EVALUACIÓN FINAL

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático de un intercambiador de calor unidimensional expresado en EDO es

$-k_1 \dfrac{d^2(u(x))}{dx^2} + c\,u(x) = s(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\}$	(1)

con $u(0) = T_0$ $\qquad\qquad$ $-k_L \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x=L} = f_L$

siendo k_1, k_L, c, $s(x)$, f_L y L datos. Es de interés la siguiente integral

$Ein = \int_0^L \left(\dfrac{du(x)}{dx}\right)^2 dx$	(2)

que representa una *medida global* del problema.

MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta definida por **8 intervalos equidistantes** en el intervalo de [0; L], y usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico,

$K\,\vec{u} = \vec{p}$	(3)

Para $k_1 = k_L = c = 1,\ s(x) = 5,\ f_L = 0, T_0 = 50$ y $L = 8$

resultan

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -1.5 \end{bmatrix} \qquad \vec{p} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ELABORAR y ENTREGAR un código en OCTAVE para RESPONDER justificadamente
las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado).

a- **RESOLVER el sistema (3) usando el método iterativo**, y tomando como
criterio de detención que la *norma infinito del vector residuo* sea menor que 10^{-6}

El vector residuo se define como: $\vec{r} = -K\,\vec{u} + \vec{p}$

GRAFICAR la función *u(x)* en el intervalo de *x* dado por [0; L].

b- **ENTREGAR** los siguientes valores

el valor de ***u(L/2)***= 5.9580 ✓ con 3 decimales

el valor de ***u(L)*** = 5.0282 ✓ con 3 decimales

Usando derivadas primeras numéricas con orden de error 2, centrales siempre que sea posible,
y el método de integración de **SIMPSON MÚLTIPLE**, la integral (2) resulta

Ein= $\int_0^L \left(\dfrac{du(x)}{dx}\right)^2 dx$ = 981.61 ✓ con 2 decimales

c- Una medida global de **CONVERGENCIA** de la solución aproximada obtenida, es posible evaluarla con la *medida global* ***Ein.***
Sabiendo que las soluciones de la integral ***Ein*** para los distintos *N* obtenidas con integración de Simpson Múltiple son las siguientes (considerar la solución para

N	2	4	8	16
$Ein(N)$	552,96	786,35		1027,3

obtener una aproximación de mínimos cuadrados en la forma

$$Em(N) = A + B * \left(\frac{1}{N}\right) + C * \left(\frac{1}{N}\right)^2$$

Resultan: B= -1510.81 ✓ *con 2 decimales; y C=* 690.85 ✓ *con 2 decimales*

Se define el valor de convergencia de *Ein(N)* a

$E_{con} = \lim_{N\to\infty} Em(N)$ = 1133.80 ✓ *con 2 decimales*

*Evaluar el **ErrorGlobal** de la solución aproximada obtenida con **N=8**, mediante*

$ErrorGlobal = \dfrac{abs(Ein(N) - E_{con})}{E_{con}}$ = 0.1342 ✓ con 4 decimales

Elegir un valor (**Tol_EG**) para la tolerancia del *ErrorGlobal*, de modo que la solución obtenida con N=8 intervalos sea aceptable

Tol_EG= 0.14 ✓ con 2 decimales

44 + 47 = 91

Legajo: 14369

Alumno (imprenta): MAXIMO GOMEZ

Especialidad: I Ind

Fecha: 30/07/24

EVALUACIÓN FINAL

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático expresado en EDP es

$$-k_1 \frac{d^2(u(x))}{dx^2} + c\,u(x) = s(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\} \qquad (1)$$

con $u(0) = T_0$ $\qquad -k_L \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=L} = f_L,$ siendo datos $k_1, k_L, c, s(x), f_L$ y L.

MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta de modo que el intervalo [0, L] se divide en 8 sub intervalos de igual longitud. Usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico.

$$K\,\vec{z} = \vec{p} \qquad (2)$$

OBTENER la matriz K y el vector $\vec{p}$ haciendo uso de derivada numérica de orden 2, y de tipo central toda vez que sea posible. Trabajar sabiendo que son datos $k_1, k_L, c, s(x), f_L$ y L. 20/ 15

$K =$ En hoja $\qquad \vec{p} =$ En hoja

ESTABLECER justificadamente la equivalencia entre las componentes del vector $\overrightarrow{z(t)}$, los datos y la función incógnita $u(x)$ en todo el intervalo [0, L] 5/ 5

El **Método de JACOBI** resuelve un sistema de ecuaciones algebraicas de la forma $A\,\vec{x} = \vec{b}$.

JUSTIFICADAMENTE seleccionar las opciones correctas de las siguientes afirmaciones:

La fórmula de recurrencia del algoritmo del método de Jacobi es

$$\vec{x}_{k+1} = T\,\vec{x}_k + \vec{c}$$

y posible expresarla en la forma:

$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + D^{-1}\{-A\,\vec{x}_k + \vec{b}\}$	$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + D^{-1}\{+A\,\vec{x}_k + \vec{b}\}$
$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - D^{-1}\{-A\,\vec{x}_k + \vec{b}\}$	Ninguna de las demás opciones es correcta

20

siendo D una matriz diagonal cuyos elementos son los elementos de la diagonal principal de A.

