Uma introdução à Teoria dos Nós clássica

Victor Patrick Sena

Conteúdo

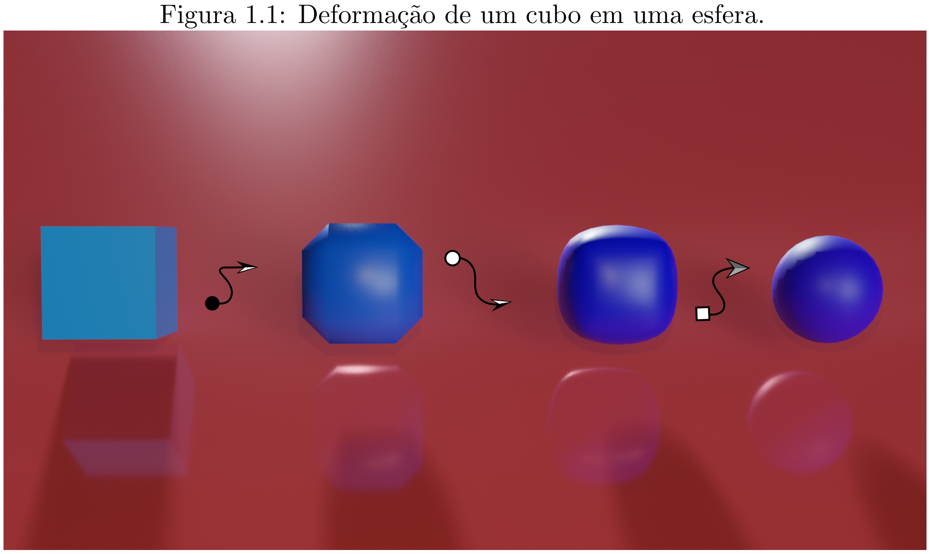
Capítulo 1

Introdução

A Topologia é um dos mais importantes campos da matemática. Essa área estuda propriedades de objetos geométricos que permanecem inalteradas quando são aplicados movimentos contínuos no próprio objeto ou no ambiente no qual ele está contido.

Como ilustração do que falamos podemos observar um cubo e uma esfera, veja a Figura 1.1. Para a Topologia esses são objetos idênticos, pois um pode ser obtido a partir do outro por meio de uma deformação contínua.

Figura 1.1: Deformação de um cubo em uma esfera.



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Dentro da grande área da Topologia existe uma subárea chamada Teoria dos Nós. Essa teoria (a Clássica) pode ser compreendida como o estudo das curvas fechadas, sem autointerseções, em três dimensões.

De modo intuitivo, um nó é construído torcendo e entrelaçando um fio e unindo suas extremidades como mostra a Figura 1.2.

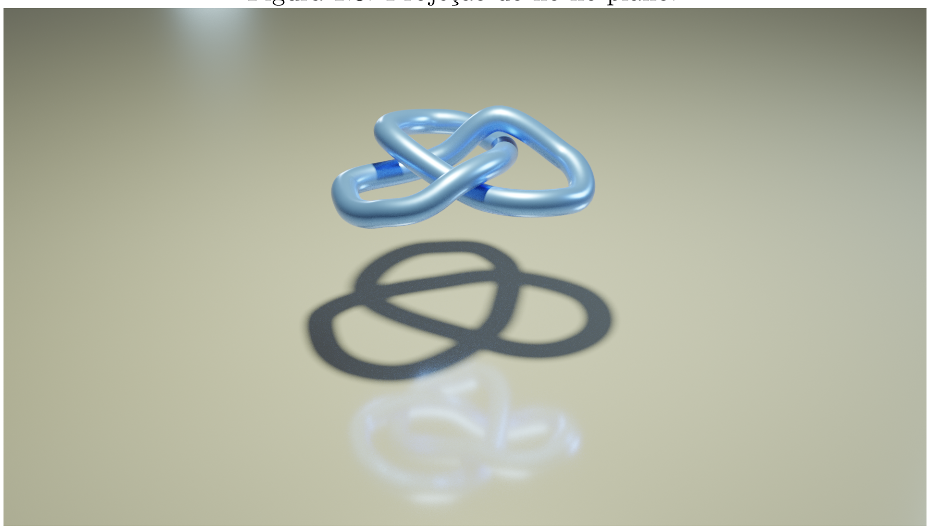
Figura 1.2: Construindo um nó

Fonte: Elaboração dos autores (2021).

O início do conceito matemático de "nó" aparece nos anos de 1830 com pesquisas de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), [**GA**]. Seu interesse, na época, era aplicar esse conceito na área de eletrodinâmica. Nesse mesmo século, décadas depois, outro grande pesquisador, William Thomson (Lord Kelvin) (1824-1907), se interessou pelo assunto, pois acreditava que os "nós" seriam a chave para a compreensão das substâncias químicas, que, de acordo com suas crenças, seriam descritas pelas formas dos nós. Apesar de tal crença não condizer com a verdade, a Teoria dos Nós continuou a ser matematicamente estudada ao longo dos anos e aplicações foram sendo descobertas em outras áreas do conhecimento como: na Física, no estudo do DNA na Biologia Molecular e no estudo de estruturas tridimensionais de moléculas na Química, um exemplo disso é que nas últimas décadas do século XX, os cientistas se interessaram em estudar nós físicos para entender fenômenos de nó em DNA e outros polímeros. A teoria do nó pode ser usada para determinar se uma molécula é **quiral** (o conceito de **quiral** é associado a um átomo de carbono ligado a quatro substituintes diferentes, dispostos segundo os vértices de um tetraedro. A mudança de posição de dois dos grupos substituintes conduz a uma simetria da molécula) ou não. Os emaranhados, cordas com ambas as extremidades fixadas no lugar, foram eficazmente utilizados no estudo da ação da **topoisomerase** no ADN (a topoisomerase ou DNA topoisomerase é uma enzima que desempenha importante papel nos processos de replicação e empacotamento de DNA). A teoria do nó pode ser crucial na construção de computadores quânticos, através do modelo de computação quântica topológica.

Para estudarmos um nó, tendo em vista a dificuldade de desenharmos objetos tridimensionais, fixamos um plano do espaço e utilizamos sua projeção nesse plano. Sempre é possível considerar projeções que possuam apenas cruzamentos duplos, como ilustra a Figura 1.3.

Figura 1.3: Projeção do nó no plano.



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

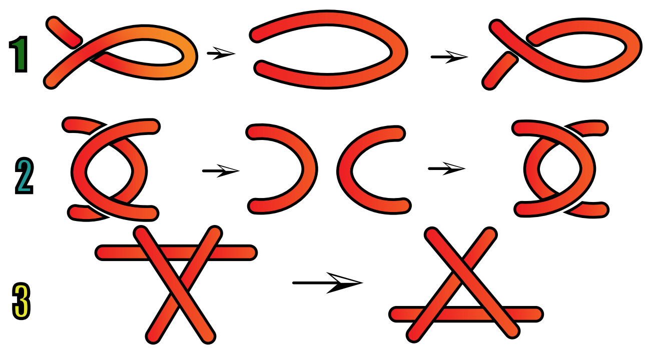
Agora olhando só para a projeção do nó no plano e desenhando algumas interrupções para resaltarmos quem passa por cima e quem está passando por baixo, chamamos isso de "**Diagrama de um Nó**", como ilustra a Figura 1.4.

Figura 1.4: Diagrama de um nó

Fonte:Elaboração dos autores (2021).

Para a Teoria dos Nós, quando um nó pode ser transformado continuamente em outro que, a princípio, aparenta ser diferente, diz-se que os dois nós são equivalentes. Mas se para registrarmos um nó utilizarmos um diagrama (uma projeção), é necessário investigar se dois diagramas que, a princípio, são aparentemente diferentes, podem representar o mesmo nó. Esse problema foi resolvido por Kurt Reidemeister (1883-1971) em 1920. Ele propôs que se considerasse três movimentos que poderiam ser realizados em diagramas de nós. Hoje esses movimentos são chamados *movimentos de Reidemeister*. Eles estão ilustrados na Figura 1.5.

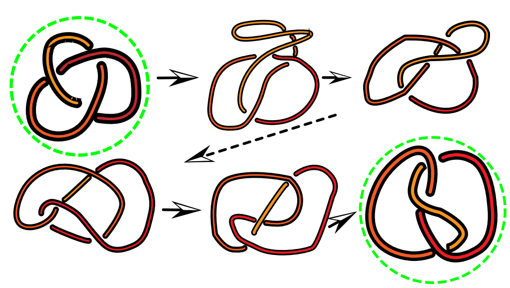
Figura 1.5: Os movientos de Reidemeister.



Fonte:Elaboraçãos do autores (2021).

Quando um diagrama de um nó pode ser transformado em outro diagrama mediante aplicação de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister, diz-se que esses diagramas são equivalentes. Com essa consideração, Reidemeister provou que “dois nós são equivalentes se, e somente se, os respectivos diagramas são equivalentes”. Deste modo, pode-se estudar equivalência dos nós estudando equivalência dos diagramas dos nós, como ilustrado na Figura 1.6.

Figura 1.6: Utilizando os movimentos de Reidemeister.



Fonte: Elaborção dos autores (2021).

Apesar do excepcional resultado de Reidemeister, é geralmente difícil determinar quando um nó é equivalente a outro. Uma forma de transpor essa dificuldade é associar ao diagrama de um nó um objeto algébrico ou aritmético que permaneça o mesmo quando se efetue uma sequência finita de movimentos de Reidemeister. Assim, esse objeto pode auxiliar na detecção de nós que não são equivalentes. Chamamos tais objetos matemáticos de invariantes do nó. Neste trabalho, apresentaremos os invariantes *Determinate de um Nó* e *Polinômio de Alexander*.

Capítulo 2

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados básicos de Topologia Geral e Teoria de Homotopia, necessários para a compreeensão da Teoria dos Nós.

2.1 Topologia Geral

As definições e conceitos apresentdos nesta seção estão baseados nas referências [**EL2**], [**MA**] e [**JM**].

2.1.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1.1. Seja X um conjunto não vazio e τ uma coleção de subconjuntos de X. Denotemos por $\tau(X)$ uma família de todos os subconjuntos, chamados de relativamente abertos a τ, ou conjuntos $\tau - abertos$, que satisfazem:

1. $X, \emptyset \in \tau$;
2. τ é fechado em relação à reunião arbitrária, dada uma coleção $\{A_\alpha\}_{\alpha \in U}$, onde U é o conjunto de índices, então;

$$\bigcup_{\alpha \in U} A_\alpha \in \tau$$

3. τ é fechado em relação à intersecção finita, ou seja, A_1, A_2, $\cdots$, A_n, é um número finito de conjuntos abertos de τ, então;

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$$

Em outras palavras, a coleção τ de conjuntos abertos satisfazendo as três condições é chamada uma topologia sobre X e os elementos do espaço topológico (X, τ) são chamados de pontos de X.

Observação 2.1.2. É equivalente, em vez de 3., afirmar apenas que a interseção de dois abertos é um subconjunto aberto.

Definição 2.1.3. Qualquer conjunto não-vazio X torna-se um espaço topológico de duas maneiras essencialmente triviais:

1. Os únicos conjuntos abertos de X, são $\emptyset$ e o própio X, ou seja, a coleção τ de abertos de X é dada por $\tau = \{\emptyset, X\}$. Essa topologia é chamada de topologia trivial e denotaremos por $\boldsymbol{\tau_{trivial}}$

2. Os conjuntos abertos de X são todos os subconjuntos de X, $\tau = P(x)$. Essa topologia e chamada de topologia discreta, e denotaremos por $\boldsymbol{\tau_{discreta}}$

2.1.2 Exemplos de Espaços topologicos

Exemplo 2.1.4. Seja $X = \{a, b\}$. Determine as possíveis topologias sobre X.

Solução:

1. $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ é a topologia trivial.

2. $\tau_2 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\} = P(X)$ é a topologia discreta.

3. $\tau_3 = \{\emptyset\{a, b\}, \{a\}\}$.

4. $\tau_4 = \{\emptyset\{a, b\}, \{b\}\}$.

Observação 2.1.5. Se $X = \{a, b\}$ e $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$, o espaço topológico (X, τ) é chamado de espaço de Sierpinski.

Exemplo 2.1.6. Seja X um conjunto não vazio. Mostre que τ é a topologia discreta sobre X se, e somente se, todo conjunto contendo um único ponto é um conjunto $\tau - aberto$.

Solução: Se τ é a topologia discreta, então τ consiste de todos os subconjuntos de X, ou seja, para qualquer $x \in X$, $\{x\} \in \tau$, logo para todo $x \in X$, o conjunto $\{x\}$ é $\tau - abertos$.

Reciprocamente, suponhamos que τ seja uma topologia sobre X tal que para todo $x \in X$, $\{x\} \in \tau$. Mostremos que $\tau = \tau_{discreta}$.

Antes disso, definiremos alguns conceitos que serão essencias para a resolução da questão.

Definição 2.1.7. Seja X um conjunto não vazio:

1. A topologia discreta sobre X é mais fina que qualquer outra topologia sobre X, ou seja, $\tau_{discreta} \supset \tau$, para qualquer topologia τ sobre X.

2. A topologia trivial sobre X é mais fina que qualquer outra topologia sobre X, isto é, $\tau_{trivial} \subset \tau$, para qualquer outra topologia τ sobre X

Sabendo disso agora poderemos resolver com mais clareza o exercício.

