EVALUACIÓN FINAL

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático de deformaciones de una membrana circular ante variaciones de presión, expresado en EDP es

$$-T\left[\frac{\partial^2(u(r,t))}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial(u(r,t))}{\partial r}\right]+m\cdot\frac{\partial^2(u(r,t))}{\partial t^2}=p\cdot g(t)$$	(1)

para cualquier $r \in \{r \in R: \quad 0 \leq r \leq L\}$. Además, se debe cumplir que

para todo t $\quad \left.\frac{\partial(u(r,t))}{\partial r}\right\|_{r=0}=0 \quad$ y $\quad u(r,t)\|_{r=L}=0$	(2)

T, m, p y L son constantes datos, y g(t) una función conocida. Es de interés la siguiente integral

$$V(t)=\int_0^L u(r,t)\,2\,\pi\,r\,\,dr$$	(3)

que evalúa el volumen entre la configuración deformada de la membrana y el plano original.

MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta de modo que el intervalo [0, L] *se divide en* ***4 sub intervalos de igual longitud****. Usando derivadas numéricas centrales, toda vez que sea posible, y siempre reglas de derivación con orden de error 2, se obtiene el siguiente modelo numérico,*

$$M\cdot\frac{d^2(\overrightarrow{z(t)})}{dt^2}+\left(\frac{T}{\Delta r^2}\cdot K\right)\cdot\overrightarrow{z(t)}=\vec{f}\cdot g(t)$$	(2)

OBTENER la matriz K y el vector $\vec{f}$ haciendo uso de derivadas numéricas centrales de orden 2 toda vez que sea posible. Trabajar sabiendo que T, m, p y L son constantes datos, y g(t) una función conocida.

$K=$ En hoja $\qquad M=\begin{bmatrix} m & 0 & 0\\ 0 & m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix} \quad \vec{f}=\begin{bmatrix} p\\ p\\ p\end{bmatrix}$

10 ✗ 5
5+5 ✓10

ESTABLECER justificadamente la equivalencia entre las componentes del vector $\overrightarrow{z(t)}$, los datos y la función incógnita $u(r,t)$ en todo el intervalo [0, L]

10 ✓10

La derivada primera asimétrica por tres puntos es

$f'_s=(1/(2h))\cdot[-3\cdot f_s+4\cdot f_{s+1}-1\cdot f_{s+2}]$

ENCONTRAR la expresión de su ERROR DE TRUNCAMIENTO LOCAL

~~10~~ 0

$E_{TL}=$

En base a ello, contestar

¿cuál es el orden del error 2

~~5~~ 0

¿hasta qué grado polinómico no se comete error al aplicar dicha regla de derivación?

~~5~~ 0

grado 2.

Fecha:

EVALUACIÓN FINAL

MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático que describe las oscilaciones libres de "una membrana circular" expresado en EDO es

$$-T\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)-\omega^2\ m\,\varphi(r)=0 \qquad \text{si } r\in\{r\in R: 0\le r\le L\} \tag{1}$$

con $\left.\frac{d\varphi}{dr}\right|_{x=0}=0$; $\varphi(L)=0$ y los siguientes datos L=100; T=10000 y m=0.8. La forma modal está dada por la función $y=\varphi(r)$, y la frecuencia natural es ω.

Una medida de la energía elástica es:

$$EInt=\int_0^L\left\{T\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 2\,\pi\,r\right\}dr \tag{2}$$

MODELO NUMÉRICO

Al plantear $y=\varphi(r)$ como una solución aproximada dada por una función discreta de **(N+1) puntos equidistantes** en el intervalo [0; L] de la variable independiente "r", dicho intervalo queda subdividido en **N segmentos iguales de longitud Δr** cada uno. Usando derivada numérica central con error de orden dos, se obtiene el siguiente modelo numérico,

$$(K-\omega^2 M\ )\vec{z}\ =\ \vec{0} \tag{3}$$

La matriz K es tri-diagonal y cuadrada de orden (N-1) por (N-1); es decir con coeficientes todos nulos salvo las tres diagonales principales. Para **N=6 segmentos iguales de longitud Δr** resulta que

$$K=\frac{T}{\Delta r^2}\begin{bmatrix}+4/3 & -4/3 & 0 & 0 & 0\\ -3/4 & +2 & -5/4 & 0 & 0\\ 0 & -5/6 & +2 & -7/6 & 0\\ 0 & 0 & -7/8 & +2 & -9/8\\ 0 & 0 & 0 & -9/10 & +2\end{bmatrix} \quad M=m\,I_5,$$

siendo I_5 la matriz identidad de orden 5

SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

1-PROGRAMAR en OCTAVE, para N=6, ENCONTRAR la solución con el **Método de Potencia Inversa** cuando se cumpla que

$$abs(\rho_{k+1}-\rho_k) < \boldsymbol{tolerancia}=\mathbf{1\,E-3} \qquad \text{siendo } \rho_{k+1}=\frac{\langle\overrightarrow{z^{(k+1)}},\ \overrightarrow{x^{(k)}}\rangle}{\langle\overrightarrow{x^{(k)}},\ \overrightarrow{x^{(k)}}\rangle}$$

Siendo el valor ρ_k una aproximación del mayor autovalor según el método de la Potencia en la iteración k-ésima. Donde el vector $\overrightarrow{x^{(k)}}$ tiene norma uno; y el vector $\overrightarrow{z^{(k+1)}}$ se origina con la fórmula de recurrencia del método de la potencia. Con $\langle\vec{a},\vec{b}\ \rangle$ se indica producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Y ENTREGAR

el número de iteraciones necesarias para obtener dicha convergencia: IterNec

el menor autovalor ω^2

y su autovector asociado $\vec{z}$, expresado con norma infinito 1

$\vec{z}=$

2-CONVERGENCIA en función del número de segmentos N

Las soluciones de los modelos numéricos (3) dependen de la cantidad **de segmentos iguales de longitud Δr** en que se divide el intervalo de [0; L]. Para cada cantidad de segmentos N, el orden de las matrices es (N-1). Así se han obtenido las siguientes soluciones del autovalor según la cantidad **de segmentos iguales** N

N	6	12	18	24	30
$\omega^2 = Frec(N)$	Usar el valor obtenido antes 7,1769	7.1918	7.2067	7.2119	7.2143

a-APROXIMAR CON MINIMOS CUADRADOS la siguiente función, usando los datos de la tabla anterior

$$Frec(N) = A + B \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^2$$

ENTREGAR

$A = \boxed{7,1719}$ $B = \boxed{1.5817 \times 10^{-3}}$

b-CALCULAR Y ENTREGAR el valor de convergencia de $Frec(N)$ **calculado como**

$$CON\_Frec = \lim_{N \to \infty} Frec(N)$$

$CON\_Frec = \boxed{}$

c-ELEGIR JUSTIFICADAMENTE el menor número de intervalos $\boldsymbol{Ne}$ de modo que sea posible asegurar que la diferencia de $Frec(N)$ para un determinado número N, respecto de su valor de convergencia, sea menor a 1% de su valor de convergencia.

$$abs|Frec(N) - (CON\_Frec)| < 0{,}01\,(CON\_Frec)$$

Con los datos disponibles, el menor $\boldsymbol{Ne}$ es: $\boxed{}$