `ACTIVE` e `DELETED`.
  - `key:` guarda a chave.
  - `value:` guarda o valor associado à chave.

Endereçamento aberto — Implementação da Tabela

- No início, quando a tabela é criada, o campo `status` de todos os objetos são `EMPTY`.

Endereçamento aberto — Implementação da Tabela

- No início, quando a tabela é criada, o campo `status` de todos os objetos são `EMPTY`.
- À medida que pares chave-valor são inseridos ou removidos, esses campos vão recebendo os valores `ACTIVE` ou `DELETED`, respectivamente, e nunca mais voltam a ser `EMPTY` enquanto a tabela se mantiver do mesmo tamanho.

Endereçamento aberto — Implementação da Tabela

- No início, quando a tabela é criada, o campo `status` de todos os objetos são `EMPTY`.
- À medida que pares chave-valor são inseridos ou removidos, esses campos vão recebendo os valores `ACTIVE` ou `DELETED`, respectivamente, e nunca mais voltam a ser `EMPTY` enquanto a tabela se mantiver do mesmo tamanho.
- Quando a tabela encher ou quando um certo fator de carga especificado pelo usuário for atingido, uma operação de rehashing é executada, uma nova tabela maior é criada (com todos os status `EMPTY`) e os elementos da tabela antiga são re-inseridos na tabela nova.

Busca em endereçamento aberto

Como fazer uma busca com endereçamento aberto?

Busca em endereçamento aberto

Como fazer uma busca com endereçamento aberto?

1. Percorra a tabela procurando pela chave, seguindo a sequência de sondagem dada pela função de hashing.
2. Se encontrar a chave, devolva o valor associado à chave ou o índice onde a chave está localizada (qual desses escolher, vai depender do seu objetivo com a busca).
3. Se encontrar um slot com status `DELETED`, então continue, pois a chave ainda pode estar presente na tabela
4. Se você tiver sondado todos os slots da tabela sem sucesso ou se você encontrar um slot com status `EMPTY`, então lance uma exceção ou retorne um número especial (por exemplo -1), indicando que não encontrou a chave.

Algoritmo de Busca: Endereçamento aberto

- **Entrada:** Tabela $T[0..M-1]$ e chave k.
- **Saída:** Se encontrar a chave, então retorna o índice da posição dela. Caso contrário, retorna -1.

Algoritmo de Busca: Endereçamento aberto

- **Entrada:** Tabela $T[0..M-1]$ e chave k.
- **Saída:** Se encontrar a chave, então retorna o índice da posição dela. Caso contrário, retorna -1.

```
AUX-HASH-SEARCH(T, k)
    i = 0
    do
        j = h(k, i)
        if( T[j].status == ACTIVE and T[j].key == k )
            return j
        i = i + 1
    while( T[j].status != EMPTY and i < M )
    return -1
```

Algoritmo de Busca: Endereçamento aberto

- **Entrada:** Tabela $T[0..M-1]$ e chave k.
- **Saída:** Se encontrar a chave, então retorna o índice da posição dela. Caso contrário, retorna -1.

```
AUX-HASH-SEARCH(T, k)
    i = 0
    do
        j = h(k, i)
        if( T[j].status == ACTIVE and T[j].key == k )
            return j
        i = i + 1
    while( T[j].status != EMPTY and i < M )
    return -1
```

- **Observação:** Essa função auxiliar pode ser usada no algoritmo final de busca e também na inserção e remoção.

Algoritmo de Busca: Endereçamento aberto (cont.)

- **Entrada:** Tabela $T[0..M-1]$ e chave k.
- **Saída:** Se encontrar a chave, então retorna o valor associado. Caso contrário, lança uma exceção.

```
HASH-SEARCH(T, k)
    j = AUX-HASH-SEARCH(T, k)
    if( j != -1 )
        return T[j].value
    else
        error "key not found"
```

Remoção: endereçamento aberto

- **Ideia:** o campo `status` de cada objeto da tabela suporta um valor chamado `DELETED` indicando que aquele elemento foi removido.
- Chamamos a função `AUX-HASH-SEARCH(T,k)` para buscar a chave.
- Se ela encontrar a chave, basta atribuir o valor `DELETED` ao campo `status` do objeto e retornar `true`. Caso contrário, não há nada a fazer, simplesmente retornar `false`.

