VALOR MÉDIO E EFICAZ

KAZUO NAKASHIMA

kazuo@unifei.edu.br

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ITAJUBÁ

INSTITUTO DE ENGENHARIA DE SISTEMAS E TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO

RESUMO

Medição de tensão (Volt) e corrente (Ampere) é uma atividade de rotina para qualquer eletricista. Contudo a sua indispensável ferramenta de trabalho, o MULTÍMETRO, digital ou analógico, pode realizar medições incorretas em sistemas onde a forma de onda não é senoidal. Estas medições incorretas podem provocar especificações inadequadas de cabos, fusíveis, chaves, medidores, dispositivos eletrônicos, dissipadores de calor, etc.

Qualquer multímetro mede corretamente, na escala DC, o valor médio da tensão ou corrente. Porém, na escala AC, poucos multímetros, geralmente digitais, medem corretamente o valor eficaz de ondas não senoidais.

OBJETIVOS

Ao final desta unidade você estará apto a:

1. Reconhecer a diferença entre valor médio, eficaz ou *rms*, eficaz real (*true rms*).
2. Especificar o multímetro adequado para medição de tensão e corrente não senoidal.
3. Calcular o valor médio e eficaz de tensão e corrente, a potência dissipada, o fator de crista e o fator de forma de ondas periódicas não senoidais.

1 – VALOR MÉDIO (Ave)

O Valor Médio (*Average - Ave*) de uma onda periódica de TENSÃO, CORRENTE E POTÊNCIA (e outras grandezas físicas) está relacionado com a componente contínua desta onda e o interesse por este valor está relacionado com o resultado após a "filtragem" do sinal.

O valor médio representa uma grandeza contínua F_{Ave} que tem a mesma área sob a curva que a onda periódica, no mesmo intervalo T.

Graficamente, o valor médio pode ser representado como *"área sob a curva, no intervalo T, dividido pelo período T"*. O período T é o intervalo de tempo de repetição da onda periódica. T=1/f onde f é a freqüência.

$$F_{Ave} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \quad dt$$

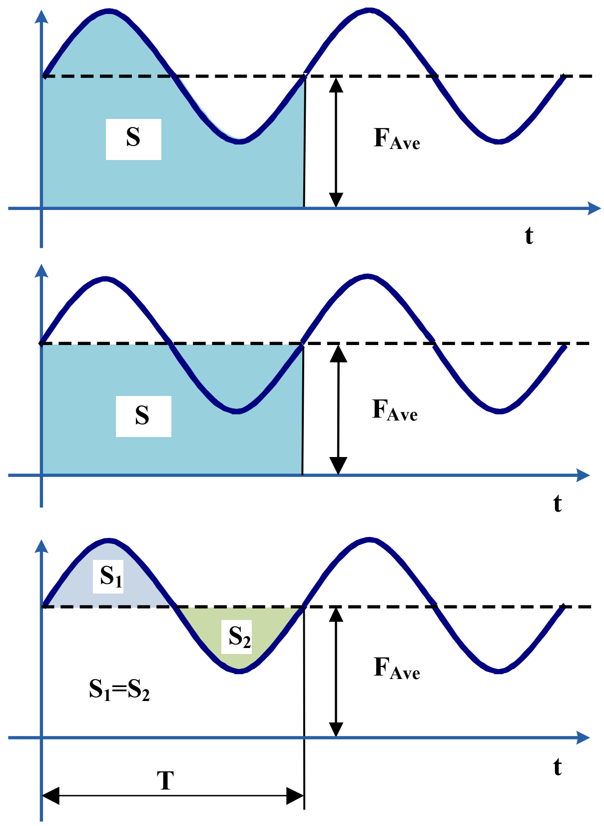


Figura 1- Valor médio

2 – VALOR EFICAZ (*RMS*)

Valor eficaz ou *RMS* (*Root Mean Square*) de uma onda periódica de CORRENTE e TENSÃO está relacionado com o calor dissipado em uma resistência.

A clássica fórmula de potência permite obter o ***valor médio*** da potência dissipada na resistência.

$$P_{(Ave)} = \frac{V_{RMS}^2}{R} = R\,.I_{RMS}^2$$

O valor eficaz representa o valor de uma tensão (ou corrente) contínua que produz a mesma dissipação de potência que a tensão (ou corrente) periódica.

A potência instantânea dissipada em uma resistência é

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R.i^2(t)$$

e a potência média dissipada é

$$P_{(Ave)} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t).dt = \frac{1}{T}\int_0^T R.i^2(t).dt$$
$$= R\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t).dt$$

Igualando as duas equações de potência média obtemos a equação abaixo, origem do termo RMS - *Root Mean Square* (Raiz Quadrada da Média do Quadrado)

$$I_{(RMS)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t).dt}$$
$$V_{(RMS)} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t).dt}$$

Onda senoidal

A Figura 2 mostra a relação entre o valor EFICAZ e a Potência Média dissipada em uma resistência de 1Ω para uma onda senoidal.

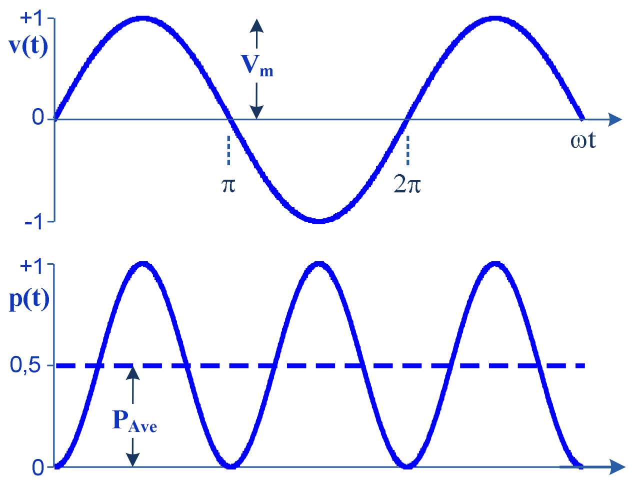


Figura 2- Valor eficaz ou RMS e potência.

$$v(t)=V_m.sen(\omega t) \qquad \omega=2\pi f$$

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{(V_m.sen(\omega t))^2}{R}$$
$$= \frac{V_m^2(1\text{-}cos(2\omega t))}{2R}$$

$$P_{Ave} = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

$$V_{RMS} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

3 - SOMA DE CORRENTES

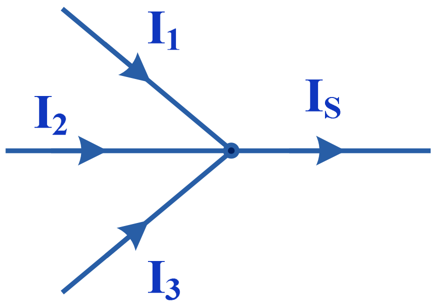


Figura 3- Soma de corrente.

Para valor médio, o resultado da soma é simplesmente uma soma aritmética.

$$I_{S(Ave)} = I_{1(Ave)} + I_{2(Ave)} + I_{3(Ave)} + ...$$

Para o valor eficaz o resultado não é tão simples assim; a equação abaixo além de mais complicada é valida somente se as correntes forem funções ortogonais.

$$I_{S(RMS)} = \sqrt{I_{1(RMS)}^2 + I_{2(RMS)}^2 + I_{3(RMS)}^2 + ...}$$

duas funções são ortogonais se o valor médio da multiplicação (produto) entre estas duas funções for zero.

