Exercice 4 Facteurs Gauches

Soit $fg(\varepsilon) = \varepsilon$

$fg(ux) = fg(u) + ux$

$\forall\ u \in \Sigma^*$ et

tout $x \in \Sigma$

a) Vérifions que cette définition est bonne

i.e

$V \in fg(u) \Leftrightarrow (\exists\, w \in \Sigma^*\ u = Vw)$

- Si $u = \varepsilon$

on a : $fg(u) = fg(\varepsilon) = \varepsilon$

- Soit $u \in \Sigma^*$ / $u = u_1 u_2 \dots u_n$

on a : $fg(u) = fg(u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n)$

$= fg(u_1 u_2 \dots u_{n-2}) + u_1 + u_{n-1} + u_n$

$=$

$\vdots$

$= f(\varepsilon) + u_1 + u_1 u_2 + u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} + u$

$fg(u) = \varepsilon + u_1 + \dots + u$

Ainsi les valeurs de $fg(u)$ on a

$fg(u) = \{\varepsilon, u_1, u_1 u_2, u_1 u_2 u_3, \dots, u_1 u_2 u_3 \dots u, u\}$

Montrons que $V \in fg(u)$

Pour $V = \varepsilon \Rightarrow u = Vu = \varepsilon u$

Pour $V = u_1 \Rightarrow u = V u_2 u_3 \dots u_n$

Pour $V = u_1 u_2 \Rightarrow u = V u_3 \dots u_n$

$\vdots$

Pour $V = u \Rightarrow u = V\varepsilon$

Donc $V \in fg(u)$

Comme on a $u = V\varepsilon$ alors on peut dire que $\exists$ un w de tel sorte que $u = Vw$

d'où

$V \in fg(u) \Leftrightarrow \exists\, w \in \Sigma^*,\ u = Vw$

b- Vérifions que

$fg(uv) = fg(u) + u\,fg(v)$

$\forall\ u \in \Sigma^*$ et $v \in \Sigma^*$

Soit $P[v] : fg(uv) = fg(u) + u\,fg(v)$

- Montrons que $P[\varepsilon]$ est vraie

$P[\varepsilon] : fg(u\varepsilon) = fg(u) + u$

$= fg(u) + u\varepsilon$

or $f(\varepsilon) = \varepsilon$

$= fg(u) + u\,f(\varepsilon)$

D'où $P[\varepsilon]$ est vraie

- Supposons $P[x]$ et montrons que $P[vx]$ est aussi vraie avec $x \in \Sigma$

$fg(uvx) = fg((uv)x)$

$= fg(uv) + uv\,fg(x)$

$= fg(u) + u(fg(v) + v\,fg(x))$

$= fg(u) + u\,fg(vx)$

D'où $P_u[vx]$

C- Exprimons $fg(LM)$ et $fg(L^*)$ pour $L, M \subseteq \Sigma^*$ quelconques

- $fg(LM)$

$fg(LM) = fg\{lm$ avec $l \in L$ et $m \in M\}$

$= \{fg(lm) \cdot l \in L$ et $m \in M\}$

$= fg(lm), l \in L$ et $m \in M$

$= \{fg(l) + l\,fg(m)$, $l \in L$ et $m \in M\}$

$= \{fg(l), l \in L\} + \{l\,fg(M)\ m \in M\}$

$fg(LM) = fg(L) + L\,fg(M)$