Segue da definição 2.1.5 que $\tau_{discreta} \supset \tau$. Seja A um aberto na topologia $\tau_{discreta}$. Então $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ desde que $\{x\} \in \tau$, para qualquer $x \in X$ segue que A é a reunião de abertos em τ, logo A é $\tau - aberto$ e portanto $\tau = \tau_{discreta}$.

Exemplo 2.1.8. Seja X um conjunto e $\tau = \{U \subset X;\ X - U \text{ é finito}\} \cup \{\emptyset\}$. Mostre que τ é uma topologia sobre X, chamada a topologia do complementar finito ou topologia confinita.

Solução: Se X é finito, então a topologia τ coincide com a topologia discreta sobre X, desde que para qualquer $U \subset X;\ X - U$ é finito.

Suponhamos então que X seja infinito. Temos que $\emptyset \in \tau$, por definição $X \in \tau$, pois $X - X = \emptyset$, que é finito. Seja$\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ uma coleção de elementos de τ. Se para qualquer $\alpha \in J$, $U_\alpha = \emptyset$, então $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = \emptyset \in \tau$. Se existir pelo menos um índice α_0 tal que $U_{\alpha_0} \neq \emptyset$, então $X - \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in J}(X - U_\alpha) \subset X$, que é finito, logo $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \in \tau$. Assim, a reunião arbitrária de elementos de τ pertence a τ . Sejam $U_1, \cdots, U_n$ um número finitos de elementos de τ. Se existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $U_i = \emptyset$, então $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \emptyset \in \tau$. Se, por outro lado, $U_i \neq \emptyset$ para qualquer índice i, então $X - \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcup_{i=1}^{n}(U_i - X)$, que é a reunião finita de conjuntos finitos, logo é finita. Portanto $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$. Seque que τ é topologia sobre X.

Agora veremos algus exemplos de topologias em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e depois faremos uma generalização para $\mathbb{R}^n$

Exemplo 2.1.9. Seja $X = \mathbb{R}$ e definimos a seguinte topologia :

$$\tau = \{\emptyset,\ A \subset \mathbb{R}\}$$

Onde $A \in \tau$ se, e somente se $\forall x \in A$ existe um intervalo aberto (a, b) tal que:

$$x \in (a, b) \subset A.$$

1. Claramente $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$.

2. $\{A_\alpha \in \tau/\alpha \in U\}$, sendo U o conjunto de índices, então;

$$\bigcup_{\alpha\in U} A_\alpha \in \tau$$

De fato , seja $x \in \bigcup_{\alpha\in U} A_\alpha$, então existe $\alpha_0 \in U$ tal que $x \in A_{\alpha_0} \in \tau$. Logo exite (a, b) e:

$$x \in (a, b) \subset A_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in U} A_\alpha.$$

3. Sejam B_1, $B_2 \in \tau$; então dado $x \in B_1 \cap B_2$, temos que $B_1 \in \tau$ e $B_2 \in \tau$, logo existem (a_1, b_1) e (a_2, b_2) tais que $x \in (a_1, b_1) \subset B_1$ e $x \in (a_2, b_2) \subset B_2$. Se denotarmos $a = max\{a_1, a_2\}$ e $b = min\{b_1, b_2\}$, temos;

$$x \in (a, b) \subset B_1 \cap B_2.$$

Por indução. Se B_1, $B_2, \ldots, B_n \in \tau$, então $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \tau$.

Observação 2.1.10. Essa topologia é chamada de **euclidiana ou usual** e será denotada por $\boldsymbol{\tau_{us}}$.

Exemplo 2.1.11. Seja $X = \mathbb{R}^2$ e definimos a seguinte topologia:

$\tau = \{\emptyset,\ A \subset \mathbb{R}^2\}$, onde $A \in \tau$ se, e somente se $\forall(x, y) \in A$, existe um retângulo aberto $(a, b) \times (c, d)$ tal que:

$$(x, y) \in (a, b) \times (c, d) \subset A$$

Observação 2.1.12. de forma análoga ao exemplo anterior, τ é uma topologia e é também chamada de **euclidiana ou usual** e será denotada por $\boldsymbol{\tau_{us}}$.

Exemplo 2.1.13. Como vimos nos exemplos acima a generalização para o $\mathbb{R}^n$ se torna mais simples.

Seja $X = \mathbb{R}^n$ e definimos a seguinte topologia;

$$\tau = \{\emptyset, A \subset \mathbb{R}^n\}$$

onde $A \in \tau$ se, e somente se, $\forall(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in A$, existem intervalos abertos $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, tais que:

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset A.$$

2.2 Conjuntos fechados

Um conjunto F de um espaço topológico X diz-se *fechado* quando o seu complementar $X - F$ é aberto, ou seja;

Definição 2.2.1. Dados (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$, dizemos que A é fechado em (X, τ), ou que é $\tau-$fechado, se o seu complementar $X - A$ é $\tau-$aberto, isto é, se $(X - A) \in \tau$.

Observação 2.2.2. Um conjunto é fechdo se, e somente se seu complementar é um conjunto aberto.

Definição 2.2.3. Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X desfrutam das seguintes propriedades:

1. O conjunto $\emptyset$ e o espaço inteiro X são fechados, ou seja, $\emptyset, X \in \tau$.
2. Sejam $F_1, F_2 \cdots, F_n$, um número finito de subconjuntos conjuntos fechados em X, então;

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

   é fechado em X.
3. Sejam $\{F_\alpha\}_{\alpha \in U} \in \tau$, subconjuntos fechados, onde U é o cunjunto de índices, então;

$$\bigcap_{\alpha \in U} F_\alpha \in \tau$$

2.2.1 Exemplos de Conjuntos Fechados

Exemplo 2.2.4. Sejam $(\mathbb{R}, \tau_{us})$; então todo conjunto finito é fechado.

Solução: De fato, dado $x \in \mathbb{R}$ então $\{x\}$ é fechado em $\mathbb{R}$ pois:

$$\{x\}^c = \mathbb{R} - \{x\} = (-\infty, x) \cup (x, \infty);$$

Logo se $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, temos que;

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}.$$

O exemplo acima vale para $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2.5. Seja X um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo as seguintes condições;

1. $X \in \vartheta$ e $\emptyset \in \vartheta$.
2. A intersecção arbitrária de qualquer família de conjuntos de ϑ pertence a ϑ.
3. A reunião finita de qualquer família de conjuntos de ϑ pertence a ϑ.

Solução: Definimos $\tau = \{U \subset X; X - U \in \vartheta\}$. Mostremos que τ assim definida é uma topologia sobre X.

1. Temos que $\emptyset \in \tau$, pois $X - \emptyset = X \in \vartheta$. Também $X \in \tau$, já que $X - X = \emptyset \in \vartheta$.
2. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de elementos de τ. Então, para cada $\alpha \in J$, $X - U_\alpha \in \vartheta$ e $X - \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \bigcap_{\alpha \in j}(X - U_\alpha) \in \vartheta$. Como a intersecção arbitrária de elementos de ϑ está em ϑ, segue que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$.

3. Sejam $U_1, U_2, \cdots, U_n$, então $X - U_i \in \vartheta$, $i = 1, 2, \cdots, n$ e $X - \bigcap_{i=n}^{n}$ $= \bigcup_{i=1}^{n}(X - U_i) \in \vartheta$. Logo $\bigcap_{i=1}^{n} \in \tau$.

Observação 2.2.6. Observemos que F é fechado em (X, τ) se, e somente se, $X - F \in \tau$, que é equivalente a $X - (X - F) \in \vartheta$, isto é $F \in \vartheta$. Temos assim que τ é uma topologia sobre X, além disso, ela é única. De fato, seja τ‘ uma topologia sobre X tal que ϑ é a coleção de fechados de τ‘. Então $U \in \tau$‘ se, e somente se, $X - U \in \vartheta$, e isso ocorre se, e somente se, $U \in \tau$, o que completa a solução do exercício.

Em um espaço topológico, um conjunto pode ser simultaneamente aberto e fechado, ou então pode não ser aberto nem fechado.

Exemplo 2.2.7. Seja $(X,\ \tau_Y)$, subespaço topológico de um espaço topológico $(X,\ \tau)$. Mostre que A é fechado em Y se, e somente se, $A = Y \cap F$, para algum subconjunto fechado F de $(X,\ \tau)$

Solução: Seja A fechado em $(Y,\ \tau_Y)$, então $A \subset Y$, $Y - A \in \tau_Y$ e existe $U \in \tau$ tal que $Y - A = Y \cap U$. Assim, $F = X - U$ é fechado em $(X,\ \tau)$ e: $Y \cap F = Y \cap (X - U) = (Y \cap U) = Y - (Y - A) = A$. Ou seja, $A = Y \cap (X - U)$, onde $(X - U)$ é fechado em $(X,\ \tau)$. Por outro lado, suponhamos $A = Y \cap F$, para algum conjunto F fechado em $(X,\ \tau)$. Temos que $U = X - F \in \tau$ e $Y \cap U = Y \cap (X - F) = (Y \cap X) - (Y \cap F) = Y - A$. Portanto $Y - A = Y \cap (X - F) \in \tau_Y$.

Assim, A é fechado em $(Y,\ \tau_Y)$.

Exemplo 2.2.8. Seja $(Y,\ \tau_Y)$ subespaço topológico de um espaço topológico $(X,\ \tau)$. Mostre que se A é fechado em $(Y,\ \tau_Y)$ e Y é fechado em $(X,\ \tau)$, então A é fechado em $(X,\ \tau)$

Solução: Se A é fechado em $(Y,\ \tau_Y)$, então, pelo Exercício anterior, $A \subset Y$ e $A = Y \cap F$, para algum fechado F de $(X,\ \tau)$. Desde que, por hipótese, Y é fechado em $(X,\ \tau)$, segue que A é intersecção finita de fechados de $(X,\ \tau)$, logo A é fechado em $(X,\ \tau)$.

2.3 Bases

Para um melhor entendimento do que será falado sugiro que procure na bibliografia os links que correspondem ao tema que iremos discorrer.

Muitas vezes para introduzir uma topologia em um conjunto não é necessário descrever todos os conjuntos abertos de uma toplogia, mas apenas alguns conjuntos ”mais simples”, os chamados abertos básicos da topologia.

Definição 2.3.1. Sejam X um conjunto e $\mathfrak{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ uma coleção de subcinjuntos de X satisfazendo as seguintes condições:

1. Para cada $x \in X$, existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x$, isto é, para cada $x \in X$ existe pelo menos um elemento da coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de X contendo o ponto x;

2. Se $B_i\,B_j \in \mathfrak{B}$, então para cada $x \in B_i \cap B_j$, existe $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que:

$$x \in B_x \subset B_i \cap B_j.$$

A coleção $\mathfrak{B}$ satisfazendo as condições ateriores é chamada uma base sobre X e os elementos da coleção $\mathfrak{B}$ são chamados elementos básicos.

Observação 2.3.2. Sejam X um conjunto. Se $\mathfrak{B} = \{B_j\}_{i \in I}$ é uma família de conjuntos satisfazendo:

1. Para qualquer $x \in X$ existe $i \in I$ tal que $x \in B_i$;
2. Para qualquer $i \in I$, $B_i \subset X$.

Então $X = \bigcup_{i \in I} B_i$. Nesse caso, a condição (1) na Definição 2.3.1 é equivalente a dizer que $X = \bigcup_{i \in I} B_i$, desde que nessa definição já tomamos $\mathfrak{B}$ como uma coleção de subconjuntos de X. Além disso, a condição (2) da Definição 2.3.1, significa que a intersecção de qualquer dois elementos de $\mathfrak{B}$ é uma reunião de elementos de $\mathfrak{B}$, ou seja, dados B_i, $B_j \in \mathfrak{B}$:

$$B_i \cap B_j = \bigcup_{x \in B_i \cap B_j} B_x$$

onde $B_x \in \mathfrak{B}$.

2.3.1 Exemplos de bases

Exemplo 2.3.3.

1. Uma topologia é base de si própria.
2. Para $\tau_{trivial}$, a base é $\mathfrak{B} = \{X\}$.
3. para $\tau_{discreta}$, a base é $\mathfrak{B} = \{\{x\}/x \in X\}$.
4. **(Fundamental)** Seja $X = \mathbb{R}$ e a, $b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, então:

$$\mathfrak{B} = \{(a, b)\}$$

gera a topologia usual ou euclidiana de $\mathbb{R}$.

De fato:

1. $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{a<b} (a, b)$.
2. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $(x - 1, x + 1) \in \mathfrak{B}$.
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$, temos:

$$x \in (a, b) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2),$$

onde $a = max\{a_1, a_2\}$ e $b = min\{b_1, b_2\}$.

2.4 Sub-Bases

Seja (X, τ) um espaço topológico e $\mathfrak{A}$ uma família de subconjuntos de X tal que $\mathfrak{A} \subset \tau$.

Definição 2.4.1. Uma coleção $\mathfrak{A} = \{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$, de subconjuntos de um dado conjunto X, sendo A o conjunto de índices. É uma sub-base sobre X se todo ponto $x \in X$ pertence a pelo menos um conjunto da família $\mathfrak{A}$, isto é, $X = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$.

Uma sub-base sobre um conjunto X é uma família de subconjuntos de X que em algum sentido, gera uma base sobre X.

2.4.1 Exemplos de sub-bases

Exemplo 2.4.2. 1. Toda topologia é sub-base de si mesma.

2. $\mathfrak{A} = \{(-\infty,\, a),\, (b,\, +\infty)/\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base para a topologia usual de $\mathbb{R}$.

3. $\mathfrak{A} = \{(-\infty,\, a],\, [b,\, +\infty)/\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base para a topologia discreta de $\mathbb{R}$.