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t).\ \ f_2(t)\ \ .dt = 0$$

Esta propriedade será utilizada para calcular o valor médio e eficaz de ondas periódicas complexas. Neste processo de cálculo dividiremos esta onda complexa em vários intervalos de tempo e calcularemos o valor médio e eficaz de cada intervalo.

4 – Fator de Forma (K_f)

$$K_f = \frac{I_{RMS}}{I_{Ave}}$$

Este fator está relacionado com taxa de utilização ou de aproveitamento de um componente eletro-eletrônico. Se este fator for mínimo (Kf=1 em corrente contínua constante) significa que a potência útil (trabalho realizado) do equipamento será realizado com a menor corrente possível. Sua aplicação está mais relacionada com conversores ac/dc e com medidores average sensing.

5 - Fator de Ondulação - *Ripple*

$$Ripple = \frac{V_{AC(RMS)}}{V_{Ave}}$$

Este fator é a relação entre o valor eficaz somente da componente alternada e a componente contínua, Vac/Vdc, e indica a presença de ondulação em uma fonte de corrente contínua.

6 – Fator de Crista (K_P)

$$K_p = \frac{I_{Pico}}{I_{RMS}}$$

Este fator indica o grau de distorção de uma onda. Pode nos informar sobre o fator de utilização também e é muito importante para especificar medidores *True RMS*

Uma corrente com fator de crista muito alto significa que o componente deve ser especificado com corrente muito maior que outro com fator de crista menor, pelo mesmo trabalho realizado. Observe na Figura 4 que, para mesma corrente de pico, quanto menor o valor de K_P maior é a corrente eficaz.

7 – DHT – Distorção Harmônica Total

$$DHT = \frac{\sqrt{I_{2RMS}^2 + I_{3RMS}^2 + I_{4RMS}^2 + \ldots + I_{\infty RMS}^2}}{I_{1RMS}} = \frac{\sqrt{\sum_{h=2}^{h=\infty} I_{hRMS}^2}}{I_{1RMS}}$$

I_{1RMS}=Valor eficaz da fundamental h1
I_{hRMS}=Valor eficaz da harmônica h

Este fator indica, com mais precisão, o grau de distorção de uma onda ou a quantidade de harmônicas. Uma onda senoidal pura sem distorção apresenta DHT=0

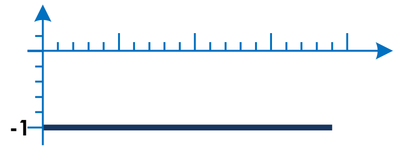
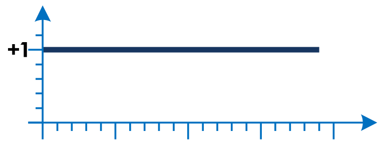
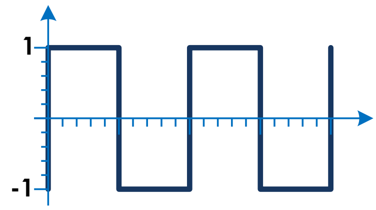
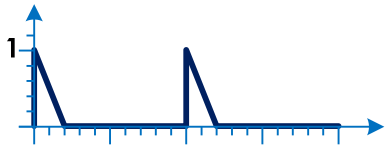
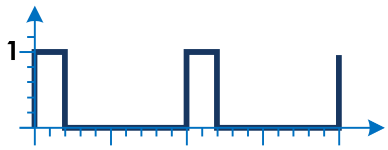
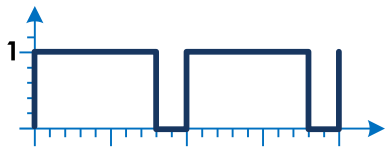
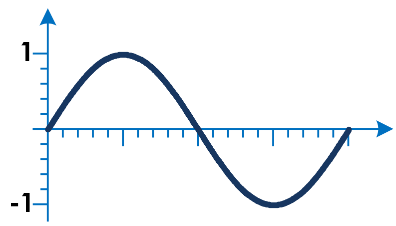
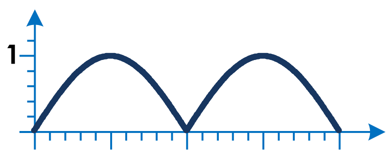
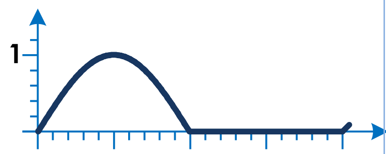
	Kf=1 Kp=1 V_{Ave}=-1 V_{RMS}=1 Vac=0
	Kf=1 Kp=1 V_{Ave}=+1 V_{RMS}=1 Vac=0
	d=0,5 Kp=1 V_{Ave}=0 V_{RMS}=1 Vac=1
	d=0,2 Kf=2,582 Kp=3,873 V_{Ave}=0,1 V_{RMS}=0,258 Vac=0,238
	d=0,2 Kf=2,236 Kp=2,236 V_{Ave}=0,2 V_{RMS}=0,447 Vac=0,4
	d=0,8 Kf=1,118 Kp=1,118 V_{Ave}=0,8 V_{RMS}=0,894 Vac=0,4
	Kp=1,4142 V_{Ave}=0 V_{RMS}=0,707 Vac=0,707
	Kf=1,106 Kp=1,4142 V_{Ave}=0,639 V_{RMS}=0,707 Vac=0,309
	Kf=1,571 Kp=2 V_{Ave}=0,318 V_{RMS}=0,5 Vac=0,385

Figura 4- Fator de forma e de crista

8 – Medidores Average Sensing ou Average Responding

Estes medidores medem corretamente o valor médio de qualquer forma de onda na escala DC. Porém, na escala AC, o valor eficaz é medido corretamente <u>somente</u> para onda SENOIDAL perfeita.

O sensor ou transdutor destes multímetros respondem somente a tensão contínua filtrada, portanto ao valor médio. Para medir o valor eficaz de um sinal alternado senoidal, este sinal é retificado em onda completa, filtrado e amplificado por um fator 1,1107 e então convertido para digital.

A relação entre o valor eficaz de uma onda senoidal e o valor médio desta onda retificada em onda completa é

$$\frac{V_{RMS}}{\left|v(t)\right|_{Ave}} = \frac{V_m/\sqrt{2}}{2V_m/\pi} = 1{,}1107$$

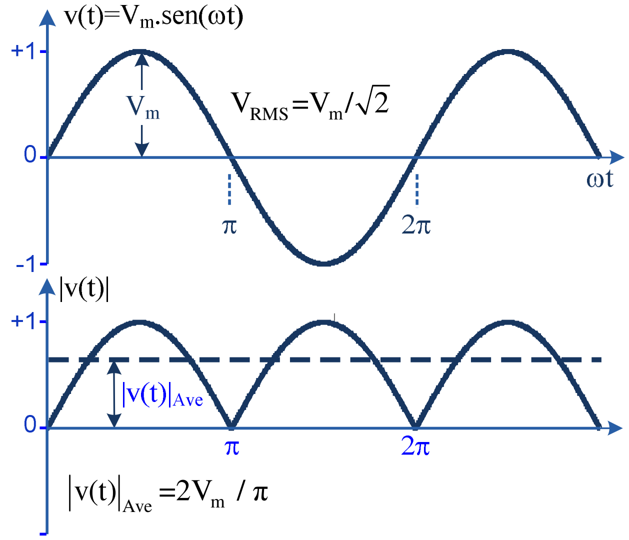


Figura 5 - Fator 1.11 dos multímetros Average Sensing.