Algoritmo: remoção com endereçamento aberto

```
HASH-DELETE(T, k)
    i = AUX-HASH-SEARCH(T,k)
    if( i != -1 )
        T[i].status = DELETED
        return true
    else
        return false
```

Inserção: endereçamento aberto (Algoritmo 1)

- **Atenção:** estou supondo que:

(1) se a chave não existir na tabela, então essa função vai inserí-la;
(2) caso a chave já exista na tabela, esta função vai atualizar o valor associado a ela.

- Chame a função `Aux-Hash-Search(T,k)` para verificar se a chave está ou não na tabela.
- Se a chave estiver, o valor associado à chave é atualizado.
- Se a chave não estiver na tabela, uma nova busca é realizada, para tentar inserí-la.

Inserção: endereçamento aberto (Algoritmo 1)

- **Entrada:** tabela $T[0..M-1]$, chave k e valor v associado.
- **Saída:** `true` se e somente se a chave tiver sido inserida ou atualizada.

Inserção: endereçamento aberto (Algoritmo 1)

- **Entrada:** tabela $T[0..M-1]$, chave k e valor v associado.
- **Saída:** `true` se e somente se a chave tiver sido inserida ou atualizada.

```
HASH-INSERT(T, k, v)
    m = AUX-HASH-SEARCH(T, k)
    if(m != -1)
        T[m].value = v
        return true
    i = 0
    do
        j = h(k,i)
        if( T[j].status != ACTIVE )
            T[j].key = k
            T[j].value = v
            T[j].status = ACTIVE
            return true
        i = i + 1
    while( i < M )
    return false
```

Inserção: endereçamento aberto (Algoritmo 2)

- **Atenção:** estou supondo que:

(1) se a chave não existir na tabela, então essa função vai inserí-la;
(2) caso a chave já exista na tabela, esta função vai atualizar o valor associado a ela.

- Criamos uma variável inteira chamada `index`, inicializada com -1, que guarda o índice do primeiro slot disponível que for encontrado durante a sondagem.

- Existem 3 casos em que a sondagem pode parar:

1. achamos um slot `ACTIVE` cuja chave é igual a k: vamos atualizar o valor. Retorna `true`.
2. achamos um slot `EMPTY`: a chave não está presente na tabela, o primeiro slot disponível que tiver sido achado durante a sondagem receberá o novo par (chave,valor). Retorna `true`.
3. visitamos todos os slots e não encontramos a chave: neste caso, a inserção simplesmente acaba retornando `false`.

Inserção: endereçamento aberto (Algoritmo 2)

```
HASH-INSERT(T, k, v)
    i = 0
    index = -1      // indice do primeiro slot disponivel
    while( i < M )
        j = h(k,i)
        if( T[j].status == ACTIVE )
            if(T[j].key == k)
                index = j
                break
        else if( T[j].status == EMPTY )
            if( index == -1 )
                index = j
            break
        else if( index == -1 )
            index = j
        i = i + 1
    if( index != -1 )
        T[index].key = k
        T[index].value = v
        T[index].status = ACTIVE
        return true
    else
        return false
```

Análise do Endereçamento Aberto

Análise do Endereçamento Aberto

- **Hipótese do hashing uniforme:** Nesse esquema idealizado, a sequência de sondagem $(h(k,0), h(k,1), \ldots, h(k,m-1))$ usada para inserir ou procurar cada chave k tem igual probabilidade de ser qualquer permutação de $(0, 1, \ldots, m-1)$.

Análise do Endereçamento Aberto

Teorema 11.6 – Cormen et al.

Dada uma tabela hash de endereçamento aberto com fator de carga $\alpha = \frac{n}{m} < 1$, o número esperado de sondagens em uma busca mal sucedida é no máximo $1/(1-\alpha)$, supondo hashing uniforme.

Análise do Endereçamento Aberto

Teorema 11.6 – Cormen et al.

Dada uma tabela hash de endereçamento aberto com fator de carga $\alpha = \frac{n}{m} < 1$, o número esperado de sondagens em uma busca mal sucedida é no máximo $1/(1-\alpha)$, supondo hashing uniforme.

Teorema 11.8 – Cormen et al.