4. Sejam (X, τ_1) e (U, τ_2) espaços topológicos; então:

$$\mathfrak{A} = \{U \times Y,\, X \times V\, /U \in \tau_1 \,\mathrm{e}\, V \in \tau_2\}$$

é uma sub-base para a topologia produto em $X \times Y$.

2.5 Topologia Relativa

Uma questão que surge das últimas definiçãoes é: fixada umatopologia num conjunto, um subconjunto não vazio herda de alguma forma esta estrutura?

Definição 2.5.1. Seja (X, τ) um espaço topológico e $\emptyset \neq Y \subset X$, então:

1. O conjunto:
$$\tau_Y = \{B \cap Y / B \in \tau\},$$
é uma topologia sobre Y chamada **topologia relativa** a Y.

2. O par (Y, τ_Y) é dito **subespaço topológico** de (X, Y).

3. Os elementos de τ_Y são ditos **abertos relativos**.

Observação 2.5.2. Em geral, os abertos relativos não são abertos no espaço total.

Exemplo 2.5.3. 1. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual e consideremos $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ com a topologia relativa, então $A = \{x \in \mathbb{Q}/0 < x < 1\}$ é aberto em $\mathbb{Q}$. De fato, pois $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ e A não é aberto em $\mathbb{R}$.

2. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ são subespaços topológicos tais que a topologia relativa é a topologia discreta. De fato, se $n \in \mathbb{Z}$:

$$\{n\} = \mathbb{Z} \cap (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}).$$

2.6 Pontos e Conjuntos Notáveis

Nesta seção vamos estudar maneiras de como determinar se um conjunto é aberto e/ou fechado.

Definição 2.6.1. Seja (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$

1. $x \in X$ é um **ponto interior** a A se existe U vizinhança de x tal que:

$$x \in U \subset A.$$

2. O conjunto de todos os pontos interiores a A é denotado por:

$$^\circ A \text{ ou } Int(A)$$

3. $x \in X$ é um **ponto exterior** a A se é interior a A^c. O conjunto de todos os pontos exteriores a A é denotado por:

$$Ext(A).$$

4. $x \in X$ é um **ponto aderente** a A se para toda vizinhança U de x temos

$$A \cap U \neq \emptyset.$$

5. O conjunto de todos os pontos aderentes a A é denotado por:

$$\overline{A}.$$

   Assumiremos que o fecho de uma conjunto em um espaço topológico possui as seguintes propriedades (a verificação dessas propriedades é imediata).

   Teorema 2.6.2. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$, então:

   (a) Se $A \subset B$, então $\overline{A} \subset \overline{B}$.

   (b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

   (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   (d) A é fechado em X se, e somente se, $\overline{A} = A$.

   (e) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{X} = X$.

6. O conjunto $\overline{A}$ é dito **fecho de A**.

7. $x \in X$ é um **ponto de acumulação** de A se para toda vizinhança U de x temos:
$$(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset.$$
O conjunto de todos os pontos de acumulação a A é denotado por:
$$A'.$$

8. $x \in X$ é **ponto da fronteira** de A se é aderente a A e a A^c.

9. O conjunto de todos os pontos da fronteira de A é denotado por:
$$\partial A.$$

10. $x \in X$ é um **ponto isolado** de A se$\{x\}$ é vizinhança de x

11. Um conjunto onde todos os pontos são isolados é dito **discreto**.

12. $A \subset X$ é dito **denso** em X se:
$$\overline{A} = X.$$

2.7 Funções contínuas

Nosso objetivo nesta seção é relacionar dois espaços topológicos (X, τ) e (Y, τ') através de uma aplicação contínua $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$.

Definição 2.7.1. Dados dois espaços topológicos $(X, \tau) \to (Y, \tau')$, dizemos que uma função $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é contínua com relação às topologias τ e τ'(ou que f é $\tau - \tau'$ contínua) se, para cada conjunto τ'-aberto $V \subset Y$, o conjunto $f^{-1}(V) \subset X$ é τ- aberto.

Logo, f é contínua se a imagem inversa dos abertos de Y são abertos em X.

Observação 2.7.2. Uma função contínua não leva, necessariamente, abertos em abertos. Por exmplo se (Y, τ') é tal que τ' não é a topologia discreta, ou se Y tem mais de dois elementos e τ' não é a topologia trivial.

2.7.1 Emplos de Funções Contínuas

Exemplo 2.7.3. 1. Toda função constante é contínua. De fato, seja $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$ e $V \subset Y$ aberto, então:
$$f^{-1} = \begin{cases} X \text{ se } y_0 \in V \\ \emptyset \text{ se } y_0 \notin V. \end{cases}$$
Em ambos os casos $f^{-1}(V)$ é aberto, logo f é contínua.

2. Seja X tal que τ e τ' são topologias em X. A função identidade:

$$id : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

é contínua se, e somente se $\tau \subset \tau'$. De fato, considere $X = (\mathbb{R}, \tau_{linf})$(Seja $X = \mathbb{R}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ e $\mathfrak{B}$ uma coleção de subconjuntos de X, $\mathfrak{B} = \{[a, b)\}$ gera a topologia chamada do limite inferior em $\mathbb{R}$ e é denotada por τ_{linf}. Caso o leitor queria verificar se $\mathfrak{B} = \{[a, b)\}$ gera uma topologia, seria um bom exercício para exercitar o que já foi falado), então:

$$id^{-1}([a, b)) = [a, b) \notin \tau_{us}.$$

3. Sejam (X, τ) e $(Y, \tau_{trivial})$. Toda fução:

$$f : X \to Y$$

é contínua.

4. Sejam $(X, \tau_{discreta})$ e (Y, τ). Toda função

$$f : X \to Y$$

é contínua.

Proposição 2.7.4. Seja $Y \subset X$. A topologia relativa τ_Y pode ser caracterizada como a menor topologia sobre Y tal que a função inclusão:

$$i : Y \to X$$

é contínua.

Prova: De fato, se $U \in \tau$, a continuidade de i implica em que $i^{-1}(U) = U \cap Y$ deve ser aberta em Y; logo qualquer topologia onde i for contínua deve conter τ_Y.

Teorema 2.7.5. Uma função $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é fechada se, e somente se, para todo subconjunto $A \subset X$ tem-se que $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Demonstração: Se f é fechada, dado $A \subset X$ arbitrário, $\overline{A}$ é fechado em (X, τ), logo $f(\overline{A})$ é fechado em (Y, τ'). Desde que $A \subset \overline{A}$, temos que $f(A) \subset f(\overline{A})$ e segue do **Teorema 2.6.2** que $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. Reciprocamente, seja A fechado em (X, τ), então $\overline{A} = A$ e $f(A) \subset \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$, logo $\overline{f(A)} = f(A)$, o que implica que $f(A)$ é fechado em (Y, τ') e, portanto, f é uma aplicação fechada.

Lema 2.7.6. (Lema de Colagem):

Seja (X, τ) um espaço topológico, onde $X = (A \cup B)$ e A, B são ambos $\tau-$fechados. Dados funções contínuas $F : (A, \tau_A) \to (Y, \tau')$ e $g : (B, \tau_B) \to (Y, \tau')$ tais que $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$, então a função $h : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in A \\ g(x), \text{ se } x \in B \end{cases}$$

é $\tau - \tau'$ contínua.

Demonstração: Seja C fechado em (Y, τ'). Então

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

.

Desde que f é $\tau_A - \tau'$ contínua, temos que $f^{-1}(C)$ é τ_A-fechado e como A é fechado em (X, τ), segue do **Exercício 2.2.8** que $f^{-1}(C)$ é $\tau-$fechado. De maneira análoga, concluímos que $g^{-1}(C)$ é $\tau-$fechado. Portanto, $h^{-1}(C)$ é a reunião de dois fechados de (X, τ), logo é $\tau-$fechado.

O lema anterior também é conhecido como **Lema da Continuidade**.

2.7.2 Alguns teoremas básicos sobre Continuidade

Apresentaremos, agora, alguns teoremas importantes de funções contínuas.

Teorema 2.7.7. Sejam $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ *e* $g : (Y, \tau'')$ funções contínuas. Então*,* $g\,o\,f : (X, \tau) \to (Z, \tau'')$ *é* $\tau - \tau''$ *contínua.*

Desmonstração: Seja $W \subset Z$ um aberto de τ''. Segue da continuidade da função $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$, que $g^{-1}(W) \in \tau'$ e como f é $z = \tau - \tau'$ contínua, temos que:

$$f^{-1}(g^{-1}(W)) = (f^{-1} \ o \ g^{-1})(W) = (g\,o\,f)^{-1}(W) \in \tau.$$

Portanto, $g\,o\,f$ é $\tau - \tau''$ contínua.

Teorema 2.7.8. Uma função $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é $\tau - \tau'$ contínua se, e somente se, para cada $x \in X$ e para cada conjunto aberto $V_{f(x)} \in \tau'$ contendo $f(x)$, existe um conjunto aberto $U_x \in \tau$ contendo x, tal que $f(U_x) \subset V_{f(x)}$.

Demonstração: Dado $x \in X$ e um aberto $V_{f(x)} \in \tau'$ contendo $f(x)$, desde que f é $\tau - \tau'$ contínua, temos que $f^{-1}(V_{f(x)}) \in \tau$ é um aberto contendo x e, além disso, $f(f^{-1}(V_{f(x)})) \subset V_{f(x)}$. Assim, tomando-se $U_x = f^{-1}(V_{f(x)})$, temos que $f(x) \in V$ e segue por hipótese que existe um conjunto aberto $U_x \in \tau$ contendo x tal que $f(U_x) \subset V$. Assim, $x \in U_x \subset f^{-1}(f(U_x)) \subset f^{-1}(V)$. Segue que $f^{-1} \in \tau$ e, portanto, f é $\tau - \tau'$ contínua.

Com esse resultado conseguimos achar uma motivação para definição de continuidade em um ponto, que veremos a seguir.

Definição 2.7.9. Uma função $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é $\tau - \tau'$ contínua no ponto $x_0 \in X$ se dado um aberto $V \in \tau'$ contendo $f(x_0)$ existe um aberto $U \in \tau$ contendo x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Observação 2.7.10. Note que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é $\tau - \tau'$ contínua se, e somente se, f é contínua em cada ponto $x_0 \in X$.

Teorema 2.7.11. Seja $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ uma função. São equivalentes:

1. f é $\tau - \tau'$ contínua;
2. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
3. Se $B \subset Y$ é τ'−fechado, então $f^{-1}(B) \subset X$ é τ−fechado.

Demonstração:

1. $\Rightarrow$ (2) Seja $A \subset X$. Dado $x \in \overline{A}$, então $f(x) \in f(\overline{A})$. Mostremos que $f(x) \in \overline{f(A)}$. Se $V \in \tau'$ é um aberto contendo $f(x)$, desde que f é $\tau - \tau'$ contínua, então $f^{-1}(V) \in \tau$ é um aberto contendo x. Como $x \in \overline{A}$, $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ e existe $y \in f^{-1}(V) \cap A$. Assim $f(y) \in f(f^{-1}(V)) \subset V$ e $f(y) \in f(A)$. Portanto, $V \cap f(A) \neq \emptyset$, o que implica que $f(x) \in \overline{f(A)}$.
2. $\Rightarrow$ (3) Seja $B \subset Y$, τ'−fechado e mostremos que $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$. Dado um ponto $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, então $f(x) \in f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B$, desde que B é fechado em Y. Assim, $f(x) \in B$, o que implica que $x \in f^{-1}(B)$. Portanto, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$ e, como $f^{-1}(B) \subset \overline{f^{-1}(B)}$, segue a igualdade.
3. $\Rightarrow$ (1) Seja $V \in \tau'$, então $B = Y - V$ é τ'- fechado e $V = Y - B$. Assim,

   $$f^{-1}(V) = f^{-1}(Y-B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B) = X - \overline{f^{-1}(B)} \in \tau,$$

   pois $f^{-1}(B)$ é τ−fechado. Portanto, f é $\tau - \tau'$ contínua.

2.8 Homeomorfismos

Se existe uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, do ponto de vista da teoria dos conjuntos eles são indistinguíveis. Entretanto, se cada um desses conjuntos for munido de uma topologia e se a correspondência biunívoca entre as correspondetes topologias, então dois espaços topológicos são topologicamente indistinguíveis. Essa ideia é formalizada com o conceito de homeomorfismo, que é análogo em topologia ao conceito de isomofismo em álgebra. Enquanto um isomorfismo é uma bijeção que preserva a estrutura algébrica entre os espaços envolvidos, um homeomorfismo é uma bijeção que preserva a estrutura topológica entre eles.

Definição 2.8.1. Sejam (X, τ) e (Y, τ') dois espaços topológicos, $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é um **homeomorfismo** se:

1. f é $\tau - \tau'$ contínua.
2. $f^{-1} : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ é $\tau' - \tau$ contínua.

Nesse caso, escrevemos $X \simeq Y$. A bijeção f satisfazendo 1 e 2 é chamada um homeomorfismo.

Observação 2.8.2. A relação hoemomorfismo é uma relação de equivalência sobre qualquer conjunto de espaços topológicos. A verificação de tal é imediata. Um dos problemas centrais em topologia é a classificação dos espaços topológicos segundo a relação de homeomorfismo, ou seja, dados dois espaços topológicos, decidir quando $X \simeq Y$.

Observação 2.8.3. Desde que, pelo Teorema 2.7.5, a composição de funções contínuas é uma função contínua e $(gof)^{-1} = F^{-1}og^{-1}$, temos que se $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ e $g : (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$ são homeomorfismos, então a composição

$$(X, \tau) \to (Y, \tau') \to (Z, \tau'')$$

é um homeomorfismo.