Qualquer forma de onda não senoidal perfeita será medido incorretamente, inclusive ondas senoidais retificadas.

Para ondas retangulares o multímetro *Averge Sensing* pode apresentar um erro sistemático entre -33,3% e +11%, respectivamente para ciclo de trabalho d=0,1 e d=0,5.

9 – Medidores *True RMS*

Estes multímetros "Eficaz Verdadeiro", obviamente muito mais caros, medem corretamente o valor EFICAZ de qualquer forma de onda desde que o fator de crista Kp e a freqüência seja menor que o especificado pelo fabricante.

Menos que 10% dos medidores disponíveis comercialmente são True RMS e custam de 5 a 10 vezes mais em relação aos medidores *Average Sensing*. A maioria dos osciloscópios digitais e sistemas de aquisição de dados medem corretamente o valor eficaz de ondas não senoidais.

10- Acoplamento AC

Devido ao acoplamento AC adotado na maioria dos multímetros na escala AC, é necessário fazer a medição nas duas escalas, DC e AC, e utilizar a seguinte equação para obter o valor eficaz total, RMS_{AC+DC}.

$$V_{RMS} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{ac}^2}$$

Os exemplos seguintes mostram o mecanismo de operação dos multímetros <u>com acoplamento AC</u> na escala AC.

Onda senoidal

O sinal apresentado na Figura 6 é uma superposição de corrente alternada com corrente contínua, muito comum na eletrônica.

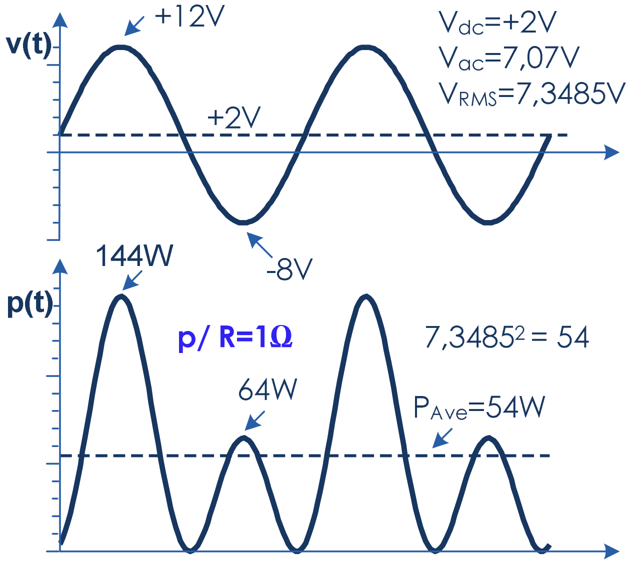


Figura 6 – Sinais AC+DC

$$v(t) = V_{dc} + V_m\,\mathrm{sen}(\omega t) = 2 + 10\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

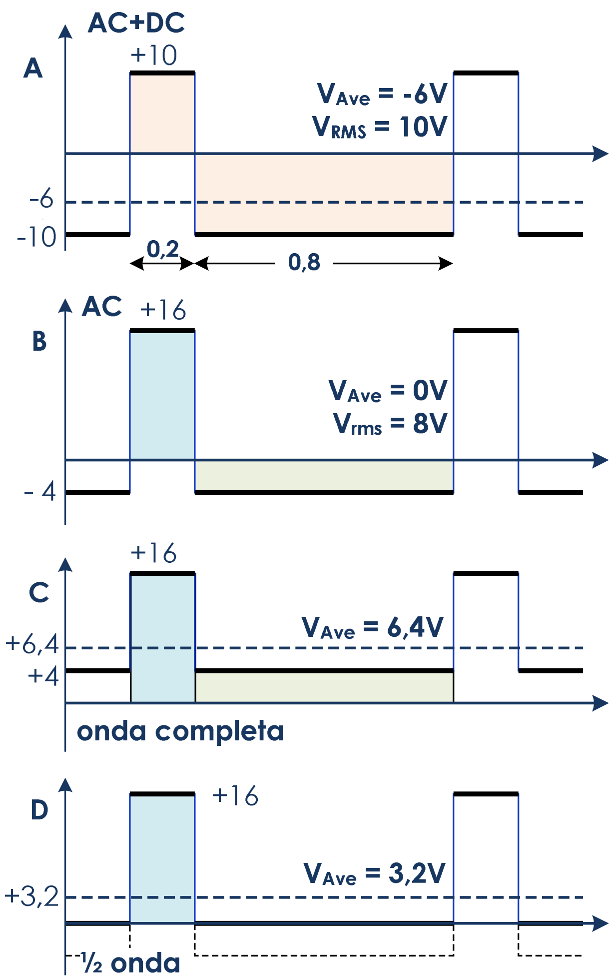
$$Vdc = +2\ V \qquad Vac = 10/\sqrt{2} = 7{,}07\ V$$

$$V_{RMS} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{ac}^2} = \sqrt{(2)^2 + (7{,}07)^2} = 7{,}3485\ V$$

Onda não senoidal

A onda retangular de 20Vpp, *Duty Cycle* de 0,2 e *Off Set* de 0V, apresentado na Figura 7(a), é simétrica na amplitude (+10; -10) mas não no tempo (d=0.2).

O valor médio desta onda é V_{Ave}= V_{dc}=-6 V e o valor eficaz é V_{RMS}=10 V.



Vdc	Vac	V_{RMS}	Vac(?)	Erro
- 6	8	10	7,108	- 11,14%

Figura 7: Onda Retangular d=0,2

Nos multímetros que utilizam acoplamento AC, a componente contínua é bloqueada e a onda realmente medida pelo multímetro é componente AC apresentada na Figura 7(b).

Esta onda, obviamente com valor médio igual a zero, apresenta outro valor eficaz que será o valor indicado pelo multímetro *True RMS na escala AC*, V_{ac}=8 V.

Para obter o valor eficaz RMS_{AC+DC} devemos utilizar a seguinte equação:

$$V_{RMS} = \sqrt{V_{dc}^2 + V_{ac}^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10\,V$$

No multímetro *Average Sensing* com acoplamento AC, esta componente AC é retificada em onda completa, como mostra a Figura 7(c), e o valor médio é multiplicado pelo fator 1,1107, resultando Vac(?)=6,4x1,1107=7,1084 V, um erro de -11,14% em relação ao multímetro *True RMS AC*.

