Ejercicios. Clasificador distancia euclídea

1. Se pretende discriminar entre dos tipos de objetos empleando las características x_1 y x_2. Para ello se han realizado medidas en cuatro muestras de cada clase, con los siguientes resultados:

$$\alpha_1 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \alpha_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

   Se pide:

   a) Calcula las funciones discriminantes del clasificador de la distancia euclídea.

   b) Pinta, aproximadamente, la frontera de indecisión entre las clases.

   c) Calcula la expresión general de dicha frontera y comprueba que se corresponde con la mediatriz del segmento que une los representantes de las clases.
   Una forma de llegar a este resultado consiste en partir de $f_i(\mathbf{x}) = d_E(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{z}_i)}$, plantear la ecuación $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})$ y llegar a una expresión lineal fácil de interpretar, $\mathbf{w}^\top \mathbf{x} = a$, donde $\mathbf{w}$ y a son, respectivamente, un vector y un escalar que dependen de $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$.

   d) Demuestra que la frontera de indecisión obtenida con la función discriminante lineal, $d_{EM}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{z}^\top \mathbf{z}$, es igual a la obtenida con la distancia euclídea. ¿Cuál sería el criterio de asignación de un clasificador construido con esta distancia?
   A d_{EM} se le conoce como *distancia euclídea modificada*.

2. Dado un problema de clasificación con el siguiente universo de trabajo

$$\alpha_1 : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \alpha_2 : \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\},$$

   se pide:

   a) Representa gráficamente los datos y comprueba que no es posible construir una función discriminante lineal de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$, donde $\mathbf{w}^\top = (w_1, w_2, w_3)$ es el vector de parámetros que estima el algoritmo en el proceso de aprendizaje y $\mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, 1)$ es el vector de características discriminantes ampliado.

   b) Define una función vectorial $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})^\top = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), 1)$ que permita construir una función discriminante lineal $g(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x})$ que resuelva el problema de clasificación.

   c) Las componentes $(\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}))$ definen un nuevo espacio de trabajo para el clasificador. Representa gráficamente los datos en el nuevo espacio y la frontera de indecisión que establece $g(\mathbf{x})$ en dicho espacio.