La convergencia del método de Jacobi está asegurada siempre que:

la matriz A sea simétrica	Verdadero	Falso	✓
la matriz T tenga radio espectral menor a 1	Verdadero	Falso	×
la matriz A sea estrictamente diagonal dominante	Verdadero	Falso	✓
la matriz T norma infinito menor a 1	Verdadero	Falso	✓
la matriz A tenga radio espectral menor a 1	Verdadero	Falso	✓

5/

Mal usadas las condiciones de borde

↳ Extremo izq. porque la incorpora inicia[illegible] en la seg. ecuación pero luego la conside[illegible] en la definición de K.

↳ Extremo derecho porque tiene ~~[illegible]~~ mal la ecu[illegible] de la derivada asimétrica

La equivalencia de los vectores sería correcta salvo por lo anteriormente expuesto + la no consideración que x varía para cada posición

1

Cálculo Numérico Final

Máximo Gomez

Modelo Matemático

$$-K_1 \frac{d^2u(x)}{dx^2} + c\, u(x) = s(x)$$

$u(0) = T_0$ $\qquad\qquad$ $-K_L \frac{du(L)}{dx} = F_L$

Modelo Numérico

Se expreso solución con 8 subintervalos con mum
$\Delta x = L/8$

$$\begin{array}{ccccccccc} [\,0 & 1L/8 & 2L/8 & 3L/8 & 4L/8 & 5L/8 & 6L/8 & 7L/8 & L\,] \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 \end{array}$$

Expreso entonces en cada punto

$x = 1L/8$, $\quad -\frac{K_1}{\Delta x^2}\left[\underset{T_0}{\cancel{u_1}} - 2u_2 + u_3\right] + c\, u_2 = s(x)$ Depende de la posición

$$= \left(\frac{2K_1}{\Delta x^2} + c\right) u_2 + \left(-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right) u_3 = s(x) + \frac{K_1}{\Delta x^2} T_0$$

$x = 2L/8$

$$-\frac{K_1}{\Delta x^2}\left[u_2 - \overset{2}{\cancel{3}}u_3 + u_4\right] + c\, u_3 = s(x)$$

[redacted]

$$u_2\left[-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right] + u_3\left[\frac{2K_1}{\Delta x^2} + c\right] + u_4\left[\frac{-K_1}{\Delta x^2}\right] = s(x)$$

$x = 3L/8$

$$u_3\left[-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right] + u_4\left[\frac{2K_1}{\Delta x^2} + c\right] + u_5\left[-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right] = s(x)$$

Así sucesivamente

$x = 6L/8$

$$-\frac{K_1}{\Delta x^2}\left(u_6 - 2u_7 + u_8\right) + c\,u_7 = S(x)$$

$$u_6\left[-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right] + u_7\left[\frac{2K_1}{\Delta x^2} + c\right] + u_8\left[-\frac{K_1}{\Delta x^2}\right]$$

Para el último usamos derivada primera hacia atrás

$$u_9' = -\frac{F_L}{K_L} = \left(3u_9 - 4u_8 + u_7\right)\frac{1}{\Delta x^2}$$ Debería ser $\frac{1}{2\Delta x}$

Entonces la ecuación

$$K\vec{z} = \vec{f}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & \frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{2k_1}{\Delta x^2}+c & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_1}{\Delta x^2} & \frac{3k_1}{\Delta x^2} & -\frac{k_1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta x^2} & -\frac{4}{\Delta x^2} & \frac{3}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

con $\Delta x = \frac{L}{8}$

Calculo Numérico Final

Máximo Gomez

Y p es

$$p = \begin{bmatrix} T_0 + \\ S(x) + T_0 \frac{k_1}{\Delta x^2} \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ \text{[redacted]} - \frac{F_L}{K_L} \end{bmatrix}_{9\times 1} = \begin{bmatrix} T_0 \\ S(x) + T_0 \cdot \frac{k_1}{\Delta x^2} \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ S(x) \\ - \frac{F_L}{K_L} \end{bmatrix}$$

Si reemplaza la condicion de borde la segunda fila debería estar completa

x depende de la posición

La equivalencia entre ambos es:

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}$$

Siendo cada u el valor en el anterior intervalo

Siendo estos también

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(L/8) \\ u(2L/8) \\ u(3L/8) \\ u(4L/8) \\ u(5L/8) \\ u(6L/8) \\ u(7L/8) \\ u(L) \end{bmatrix}$$

Metodo de Jacobi

a) La recurrencia sale desde el sistema

$$\bar{A}x = \bar{b}$$

Donde $A = C + D$ y se despeja

$$D x_{n+1} + C x_n = \bar{b}$$

$$D \bar{x}_{n+1} = -C \bar{x}_n + \bar{b}$$

$$\bar{x}_{n+1} = \underbrace{-D^{-1}C}_{T} \bar{x}_n + \underbrace{D^{-1}\bar{b}}_{\vec{c}}$$

Puedo expresar

$$T = -D^{-1}C = -AD^{-1}(A-D)$$

$$= -D^{-1}A + I$$

Así

[redacted]

$$x_{n+1} = I x_n - D^{-1}A x_n + D^{-1}\bar{b}$$

$$= x_n + D^{-1}(-A x_n + b)$$

Así obteniendo respuesta

b) Habíamos estudiado el error de Jacobi

$x_s = T x_s + \bar{c}$ $\qquad$ $x_{n+1} = T x_s + c$

Si restabamos podíamos expresar el error

$\varepsilon_{n+1} = T \varepsilon_n$ $\qquad$ $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - x_s$

Para que el error se fuese disminuyendo al avanzar, era necesario un A est. diagonal dom. o por T con norma infinito menor a 1