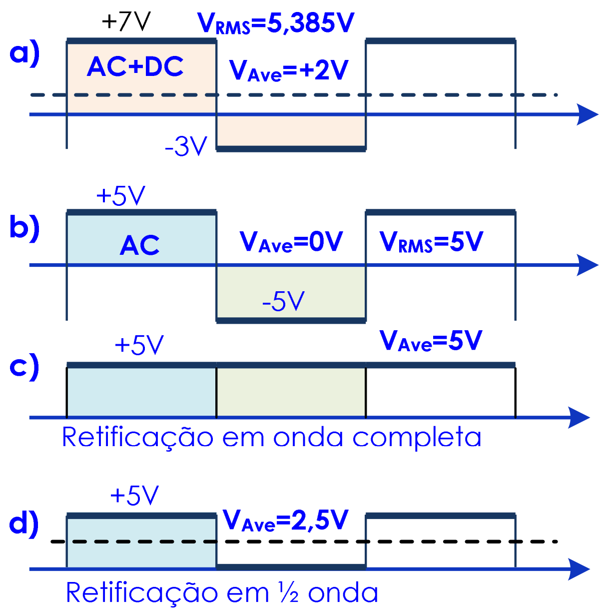
Para facilitar os cálculos podemos fazer a retificação em meia onda e multiplicar o valor médio pelo fator 2,2214=2x1,1107 como mostra a Figura 7(d). Vac(?)=3,2 x 2,2214 = 7,1084 V.

O valor eficaz da componente AC, que é o valor indicado pelo multímetro True RMS com acoplamento AC, pode ser calculado pela seguinte equação.

$$Vac = \sqrt{V_{RMS}^2 - V_{Ave}^2}$$

A Figura 8(a) apresenta uma onda retangular de 10Vpp, *Duty Cycle* de 0,5 e *Off Set* de +2V.

O Multímetro *Average Sensing* na escala AC indicará Vac(?)=1,1107x5=2,2214x2.5=5,5535V, um erro de +11,07%.



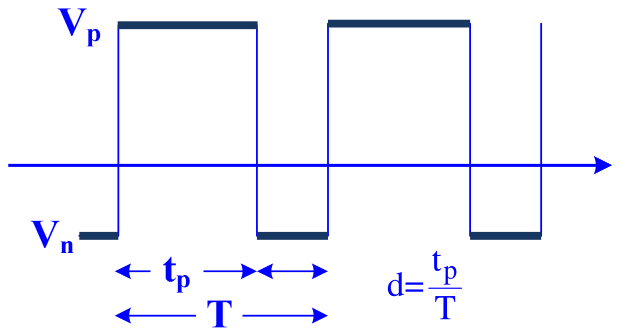
Vdc	Vac	V_{RMS}	Vac(?)	Erro
+2	5	5,385	5,553	+11,07%

Figura 8: Onda Quadrada d=0,5

Apenas como curiosidade, para ciclo de trabalho d=0,2824 este multímetro indicará o valor correto.

11 – ONDA RETANGULAR

Ondas retangulares de correntes são comuns em conversores tiristorizados ac/dc e dc/dc. Tensões retangulares são encontrados em conversores dc/dc (chopper) e dc/ac (inversores).



$$V_{(Ave)} = V_p.d + V_n.(1-d)$$

$$V_{(RMS)} = \sqrt{V_p^2.d + V_n^2.(1-d)}$$

Figura 9 – Onda retangular genérica.

Pulso Retangular

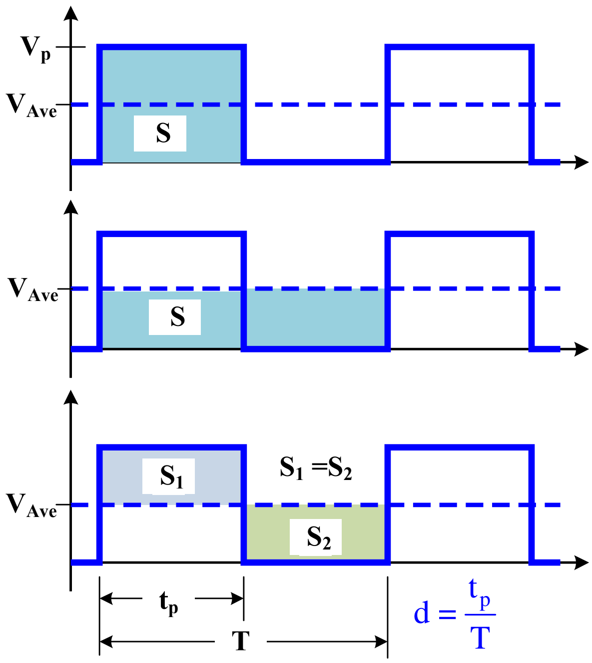


Figura 9 – Pulso retangular unipolar.

Calcular o valor médio e eficaz de uma onda retangular UNIPOLAR é relativamente fácil pois depende apenas do valor de pico V_p e da relação entre a largura do pulso t_p e o período T.

A relação tp/T=d é denominado ciclo de trabalho ou relação marca/espaço (*duty cycle*).

Pulso Retangular

$I_{(Ave)} = d\, I_p \qquad d = t_p/T$

$I_{(RMS)} = \sqrt{d}\,|I_p|$

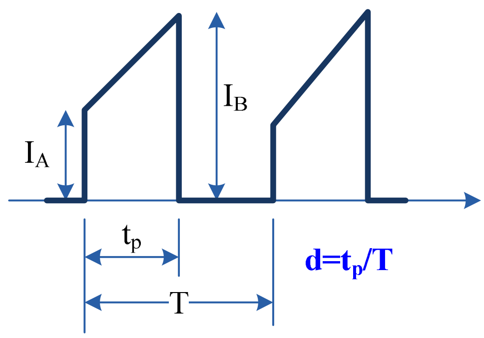
$\frac{V_{Ave}}{Vp}$	$\frac{V_{RMS}}{Vp}$	$\frac{Vac}{Vp}$	$\frac{Vac(?)}{Vp}$	*erro* (?)
d	$\sqrt{d}$	$\sqrt{d(1-d)}$	2.22d(1-d)	%
0,01	0,1000	0,0995	0,0220	-77,90
0,05	0,2236	0,2179	0,1055	-51,59
0,1	0,3162	0,3000	0,1999	-33,36
0,2	0,4472	0,4000	0,3554	-11,14
0,3	0,5477	0,4583	0,4665	+1,80
0,4	0,6325	0,4899	0,5331	+8,83
0,5	0,7071	0,5000	0,5554	+11,07
0,6	0,7746	0,4899	0,5331	+8,83
0,7	0,8367	0,4583	0,4665	+1,80
0,8	0,8944	0,4000	0,3554	-11,14
0,9	0,9487	0,3000	0,1999	-33,36
0,95	0,9747	0,2179	0,1055	-51,59
0,99	0,9949	0,0995	0,0220	-77,90

$$\frac{Vac(?)}{Vac} = 2,2214\sqrt{d(1-d)} \qquad \text{erro}\,\% = \left(\frac{Vac(?)}{Vac} - 1\right)100$$

12 – PULSO TRAPEZOIDAL

Pulsos senoidais, triangulares, trapezoidais e retangulares são encontrados em circuitos de comutação como fontes chaveadas, chopper, inversores, etc.

Pulsos retangulares e triangulares são casos particulares da onda trapezoidal.