Dada uma tabela hashing de endereçamento aberto com fator de carga $\alpha < 1$, o número esperado de sondagens em uma busca bem sucedida é, no máximo,

$$\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$$

considerando hash uniforme e também que cada chave na tabela tem igual probabilidade de ser procurada.

Sondagem por hashing duplo

Sondagem por hashing duplo

É semelhante à sondagem linear, só que agora nós usamos duas funções de hashing comuns, denominadas $hash_1$ e $hash_2$:

Sondagem por hashing duplo

É semelhante à sondagem linear, só que agora nós usamos duas funções de hashing comuns, denominadas $hash_1$ e $hash_2$:

- Quando detectamos conflito, ao invés de dar um pulo de 1, damos um pulo $hash_2(k)$ calculado a partir de uma segunda função de hashing. Isto é,

$$h(k, i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

Sondagem por hashing duplo

É semelhante à sondagem linear, só que agora nós usamos duas funções de hashing comuns, denominadas $hash_1$ e $hash_2$:

- Quando detectamos conflito, ao invés de dar um pulo de 1, damos um pulo $hash_2(k)$ calculado a partir de uma segunda função de hashing. Isto é,

$$h(k, i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

Sequência de sondagem:

- $h(k, 0) = hash_1(k) \bmod M$
- $h(k, 1) = (hash_1(k) + hash_2(k)) \bmod M$
- $h(k, 2) = (hash_1(k) + 2 \cdot hash_2(k)) \bmod M$
- $\ldots$

Vantagem da sondagem por hashing duplo

- A sondagem por hashing duplo tende a distribuir as chaves na tabela de forma mais conveniente do que a sondagem linear.

Vantagem da sondagem por hashing duplo

- A sondagem por hashing duplo tende a distribuir as chaves na tabela de forma mais conveniente do que a sondagem linear.

- Se x e y são duas chaves distintas tais que $h'(x) = h'(y)$, então as sequências de tentativas obtidas pelo método da sondagem linear são idênticas e ocasionam o agrupamento primário.

Vantagem da sondagem por hashing duplo

- A sondagem por hashing duplo tende a distribuir as chaves na tabela de forma mais conveniente do que a sondagem linear.

- Se x e y são duas chaves distintas tais que $h'(x) = h'(y)$, então as sequências de tentativas obtidas pelo método da sondagem linear são idênticas e ocasionam o agrupamento primário.

- Porém, na sondagem por hashing duplo, as sequências de tentativas somente são idênticas se $h'(x) = h'(y)$ e $h''(x) = h''(y)$.

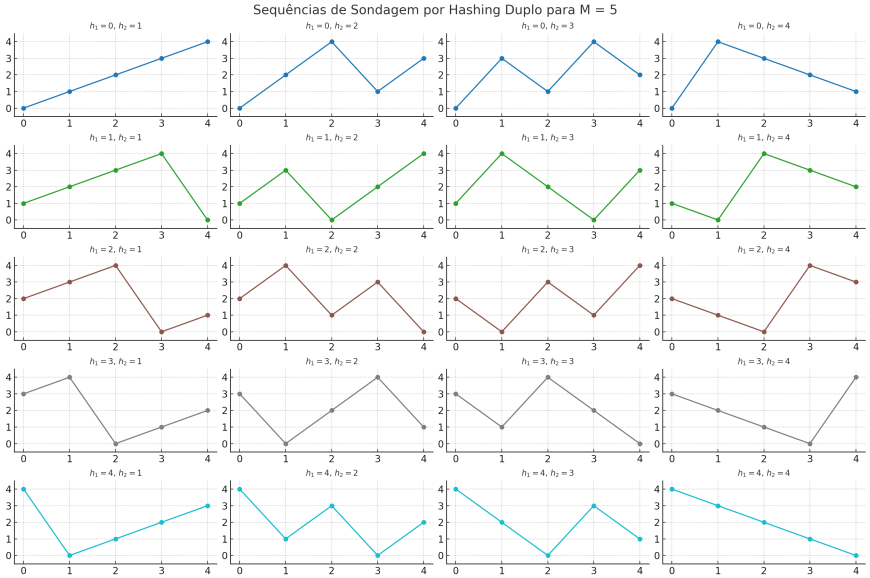
Vantagem da sondagem por hashing duplo

- A sondagem por hashing duplo tende a distribuir as chaves na tabela de forma mais conveniente do que a sondagem linear.

