Reporte práctica 5
Método Montecarlo

4 de septiembre de 2017

1. Introducción

Está práctica consiste en la utilización del método Montecarlo para la estimación de la integral

$$\int_3^7 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx. \tag{1.1}$$

Como

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = 1,$$

se puede utilizar $g(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ como una función distributiva y generar números aleatorios. El promedio m de aquellos números generados que se encuentren en el intervalo [3,7] es un estimado de $\int_3^7 g(x)$. Por tanto, un estimado para la integral buscada es $\frac{\pi}{2}m$. De acuerdo a Wolfram Alpha, el resultado aproximado de la integral es $w = 0.048834$. Así, el objetivo es analizar como afecta la cantidad de números aleatorios que se generen en el resultado de la aproximación y el tiempo de ejecución. Para comparar la calidad de la aproximación calculamos la diferencia porcentual (mejor conocida como GAP) de la aproximación p con el valor w de Wolfram Alpha. La formula para calcular el GAP es la siguiente:

$$\text{GAP} = 100\left(\frac{|w-p|}{\frac{w+p}{2}}\right).$$

De acuerdo a éste cálculo, entre más cercano a 0 sea el GAP mejor es la aproximación.

2. Experimento

Para determinar el efecto que tiene el tamaño de la muestra de números tomados de la distribución acorde a $g(x)$, utilizamos tamaños de muestra $100000n$, con $n \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ y haciendo 50 réplicas. La Figura 2.1 muestra las gráficas de violines correspondientes a el GAP obtenido. Observe como hay un claro comportamiento descendente del GAP a medida que crece el tamaño de muestra con que se aproximó la integral. Es decir, se tiene una mejor aproximación entre mayor cantidad de datos se obtengan como muestra.

Respecto al tiempo de ejecución, como era de esperarse, pasa completamente todo lo contrario. Éste aumenta conforme lo hace el tamaño de la muestra, como puede apreciarse en la Figura 2.2

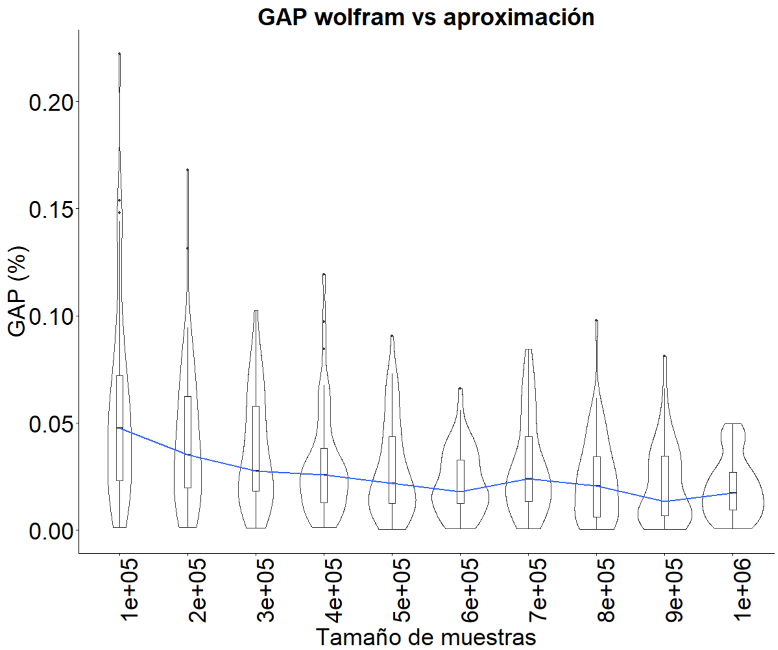

Figura 2.1: Diferencia porcentual (GAP) del valor obtenido de la integral (1.1) de Wolfram Alpha contra el aproximado usando método de Montecarlo.

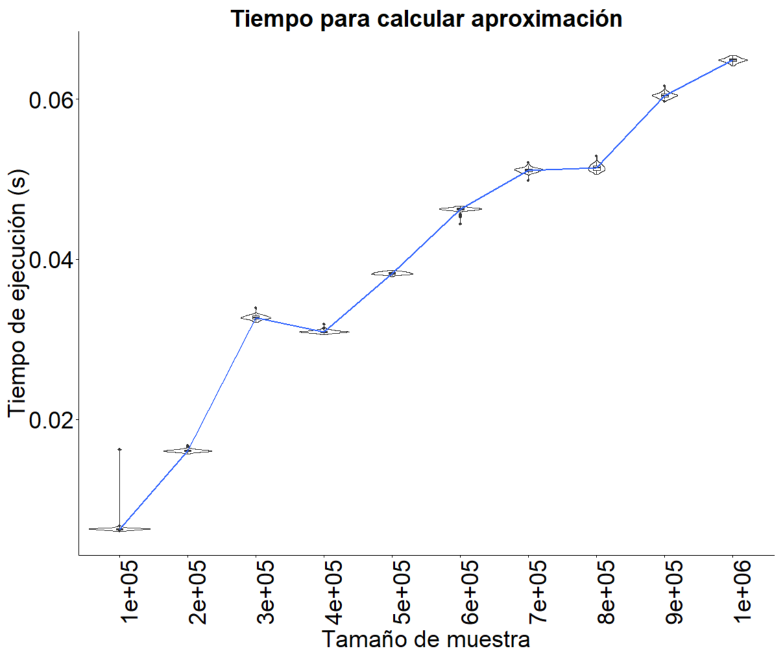

Figura 2.2: Tiempo de ejecución para aproximar la integral (1.1).