Exemplo 2.8.4. Sejam $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ e $g : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ funções contínuas tais que $g\, o\, f = Id_X$ e $f\, o\, g = Id_Y$. Então, $g = f^{-1}$ e f é um homeomorfismo.
Solução: Se $g\, o\, f = Id_X$, então f é injetora e g é sobrejetora. Po outro lado, $f\, o\, g = Id_Y$ temos que g é injetora e f é sobrejetora. Portanto, f e g são bijeções contínuas, $g = f^{-1}$ e f é um homeomorfismo.

Teorema 2.8.5. Seja $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ uma bijeção. São equivalentes:

1. f é um homeomorfismo.
2. f é contínua e aberta.
3. f é contínua e fechada.
4. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.

Demonstração:

1. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Temos que $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma bijeção contínua tal que $f^{-1} : (Y, \tau') \to (X, \tau)$ é contínua, o que é equivalente a dizer que: para cada $U \in \tau$, $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \in \tau'$, e isso ocorre se, e somente se, f é uma bijeção aberta.

2. (2) $\Leftrightarrow$ (3) Para conseguirmos provar esse item, temos antes que ver uma propriedade que será essencial para essa resolução. E será mostrada por meio de um exemplo.

   Exemplo 2.8.6. Seja $f(X, \tau) \to (Y, \tau')$ uma bijeção. Mostre que f é fechada se, e somente se, f é aberta.

   Solução: Se f é aberta, dado $A \subset X$ fechado em (X, τ), então $U = X - A$ é τ-aberto e $A = X - U$. Assim, desde que f é bejeção temos que:

   $$f(A) = f(X - U) = f(X) - f(U) = Y - f(U),$$

que é fechado em (Y, τ'), pois sendo f uma aplicação aberta, $f(U)$ é τ'-aberto. Reciprocamente, se f é fechada, dado $A \subset X$ aberto em (X, τ), então $F = X - A$ é τ-fechado e $A = X - F$. Assim,

$$f(A) = f(X - F) = f(X) - f(F) = Y - f(F) \in \tau,$$

pois $f(F)$ é τ'-fechado.

Pronto, agora podemos seguir em frente com a resolução. Como mostramos no exercício anterior que uma **bijeção** f é fechada se, e somente se, f é aberta. Desde que f é $\tau - \tau'$ contínua, segue o resultado.

3. (3) $\Leftrightarrow$ (4) Temos que pelo **Teorema 2.7.10** que f é $\tau - \tau'$contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Além disso, segue do **Torema 2.7.5** que f é fechada se, e somente se, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$, para todo $A \subset X$. Portanto, f é contínua e fechada se, e somente se, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.

Observação 2.8.7. O **Teorema 2.8.5** mostra, em particular, que toda bijeção contínua e aberta é um homeomorfismo. Assim, um homeomorfismo $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ possui a seguinte propriedade: $U \in \tau \Leftrightarrow f(U) \in \tau'$).

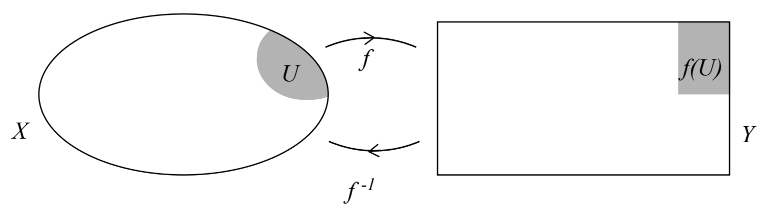


Figura 2.1: Exemplo de homeomorfismo.

2.9 Compacidade

Um dos fatos fundamentais sobre funções reias contínuas definidas sobre subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$ é que essas funções assumem o seu máximo e seu mínimo. Esse teorema falha em geral para espaços métricos e limitação nem sempre faz sentido em espaços topológicos. Mas a propriedade essencial dos subconjuntos fechados e limitados de $\mathbb{R}^n$ que torna o teorema verdadeiro, a compacidade, faz sentido em espaços topológicos arbitrários.

Seja (X, τ) um espaço topológico e $S \subset X$.

Definição 2.9.1. 1. Uma cobertura de S é uma coleção $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de subconjuntos de X tal que:

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

2. Se J é finito, a cobertura é dita finita.

3. A cobertura é dita aberta se os $A_\alpha \in \mathfrak{A}$ são conjuntos abertos.

4. Se $S = X$, então $\mathfrak{A}$ é uma cobertura se:

$$X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha.$$

Uma cobertura aberta de (X, τ) é uma cobertura $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, onde $A_\alpha \in \tau$, para todo $\alpha \in J$.

Exemplo 2.9.2. Seja $\mathbb{R}$ com a toplologia usual.

1. Se $(0, 1) \subset \mathbb{R}$; então, $\mathfrak{A} = \{[1/n, 1 - 1/n]/n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura não aberta de $(0, 1)$.

2. Se $[0, 5] \subset \mathbb{R}$; então, $\mathfrak{A} = \{(n - 1, n + 1)/n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura aberta de $[0, 1]$.

3. Por outro lado, $\mathfrak{A} = \{(n, n + 1)/n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$.

Definição 2.9.3. Sejam $\mathfrak{A} = \{A_\alpha \subset X/\alpha \in J\}$ e $\mathfrak{V} = \{V_\beta \subset X/\beta \in K\}$ coberturas de $S \subset X$. Se para todo $\beta \in K$ exite $\alpha \in J$ tal que $A_\alpha = V_\beta$, então, dizemos que $\mathfrak{V}$ é uma subcobertura de $\mathfrak{A}$.

Exemplo 2.9.4. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

1. se $[0, 5] \subset \mathbb{R}$ com a cobertura $\mathfrak{A} = \{(n - 1, n + 1)/n \in \mathbb{Z}\}$, temos que:

$$\{(-1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 5), (3, 6)\}$$

é uma subcobertura finita de $[0, 5]$.

2. Se $\mathfrak{A} = \{(r, r + 3)/r \in \mathbb{R}\}$, então $\mathfrak{V} = \{(n, n + 3)/n \in \mathbb{Z}\}$ é uma subcobertura aberta de $\mathbb{R}$.

Definição 2.9.5. Um espaço topológico (X, τ) é **compacto** se toda cobertura aberta de X admite uma subcobertura finita, ou seja, (X, τ) é compacto se dada uma cobertura aberta $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de X, existe uma subcoleção $\{A_{\alpha 1}, A_{\alpha 2}, \cdots, A_{\alpha n}\} \subset \mathfrak{A}$ tal que $X = \bigcup_{i=1}^n A_{\alpha i}$.

Exemplo 2.9.6. 1. Seja $(X, \tau_{trivial})$. Todo $A \subset X$ é compacto.

2. Seja $(X, \tau_{discreta})$. X é compacto se, e somente se X é finito.

   De fato, os conjuntos $\{x\}$ são abertos em X, logo o cobrimento:

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

   possui uma subcobertura finita se, e somente se X é finito. Em particular, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos.

3. $\mathbb{R}$ com a topologia euclidiana não é compacto.

   Seja $\mathfrak{A} = \{(n,\, n+2)/n \in \mathbb{Z}\}$ cobrimento de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x\in\mathbb{Z}} (n,\, n+2),$$

   não possui subcobertura finita. De fato, se existe $H \subset \mathbb{Z}$ finito, tal que:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x\in H} (n,\, n+2).$$

   Denotemos por $n_1 = \min\{n/n \in H\}$ e $n_2 = \max\{n/n \in H\}$, então:

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x\in H} (n,\, n+2) \subset (a_1,\, a_2+2) \neq \mathbb{R}.$$

4. $\mathbb{R}$ com a topologia confinita é compacto.

   De fato, seja $\mathfrak{A} = \{A_\alpha / \in I\}$ uma cobertura de $\mathbb{R}$. Note que, para todo $A_j \in \mathfrak{A}$, temos que $\mathbb{R} = A_j \cup A_j^c$, como A_j^c é finito, $A_j^c = \{x_1,\, x_2, \cdots,\, x_k\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Então:

$$\{x_1,\, x_2, \cdots,\, x_k\} \subset\, A_1 \,\cup\, A_2 \,\cup \cdots \cup\, A_k.$$

   Logo:

$$\mathbb{R} = A_j \,\cup\, A_j^c U_j \cup \subset A_1 \,\cup\, A_2 \,\cup \cdots \cup\, A_k.$$

2.9.1 Algumas propriedades relacionadas a compacidade

Teorema 2.9.7. Em qualquer espaço métrico, um subconjunto compacto é sempre limitado e fechado. No espaço euclidiano vale a recíproca.

Demonstração: Veja [**EL2**] página 187.

Proposição 2.9.8. São equivalentes as condições:

1. X é compacto.

2. **(Propriedade de intersecção finita)** Se $\{F_\alpha\}_{\alpha\in J} \subset X$ é tal que os conjuntos F_α são fechados e:

$$\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha = \emptyset,$$

   então existe uma subfamília finita $\{F_{\alpha 1},\, F_{\alpha 2}, \cdots, F_{\alpha n}\}$ tal que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha i} = \emptyset.$$

Prova: A prova segue diretamente das leis de de Morgan. Por exemplo:

$$\bigcap_{\alpha \in j} F_\alpha = \emptyset \text{ é equivalente a } \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha^c = X.$$

Proposição 2.9.9. Seja $f : X \to Y$ contínua. Se $S \subset X$ é compacto, então $f(S)$ é compacta em Y.

Prova: Seja $\mathfrak{A} = \{V_i\}_{i \in J}$ uma cobertura de $f(S)$. Como f é contínua, temos que $\{f^{-1}(V_i)/i \in J\}$ é uma cobertura de S e sendo S compacto, existe subcobertura finita $\{f^{-1}(V_k)/k \in K\}$, onde K é finito. Como $f(f^{-1}(V_k)) \subset V_k$, então $\{V_k/k \in K\}$ é uma subcobertura finita de $f(S)$.

Observação 2.9.10.

1. Se $X \sim Y$, então X é comapacto se, e somente se Y é compacto.
2. Se X é compacto e $f : X \to Y$ é contínua e sobrejetora, então Y é compacto.

Proposição 2.9.11. Se X é compacto e $F \subset X$ é fechado, então F é compacto.

Prova: Seja $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma cobertura de F, onde cada A_α é aberto em X; então $\mathfrak{A} \cup \{X - F\}$ é uma cobertura de X; como X é compacto, possui uma subcobertura finita, que pode ser:

$$\{A_\alpha\}_{\alpha \in K} \text{ ou } \{A_\alpha\}_{\alpha \in K} \cup \{X - F\}.$$

onde K é finito. Logo $\{A_\alpha\}_{\alpha \in K}$ é uma subcobertura finita de F.

2.10 Conexidade

Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio.

Definição 2.10.1. X é dito **conexo** se não existe um par de subconjuntos $\tau-$abertos $\{A, B\}$ em X tais que:

1. $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. $X = A \cup B$.

Caso contrário X é dito **desconexo.**

Observação 2.10.2. Podemos chamar também de **cisão** de X um par de subconjuntos $\tau-$abertos que satisfazem os 3 itens anteriores.

Observação 2.10.3. $A \subset X$ é conexo, se é conexo como subespaço de X.

Exemplo 2.10.4.

1. $\{x\}$ e $\emptyset$ são sempre conexos.

2. Em $(X,\, \tau_{trivial})$, todo subconjunto é conexo.

3. Em $(X,\, \tau_{discreta})$, os únicos conexos não vazios são os conjuntos de um elemento.

4. Seja $(\mathbb{R},\, \tau_{us})$;

   (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é desconexo. De fato, basta considerar:

   $$A = (-\infty,\, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \ \text{ e } \ B = (\sqrt{2},\, \infty) \cap \mathbb{Q}.$$

   (b) Para todo $x \in \mathbb{R}$, então $\mathbb{R} - \{x\}$ é desconexo. De fato, basta considerar:

   $$A = (-\infty,\, x) \ \text{ e } \ B = (x\, \infty).$$

Proposição 2.10.5. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia usual. Os únicos conjuntos conexos em $\mathbb{R}$ com mais de um ponto são os intervalos (abertos, fechados, etc).

Prova: Se Y é conexo, então Y é um intervalo. Suponha que Y não é um intervalo, então existem $a,\, b \in Y$ e $c \notin Y$ tal que $a < c < b$. Sejam $A = (-\infty,\, c) \cap Y$ e $B = (c,\, \infty) \cap Y$; logo $Y = A \cup B$ e Y não é convexo. Se Y é um intervalo, então é conexo. Se Y for desconexo, então existem A e B abertos disjuntos não vazios tais que $Y = A \cup B$. Sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $a < b$. Denotemos por:

$$\alpha = sup\{x \,/\, [a,\, x) \subset A\}.$$

Logo $\alpha \leq b$; como Y é um intervalo, $\alpha \in Y$. Por outro lado $=$, $\alpha \in \overline{A_\tau} = \overline{A} \cap Y$. Como $A = Y - B$, então A é aberto e fechado em Y; logo $\alpha \in A =^0 A$ e existe $\epsilon > 0$ tal que $(\alpha - \epsilon,\, \alpha + \epsilon) \subset A$, contradição, pois α é um supremo.

Definição 2.10.6. Um subconjunto Y de um espaço topológico $(X,\, \tau)$ é desconexo se existirem subconjuntos $U,\, V \subset X$, $\tau-$abertos tais que $Y \cap U$ e $U \cap V$ são disjuntos e não-vazios com $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap U)$. Nesse caso, dizemos que o par de subconjuntos $\{A = Y \cap U,\ B = Y \cap V\}$ é uma **cisão** de Y.