- Se x e y são duas chaves distintas tais que $h'(x) = h'(y)$, então as sequências de tentativas obtidas pelo método da sondagem linear são idênticas e ocasionam o agrupamento primário.

- Porém, na sondagem por hashing duplo, as sequências de tentativas somente são idênticas se $h'(x) = h'(y)$ e $h''(x) = h''(y)$.

- Para uma dada chave x, a sondagem linear gera não mais do que M sequências de sondagem, enquanto a sondagem por hashing duplo gera não mais do que M^2 sequências de sondagem, onde M é o tamanho da tabela. Logo, a sondagem por hashing duplo é superior à sondagem linear.


Sequências de Sondagem por Hashing Duplo para M = 5
$h_1 = 0, h_2 = 1$
$h_1 = 0, h_2 = 2$
$h_1 = 0, h_2 = 3$
$h_1 = 0, h_2 = 4$
$h_1 = 1, h_2 = 1$
$h_1 = 1, h_2 = 2$
$h_1 = 1, h_2 = 3$
$h_1 = 1, h_2 = 4$
$h_1 = 2, h_2 = 1$
$h_1 = 2, h_2 = 2$
$h_1 = 2, h_2 = 3$
$h_1 = 2, h_2 = 4$
$h_1 = 3, h_2 = 1$
$h_1 = 3, h_2 = 2$
$h_1 = 3, h_2 = 3$
$h_1 = 3, h_2 = 4$
$h_1 = 4, h_2 = 1$
$h_1 = 4, h_2 = 2$
$h_1 = 4, h_2 = 3$
$h_1 = 4, h_2 = 4$

Cuidados a se tomar com o hashing duplo

Definição: Dois números a e b são **co-primos** ou **primos entre si** se não têm nenhum divisor em comum além de 1.

Cuidados a se tomar com o hashing duplo

Definição: Dois números a e b são **co-primos** ou **primos entre si** se não têm nenhum divisor em comum além de 1.

Dada a função de hashing duplo:

$$h(k, i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

Para garantir que todos os índices da tabela sejam sondados, deve-se garantir que:

- $hash_2(k)$ nunca pode ser zero.
- $hash_2(k)$ precisa ser co-primo com M.

Prova

Sondagem percorre toda a tabela $\iff mdc(h_2(k), M) = 1$

Queremos que o conjunto:

$$\{(h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod M \mid i = 0, 1, \ldots, M-1\}$$

tenha todos os M valores distintos, ou seja, percorra toda a tabela.
Isso equivale a dizer que a função:

$$f(i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \mod M$$

é injetiva módulo M — ou seja, não repete valores antes de completar M passos.

Vamos reduzir o problema: a injetividade de $f(i)$ depende apenas da parte do incremento $i \cdot h_2(k) \mod M$.

A constante $h_1(k)$ só "translada" a sequência.

Prova

Sondagem percorre toda a tabela $\iff mdc(h_2(k), M) = 1$

Portanto, basta analisar a progressão:

$$\{i \cdot h_2(k) \mod M \mid i = 0, 1, \ldots, M - 1\}$$

Isso é uma progressão aritmética módulo M.

Agora, um resultado clássico da teoria dos números nos diz:

> ***Teorema:*** *A progressão* $a, 2a, 3a, \ldots \mod M$ *percorre todos os restos módulo* M *se e somente se* $mdc(a, M) = 1$.

Aplicando isso ao nosso caso:

$$mdc(h_2(k), M) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{toda a tabela é visitada}$$

Cuidados a se tomar com o hashing duplo (cont.)

$$h(k, i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

Exemplos de escolhas para M e $hash_2$:

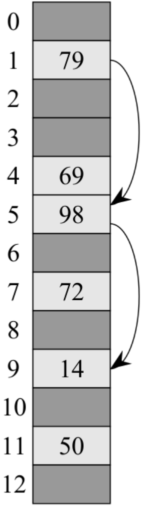
(i) Escolha M como uma potência de 2 e faça que $hash_2(k)$ seja sempre ímpar

(ii) Escolha M como um número primo e faça com que $hash_2(k) < M$. Por exemplo, escolhendo M primo, podemos fazer

- $hash_1(k) = k \mod M$
- $hash_2(k) = 1 + (k \mod m')$

onde m' é ligeiramente menor que M (por exemplo $M - 1$ ou um primo menor que M)

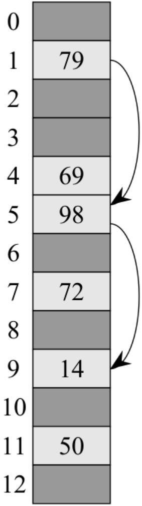
Hashing duplo — Exemplo



$$h(k,i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

- Tabela hash de tamanho $M = 13$ com $hash_1(k) = k \bmod 13$ e $hash_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$.

