Estimation Avancée : Bayesian Analysis Case study of a dike construction

Niaussat Victor

8 décembre 2022

Résumé

Dans ce document, nous répondons aux différentes questions qui sont disponibles sur le document *Bayesian Analysis Case study of a dike construction.*

1 Question 1

$$\begin{aligned} T(y_l) &= \mathbb{E}(Z(y_l)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} n\mathbb{P}(Z(y_l)=n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(Y_2<y_l,\ldots,Y_n<y_l,Y_{n+1}>y_l|Y_1>y_l) \end{aligned}$$

Par indépendance des $(Y_i)_i$, on a les deux lignes suivantes :

$$\begin{aligned} T(y_l) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(Y_2<y_l,\ldots,Y_n<y_l,Y_{n+1}>y_l) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(Y_{n+1}>y_l)\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}(Y_k<y_l) \end{aligned}$$

Les Y_i suivent la même loi (i.i.d). On a alors (En prenant Y_1 comme référence) :

$$\begin{aligned} T(y_l) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n\mathbb{P}(Y_1>y_l)(\mathbb{P}(Y_1<y_l))^{n-1} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n(1-\mathbb{P}(Y_1>y_l))(\mathbb{P}(Y_1<y_l))^{n-1} \\ &= (1-F(y_l))\sum_{n\in\mathbb{N}^*} nF(y_l)^{n-1} \\ &= (1-F(y_l))\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} F(y_l)^n\right)' \\ &= \frac{1-F(y_l)}{(1-F(y_l))^2} = \frac{1}{1-F(y_l)} \end{aligned}$$

2 Question 2

On cherche à calculer :

$$\mathbb{P}(Y<y|s) = \mathbb{P}(\sup_i Y_i<y|s) = \mathbb{P}(Y_1<y,Y_2<y,\ldots,Y_s<y)$$

Par indépandance :

$$\mathbb{P}(Y<y|s) = \prod_{i=1}^{s}\mathbb{P}(Y_i<y) = \mathbb{P}(Y_1<y)^s$$

Comme les Y_i suivent une loi exponentielle de paramètre ρ :

$$\mathbb{P}(Y<y|s) = \mathbb{P}(Y_1<y|\rho)^s = G(y)^s$$

3 Question 3

On cherche à calculer $\mathbb{P}(Y < y)$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y < y) = \sum_{s\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(K = s, \mu)\mathbb{P}(Y < y|s, \rho)$$
$$= \sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{\mu^s e^{-\mu}}{\Gamma(s+1)} G(y)^s$$
$$= e^{-\mu} \sum_{s\in\mathbb{N}} \frac{(\mu G(y))^s}{s!}$$
$$= e^{-\mu} e^{\mu G(y)} = e^{\mu(1-G(y))} = e^{\mu e^{-\rho y}}$$

4 Question 4

$$T(d_h) = \frac{1}{1 - F(d_h)}$$

On suppose d_h grand. Ainsi, $e^{-\rho d_h} \xrightarrow{d_h \longrightarrow \infty} 0$ et on a $1 - e^{-\mu x} \sim \mu x$ pour x proche de 0.
Ainsi :

$$T(d_h) = \frac{1}{1 - F(d_h)} \approx \frac{1}{\mu e^{-\rho d_h}} = \frac{e^{\rho d_h}}{\mu}$$

5 Question 5

La moyenne de dommage annuelle D_a.
Il n'y a pas de dommage si on n'excède pas d_h et $K \perp\!\!\!\perp X$.

$$D_a = \mathbb{E}(D(X, d_h)) = \mathbb{E}(D(X, d_h)|X > d_h)\mathbb{E}(K) = \mu \int_0^{+\infty} D(x, d_h)\rho e^{-\rho x} \mathbb{1}_{x>d_h} dx$$
$$= \mu \int_{d_h}^{+\infty} D(x, d_h)\rho e^{-\rho x} dx$$

6 Question 6

$$d_h^* = argmin_{d_h} \;\; C_0 d_h + \mu \int_{d_h}^{+\infty} D_0(x - d_h)\rho e^{-\rho x} dx$$

Nommons J cette fonction à minimiser.

