

Vers l'avantage quantique ?

Étude mathématique du Boson Random Sampling

Victor Niaussat

Équipe Projet INRIA PARADYSE Lille - Lab. P.Painleve CNRS

Encadrant: Stephan De Bievre

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Formalisme mathématiques de l'optique quantique
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique
- 4 Boson Random Sampling
- 5 Conclusion

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Formalisme mathématiques de l'optique quantique
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique
- 4 Boson Random Sampling
- 5 Conclusion

Contexte



Laboratoire
Paul Painlevé



Inria

Équipe Paradyse

Introduction

Nous sommes partis de l'article de Hangleiter and Eisert 2022 : *Computational advantage of quantum random sampling*.

L'avantage quantique est le fait de résoudre un problème irréalisable pour un ordinateur classique avec un ordinateur quantique.

L'article nous présente différents problèmes qui pourraient atteindre l'avantage quantique dont le Boson Random Sampling

Introduction

Nous sommes partis de l'article de Hangleiter and Eisert 2022 : *Computational advantage of quantum random sampling*.

L'avantage quantique est le fait de résoudre un problème irréalisable pour un ordinateur classique avec un ordinateur quantique.

L'article nous présente différents problèmes qui pourraient atteindre l'avantage quantique dont le Boson Random Sampling

Est-ce que le Boson Random Sampling pourrait atteindre un avantage quantique ?

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 **Formalisme mathématiques de l'optique quantique**
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique
- 4 Boson Random Sampling
- 5 Conclusion

Décrire n photons avec un espace de Fock

On peut décrire les états de n photons avec un espace de Fock.

État de Fock: $s_i \in \mathbb{N}$ représente le nombre de photons dans l'état i . Avec m le nombre de modes qu'il existe pour décrire 1 photon, on écrit cet état:

$$|S\rangle = |s_1 \dots s_m\rangle$$

Ensemble des tuples avec n photons et m modes optiques:

$$\Phi_{m,n} = \{S = (s_1, s_2, \dots, s_m) : \sum_{j=1}^m s_j = n\}$$

$\{|S\rangle, S = (s_1, s_2, \dots, s_m) \in \Phi_{m,n}\}$ forme une base de l'espace de Fock.

Superposition quantique

Principe de superposition: un même état quantique peut posséder plusieurs valeurs pour une certaine quantité physique observable.

On peut décrire tout état de l'espace comme ceci:

$$|\psi\rangle = \sum_{S \in \Phi_{m,n}} \alpha_S |S\rangle$$

avec $\alpha_S \in \mathbb{C}$ et $\sum_{S \in \Phi_{m,n}} |\alpha_S|^2 = 1$

Règle de Born

La règle de Born est une interprétation probabiliste des coefficients linéaires du principe de superposition

Quand on va mesurer le nombre de photons pour un état général $|\psi\rangle$, on va mesurer aléatoirement un état qui est dans la combinaison linéaire du vecteur :

$$|\psi\rangle = \sum_{S \in \Phi_{m,n}} \alpha_S |S\rangle \xrightarrow{\text{mesure}} |R\rangle \in \Phi_{m,n}$$

Règle de Born: La probabilité pour que le résultat de la mesure du nombre de photons dans chaque mode soit $R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ est :

$$p_\psi(R) = |\langle R|\psi\rangle| = |\alpha_R|^2$$

Opérateur de création et d'annihilation

Opérateur d'annihilation a_i diminue d'une unité le nombre de photons dans le i^{eme} mode.
Opérateur de création a_i^\dagger augmente d'une unité le nombre de photons dans le i^{eme} mode.

$$\begin{aligned}a_i |s_1 \dots s_n\rangle &= \sqrt{s_i} |s_1 \dots s_i - 1 \dots s_n\rangle \\a_i^\dagger |s_1 \dots s_n\rangle &= \sqrt{s_i + 1} |s_1 \dots s_i + 1 \dots s_n\rangle\end{aligned}$$

Relation de commutation:

$$\begin{aligned}[a_i, a_j^\dagger] &= a_i a_j^\dagger - a_j^\dagger a_i = \delta_{ij} \\[a_i^\dagger, a_j^\dagger] &= [a_i, a_j] = 0\end{aligned}$$

Tout état $|S\rangle$ peut être écrit avec les opérateurs de création:

$$|s_1, \dots, s_m\rangle = \prod_{i=1}^m \frac{(a_i^\dagger)^{t_i}}{\sqrt{t_i!}} |0, \dots, 0\rangle$$

