# Evaluación FINAL

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático para la "ecuación de la cuerda vibrante" expresado en EDP es

| | |
|---|---|
| $-T\dfrac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\dfrac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\}$ | (1) |

con $u(0,t) = 0$ $\quad u(L,t) = 0$ $\quad$ y $\quad u(x,0) = 0$ $\quad$ y $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = seno(\frac{\pi x}{L})$

Para un instante $t_k$ cualquiera son de interés las siguientes integrales

| | | |
|---|---|---|
| $Cin(t_k) = \dfrac{m}{2}\displaystyle\int_0^L \left(\dfrac{\partial u(x,t_k)}{\partial t}\right)^2 dx$ | $Ein(t_k) = \dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^L \left(\dfrac{\partial u(x,t_k)}{\partial x}\right)^2 dx$ | (2) |

que son respectivamente la energía cinética ($Cin(t_k)$) y la energía interna ($Ein(t_k)$), que sumadas constituyen la energía mecánica ($Em(t_k)$) del sistema dinámico, que permanece constante para todo instante, por tratarse de un sistema homogéneo.

## MODELO NUMÉRICO

Se plantear una solución aproximada con una función discreta de 7 **puntos equidistantes** en el intervalo de [0; L], de forma tal que se usen las siguientes equivalencias

| $x = 0$ | $x = \Delta x$ | $x = 2\Delta x$ | $x = 3\Delta x$ | $x = 4\Delta x$ | $x = 5\Delta x$ | $x = L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(0,t)$ | $u(\Delta x,t)$ | $u(2\Delta x,t)$ | $u(3\Delta x,t)$ | $u(4\Delta x,t)$ | $u(5\Delta x,t)$ | $u(L,t)$ |
| | z(1,t) | z(2,t) | z(3,t) | z(4,t) | z(5,t) | |

y usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico,

| | |
|---|---|
| $M\,\dfrac{d^2(\vec{z})}{dt^2} + K\,\vec{z} = \vec{0}$ | (3) |

con L=60; T=100 y m=5

resultan $K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $M = 5\,I_5$. Con $I_5$ la matriz Identidad de 5x5..

EXPRESAR los valores iniciales para el sistema (3) en base a los datos del Modelo Matemático.

ELABORAR y ENTREGAR un código en OCTAVE para calcular las siguientes consignas

a- RESOLVER el sistema EDO usando el método de diferencia central con Dt=0.1,
y GRAFICAR la función u(L/2, t) en el intervalo de t dado por [0; 50]

b- ENTREGAR los siguientes valores solución en y GRAFICAR la función u(L/2, t) en el intervalo de t dado por [0; 50]

b- ENTREGAR los siguientes valores solución en tk=47.5

el valor de u(L/2, tk)=

-9.7702

✕ con 4 decimales

el valor de v(L/2, tk)=

-2.86581

✕ con 5 decimales

el valor de $Ein(t_k)$=

0.01

✕ con 3 decimales

siendo v(L/2, tk) la derivada primera respecto a t de la función u(L/2,t).

c- Una medida global del error de la solución aproximada es comprobar que la energía cinética máxima,
se transforma en energía interna máxima, en los instantes en que la energía cinética se anula.

$$Cin(t_0 = 0) = \frac{m}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u(x, t_k)}{\partial t}\right)^2 dx \quad =$$

75.000

✓ con 3 decimales

Entonces, en la situación analizada

$$ErrorGlobal = \frac{abs(Ein(t_k) - Cin(t_0 = 0))}{Cin(t_0 = 0)} \quad =$$

0.01

✕ con 3 decimales

FINAL 5

50 + 40 + (10)

*Universidad Nacional de Cuyo*
*Facultad de Ingeniería*

*Cálculo Numérico y Computación*

Alumno (imprenta): Maciel Romero

Legajo: 14399

Fecha: 25/06/24

Especialidad: Ing. Industrial

# EVALUACIÓN FINAL

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático para la "ecuación de la cuerda vibrante" expresada en EDP es

$$-T\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\} \qquad (1)$$

con $u(0,t) = 0$ $\quad u(L,t) = 0$ $\quad$ y $\quad u(x,0) = 0$ $\quad$ y $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = seno(\frac{\pi x}{L})$

## MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta de modo que el intervalo [0, L] se divide en 4 sub intervalos de igual longitud. Usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico,

$$M\,\frac{d^2(\overrightarrow{z})}{dt^2} + K\,\overrightarrow{z(t)} = \vec{0} \qquad (2)$$