$$J(d_h) = C_0 d_h + \mu\rho D_0 e^{-\rho d_h} \int_0^{+\infty} u e^{-\rho u} du$$
$$= C_0 d_h + \frac{\mu}{\rho} D_0 e^{-\rho d_h}$$

Alors, en supposant que la fonction $D(x, d_h)$ est bornée :

$$J'(d_h^*) = 0 = C_0 - \mu D_0 e^{-\rho d_h^*} = C_0 - \frac{D_0}{T(d_h^*)}$$

Et on obtient :

$$D_0 = C_0 T(d_h^*)$$

7 Question 7

$$d_h^* = \frac{\log(\mu D_0 / C_0)}{\rho}$$

8 Question 8

- C_0 en €/année
- D_0 en €
- T en année

$$C_0 = \frac{D_0}{100}$$

9 Question 9

$$\rho = 1/\mathbb{E}(X) \approx \frac{n}{S(n)} \text{ et } \mu \approx \frac{n}{r}$$
$$\text{et} d_h^* = \frac{S(n)\log(\frac{n}{r}D_0/C_0)}{n}$$

10 Question 10

$D_0/C_0 = 100$

Analyse numérique : $d_h^* = 158164/155\log((155*100)/65) = 5586m^3/s^{-1}$ au dessus de $2500m^3/s^{-1}$

11 Question 11

Par indépendance de ρ et μ :

$$p(\mu,\rho|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mu,\rho)p(\mu,\rho)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x}|\mu,\rho)p(\mu)p(\rho)}{p(\mathbf{x})} = Mp(\mathbf{x}|\mu,\rho)p(\mu)p(\rho)$$

$$= M\frac{c_\mu^{d_\mu}a_\rho^{b_\rho}\mu^{n+d_\mu-1}\rho^{n+b_\rho-1}e^{-\mu r-\rho S(n)-\mu c_\mu-\rho a_\rho}}{\Gamma(d_\mu)\Gamma(b_\rho)\prod_{i=1}^r\Gamma(k_i+1)}$$

$$= \frac{M}{\prod_{i=1}^r\Gamma(k_i+1)}\frac{c_\mu^{d_\mu}\mu^{n+d_\mu-1}e^{-\mu(r+c_\mu)}}{\Gamma(d_\mu)}\frac{a_\rho^{b_\rho}\rho^{n+b_\rho-1}e^{-\rho(S(n)+a_\rho)}}{\Gamma(b_\rho)}$$
$$\propto \Gamma(\mu, k=n+d_\mu, \beta=r+c_\mu)\Gamma(\rho, k=n+b_\rho, \beta=S(n)+a_\rho)$$

12 Question 12

$$\mathbb{E}_{\mu,\rho|\mathbf{x}}(W(d_h,\rho,\mu)) = \int_{\mathbb{R}_+} W(d_h,\rho,\mu)p(\mu,\rho|\mathbf{x})d\mu d\rho = C_0d_h + \int_{\mathbb{R}_+}\frac{\mu}{\rho}D_0e^{-\rho d_h}p(\mu|\mathbf{x})p(\rho|x)d\mu d\rho$$
$$= C_0d_h + \left(\int_{\mathbb{R}_+}\mu p(\mu|\mathbf{x})d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{D_0e^{-\rho d_h}p(\rho|x)}{\rho}d\rho\right)$$
$$= C_0d_h + \frac{n+d_\mu}{r+c_\mu}D_0\left(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-\rho d_h}p(\rho|x)}{\rho}d\rho\right)$$

$\rho \sim \Gamma(k=n+b_\rho, \beta=S(n)+a_\rho)$

$$= C_0d_h + \frac{n+d_\mu}{r+c_\mu}D_0\left(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{\rho^{k-1}\beta^k e^{-\rho(d_h+\beta)}}{\rho\Gamma(k)}d\rho\right) = C_0d_h + \frac{D_0\beta^k(n+d_\mu)}{\Gamma(k)(r+c_\mu)}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\rho^{k-2}e^{-\rho(d_h+\beta)}d\rho\right)$$
$$= C_0d_h + \frac{D_0\beta^k(n+d_\mu)}{\Gamma(k)(r+c_\mu)(d_h+\beta)^{k-1}}\left(\int_{\mathbb{R}_+}u^{k-2}e^{-u}du\right)$$
$$= C_0d_h + \frac{D_0\beta^k(n+d_\mu)\Gamma(k-1)}{\Gamma(k)(r+c_\mu)(d_h+\beta)^{k-1}}$$