Observação 2.10.7. Note que:

1. $Y = (Y \cap U) \cup (Y \cap V) = Y \cap (U \cup V) \Leftrightarrow Y \subset U \cap V$;

2. $\emptyset = A \cap B = (Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) \Leftrightarrow U \cap V \subset X - Y$.

Exemplo 2.10.8. Dado um espaço topológico $(X,\, \tau)$, $\{x\}$ é conexo, para todo $x \in X$. De fato, se existisse uma cisão $\{A,\, B\}$ de $\{x\}$, existiriam $U,\, V \subset X$, abertos em $(X,\, \tau)$, tais que $\emptyset \neq \{x\} \cap U = \{x\}$ e $\emptyset \neq \{x\} \cap V = \{x\}$. Assim, $x \in U \cap V \subset X - \{x\}$, o que é uma contradição.

2.10.1 Alguns teoremas básicos de conexidade

Teorema 2.10.9. Um espaço topológico (X, τ) é conexo, se e somente se, os únicos subconjuntos de X que são oa mesmo tempo $\tau-$abertos e $\tau-$fechados são o $\emptyset$ e X.

Demonstração: Seja (X,τ) conexo e suponhamos que exista um subconjunto $A \subset X$ tal que $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$ com A simultaneamente $\tau-$aberto e $\tau-$fechado. Nesse caso, o par $\{A,\, X-A\}$ determina um cisão de X, desde que $A \neq \emptyset$, $(X-\emptyset) \neq \emptyset$, $A \cap (X-A) = \emptyset$ e $X = A \cup (X-A)$, como $A \in \tau$ e $X - a \in \tau$, pois A é $\tau-$fechado. Mas isso contradiz o fato de $(X,\, \tau)$ ser conexo.

Reciprocamente, suponha que os únicos subconjuntos de X que são ao mesmo tempo $\tau-$abertos e $\tau-$fechados sejam $\emptyset$ e X e mostremos que $(X,\, \tau)$ é conexo. Suponhamos que $(X,\, \tau)$ seja desconexo. Seja $X = A \cup B$ uma cisão de X, isto é, $A,\, B \subset X$ são tais que $A,\, B$ são $\tau-$abertos, não-vazios e $A \cap B = \emptyset$. Neste caso $A = X - B$ é $\tau-$fechado, pois B é $\tau-$aberto, ou seja A um subconjunto próprio não-vazio de X que ao mesmo tempo é $\tau-$aberto e $\tau-$fechado, o que contradiz a hipótese, logo $(X,\, \tau)$ é conexo.

Observação 2.10.10. O resultado anterior tem a seguinte formulação equivalente:

$(X,\, \tau)$ é desconexo se, e somente se, existe subconjunto próprio não-vazio que é ao mesmo tempo $\tau-$aberto e $\tau-$fechado.

Teorema 2.10.11. Seja $f : (X,\, \tau) \to (Y,\, \tau')$ uma função contínua. Se $(X,\, \tau)$ é conexo, então $f(X)$ é conexo.

Demonstração: Note que $f : (X,\, \tau) \to (f(X), \tau'_{f(X)})$ é $\tau - \tau'_{f(X)}$ contínua, onde $\tau'_{f(X)}$ é a topologia induzida pela inclusão $i : f(X) \to (Y,\, \tau')$. Supomhamos que $f(X)$ seja desconexo. Então existe uma cisão de $f(X)$, isto é, existem $U,\, V \subset Y$, $\tau'-$abertos tais que $A = U \cap f(X)$ e $B = V \cap f(X)$ são sunconjuntos disjuntos e não-vazios com $f(X) = A \cup B$. Nesse caso:

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U)$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(V \cap f(X)) = f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V).$$

Então:

1. $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são sunconjuntos abertos de X desde que $f : (X,\, \tau) \to (f(X),\, \tau'_{f(X)})$ é $\tau - \tau'_{f(X)}$ contínua e $A,\, B \in \tau'_{f(X)}$.

2. $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \neq$, desde que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

3. $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e $f^{-1} \neq \emptyset$, desde que $A = U \cap f(X) \neq \emptyset$, existe $y \in U$ e $y \in f(X)$ com $x \in X$ tal que $y = f(x) \in U \cap f(X) = f^{-1}(A)$. Analogamente para $f^{-1}(B)$.

4. $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, já que $f(X) = A \cup B$, então:

$$f^{-1}(f(X)) = X = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(B).$$

Portanto $\{f^{-1}(A),\, f^{-1}(B)\}$ é uma cisão de X, o que contradiz a hipótese. Portanto $f(X)$ é conexo.

Corolário 2.10.12. Seja $f : (X,\, \tau) \to (Y,\, \tau)$ um homeomorfismo. Então X é conexo se, e somente se, Y é conexo.

Demonstração: Como $f : (X,\, \tau) \to (Y,\, \tau')$ é $\tau - \tau'$ contínua e X conexo, então segue do **Teorema: 2.10.11** que $f(X) = Y$ conexo. Reciprocamente, $g = f^{-1} : (Y,\, \tau') \to (X,\, \tau')$ é contínua e Y, segue do **Teorema: 2.10.11** que $g(Y) = f^{-1}(Y) = X$ conexo.

2.11 Homotopia

Como referência neste capítulo utilizaremos os lívros [**DM**] e [**EL3**].

Para este capítulo assim como os que sucedem a este, I denotará o intervalo fechado $[0,\, 1]$.

Definição 2.11.1. Sejam X e Y espaços, e sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funções contínuas. Dizemos que f é **homotópica** a g se exsitir uma função contínua $H : X \times I \to Y$ tal que para todo $x \in X$, tem-se $H(x,\, 0) = f(x)$ e $H(x,\, 1) = g(x)$. A função H é chamada de **homotopia** entre f e g.

Notação: $f \overset{H}{\sim} g$

Intuitivamente, podemos pensar na homotopia como um processo de deformação contínua da aplicação f na aplicação g. Tal deformação existe durante uma unidade de tempo; neste caso, o intervalo I. Em outras palavras, dada H uma homotopia entre f e g e considerando, para cada $t \in I$, a aplicação contínua $H_t : X \to Y$, definida por $H_t(x) = H(x,\, t)$, temos que $(H_t)_{t\in I}$ define uma "família contínua a um parâmetro"$-$ a continuidade, neste caso, significa que $(x,\, t) \to H_t(x)$ é uma aplicação contínua. Em $t = 0$ temos f; para $t = 1$ temos g; e nos intervalos $0 < t < 1$, as aplicações H_t fornecem as deformações intermediárias.

Exemplo 2.11.2. Seja X um espaço topológico qualquer. Então, quaisquer duas aplicações contínuas $f : X \to \mathbb{R}^n$ e $g : X \to \mathbb{R}^n$ são homotópicas. De fato, basta definir $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$ por:

$$H(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Observação 2.11.3. Para cada $t \in I$ fixo temos uma função contínua $H_t : X \to Y$ dada por $H_t(x) = H(x,\, t)$. A coleção $(H_t)_{t\in I}$ é uma família de funções contínuas.

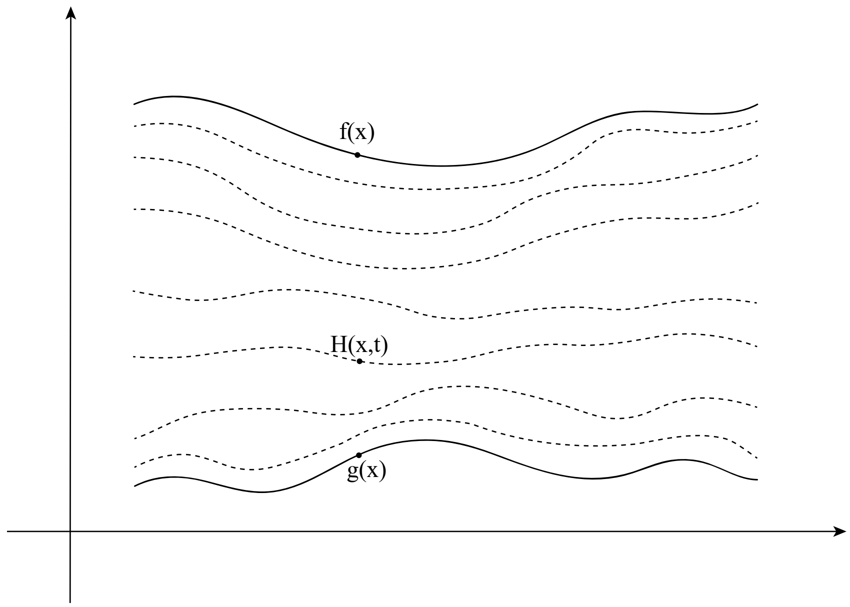


Figura 2.2: Homotopia entre f e g.

Exemplo 2.11.4. Considere as funções $f : [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x) = (cos(2\pi x), sen(2\pi x))$$

e $g : [0,\, 1] \to \mathbb{R}^2$ constante, $g(x) = (0, 0)$ para todo $x \in [0,\, 1]$. De acordo com o Exemplo 2.11.2, $f \overset{H}{\sim} g$ onde $H(x, t) = (1-t)(cos(2\pi x), sen(2\pi x))$, para $(x, t) \in I \times I$. Então, para cada t fixado temos $H_t(x) = (1-t)(cos(2\pi x), sen(2\pi x))$, com x variando em I. Portanto, a família de funções contínuas $(H_t)_{t\in I}$, neste caso, corresponde a uma família de circunfências centradas na origem e de raio $1-t$, para $0 \leq t \leq 1$.

Observação 2.11.5. A relação $\sim$ é chamada **relação de homotopia** e é uma relação de equivalência no conjunto de todas as funções contínuas de X em Y. De fato, sejam f, g, $h : X \to Y$ funções contínuas.

1. $f \sim f$(**reflexiva**).

   Defina $H : X \times I \to Y$ por $H(x,\, t) = f(x)$, para todo $x \in X$ e para todo $t \in I$. Note que;

   - H é contínua, e
   - $H(x,\, 0) = f(x)$ e $H(x,\, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$.

   Portanto, $f \overset{H}{\sim} g$.

2. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$(**Simétrica**).

   Por hipótese existe $H : X \times I \to Y$ função contínua tal que $H(x,\, 0) = f(x)$ e $H(x,\, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Sendo assim, definida

   $$K : X \times I \to Y$$

   $$(x,\, t) \longmapsto K(x,\, t) = H(x,\, 1 - t)$$

   Temos que

   - k é contínua, e
   - $K(x,\, 0) = H(x,\, 1) = g(x)$ e $K(x,\, 1) = H(x,\, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$.

   Portanto, $g \sim f$.

3. $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$. (**Transitiva**).

   Por hipótese, existem funções contínuas $H : X \times I \to Y$, tal que $H(x,\, 0) = f(x)$ e $H(x,\, 1) = g(x)$ e $K : X \times I \to Y$ tal que $K(x,\, 0) = g(x)$ e $K(x,\, 1) = h(x)$. Definindo $H' : X \times I \to Y$ por

   $$\begin{cases} H(x,\, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x,\, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq 0 \leq 1. \end{cases}$$

   - Temos que Pelo **Lema da Colagem** H' é contínua, e
   - $H'(x,\, 0) = H(x,\, 2.0) = H(x,\, 0) = f(x)$ e $H'(x,\, 1) = K(x,\, 2.0 - 1) = K(x,\, 1) = h(x)$ para todo $x \in X$.

     Portanto $f \sim h$.

Proposição 2.11.6. *Sejam $f_1,\, f_2 : X \to Y$ e $g_1, g_2 : Y \to Z$ funções contínuas. Se $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, então $g_1\, o\, f_1 \sim g_2\, o\, f_2$.*

Demonstração: Por hipóteses, existem homotopias $H_1 : X \times I \to Y$ tal que $H_1(x,\, 0) = f(x)$ e $H_1(x,\, 1) = f_2(x)$, para todo $x \in X$, e $H_2 : Y \times I \to Z$ tal que $H_2(y,\, 0) = g_1$ e $H_2(y,\, 1) = g_2(x)$, para todo $y \in Y$. Definido

$$K : X \times I \to Z$$
$$(x,\, t) \longmapsto K(x,\, t) = H_2(H_1(x,\, t),\, t),$$

temos que K é contínua, $K(x,\, 0) = H_2(H_1(x,\, 0),\, 0) = H_2(f(x),\, 0) = g_1(f(x)) = (g_1\, o\, f_1)(x)$ e $K(x,\, 1) = H_2(H_1(x,\, 1),\, 1) = H_2(f_2(x),\, 1) = g_2(f_2(x)) = (g_2\, o\, f_2)(x)$, para todo $x \in X$. Portanto, $g_1\, o\, f_1 \sim g_2\, o\, f_2$.

2.11.1 Equivalência de homotopia

Definição 2.11.7. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Dizemos que f é **Equivalência de homotopia** (ou **homotopicamente equivalentes**), se existir $g : Y \to X$ tal que $f\,o\,g \sim id_X$ e $g\,o\,f \sim id_Y$. A aplicação e chamada **Inversa homotópica** de f.

Notação: $X \equiv Y$

Geometricamente, a existência de uma equivalência de homotopia entre X e Y significa que X pode ser "deformado"continuamente a Y e vice-versa.