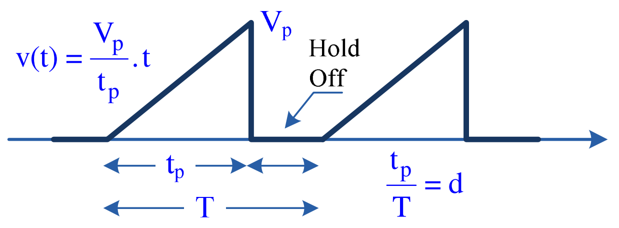


$$I_{Ave} = \frac{d}{2}(I_A + I_B)$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{d}{3}\left(I_A^2 + I_A I_B + I_B^2\right)}$$

Figura 10 – Pulso Trapezoidal.

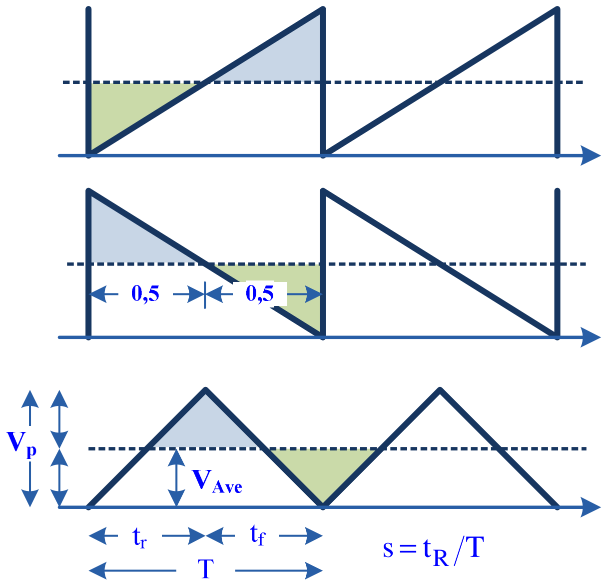
13 - PULSO TRIANGULAR



$$V_{(Ave)} = V_p \frac{d}{2} \qquad V_{(RMS)} = V_p \sqrt{\frac{d}{3}}$$

Figura 11 – Pulso Triangular (assimétrico)

Esta onda será simétrica somente para d=1 (*Hold Off*=0), quando o valor médio passa exatamente no meio dos valores pico a pico.



$$V_{(Ave)} = \frac{V_p}{2} \qquad V_{(RMS)} = \frac{V_p}{\sqrt{3}}$$

Figura 12 – Onda Triangular (simétrica)

Para ondas triangular e dente de serra os valores médio e eficaz independem da simetria subida/descida.

Observe que o ciclo de trabalho, na concepção semiciclo positivo/semiciclo negativo, em relação ao valor médio ***Ave***, é sempre 0,5.

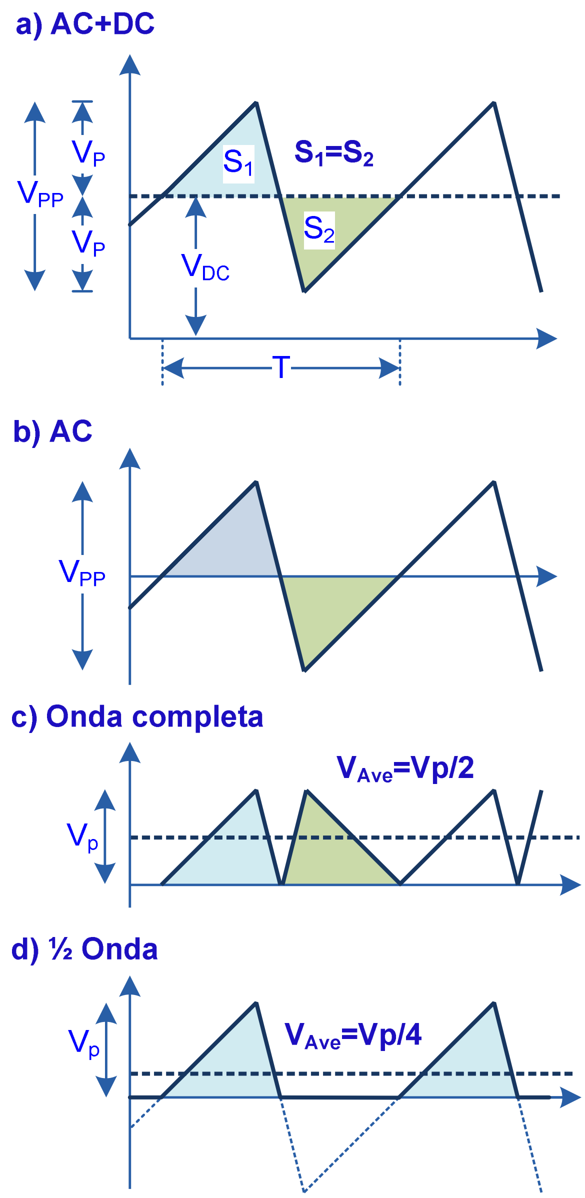
DMM – Average Sensing

Para ondas simétricas, como a onda triangular apresentada na Figura 12, o multímetro *Averge Sensing* apresenta, na escala AC, um erro sistemático de -3,87% independente da simetria, tempo de subida/tempo de descida.

$$V_{ac(True\ RMS)} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} = \frac{V_{pp}}{2\sqrt{3}}$$

$$V_{ac\ (Ave Sense)} = 1.11 \frac{V_p}{2} = 1.11 \frac{V_{pp}}{4}$$

$$\frac{V_{ac\ (Ave Sense)}}{V_{ac\ (True RMS)}} = 0{,}9612 \ \ldots\ \mathit{Erro} = -3{,}87\%$$

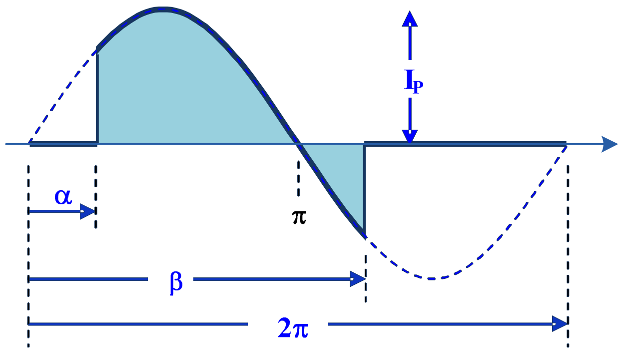


$$V_{dc} = V_{(Ave)} \qquad V_{ac} = \frac{V_p}{\sqrt{3}} = \frac{V_{pp}}{2\sqrt{3}}$$

Figura 13 – Onda Triangular (simétrica)

14 – Onda Senoidal

Ondas parcialmente senoidais são encontrados em conversores ac/dc tiristorizados, nos reguladores ac/ac tiristorizados e em circuitos ressonantes.



$$\frac{I_{Ave}}{I_P} = \left[\frac{\cos(\alpha)\ -\ \cos(\beta)}{T}\right]$$

$$\frac{I_{RMS}}{I_P} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(\beta-\alpha) + \mathrm{sen}(2\alpha) - \mathrm{sen}(2\beta)}{T}}$$

α, β e T em radianos - rad

Figura 14- Onda senoidal

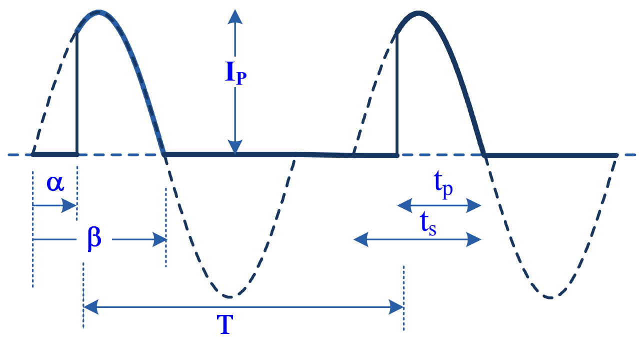
O cálculo do valor médio e eficaz de uma onda parcialmente senoidal é mais complicado porque envolve cálculo de seno e coseno e requer o cuidado de converter os ângulos geralmente em GRAUS para RADIANOS.