Hashing duplo — Exemplo



$$h(k, i) = (hash_1(k) + i \cdot hash_2(k)) \mod M$$

- Tabela hash de tamanho $M = 13$ com $hash_1(k) = k \bmod 13$ e $hash_2(k) = 1 + (k \bmod 11)$.
- Como $14 \equiv 1 \pmod{13}$ e $14 \equiv 3 \pmod{11}$, inserimos a chave 14 na posição vazia 9, após examinar as posições 1 e 5 e verificarmos que elas já estão ocupadas.

Sondagem linear e Hashing duplo[1]

Sondagem linear - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5
sem sucesso	2.5	5.0	8.5	55.5

[1] Baseado em Sedgewick, R. Algorithms in C, third edition, Addison-Wesley. 1998.

Sondagem linear e Hashing duplo[1]

Sondagem linear - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5
sem sucesso	2.5	5.0	8.5	55.5

Hashing duplo - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.4	1.6	1.8	2.6
sem sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5

[1] Baseado em Sedgewick, R. Algorithms in C, third edition, Addison-Wesley. 1998.

Sondagem linear e Hashing duplo[1]

Sondagem linear - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5
sem sucesso	2.5	5.0	8.5	55.5

Hashing duplo - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.4	1.6	1.8	2.6
sem sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5

De qualquer forma, é muito importante não deixar a tabela encher muito:

[1] Baseado em Sedgewick, R. Algorithms in C, third edition, Addison-Wesley. 1998.

Sondagem linear e Hashing duplo[1]

Sondagem linear - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5
sem sucesso	2.5	5.0	8.5	55.5

Hashing duplo - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.4	1.6	1.8	2.6
sem sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5

De qualquer forma, é muito importante não deixar a tabela encher muito:

- Você pode aumentar o tamanho da tabela dinamicamente

[1] Baseado em Sedgewick, R. Algorithms in C, third edition, Addison-Wesley. 1998.

Sondagem linear e Hashing duplo[1]

Sondagem linear - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5
sem sucesso	2.5	5.0	8.5	55.5

Hashing duplo - tempo de busca médio

n/M	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$9/10$
com sucesso	1.4	1.6	1.8	2.6
sem sucesso	1.5	2.0	3.0	5.5

De qualquer forma, é muito importante não deixar a tabela encher muito:

- Você pode aumentar o tamanho da tabela dinamicamente
- Porém, precisa fazer um rehash de cada elemento para a nova tabela

[1] Baseado em Sedgewick, R. Algorithms in C, third edition, Addison-Wesley. 1998.

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

- Sondagem linear é o mais rápido se a tabela for esparsa

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

- Sondagem linear é o mais rápido se a tabela for esparsa
- Hashing duplo usa melhor a memória

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

- Sondagem linear é o mais rápido se a tabela for esparsa
- Hashing duplo usa melhor a memória
  - mas gasta mais tempo para computar a segunda função de hash

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

- Sondagem linear é o mais rápido se a tabela for esparsa
- Hashing duplo usa melhor a memória
  - mas gasta mais tempo para computar a segunda função de hash
- Encadeamento exterior é mais fácil de implementar

Conclusão

Hashing é uma boa estrutura de dados para

- inserir, remover e buscar dados pela sua chave rapidamente
- com uma boa função de hashing, essas operações levam tempo $O(1)$
- mas não é boa se quisermos fazer operação relacionadas a ordem das chaves

Escolhendo a implementação:

- Sondagem linear é o mais rápido se a tabela for esparsa
- Hashing duplo usa melhor a memória
  - mas gasta mais tempo para computar a segunda função de hash
- Encadeamento exterior é mais fácil de implementar
  - Usa memória a mais para os ponteiros

FIM