Exemplo 2.11.8. Se X e Y são dois espaços homemorfos, então X e Y tem o mesmo tipo de homotopia. De fato, se X é homeomorfo a Y, então existe $f : X \to Y$ aplicação contínua e bijetora, com $g = f^{-1} : Y \to X$, sua inversa que também é contínua, logo $f\,o\,g = id_Y \sim id_Y$ e $g\,o\,f = id_X \sim id_X$

Observação 2.11.9. Se X e Y são homeomorfos, é claro que X e Y são homotopicamente equivalentes, mas a recíproca em geral é falsa.

Definição 2.11.10. Dizemos que um espaço topologico X é **contrátil** se, e somente se, X é homotopicamente equivalente a um espaço unitário, ou seja, $x_0 \in X$, isto é, $X \equiv \{x_0\}$.

Exemplo 2.11.11. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n)|x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$, é contrátil. Com efeito, denotando $0 := (0, \cdots, 0)$ e considerando as aplicações $f : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ definida por $f(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$ e $g : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(0) = 0$, temos que $(f\,o\,g)(0) = f(0) = 0 = id_{\{0\}}(0)$ e $(g\,o\,f)(u) = g(0) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $g\,o\,f$ é a aplicação nula, e portanto segue que $g\,o\,f \sim id_{\mathbb{R}^n}$.

Definição 2.11.12. Sejam X e Y espaços topológicos e $A \subset X$. Considere $f, g : X \to Y$ funções contínuas tais que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$. Dizemos que f é **homotópica a** g **relativamente a** A se existir $H : X \times I \to Y$ aplicação contínua tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ e $H(x, t) = f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$ e $0 \leq t \leq 1$.

Notação: $f \sim g(relA)$.

Observação 2.11.13. A relação $\sim$ $(relA)$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções do espaço X no espaço Y que coincidem em $A \subset X$.

Exemplo 2.11.14. As funções contínuas $id_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (função identidade) e $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $r(u) = \frac{u}{||u||} \overset{||u||=1}{=} u$. Agora, definindo;

$$H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$(u, t) \longmapsto H(u, t) = tu + (1-t)\frac{u}{||u||},$$

temos que,

- H é contínua;

- $H(u, 0) = r(u)$;
- $H(u, 1) = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(U)$;
- para todo $u \in S^1$, $H(u, t)^{||u||=1} = tu + (1-t)u = u = id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(u) = r(u)$, para todo $t \in I$.

Exemplo 2.11.15. Sejam Y a esfera $S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p+q}$ e X o subconjunto de $\mathbb{R}^{p+q}$ dos pontos que **não** estão contidos no plano $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$. Então a inclusão $i : Y \to X$ é uma equivalência de homotopia.

Definimos $g : X \to Y$ por;

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_p, \cdots, x_{p+q}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p),$$

onde $\lambda = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0$.

Temos que $g\, o\, i \sim id_Y$, pois dado $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in Y = S^{p-1}$,

$$\begin{aligned} g(i(x_1, x_2, \cdots, x_p)) &= g(x_1, x_2, \cdots, x_p, 0, \cdots, 0) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p) \\ &\overset{(*)}{=} (x_1, x_2, \cdots, x_p) \\ &= (*)\lambda = (x_1^2 + x_1^2 + \cdots + x_p^2)^{\frac{-1}{2}} = 1, \end{aligned}$$

pois $(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in S^{p-1}$, restra mostrar que $i\, o\, g = id_X$.

Definimos $H : X \times I \to X$ por;

$$H((x_1, x_2, \cdots, x_{p+q}), t) = (\lambda^{1-t} x_1, \lambda^{1-t} x_2, \cdots, \lambda^{1-t} x_p, t x_{p+1}, \cdots, t x_{p+q}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q}, 0) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p, 0, \cdots, 0) \\ &= i\, o\, g(x_1, x_2, \cdots, x_p, \cdots, x_{p+q}) \\ H(x_1, x_2, \cdots, x_{p+q}, 1) &= (x_1, x_2, \cdots, x_p, \cdots, x_{p+q}) \\ &= id_X(x_1, x_2, \cdots, x_p, \cdots, x_{p+q}) \end{aligned}$$

Portanto, H é uma homotopia entre $i\ o\ g$ e id_X, ou seja, $i\ o\ g \sim id_X$.

Exemplo 2.11.16. A circunferência $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ tem o mesmo tipo de homotopia de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, onde 0 denota a origem $(0, 0)$. De fato, considerando a aplicação inclusão $i : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, isto é, $i(u) = u$, para todo $u \in S^1$, temos que i é uma equivalência de homotopia, sendo que sua inversa homotópica é definida por

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2\{0\} &\to S^1 \\ u &\longmapsto g(u) = \frac{u}{||u||}. \end{aligned}$$

Com efeito.

- se $u \in S^1$, $(g\, o\, i)(u) = g(i(u)) = g(u) = \frac{u}{||u||} = u$, para $||u|| = 1$, isto é,

$$g\ o\ i = id_{S^1} \sim id_{S^1}.$$

- se $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, temos que

$$(i\ o\ g)(u) = i(g(u)) = i(\frac{u}{||u||}) = \frac{u}{||u||}.$$

Como $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial normado, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ e,

$$[u, \frac{u}{||u||}] \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\ (\text{pois}\ \frac{u}{||u||} \neq 0),$$

para todo $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e temos que

$$i\ o\ g \sim id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}.$$

Portanto, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tem o mesmo tipo de homotopia de S^1.

Definição 2.11.17. Um **caminho** em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1 é uma função contínua $\alpha : I \to X$ tal que $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = x_1$. Se $x_0 = x_1$, dizemos que α é um **laço baseado em** x_0.

Definição 2.11.18. Definimos **Caminho constante** se X um espaço e $x_0 \in X$. A aplicação

$$e_{x_0} : I \to X$$

$$t \to e_{x_0}(t) = x_0$$

para todo $t \in I$, é um caminho em X.

Definição 2.11.19. Definimos o **Caminho Inverso** de $\alpha : I \to X$ como o caminho $\alpha^{-1} : I \to X$, dado por $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Temos, então, que α^{-1} começa onde α termina e termina na origem de α. Além disso, considerando $h : I \to I$ a função $h(s) = 1 - s$, temos que $\alpha^{-1} = \alpha\ o\ h$.

Definição 2.11.20. Dois caminhos $\alpha, \beta : I \to X$ com pontos iniciais x_0 e pontos finais x_1 são **homotópicos relativamente ao subconjunto**$\{x_0, x_1\}$ **de** X se existir uma homotopia entre α e β relativa ao subconjunto $\{x_0, x_1\}$, isto é, se exisite uma função contínua $H : I \times I \to X$ tal que

- $H(t, 0) = \alpha(t)$ e $H(t, 1) = \beta(1)$, para todo $t \in I$ e
- $H(0, s) = x_0$ e $H(1, s) = x_1$, para todo $s \in I$.

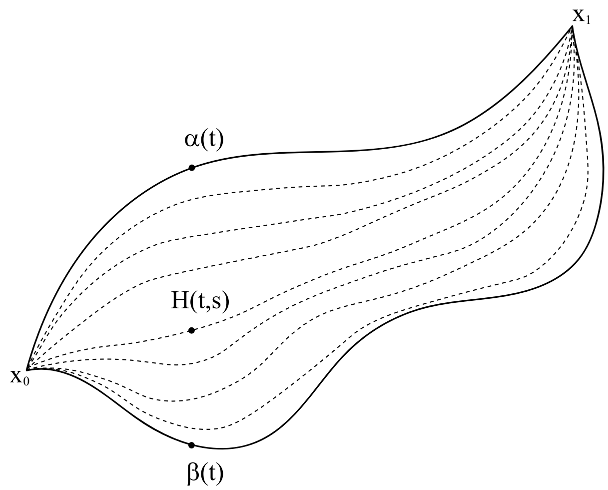


Figura 2.3: Homotopia entre α e β.

A aplicação contínua H é dita uma **homotopia de caminhos entre α e β.** Se α e β são caminhos homotópicos, denotamos por $\alpha \cong \beta$

Dados um espaço X e x_0, $x_1 \in X$, denotaremos por $\Omega(X;\, x_0, x_1)$ o conjunto de todos os caminhos em X com ponto inicial x_0 e ponto final x_1, e por $\Omega(X; x_0)$ o conjunto de todos os laços baseados em x_0.

Exemplo 2.11.21. Seja X um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado. Se α, $\beta : I \to X$ são caminhos com as mesmas extremidades, estão $\alpha \cong \beta$.

Solução: De fato, basta definir $H : I \times I \to X$ por $H(s,\, t) = (1-t)a(s) + tb(s)$ e H será uma homotopia entre a e b.

Definição 2.11.22. (Caminho produto). Sejam α e β caminhos em X tais que $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(0) = x_1$ e $\beta(1) = x_2$. O **caminho produto** $\alpha * \beta$ é o caminho $\alpha * \beta : I \to X$ definido por;

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \\ \beta(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos então o **caminho produto** de α e β como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro α e depois β.

Os próximos tópicos e definições a seguir são baseados no livro do Arnaldo Garcia e Yves Lequain, veja [**GY**].

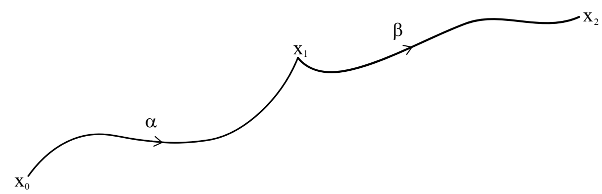


Figura 2.4: Caminho produto $\alpha * \beta$.

2.11.2 O que é um Grupo?

Antes de iniciarmos o nossa próxima secção, entraremos em um assunto que ainda não foi tratado, mas que será de suma inportância para entendermos algumas notaçãoes que apareceram daqui para frente.

Definição 2.11.23. Uma estrutura matemática constituída de um conjunto não vazio G e uma operação fechada $(x,\, y) \longmapsto x * y$ sobre G (sendo $*$ uma operação não definida), é chamado **Grupo** se essa operação satisfaz os seguintes axiomas:

Axioma 2.11.24. Associatividade

$(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam, $a,\, b,\, c \in G$; .

Axioma 2.11.25. Existência do elemento neutro:

Existe um elemento $e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, para qualquer que seja $a \in G$;

Axioma 2.11.26. Existência do elemento inverso:

Para todo $a \in G$ existe um elemento b ou $(a^{-1}) \in G$ tal que

$$a * b = b * a = e.$$

O grupo é **abeliano** ou **comutativo** se:

A operação é comutativa, isto é,

$$a \cdot b = b \cdot a, \;\; \forall a,\, b \in G.$$

Denotaremos um grupo por $(G,\, *)$, onde o símbolo $*$ indica a operação sobre G.

Exemplo 2.11.27. $(\mathbb{Z},\, +)$ é um grupo abeliano infinito.

Exemplo 2.11.28. $(\mathbb{Q},\, +)$, $(\mathbb{R},\, +)$, $(\mathbb{C},\, +)$ são grupos (aditivos) abelianos.

2.11.3 Subgrupos

Definição 2.11.29. Seja $(G, *)$ um grupo. Um subconjunto não-vazio H de G é um **subgrupo** de G (denotamos $H < G$ quando, com a operação de G, o conjunto H é um grupo, isto é, quando as condições seguintes são satisfeitas:

1. $a_1 * a_2 \in H$, para todo a_1, $a_2 \in H$.
2. $a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3$, para todo a_1, a_2, $a_3 \in H$.
3. $\exists\, e \in H$ tal que $e * a = a * e = a$, para todo $a \in H$.
4. Para cada $a \in H$, existe $b \in H$ tal que $a * b = b * a = e$

2.12 O Grupo fundamental

O conjunto das classes de homotopia de caminhos, considerando caminhos em um espaço topológico X, não forma um grupo segundo a operação $*$, pois o produto de duas classes de homotopia de caminhos não está definido sempre. Entretanto, se tomarmos um ponto x_0 em X, fixá-lo como um "ponto base"e restringir-nos aos caminhos que começam e terminam em x_0, o conjunto das classes de homotopia de caminhos para tais caminhos formará um grupo com a operação $*$. Tal grupo é dito o **Grupo fundamental** de X.

Nesta secção estudaremos o grupo fundamental e algumas de suas propriedades.

Definição 2.12.1. Sejam X um espaço topológico e x_0 um ponto de X. O conjunto das classes de homotopia de caminhos para caminhos fechados com base em x_0, com a operação $*$, é chamado de grupo fundamental de X relativo ao ponto base x_0 e denotamos por $\pi_1(X;\, x_0)$.

Sendo assim, denotaremos por $[\alpha]$ a classe de equivalência do laço α baseado em x_0 dada pela relação $\sim_{x_0}$ isto é,

$$[\alpha] = \{\beta \in \Omega(X; x_0) | \alpha \sim_{x_0} \beta\}$$

Uma vez que $\sim_{x_0}$ é uma relação de equivalência em $\Omega(X;\, x_0)$, temos que se $\alpha \nsim_{x_0} \beta$ (α e β não sendo laços homotópicos), então $[\alpha] \neq [\beta]$.

Agora, consideremos;

$$\pi_1(X;\, x_0) := \frac{\Omega(X;\, x_0)}{\sim_{x_0}} = \{[\alpha] \,|\, \alpha \in \Omega(X;\, x_0)\},$$

o conjunto formado pelas classes de homotopia de laços baseados em x_0. Dados $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(X;\, x_0)$, definimos a seguinte operação em $\pi_1(X;\, x_0)$:

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta],$$

ou seja, o produto das classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ é a classe do caminho produto, $[\alpha * \beta]$.