O período T é o intervalo de repetição da onda parcialmente senoidal e pode ser maior, igual ou menor que 2π. T=π ou 2π são observados em sistemas monofásicos. T=π/3 ou π/6 são observados em sistemas trifásicos. T>π são observados em circuitos ressonantes (pulsos senoidais).

Os ângulos α e β estão relacionados com o início (cruzamento de zero) da senoidal correspondente.

Nos conversores tiristorizados monofásicos o ângulo α coincide com o ângulo de disparo, também denominado α. Nos conversores trifásicos, por outro lado, o valor destes dois ângulos são diferentes, motivo de muita atenção.

Pulso Senoidal Recortado



$$d=\frac{t_s}{T}=\frac{\pi}{T} \qquad \lambda=\frac{t_p}{t_s}=\frac{t_p}{\pi} \qquad t_S=\pi$$

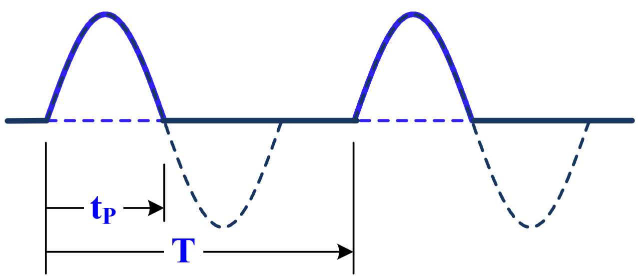
$$\frac{I_{Ave}}{I_P} = d\left[\frac{\cos(\alpha)\ -\ \cos(\beta)}{\pi}\right]$$

$$\frac{I_{RMS}}{I_P} = \frac{\sqrt{d}}{2}\sqrt{\frac{2(\beta-\alpha) + \mathrm{sen}(2\alpha) - \mathrm{sen}(2\beta)}{\pi}}$$

$$\frac{I_{Ave}}{I_p} = \frac{d}{\pi}[1+\cos((1-\lambda)\pi)]$$

$$\frac{I_{RMS}}{I_p} = \frac{\sqrt{d}}{2}\sqrt{\left(2\lambda+\frac{\mathrm{sen}((1-\lambda)2\pi)}{\pi}\right)}$$

Pulso Senoidal

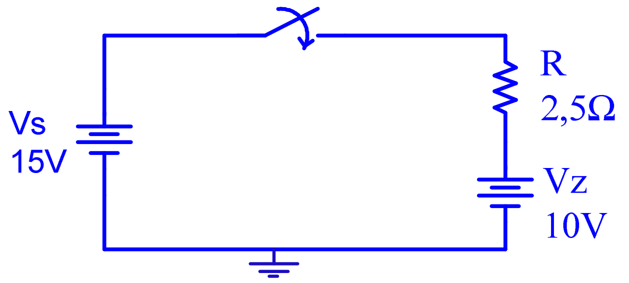


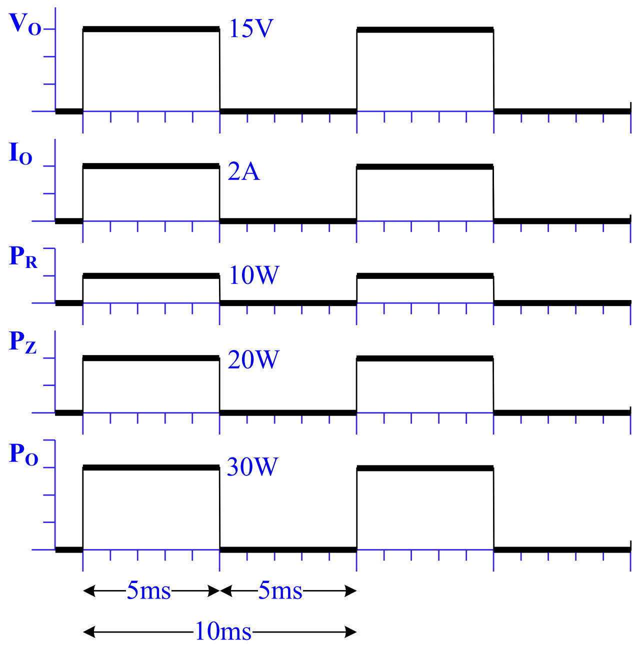
$$I_{Ave}=I_P\frac{2.d}{\pi} \qquad d=\frac{t_p}{T}$$

$$I_{RMS}=I_p\sqrt{\frac{d}{2}}$$

Exemplo 1: Potência Média

A chave eletrônica opera na freqüência de 100Hz com ciclo de trabalho d=0,5.





f = 100Hz   T = 10ms t_p = 5ms   d = 0,5

A potência média fornecida por uma fonte de tensão contínua ou dissipada no diodo zener é proporcional ao Valor Médio da corrente.

$$\boxed{P_{S(Ave)} = V_S\, I_{(Ave)}}$$

Para o resistor a potência média é proporcional ao quadrado do Valor Eficaz da corrente.

$$\boxed{P_{R(Ave)} = R\ I^2_{RMS}}$$

Portanto a potência (média) dissipada na carga (R+Vz) é:

$$\boxed{P_{Ave} = R\ I^2_{RMS} + V_Z\ I_{Ave}}$$

Quando a chave está fechada circulará uma corrente instantânea de:

$$I_p = \frac{(V_s - V_z)}{R} = \frac{(15 - 10)}{2{,}5} = 2A$$

A potência instantânea é

$$P_{R\,pico} = R \cdot I^2_{pico} = 2{,}5\ .\ 2^2 = 10W$$

$$P_{Z\,pico} = V_Z \cdot I_{pico} = 10\ .\ 2 = 20W$$

$$P_{Total\,pico} = P_R + P_Z = 10 + 20 = 30W$$

$$P_{S\,pico} = V_S\ .\ I_{S\,pico} = 15\ .\ 2 = 30W$$

Quando a chave estiver aberta, a potência dissipada é zero. Portanto, a potência média fornecida pela fonte de tensão Vs, que é igual à potência média dissipada na carga (R+Vz), será:

$$P_{Total(Ave)} = d.P_{Total(pico)}$$
$$= 0{,}5\ .\ 30$$
$$= 15W$$

Utilizando os valores médio e eficaz da corrente:

$$I_{(Ave)} = d.I_p = 0{,}5\ .\ 2 = 1A$$

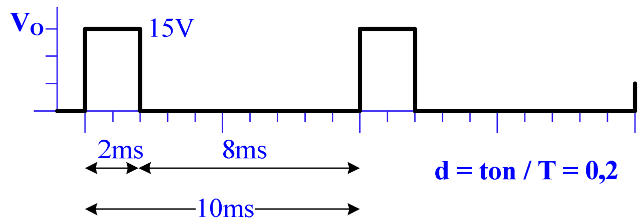
$$I_{(RMS)} = \sqrt{d}.Ip = \sqrt{0{,}5}\ .\ 2 = 1{,}4142\ A$$

$$P_{O(Ave)} = R\ I^2_{RMS} + V_Z\ I_{Ave}$$
$$= 2{,}5\ .\ 1{,}4142^2 + 10.1 = 15W$$

$$P_{S(Ave)} = V_S\ I_{Ave} = 15.1 = 15W$$

Este é o processo para calcular a potência dissipada no diodo e no tiristor. Os valores da resistência (Rt) e da barreira de potencial (Vt) são fornecidos pelos fabricantes.