$$= C_0 d_h + \frac{D_0 \beta^k (n+d_\mu)}{(k-1)(r+c_\mu)(d_h+\beta)^{k-1}}$$

$$= C_0 d_h + D_0 \frac{(d_h+\beta)(n+d_\mu)}{(k-1)(r+c_\mu)} (\frac{\beta}{\beta+d_h})^k$$

Pour vérifier mon résultat, je me base sur vos notations désormais. J'ai pris $\beta = b, k = a$ et $\bar{\mu} = \frac{n+d_\mu}{r+c_\mu}$.
Et je trouve bien :

$$\mathbb{E}_{\mu,\rho|\mathbf{x}}(W(d_h,\rho,\mu)) = C_0 d_h + D_0 \frac{\bar{\mu} a}{(b-1)} (\frac{a}{a+d_h})^(b-1)$$

$$= C_0 d_h + D_0 \frac{\bar{\mu} a}{(b-1)} (1 + \frac{d_h}{a})^{1-b}$$

13 Question 13

On cherche $d_h^* = argmin_{d_h} \mathbb{E}_{\mu,\rho|\mathbf{x}}(W(d_h,\rho,\mu))$

Ainsi, d_h^* respecte $\frac{\partial W}{\partial d_h}(d_h^*) = 0 \iff \frac{\partial W}{\partial d_h}(d_h^*) = C_0 - D_0 \bar{\mu} (1 + \frac{d_h^*}{a})^{-b} = 0$

$\iff d_h^* = a(\frac{D_0 \bar{\mu}}{C_0})^{\frac{1}{b}} - 1)$

14 Question 14

Voici la figure représentant la densité Γ

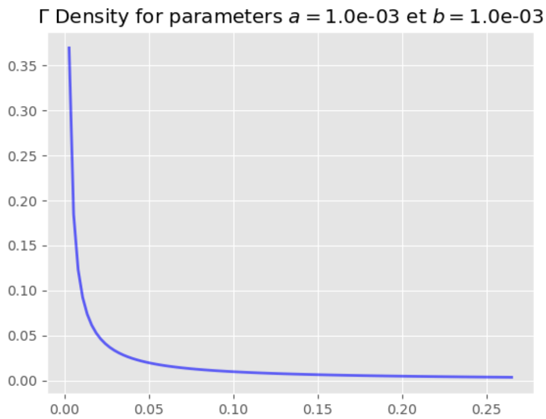

Figure 1 – Gamma densité

15 Question 15

Pour un apriori non informatif, on peut considérer que μ et ρ suivent une loi uniforme.

$$p(\mu) = \frac{c_\mu^{d_\mu}}{\Gamma(d_\mu)} \mu^{d_\rho - 1} e^{-\mu c_\mu}$$

$$p(\rho) = \frac{a_\rho^{b_\rho}}{\Gamma(b_\rho)} \rho^{b_\rho - 1} e^{-\rho a_\rho}$$

Alors, $a_\rho = b_\rho = c_\mu = d_\rho = 0$
Et on a $a = a_\rho + S(n) = S(n)$ et $b = b_\rho + n = n$

Ainsi,

$$d_h^* = S(n)(\frac{D_0 \bar{\mu}}{C_0})^{\frac{1}{n}} - 1)$$

16 Question 16

$\bar{\mu} = \frac{n}{r}$

Analyse numérique : $d_h^* = 158164 \log(((155 * 100/65))^{\frac{1}{65}} - 1) = 5686 m^3/s^{-1}$ au dessus de $2500 m^3/s^{-1}$

17 Question 17

La prise en compte de l'incertitude sur les paramètres implique de construire $100 m^3$ de plus. Si nous avions une connaissance à priori d'expert, cela permettrai d'affiner l'estimation pour pouvoir aboutir à des résultats plus précis.