Temos que a operção "$\cdot$"está bem definida, isto é, se $[\alpha]$, $[\alpha']$, $[\beta]$, $[\beta'] \in \pi_1(X; x_0)$ são tais que $\alpha' \in [\alpha]$ e $\beta' \in [\beta]$, então

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha'] \cdot [\beta'],$$

Lema 2.12.2. Sejam α, α', β, $\beta' \in \Omega(X, x_0)$ tais que $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$. Então, $\alpha * \beta \sim_{x_0} \alpha' * \beta'$.

Demonstração:

Como $\alpha \sim_{x_0} \alpha'$ e $\beta \sim_{x_0} \beta'$, existem F, $G : I \times I \to X$ tais que:

$$\begin{cases} F(0,\, t) = \alpha(t);\ F(t,\, 1) = \alpha'(t), & \forall t \in I \\ F(0,\, s) = F(1,\, s) = x_0, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} G(0,\, t) = \beta(t);\ G(t,\, 1) = \beta'(t), & \forall t \in I \\ G(0,\, s) = G(1,\, s) = x_0, & \forall s \in I \end{cases}$$

Temos que $H : I \times I \to X$ definida por

$$H(t,\, s) = \begin{cases} F(2t,\, s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(2t-1,\, s), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é uma homotopia entre $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$.

Lema 2.12.3. Sejam $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma] \in \pi_1(X;\, x_0)$. Então, $([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma])$. **(Associatividade)**

Lema 2.12.4. A classe do laço constante $[e_{x_0}]$ é o elemento neutro para operação "$\cdot$"em $\pi_1(X;\, x_0)$. **(Existência do elemento neutro)**

Lema 2.12.5. Seja $[\alpha] \in \pi_1(X;\, x_0)$. Então $[\alpha^{-1}]$ é o elemento inverso de $[\alpha]$ em relação à operação "$\cdot$"em $\pi_1(X;\, x_0)$.**(Existência de elemento inverso)**

Observação 2.12.6. Para ver as demonstrações dos lemas; **Lema 2.12.3**, **Lema 2.12.4**, e **Lema 2.12.5** veja [**EL3**].

Definição 2.12.7. Um espaço topológico X é dito ser **conexo por caminhos** se para quaisquer dois pontos x_0, $x_1 \in X$, existe um caminho $\lambda : [0,\, 1] \to X$, ligando x_0 a x_1, isto é, $\lambda(0) = x_0$ e $\lambda(1) = x_1$

Definição 2.12.8. Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ é dito **Estrela convexa** se para algum ponto $a_0 \in A$, todas os caminhos que os ligam a algum ponto de A estão inteiramente contidos em A.

Corolário 2.12.9. Se X é conexo por caminhos, então, para quaisquer pontos base x_0, $x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X;\, x_0)$ e $\pi_1(X;\, x_1$ são isomorfos.

O isomorfismo entre $\pi_1(X;\,x_0)$ e $\pi_1(X;\,x_1)$, mencionado no corolário acima, depende dos caminhos escolidos. Todavia, quando $\pi_1(X;,\,x_1)$ é abeliano, isomorfismo independe do caminho; isto é, duas classes quaisquer α, β, ligando x_0 a x_1, definem o mesmo isomorfismo: $\overline{\gamma} = \overline{\delta}$. De fato, neste caso, para todo $\alpha \in (X,\,x_1)$, vale:

$$\begin{aligned}
\overline{\gamma}(\alpha) &= \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \\
&= \gamma * \delta^{-1} \cdot \delta * \alpha\delta^{-1} \cdot \delta * \gamma^{-1} \\
&= \gamma * \delta^{-1} \cdot \delta * \gamma^{-1} \cdot \delta * \alpha * \delta^{-1} \\
&= \delta * \alpha\delta^{-1} \\
&= \delta * \alpha * \delta^{-1} \\
&= \overline{\delta}(\alpha)
\end{aligned}$$

pois $\delta * \alpha * \delta^{-1}$ e $\delta * \gamma^{-1}$, pertencendo ambas ao grupo abeliano $\pi_1(X;\,x_0)$, comutam.

Segue destas considerações e do **Corolário 2.12.9** que, sendo X um espaço topológico conexo por caminhos com $\pi_1(X;\,x_0)$ abeliano para algum $x_0 \in X$, o grupo $\pi_1(X;\,x_1)$ também será abeliano, seja qual for o ponto base $x_1 \in X$.

Além disso, dados, arbitrariamente, $x_0,\,x_1 \in X$, existe um isomorfismo natural $\pi_1(X;\,x_1) \to \pi_1(X;\,x_0)$,isto é, a cada $\alpha \in \pi_1(X;\,x_0)$ corresponde uma única classe $\overline{\alpha} \in \pi_1(X,\,x_0)$, definida sem ambiguidade nem escolhas arbitrárias. Neste caso, mostremos que podemos considerar o grupo fundamental de X como o conjunto das classes de homotopias livres de homotopias livres de caminhos fechados em X e, portanto, representá-lo por $\pi_1(X)$, sen apresentar explicitamente o ponto base.

De fato, seja $\pi(X)$ o conjunto das classes de homotopias livres de caminhos fechados em X. Fixemos um ponto base $x_0 \in X$ e consideremos a aplicação $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X)$ tal que $\phi(\alpha) =$ classe de homotopia livre que contém α. Para qualquer espaço conexo por caminhos X, a aplicação ϕ é sempre sobrejetora, pois todo caminho fechado a em X, com base em x_1, é livremente homotópico a um caminho fechado b com base x_0, basta tomar um camminho c ligando x_0 a x_1 e definir $b = (c*a)*c^{-1}$. Quando $\pi_1(X, x_0)$ é abeliano, ϕ é também injetora, pois se $\alpha = [a]$ e $\beta = [b]$ em $\pi_1(X;\,x_0)$ são tais que $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$, então a e b são livremente homotópicos. Logo, α e β são elementos conjugados no grupo comutativo $\pi_1(X;\,x_0)$ e, portanto, $\alpha = \beta$. Sendo assim, ϕ é uma bijeção de $\pi_1(X,\,x_0)$ sobre $\pi_1(X)$.

1. Mostre que se A é uma estrela convexa, então A é simplesmente conectado.

2.12.1 O homomorsimo Induzido

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua que leva o ponto x_0 de X no ponto y_0 de Y. Se a é um caminho fechado em X com base em x_0, então $f\ o\ a : I \to Y$ é um caminho fechado em Y com base em y_0. A correspondência $a \to f\ o\ a$ dá origem a uma nova aplicação que leva $\pi_1(X,\,x_0)$ a $\pi_1(Y,\,y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$, dada por $f_{\#}(\alpha) = [f\ o\ a]$, onde $\alpha = [a]$.

Definição 2.12.10.

A aplicação $f_\#$ está bem definida, pois se F é uma homotopia de caminhos entre os caminhos a e b, então $f\ o\ F$ é uma homotopia de caminhos entre os caminhos $f\ o\ a$ e $f\ o\ b$. Como $f\ o\ (a * b) = (f\ o\ a) * (f\ o\ b)$, segue que $f_\#$ é realmente um homomorfismo.

Teorema 2.12.11. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são duas aplicações contínuas, e $f_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ e $g_\# : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$, como $y_0 = f(x_0)$ e $z_0 = g(y_0)$, são os homomorfismos induzidos por tais aplicações, então $(g \circ f)_\# = (g_\# \circ f_\#)$. Além disso, se $id : X \to X$ é uma aplicação identidade, então $id_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ é o homomorfismo identidade.

Demonstrção: A demonstrção desse teorema se encontra na página 334 do livro "Topology", veja [**JM**].

Proposição 2.12.12. Sejam $a, b : I \to X$ caminhos fechados com bases nos pontos x_0, y_0 respectivamente. A fim de que a e b sejam livremente homotópicos, é necessário e suficiente que exista um caminho $c : I \to X$, ligando x_0 a y_0, tal que $a \cong (c * b) * c^{-1}$.

Demonstração: Seja $H : I \times I \to X$ uma homotopia livre entre caminhos fechados a e b. Definimos $c : I \times X$ por $c(t) = H(0, t) = H(1, t)$. Consideremos uma aplicação contínua $\alpha : I \times I \to I \times I$ que transforma o bordo do quadrado $I \times I$ em si mesmo da seguinte maneira, $\alpha(0, t) = (0, 0); \alpha(1, t) = (1, 0); \alpha(s, 0) = (s, 0)$, e

Teorema 2.12.13. A aplicação $[\alpha]$ é um isomofismo de grupo.

Demonstração: Para mostrar que $[\alpha]$ é um isomorfismo, calculemos;

Definição 2.12.14. Se X é conectado por caminhos, x_0 e x_1 são dois pontos de X, então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Suponha que X seja um espaço topologico. Seja C um subconjunto dos caminhos de X contendo x_0. É fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, uma vez que todos os laços e homotopias em X que são baseadas em x_0 devem estar no subespaço C. Assim $\pi_1(X, x_0)$ depende apenas do componete do caminho de X contendo x_0; isso não nos dá nenhuma informação sobre o resto de X. Por essa razão, é comum lidar apenas com espaços conectados por caminhos ao estudar o grupo fundamental.

Capítulo 3

Teoria Clássica dos Nós.

O que chamamos de nó (clássico) em $\mathbb{R}^3$ é a imagem de uma aplicação contínua injetiva $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, (chamamos isso de mergulho). Por padrão, identificamos um nó com a imagem de uma aplicação contínua injetiva e o denotamos $K = f(S^1)$. Assim quando consideramos, por exemplo, dois nós, estamos considerando dois mergulhos $f(S^1) \subset \mathbb{R}^3$ e $g(S^1) \subset \mathbb{R}^3$. Então, a diferença entre os diversos nós não está no espaço topológico que é a imagem do mergulho, está no espaço que circunda a imagem do mergulho, está no complementar $\mathbb{R}^3 \setminus f(S^1)$. Nossa noção intuitiva de deformação de um nó K_1 em outro nó K_2 é, na verdade, a noção de um movimento contínuo no espaço ambiente $\mathbb{R}^3$ que leva continuamente o subespaço topológico K_1 sobre o subespaço topológico K_2. Essa noção é a associada à definição de isotopia ambiente.

Definição 3.0.1. Considere um espaço topológico X, uma isotopia ambiente H em X é uma aplicação contínua $H : X \times [0, 1] \to X$ tal que $H_0 : X \times \{0\} \to X$ é a aplicação identidade e $H_t : X \times \{t\} \to X$ é um homeomorfismo para todo $t \in [0, 1]$.

Definição 3.0.2. Um nó (clássico) em $\mathbb{R}^3$ é uma imagem de uma função contínua e injetiva $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$, (chamamos isso de mergulho).

Alguns consceitos e definições apresentados nestá secção então baseados nas referências [**CRS**]

3.1 O determinante

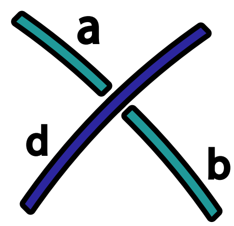
Definição 3.1.1. O determinante de um nó é um número real não negativo associado ao nó. Este número é um invariante do nó, isto é, quaisquer dois nós equivalentes possuem o mesmo determinante. Desse modo, dois nós com determinantes diferentes não são equivalentes.

Calculamos o determinante de um nó de forma algorítmica, como veremos a seguir.

1. Para o primeiro passo temos que para cada arco associar uma variável e para cada cruzamento associamos uma equação da forma;

$$a + b - 2d = 0$$

Figura 3.1: Cruzamento



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

2. Coloque uma variável qualquer da equação que obtemos a cima igual a zero;

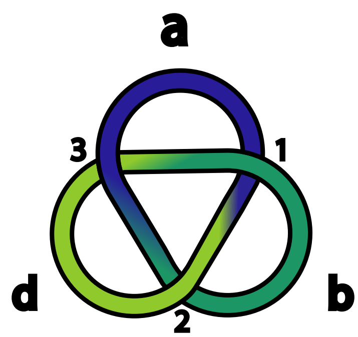
3. Descarte uma equação qualquer;

   E por fim.

4. Ficará então determinado um sistema de $n-1$ equações e $n-1$ variáveis, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calculamos o modulo da matriz formada pelos coeficientes das equações do sistema linear obtido.

Exemplo 3.1.2. Vamos calcular do determinante do nó trevo, cujo diagrama aparece na Figura 3.2

Figura 3.2: Nó trevo.



Fonte: Elaboração do autor (2021).

Utilizando o algorítimo que vimos anteriormente, obtermos as seguintes equações;

$$a + d - 2b = 0$$
$$b + a - 2d = 0$$
$$d + b - 2a = 0$$

Colocando uma variável qualquer igual a zero e descartando uma equação qualquer, obtemos o seguinte sistema(neste caso descartamos a variável d e a equação $d + b - 2a = 0$);

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

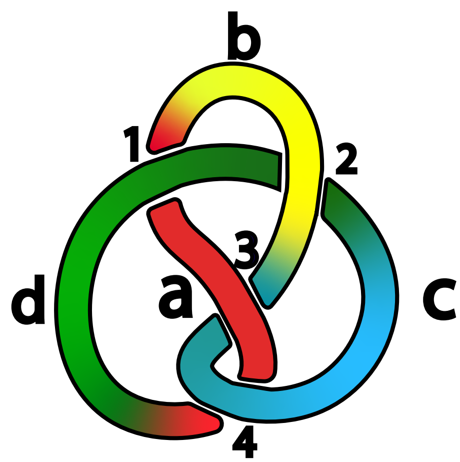
Agora obtemos o determinante da matriz do sistema a cima;

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Portanto o determinante do nó trevo é 3.

Exemplo 3.1.3. Agora vamos ver se os diagramas dos nós **Trevo** e **Figura 8** são equivalentes. Qual o determinante do nó Figura 8?