**OBTENER** las matrices $K$ y $M$ haciendo uso de derivada numérica de orden 2, y de tipo central toda vez que sea posible. Trabajar sabiendo que L, T y m son datos

$$K = -\frac{T}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

20

**ESTABLECER** la equivalencia entre las componentes del vector $\overrightarrow{z(t)}$ y la función incógnita $u(x,t)$

$$\overrightarrow{z(t)} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \\ \ddot{u}_3(t) \end{bmatrix}$$

5

**ESTABLECER** los valores iniciales para el sistema EDO dado por (2)

$$\overrightarrow{z_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y\ \overrightarrow{v_0} = \frac{dz}{dt}\Big|_0 = \begin{bmatrix} sen\left(\frac{\pi\,\Delta x}{L}\right) \\ sen\left(\frac{\pi\,2\Delta x}{L}\right) \\ sen\left(\frac{\pi\,3\Delta x}{L}\right) \end{bmatrix}$$

5

$\Delta x = \frac{L}{4}$ se puede evaluar.

**DEMOSTRAR** el término de error de truncamiento local de la derivada segunda central que vincula tres puntos de una función discreta.

En base a dicho termino de error, afirmar hasta qué grado polinómico es posible usar la derivada segunda central que vincula tres puntos sin cometer error. Justificar la respuesta

20

# EVALUACIÓN FINAL

## MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático para la "ecuación de la cuerda vibrante" expresado en EDP es

$$-T\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \le x \le L\} \qquad (1)$$

con $u(0,t) = 0$ $\quad u(L,t) = 0$ $\quad$ y $\quad u(x,0) = 0$ $\quad$ y $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = seno(\frac{\pi x}{L})$

Para un instante $t_k$ cualquiera son de interés las siguientes integrales

$$Cin(t_k) = \frac{m}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t_k)}{\partial t}\right)^2 dx \qquad Ein(t_k) = \frac{T}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t_k)}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (2)$$

que son respectivamente la energía cinética ($Cin(t_k)$) y la energía interna ($Ein(t_k)$), que sumadas constituyen la energía mecánica ($Em(t_k)$) del sistema dinámico, que permanece constante para todo instante, por tratarse de un sistema homogéneo.

## MODELO NUMÉRICO

Se plantear una solución aproximada con una función discreta de 7 puntos equidistantes en el intervalo de [0; L], de forma tal que se usen las siguientes equivalencias

| $x = 0$ | $x = \Delta x$ | $x = 2\Delta x$ | $x = 3\Delta x$ | $x = 4\Delta x$ | $x = 5\Delta x$ | $x = L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(0,t)$ | $u(\Delta x,t)$ | $u(2\Delta x,t)$ | $u(3\Delta x,t)$ | $u(4\Delta x,t)$ | $u(5\Delta x,t)$ | $u(L,t)$ |
| | z(1,t) | z(2,t) | z(3,t) | z(4,t) | z(5,t) | |

y usando derivada numérica central, se obtiene el siguiente modelo numérico,

$$M\,\frac{d^2(\vec{z})}{dt^2} + K\,\vec{z} = \vec{0} \qquad (3)$$

con L=60; T=100 y m=5

resultan $K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $M = 5\,I_5$. Con $I_5$ la matriz Identidad de 5x5,.

EXPRESAR los valores iniciales para el sistema (3) en base a los datos del Modelo Matemático.

ELABORAR y ENTREGAR un código en OCTAVE para calcular las siguientes consignas

a- RESOLVER el sistema EDO usando el método de diferencia central con Dt=0.1,
y GRAFICAR la función u(L/2, t) en el intervalo de t dado por [0; 50]

## Calculo Numérico

### Final: Primera Mesa

EDP $0 \leq x \leq L$

$$-T\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + m\,\frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0$$

$u(0,t)=0 \quad u(L,t)=0 \quad u(x,0)=0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$

## Modelo Numerico

4 subintervalos $\rightarrow$ 5 puntos $[0;L]$ es $[0;\ L/4;\ 2L/4;\ 3L/4;\ L]$

En ⊗

$$\underset{0}{u_0}\quad \underbrace{u_1\quad u_2\quad u_3}\quad \underset{0}{u_4}$$

$$m\frac{d^2u_1}{dt^2} = \frac{T}{\Delta x^2}\left[\underset{0}{\cancel{u_0}} - 2u_{\cancel{2}\,1} + u_{\cancel{3}\,2}\right]$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$z''(t) = \begin{bmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \end{bmatrix} = m^{-1} \cdot \frac{T}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{z(t)}$$

## Respuestas

a)

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{T}{\Delta x^2} \qquad M = m\,I$$

c)

$$z(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad z'(0) = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\cdot\frac{L}{4}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\cdot\frac{2L}{4}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{L}\cdot\frac{3L}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