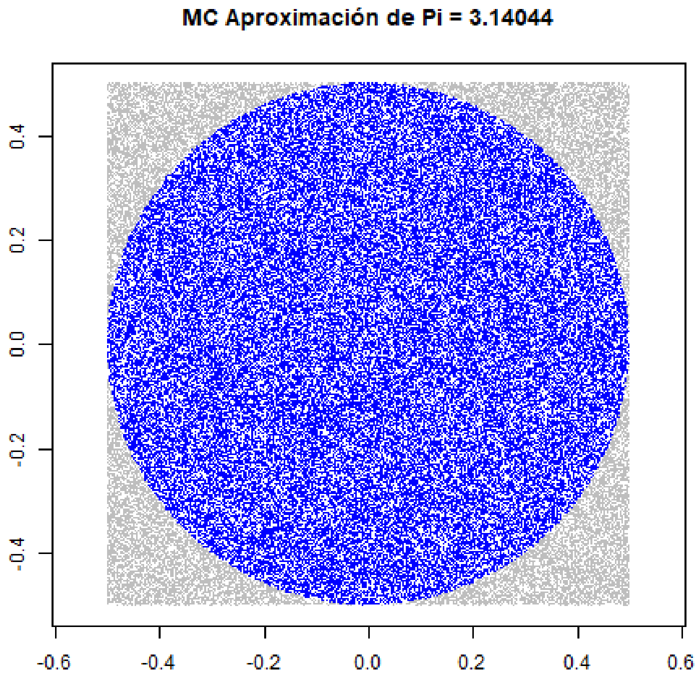

Figura 3.1: Ilustración del Método Montecarlo para la aproximación de π.

3. Reto 1: Aproximación de π

El siguiente reto consiste en aproximar el valor de π utilizando método Montecarlo. La idea es sencilla, imagine un circulo de radio r y el cuadrado que lo inscribe de lado $2r$. El área del cuadrado es $A_s = 4r^2$ y la del circulo $A_c = \pi r^2$, a partir de la razón entre estas áreas, podemos despejar a π como

$$\pi = 4\frac{A_c}{A_s} \tag{3.1}$$

Si calculamos n pares (x_i, y_i) uniformemente distribuidos dentro de un cuadrado (por ejemplo $x_i, y_i \in [-0.5, 0.5]$, $i \in 1, \ldots, n$ para un cuadrado unitario), podemos determinar el número de puntos que están dentro o fuera del circulo. El calculo es fácil, revisando si $\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \leq r$ (con $r = 0.5$ para nuestro ejemplo). Como el número de puntos dentro del circulo n_c es una estimación de su área, y n lo es para el área del cuadrado, la aproximación a π queda de la siguiente forma:

$$\pi \approx 4\frac{n_c}{n} \tag{3.2}$$

La Figura 3.1 ilustra los puntos obtenidos uniformemente como muestra dentro del cuadrado. Los puntos en azul son los que se encuentran dentro del circulo. De acuerdo a esta

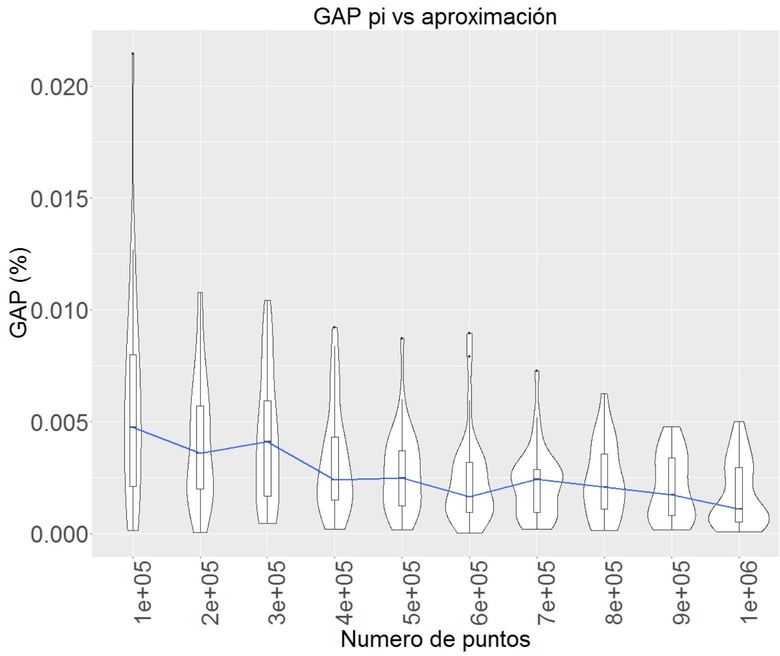

Figura 3.2: Diferencia porcentual (GAP) entre el estimado y el valor real de π.

forma de estimar π, se espera que entre mayor sea la muestra, mejor se cubra el área tanto del cuadrado como del circulo y por tanto, se estime mejor el valor buscado.