Figura 3.3: Nó figura 8



Fonte: Elaborção dos autores (2021).

Utilizando o mesmo algoritimo que vimos, obtemos as seguintes equações;

$$a + b - 2d = 0$$

$$d + c - 2b = 0$$

$$b + c - 2a = 0$$

$$a + d - 2c = 0$$

Colocando a variável d = 0 e eliminado a quarta equação, temos o sistema:
Tenho que arrumar
Calculamos o determinante da matriz associada ao sistema;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 5$$

Assim, obtemos que o volaor é 5, portanto os nós **Figura 8** e **Trevo** são não equivalentes.

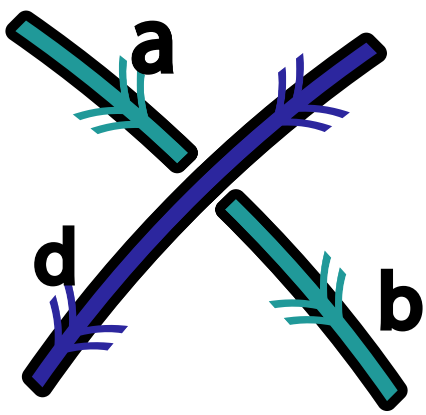
3.1.1 Polinômio de Alexander

Outro invariante bastante conhecido é o **Polinômio de Alexander**. O procedimento para se obter o polinômio de Alexander segue mais ou menos o do determinante, suponha que você tenha um nó k, o primeiro passo é o seguinte:

1. Escolha uma orientação para o nó k, veja a Figura 3.4.

Observação 3.1.4. d deve ser identificado com a variável que passa superiormente na região do cruzamento; para a escolha de a e b na equação, procedemos da seguinte forma: usando a orientação do trecho superior do nó, no cruzamento, a deve identificado com a variável associada à direita de d, e consequentemente, b deve ser idenficado com a variável à esquerda de d.

Figura 3.4: Cruzamento com orientação



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

2. Associe a cada arco uma variável (a, b, d,$\cdots$). A cada cruzamento escreva a equação da forma, **b-ta-(1-t)d=0** ou **b-ta=(1-t)d**.
3. Em seguida, coloque uma variavel qualquer igual a zero.
4. Descarte qualquer umas das equações.
5. Montamos um sistema e calculamos a determinante da matriz desse sistema, a qual sera um $\delta(t)$.
6. Multiplicamos $\delta(t)$ por $\pm t^j$ com o intuito de obter $\triangle(t)$, tal que, $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = 1$.

Vejamos agora alguns exemplos;

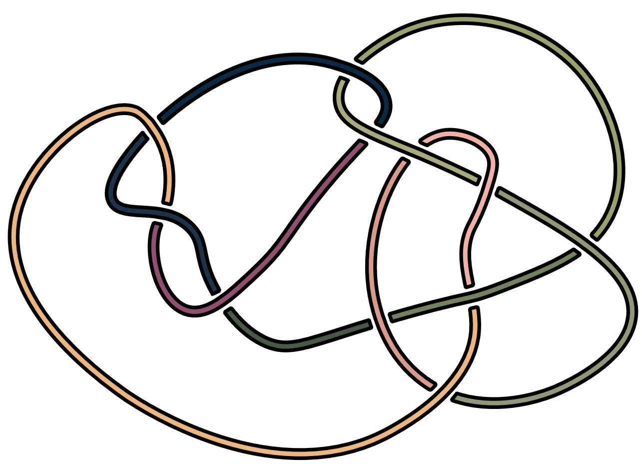
Exemplo 3.1.5. Vamos calcular o **Polinômio de Alexander** do Nó **Conway**;

Figura 3.5: Nó Conway

Fonte: Elaboração dos autores. (2021)

Olhamos agora para o seu diagrama;

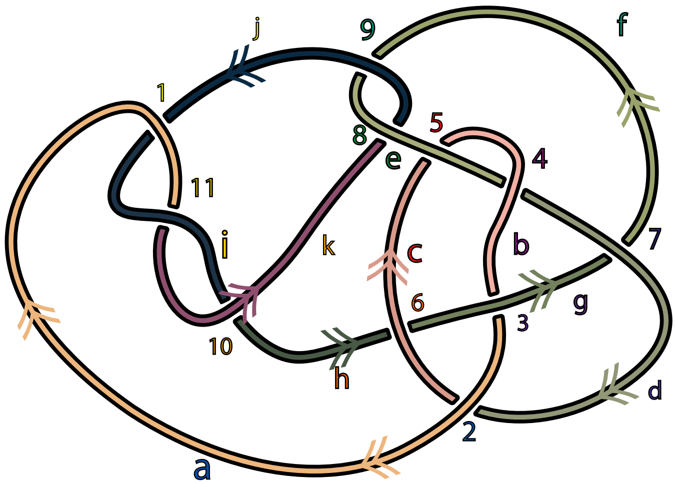
Figura 3.6: Diagrama do Nó conway



Fonte: Elaboração dos autores. (2021)

Seguindo os passos do algorítimo, vamos associar a cada arco uma variável e também vamos enumerar os cruzamentos;

Figura 3.7: Diagrama do Nó Conway



Fonte: Elaboração dos autores (2021)

Agora, a cada cruzamento vamos associar uma equação, como temos 11 cruzamentos, obteremos 11 equações;

1. $i - tj - (1-t)a = 0$
2. $c - td - (1-t)a = 0$
3. $a - tb - (1-t)g = 0$
4. $e - td - (1-t)b = 0$
5. $c - tb - (1-t)e = 0$
6. $g - th - (1-t)c = 0$
7. $g - tf - (1-t)d = 0$
8. $k - tj - (1-t)e = 0$
9. $f - te - (1-t)j = 0$
10. $h - ti - (1-t)k = 0$
11. $k - ta - (1-t)i = 0$

Obtemos;

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
1	$t-1$	0	0	0	0	0	0	0	1	$-t$	0
2	$t-1$	0	1	$-t$	0	0	0	0	0	0	0
3	1	$-t$	0	0	0	0	$t-1$	0	0	0	0
4	0	$t-1$	0	$-t$	-1	0	0	0	0	0	0
5	0	$-t$	1	0	$t-1$	0	0	0	0	0	0
6	0	0	$t-1$	0	0	0	1	$-t$	0	0	0
7	0	0	0	$t-1$	0	$-t$	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	$t-1$	0	0	0	0	$-t$	1
9	0	0	0	0	$-t$	1	0	0	0	$t-1$	0
10	0	0	0	0	0	0	0	1	$-t$	0	$t-1$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	$t-1$	0	1

Colocando a variável $a = 0$ e eliminando a equação associada ao cruzamento 11, podemos calcular o valor do determinante da matriz acima, temos então:

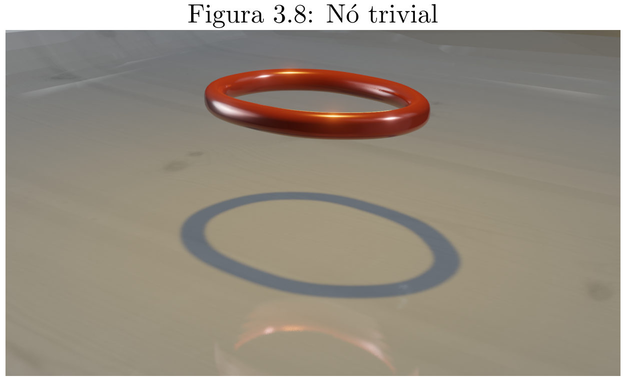
$$det = \delta(t) = -t^5.$$

com isso, para que $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = +1$, multiplicamos $\delta(t)$ por $-t^{-5}$;

$$\triangle(t) = -t^{-5}(-t^5) = 1.$$

Vamos comparar o polinômio de Alexander do **nó Conway** com o **nó trivial** (veja a figura 3.8), mas antes disso precisamos saber que, dado um diagrama de um nó, é possível aumentar artificialmente o seu número de cruzamentos, basta ver o primeiro movimento de Reidemeister. Isto significa que o número de cruzamentos não é um invariante do nó (não é constante em todos os representantes de sua classe), no entanto o número mínimo de cruzamentos é um invariante.

Figura 3.8: Nó trivial

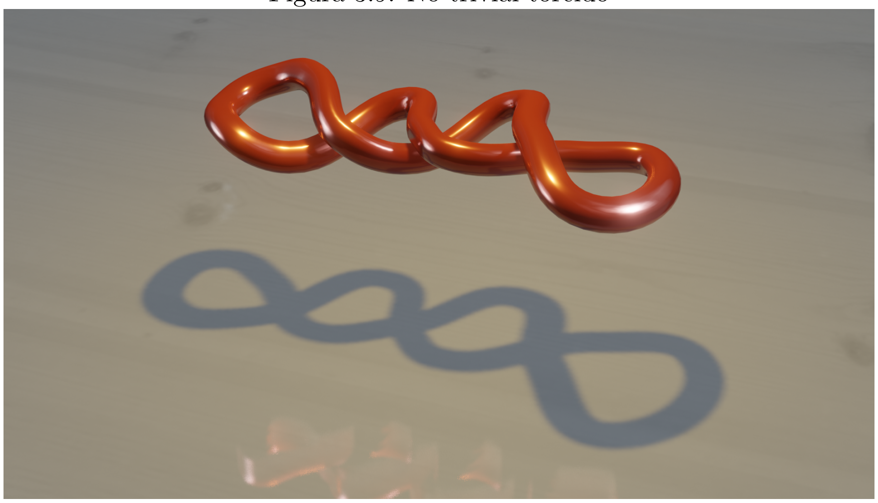


Fonte: Elaboração dos autores (2021).

É fácil ver que o nó trivial tem número de cruzamentos zero e que qualquer outro nó tem numero de cruzamentos ≥ 3, logo é fácil de distinguir o nó trivial dos outros nós.

Caso eu mexa com o meu nó de modo a obter um número mínimo de cruzamentos, o que obtermos é o seguinte;

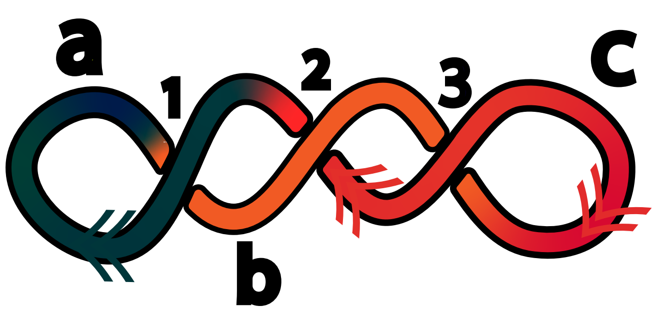
Figura 3.9: Nó trivial torcido



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Com ele torcido podemos calcular o seu Polinômio de Alexander, olhemos agora só para o seu diagrama, e seguindo os passos do algorítimo obtemos;

Figura 3.10: Diagrama do nó trivial torcido.



Fonte: Elaboração dos autores (2021).

Como temos 3 cruzamentos, obtemos 3 equações;

1. $a - tb - (1-t)a = 0$
2. $c - ta - (1-t)b = 0$
3. $b - tc - (1-t)c = 0$

Vamos colocarmos na tabela, como fizemos no nó Conway;

	a	b	c
1	t	$-t$	0
2	$-t$	$t-1$	1
3	0	1	-1

Colocamos $a = 0$ e descartamos a equação associada ao cruzamento 3, calculando o valor do determinante da matriz, obtemos:

$$\begin{bmatrix} -t & 0 \\ t-1 & 1 \end{bmatrix} = -t = \delta(t).$$

com isso, para que $\triangle(t) = \triangle(t^{-1})$ e $\triangle(1) = +1$, multiplicamos $\delta(t)$ por $-t^{-1}$;

$$\triangle(t) = -t^{-1}(-t) = 1.$$

Como vocês podem ver o resultado do Polinômio de Alexander dos dois nós são idênticos, mas como vimos anteriormente isso não garante que os dois nós são equivalentes, ou seja, será que eu consigo sair do meu nó **Trivial** e chegar no nó **Conway** por meio de uma isotopia ambiente ou movimentos de Reidemeister? Só saberemos se tentarmos!

Existem ainda dezenas de invariantes dos nós que já foram descobertas e que ainda serão, os dois que apresentei nesta monografia digamos que seja só aponta do "Iceberg", esperamos que este trabalho possa contribuir para a difusão do tema entre estudantes e professores da Matemática e de outras áreas

3.2 Construindo um Código computácional

Nos capítulos e seções anteriores nós aprendemos um pouco do que é um nó e também dois invariantes,

Bibliografia

[**CRS**] Oziride Manzoli Neto, *Teoria dos Nós*, 2º Colóquio da Região Sudeste, 2013.

[**DM**] Débora Carla Blanco Mariano, *Introdução à Teoria de Homotopia: Grupo Fundamental,* 2016.

[**GY**] Garcia; Lequain, Y. *Elementos De Álgebra*, IMPA, 2012.

[**GA**] Gauss, K. F. Zur mathematischen theorie der eletrodynamischen wirkungen. Werke Konigl. Gessell. Wiss. Gottingen, 1833.

[1] Hacon, D. *Introdução à teoria dos nós*. IMPA, 1985.

[**EL2**] Lima, E. *Elementos De Topologia Geral*, Itc, 1976.

[**EL3**] Lima, E. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, IMPA, 2012.

[**MA**] Vilches, M. A. *Topologia Geral: notas*, Departamento de Análise, UERJ.

[**JM**] Munkres, J. *Topology*, Pearson, 2017.