Alterando o ciclo de trabalho conseguimos alterar a potência média na carga.



$$I_{(Ave)} = d.I_p = 0{,}2\ .\ 2 = 0{,}4A$$

$$I_{(RMS)} = \sqrt{d}.I_p = \sqrt{0{,}2}\ .\ 2 = 0{,}894\ A$$

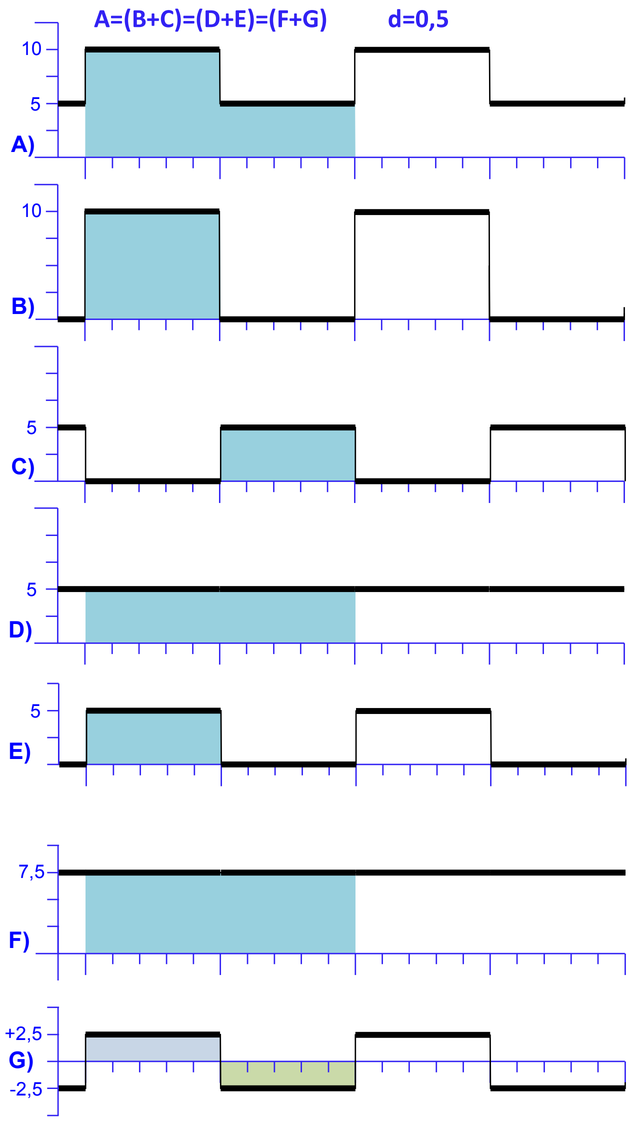
$$P_{O(Ave)} = R\ I^2_{RMS} + V_Z\ I_{Ave}$$
$$= 2{,}5\ .\ 0{,}894^2 + 10.0{,}4 = 6\ W$$

$$P_{S(Ave)} = V_S\ I_{Ave} = 15.0{,}4 = 6\ W$$

Exemplo 2: Ortogonalidade

Duas funções são ortogonais se o valor médio da multiplicação (produto) destas duas funções for zero.

$$\frac{1}{T}\int_0^T f_1(t).\ \ f_2(t)\ .dt = 0$$



A forma de onda A(t) pode ser decomposta em vários modos.

No primeiro modo decompomos a forma de onda ao longo do tempo tempo A(t)=B(t)+C(t). Como B(t) e C(t) são funções ortogonais, uma vez que o valor médio do produto B(t).C(t) é zero

$B_{RMS}=7{,}071$

$C_{RMS}=3{,}535$

$$A_{RMS}=\sqrt{B_{RMS}^2+C_{RMS}^2}=7{,}905$$

No segundo modo a forma de onda é decomposta na amplitude A(t)=D(t)+E(t). D(t) e E(t) não são funções ortogonais uma vez que as duas funções possuem componente contínua.

$D_{RMS}=5$

$E_{RMS}=3{,}535$

$$\sqrt{D_{RMS}^2+E_{RMS}^2}=6{,}123 \qquad (???)$$

(?) 6,123 não é o valor eficaz de A(t)

Portanto, toda vez que depararmos com uma forma de onda complexa, devemos analisar por partes, divididas ao longo do eixo do tempo.

Outra forma correta de dividir a onda é decompor em componente contínua F(t) e componente alternada G(t). F(t) e G(t) são funções ortogonais porque o valor médio do produto F(t).G(t) é zero.

$$V_{RMS}=\sqrt{V_{dc}^2+V_{ac}^2}=\sqrt{(7{,}5)^2+(2{,}5)^2}=7{,}905\,V$$

Nos multímetros Average Sensing – acoplamento AC a onda G(t) é retificada em onda completa, filtrada, tornando-se uma onda contínua de 2,5 V e então multiplicada pelo fator 1,11. O valor indicado por este tipo de multímetro na escala AC será Vac(?)=2,5 . 1.1107=2,775 V.

Na escala AC o multímetro *True RMS* (AC+DC) indicaria 7,905 V, o multímetro *True RMS (AC)* indicaria 2,5 V e o multímetro *Average Sensing* (AC) indicaria 2,775 V.

$$V_{RMS(AC+DC)}=\sqrt{2{,}5^2+7{,}5^2}=7{,}905V$$

$$Vac=\sqrt{7{,}905^2-7{,}5^2}=\ 2{,}5V$$

Para o valor médio, no entanto, encontraremos o valor corretamente em todos os casos.