Évolution dans le temps d'un état ou d'un opérateur

Représentation de Shrödinger

L'état $|\psi_t\rangle$ évolue selon l'équation de Schrödinger, H l'opérateur hamiltonien :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle$$

avec $|\psi_0\rangle = |\varphi\rangle$

La solution de cette équation est:

$$|\psi_t\rangle = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) |\varphi\rangle = U_t |\varphi\rangle$$

Opérateur d'évolution: U_t unitaire

Représentation d'Heisenberg

La valeur moyenne d'un opérateur A

$$\langle A \rangle_{\psi_t} = \langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \langle \varphi | U_{-t} A U_t | \varphi \rangle$$

Alors, un opérateur A évolue avec le temps:

$$A \longrightarrow U_{-t} A U_t$$

L'évolution de l'opérateur est régie par l'équation de Heisenberg:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, A]$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Formalisme mathématiques de l'optique quantique
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique**
- 4 Boson Random Sampling
- 5 Conclusion

Modèle de l'interféromètre

Soit U une matrice unitaire de taille $m \times m$. L'interféromètre réalise une transformation linéaire de l'opérateur de création:

$$b_j^\dagger := \sum_{i=1}^m U_{ji} a_i^\dagger$$

Pour un état $|\psi_{in}\rangle$ d'entrée, on obtient un état de sortie $|\psi_{out}\rangle$ avec un opérateur unitaire $\varphi(U)$ relié à U qui agit sur les états :

$$|\psi_{out}\rangle = \varphi(U) |\psi_{in}\rangle$$

Propriétés du modèle

Lemme

- $b_j^\dagger = \varphi(U) a_j^\dagger \varphi(U)^\dagger$
- Pour U unitaire, $\varphi(U)$ est une transformation unitaire
- φ est un homomorphisme des matrices unitaires i.e $\forall U, W$ matrices unitaires, $\varphi(UW) = \varphi(U)\varphi(W)$

Lemme

La transformation $\varphi(U)$ conserve le nombre de photons.

Probabilité de sortie

La probabilité de mesurer $|T\rangle = |t_1 t_2 \dots t_m\rangle$ avec une entrée $|S\rangle = |s_1 s_2 \dots s_m\rangle$ dans la transformation unitaire $\varphi(U)$ a été démontré pour la première fois par Sheel :

Lemme (Scheel 2004)

$$P_U(S, T) = |\langle T | \varphi(U) | S \rangle|^2 = \frac{|\text{Perm}(U_{S,T})|^2}{\prod_{j=1}^m (s_j!) \prod_{i=1}^m (t_i!)}$$

$$\text{Perm}(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n x_{i, \sigma(i)}.$$

Physique de l'interféromètre

L'interféromètre est ici un réseau d'éléments optiques les plus simples qui sont les déphaseurs (*phase-shifters*) et les séparateurs de faisceaux (*beamsplitters*):

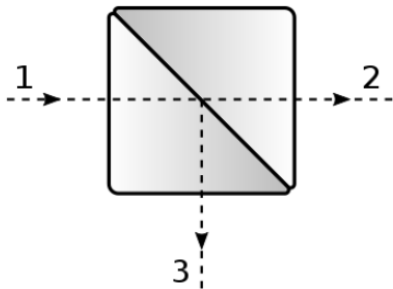


Figure: Beamsplitter

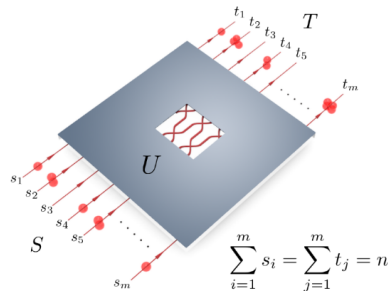


Figure: Circuit linéaire optique

Système de l'interféromètre

- Une source de photon dans un état
- Des beamsplitters et des phase-shifters pour transformer cet état
- Un détecteur de photon pour mesurer l'occupation dans un photon dans un mode

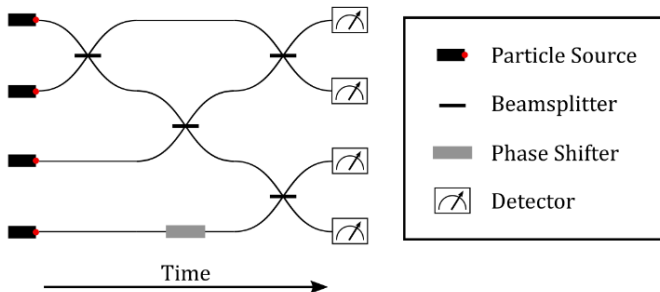


Figure: Interféromètre

Encoder une matrice unitaire dans un interféromètre

Théorème (Reck et al. 1994)

Soit U une matrice unitaire de taille $m \times m$. On peut réaliser un circuit linéaire optique représentant cette matrice U avec $O(m^2)$ beamsplitters et phase-shifters.