3.1. Experimento y resultados

Se desea analizar si la cantidad de puntos n tiene efecto sobre la estimación de π y sobre el tiempo de ejecución del método Montecarlo. Para revisar la validez de hipótesis, se probó con valores de $n \in \{\}$. Las conclusiones del experimento son similares a los de la sección 2. La Figura 3.2 muestra la diferencia porcentual entre la estimación y el valor de π. Observe como la estimación mejora (la diferencia porcentual es menor) a medida que aumenta n, como esperábamos en base a el análisis del método en la sección 3.

En contraparte, el tiempo de ejecución necesario para la aproximación aumenta a medida que lo hace el tamaño de muestra n (véase Figura 3.3).

4. Conclusiones

En general, puede observarse un claro compromiso calidad-tiempo en la ejecución de un método Montecarlo para aproximar un cierto valor. La Figura 4.1 muestra la gráfica de GAP contra tiempo de ejcución para ejemplificar este compromiso. Los puntos en negro representan la frontera de Pareto correspondiente. Las etiquetas de cada punto es el tamaño de la muestra n correspondiente.

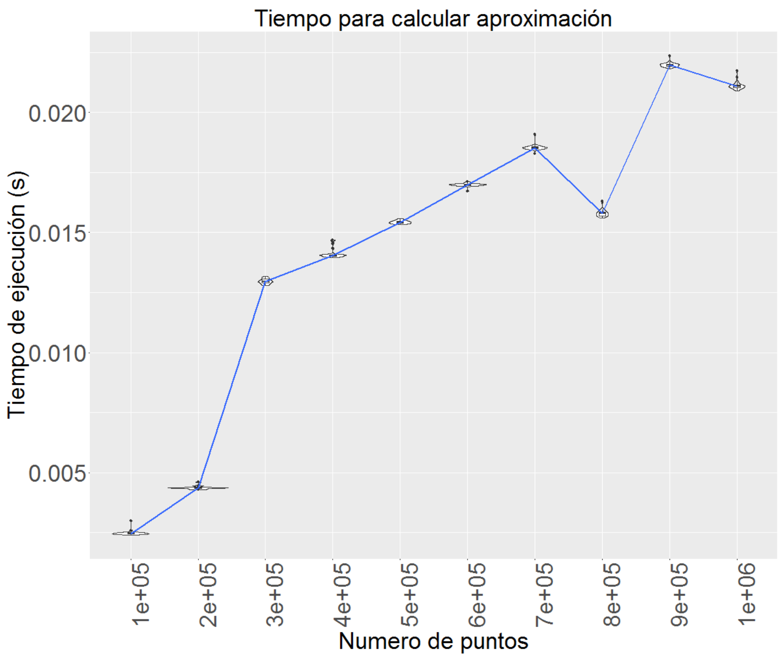

Figura 3.3: Tiempo de eejcución para la aproximación de π en dependencia del número de puntos.

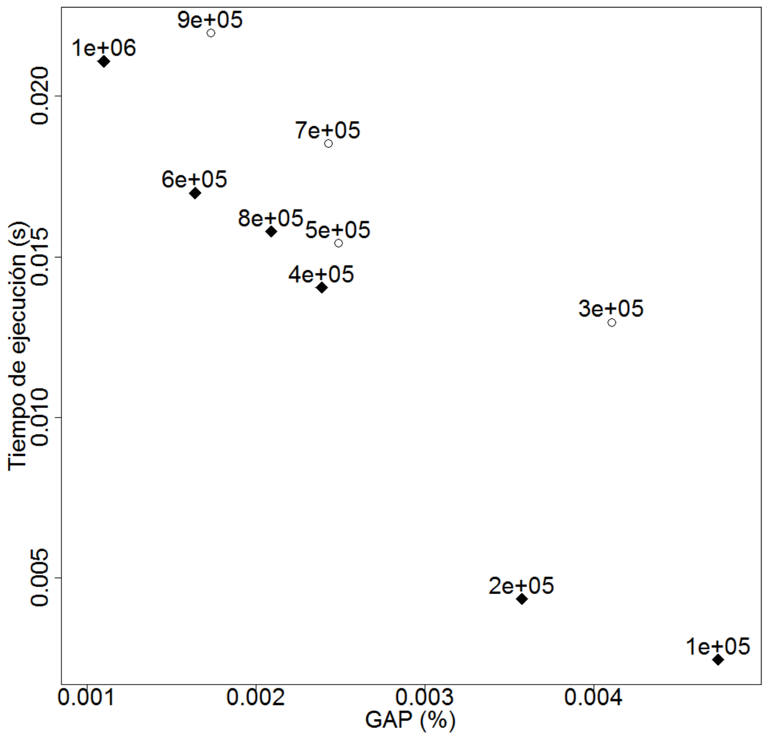

Figura 4.1: Compromiso entre aproximación y tiempo de ejecución.