## Demuestro

La derivada segunda central es

$$\frac{F(t+\Delta t) - 2F(t) + F(t-\Delta t)}{\Delta_x^2} + O(h^2)$$

Para demostrar, planteo Taylor ad. y atrás

$$F(t+\Delta t) = F(t) + \Delta t\, F'(t) + \frac{1}{2} F''(t)\, \Delta t^2 + \frac{1}{6} F'''(t)\, \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$F(t-\Delta t) = F(t) - \Delta t\, F'(t) + \frac{1}{2} F''(t)\, \Delta t^2 - \frac{1}{6} F'''(t)\, \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

Sumo ambas, rosadas se van

$$F(t+\Delta t) + F(t-\Delta t) = 2F(t) + F''(t)\, \Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

$$F''(t) = \frac{1}{\Delta t^2}\left[F(t+\Delta t) - 2F(t) + F(t-\Delta t)\right]$$

## Programado

Formula recurrencia

$$\frac{M}{\Delta_t^2}\left[u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right] + K\, u_n = 0$$

$$\frac{M}{\Delta_t^2} u_{n+1} = \text{[redacted]} \left[\frac{2M}{\Delta_t^2} - K\right] u_n + \left[-\frac{M}{\Delta_t^2}\right] u_{n-1}$$

Taylor

$$F(n-1) = F(n) - \Delta t\, F'(t)$$

FINAL 5

Final Mesa 1
Curso : Cálculo Numérico
Legajo : 14360
Fecha : Julio 2024
Autor : Maximo Gomez
Mail : facu1294@gmail.com

# 1. Programación

```
%------------------------------------
%
% FINAL MESA 1
%
%------------------------------------

clc
clear all
close all
%Anoto datos
L=60;
dx=10;
x=0:dx:L;
nx=length(x);
m=5;
T=100;

%Armo matrices
K=zeros(5,5);
M=zeros(5,5);
for i=1:5
    K(i,i)=2;
    M(i,i)=5;
endfor
for i=1:4
    K(i,i+1)=-1;
    K(i+1,i)=-1;
endfor

%Armo matriz t
dt=0.1;
t=0:dt:50;
nt=length(t);


%DIFERENCIA CENTRAL
u0=zeros(1,nt);
z=zeros(5,nt);
%punto anterior por taylor
```

```
%calculo vector derv inicial
for i=1:nx-2
    dz(i)=sin( (pi*x(i+1))/(L) );
endfor
dz
z(:,1)=-dt*dz; %taylor
minv=inv(M);

for i=2:nt-1
    z(:,i+1)= (dt^2*minv) * ( ((M*(2/dt^2) - K)*(z(:,i))) + ((M*(-1/dt^2))*
endfor


%Armo matriz u
u=[u0;z;u0];

%------------------
%INTEGRALES
%------------------
tk=47.5;
%Integral 1
%-Derivo respecto de t
dudt=zeros(7,nt);
dudt(:, 1)= (-3*u(:, 1)+4*u(:, 2)-1*u(:, 3))/(2*dt);
dudt(:, nt)= (3*u(:, nt)-4*u(:, nt-1)+1*u(:, nt-2))/(2*dt);
for i=2:nt-1
  dudt(:, i)= (u(:,i+1)-u(:,i-1))/(2*dt);
endfor
%-Elevo al cuadrado
for i=1:7
  dudtk(i)= dudt(i, tk/dt)^2;
endfor
%Integro trapecios
Im=ones(nt,1);
Im=dx*Im;
Im(1)=0.5;
Im(nt)=0.5;
I=0;
for i=1:nx
  I=I+Im(i)*dudtk(i);
endfor
IntegralT=I*m/2

%Integral 2
%-Derivo respecto de x
dudx=zeros(nx,1);
dudx(1)= (-3*u(1, tk/dt)+4*u(2, tk/dt)-1*u(3, tk/dt))/(2*dx);
dudx(nx)= (3*u(nx, tk/dt)-4*u(nx-1, tk/dt)+1*u(nx-2, tk/dt))/(2*dx);
for i=2:nx-1
  dudx(i)= (u(i+1, tk/dt) -u(i-1, tk/dt))/(2*dx);
```

```
endfor
%-Elevo al cuadrado
for j=1:7
  dudx(i)= dudx(i)^2;
endfor
%Integro trapecios
Im=ones(nt,1);
Im=dx*Im;
Im(1)=0.5;
Im(nt)=0.5;
I=0;
for i=1:nx
  I=I+Im(i)*dudx(i);
endfor
IntegralX=I*(T/2)

%PLOTEO
figure(1)
hold on;
title('Solucion␣u(L/2,␣t)');
plot(t, x(3,:), '-r');
xlabel('t');
ylabel('Funcion␣solucion');
hold off;
```