Il y a donc un algorithme récursif qui factorise toute matrice unitaire en une séquence de transformations de beamsplitters et phase-shifters.

Il se base sur l'algorithme du pivot de Gauss: chaque opération de rangée peut être encodé dans des beamsplitters ou des phase-shifters.

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Formalisme mathématiques de l'optique quantique
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique
- 4 Boson Random Sampling**
- 5 Conclusion

Analogie avec le Galton Board

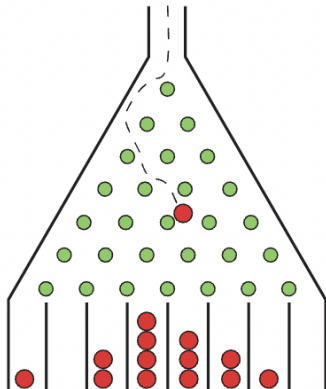
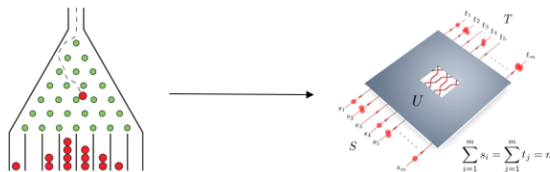


Figure: Galton Board

Analogie avec le Galton Board

On peut voir le Boson random sampling comme une planche de Galton:

- Les boules sont des photons
- Les clous sont des beamsplitters et phase-shifters
- L'ensemble des clous est la matrice U unitaire
- La loi normale est la densité de probabilité avec les permanents



Intérêt du Boson random sampling : vers l'avantage quantique ?

La principale raison de l'intérêt croissant pour le Boson random sampling est qu'on pense fortement qu'il permet de faire un avantage quantique. L'une des principales raisons en est que la distribution de probabilité échantillonnée est liée comme on peut le voir au permanent d'une matrice.

Théorème

L'approximation du permanent $|\text{Perm}(X)|^2$ est un problème $\#P$ -difficile.

Theorem (Aaronson and Arkhipov 2013)

Le problème exact du Boson Random Sampling n'est pas efficacement solvable par un ordinateur classique, à moins que $P^{\#P} = BPP^{NP}$ et que la hiérarchie polynomiale s'effondre au troisième niveau.

" Simuler classiquement et efficacement le Boson random sampling \rightarrow c'est comme si $P = NP$ "

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Formalisme mathématiques de l'optique quantique
- 3 Modèle de l'interféromètre et description physique
- 4 Boson Random Sampling
- 5 Conclusion

État d'avancement du travail





Pour l'instant:

- Définir le formalisme mathématique de l'optique quantique
- Décrire l'interféromètre
- Décrire le modèle du Boson random sampling et son intérêt pour montrer l'avantage quantique

Par la suite:

- Définir et démontrer la complexité des problèmes
- Montrer le théorème d'Aaronson et Arkhipov pour le problème du calcul exact
- Limites du modèle, théorème d'Aaronson et Arkhipov pour le problème du calcul approché, applications, simulation ?

Questions?

-  Aaronson, Scott and Alex Arkhipov (Sept. 2013). *BosonSampling Is Far From Uniform*. arXiv:1309.7460 [quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.1309.7460. URL: <http://arxiv.org/abs/1309.7460> (visited on 01/17/2023).
-  Hangleiter, Dominik and Jens Eisert (Nov. 2022). *Computational advantage of quantum random sampling*. arXiv:2206.04079 [cond-mat, physics:quant-ph]. DOI: 10.48550/arXiv.2206.04079. URL: <http://arxiv.org/abs/2206.04079> (visited on 11/10/2022).
-  Reck, Michael et al. (July 1994). "Experimental realization of any discrete unitary operator". en. In: *Physical Review Letters* 73.1, pp. 58–61. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.73.58. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.73.58> (visited on 11/17/2022).
-  Scheel, Stefan (June 2004). *Permanents in linear optical networks*. arXiv:quant-ph/0406127. DOI: 10.48550/arXiv.quant-ph/0406127. URL: <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0406127> (visited on 11/23/2022).