$A_{Ave}=B_{Ave}+C_{Ave}=5+2{,}5=7{,}5$

$=D_{Ave}+E_{Ave}=5+2{,}5=7{,}5$

$=F_{Ave}+G_{Ave}=7{,}5+0=7{,}5$

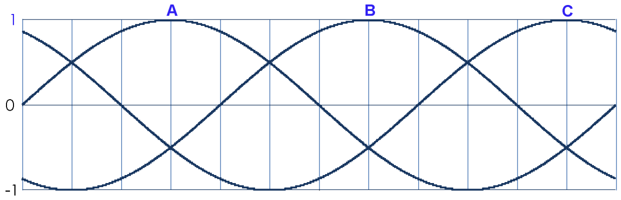
	Vdc	V_{RMS}	Vac	Vac(?)
A	**7,5**	**7,905**	**2,5**	2,776
B	5	7,071	5	5,553
C	2,5	3,535	2,5	2,776
D	5	5	0	0
E	2,5	3,535	2,5	2,776
F	7,5	7,5	0	0
G	0	2,5	2,5	2,776

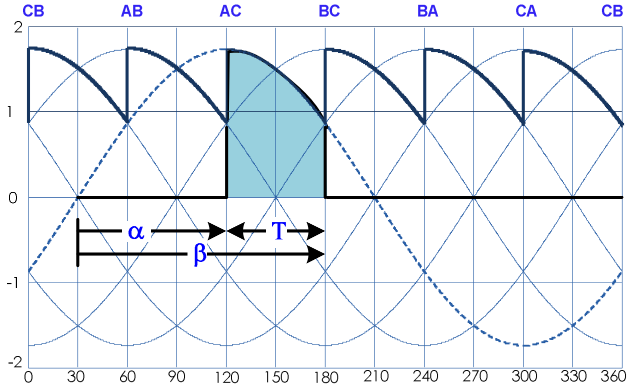
Exemplo 3: Senoidal Trifásico

A tensão retificada de uma ponte tiristorizada trifásica ideal com ângulo de disparo de 30^o é apresentada na figura abaixo.

Este ângulo de disparo é (também) denominado α (alfa) e não deve ser confundido com o ângulo α da fórmula para o cálculo do valor médio e valor eficaz. Existe uma diferença de 60^o entre estes dois ângulos.

Observe que temos 6 pulsos no intervalo correspondente ao período de uma onda senoidal plena. Consequentemente a freqüência destes pulsos, parcialmente senoidal, é 6 vezes maior que a freqüência da rede de alimentação. Por este motivo o período utilizado na fórmula é T=π/3.





Recomendamos a utilização das equações com uma calculadora científica e com os ângulos em radianos.

$\alpha = 90° = \pi/2$ rad

$\beta = 150° = 5\pi/6$ rad

$T = 60° = \pi/3$ rad

$V_{Ave}/V_p = 0.8270$

$V_{RMS}/V_p = 0.8407$

Se, eventualmente, não dispormos de uma calculadora científica, podemos utilizar a tabela da página 12.

Como os valores de I_{Ave}/I_p e I_{RMS}/I_p desta tabela são válidos para β=π, devemos dividir a onda em duas partes.

V1 é o intervalo sombreado em destaque, parte da onda senoidal plena tracejada. V11 é a parte que vai de α até π e V12 é a parte que vai de β até π. V1=V11-V12.

$\beta = \pi, \quad T = 2\pi, \quad \alpha_{11} = 90°, \quad \alpha_{12} = 150°$

$V_{11(av)}/V_p = 0.1592$

$V_{11(rms)}/V_p = 0.3536$

$V_{12(av)}/V_p = 0.0213$

$V_{12(rms)}/V_p = 0.0849$

V1(av)=V11(av) - V12(av)

$V_{1(av)}/V_p = 0.1379$

$V1(rms) = \sqrt{V_{11(rms)}^2 - V_{12(rms)}^2}$

$V_{1(rms)}/V_p = 0.3433$

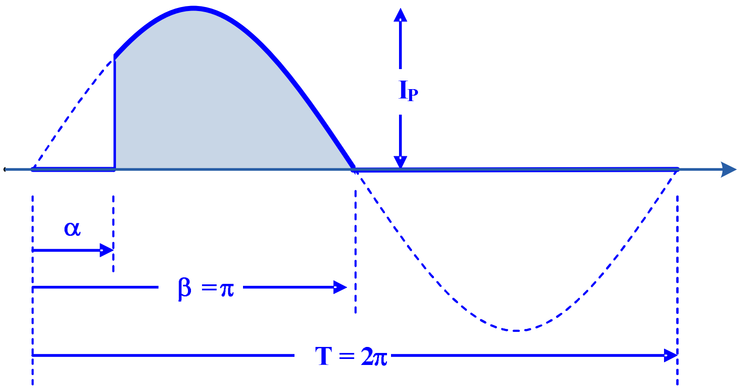
Como são 6 pulsos iguais no intervalo 2π:

$V_{av} = 6 . V_{1(av)} = 6.0{,}1379 = 0{,}8274$

$V_{rms} = \sqrt{6}\, V_{1(rms)} = 2.4495 \,.\, 0.3433 = 0.8409$

As diferenças nos resultados (0.05%) se devem ao número de casas decimais utilizados na tabela.

Um exemplo muito interessante de NÃO ortogonalidade é a corrente no neutro de um sistema trifásico equilibrado: a corrente no neutro é zero apesar de existir corrente (funções não ortogonais) nas três fases.



α					β = π	
GRAU	RADIANO	RADIANO	COS	SEN	I_{Ave}/I_p	I_{RMS}/I_p
0^o	0	0.000	1.000	0.000	0.3183	0.5000
15	π/12	0.262	0.966	0.258	0.3129	0.4991
30	π/6	0.524	0.866	0.500	0.2970	0.4927
45	π/4	0.785	0.707	0.707	0.2717	0.4767
60	π/3	1.047	0.500	0.866	0.2387	0.4485
75	5π/12	1.309	0.259	0.966	0.2003	0.4071
90	π/2	1.571	0.000	1.000	0.1592	0.3536
105	7π/12	1.833	-0.259	0.966	0.1180	0.2903
120	2π/3	2.094	-0.500	0.866	0.0796	0.2211
135	3π/4	2.356	-0.707	0.707	0.0466	0.1507
150	5π/6	2.618	-0.866	0.500	0.0213	0.0849
165	11π/12	2.680	-0.966	0.259	0.0054	0.0306
180	π	3.142	-1.000	0.000	0.0000	0.0000

$$\alpha_{(rad)} = \frac{\pi}{180}\ \alpha_{(graus)} \qquad \alpha_{(graus)} = \frac{180}{\pi}\ \alpha_{(rad)}$$

$\sqrt{2} = 1.4142$	$\sqrt{3} = 1.7321$	$\sqrt{6} = 2.4495$	$\sqrt{12} = 3.4641$
$1/\sqrt{2} = 0.7071$	$1/\sqrt{3} = 0.5774$	$1/\sqrt{6} = 0.4082$	$1/\sqrt{12} = 0.2887$

* *Tabela para ser utilizada quando não temos uma calculadora científica disponível,* $\beta = \pi$.

Multímetros True RMS			
TÉCNICA DE CONVERSÃO	TÉRMICO	DIGITAL	ANALÓGICO
Kp ≤	100:1	20:1	5:1
PRECISÃO	0,01%	0,1%	0,1%
TEMPO DE RESPOSTA	>10 seg.	1-10 seg.	<1 seg.
FREQUÊNCIA	ALTA MHz	BAIXA	MÉDIA 40 KHz
CUSTO	MUITO ALTO	ALTO	BAIXO
APLICAÇÃO	CALIBRAÇÃO	BANCADA	PORTÁTIL

Nota: Os multímetros Beckman RMS-3030 (True RMS AC+DC) e Fluke 8060A (True RMS AC) são utilizados intensivamente no Laboratório de Eletrônica de Potência da UNIFEI desde 1986, quase 30 anos em atividade.

Itajubá, MG, setembro de 2020
2013, 2007, 2005, 2000, 1999