PRINCÍPIOS DE CONTAGEM E PROBABILIDADE

Gustavo Aurélio Prieto

Princípio da Regra da Soma

- Suponha que um evento E possa ocorrer de m1 maneiras e um segundo evento F possa ocorrer de m2 maneiras. Suponha também que ambos os eventos não podem ocorrer simultaneamente e são independentes.
- Então E ou F podem ocorrer de m1 + m2 maneiras.
- Regra da Soma: se os pares de eventos são independentes, logo um dos eventos pode ocorrer de:

$$m1 + m2 + m3 + ... + mn \quad maneiras$$

Exemplo:

- Suponha um curso que tenha três disciplinas de desenvolvimento, quatro disciplinas diferentes de matemática e duas disciplinas diferentes de produção textual.
- De quantas formas diferentes um estudante pode escolher apenas uma disciplina?
- $m = m(D) + m(M) + m(P) = 3 + 4 + 2 = 9$

Princípio da Regra da Multiplicação

- Suponha que um evento E possa ocorrer de m1 maneiras e um segundo evento F possa ocorrer de m2 maneiras.
- Então E e F podem ocorrer de m1 * m2 maneiras.
- Regra da Soma: se os eventos ocorrem um após o outro, logo um dos eventos pode ocorrer de:

$$m1 * m2 * m3 * \ldots * mn \quad maneiras$$

Exemplo:

- Suponha um curso que tenha três disciplinas de desenvolvimento, quatro disciplinas diferentes de matemática e duas disciplinas diferentes de produção textual.
- De quantas formas diferentes um estudante pode escolher uma de cada um dos tipos de disciplinas?
- $m = m(D) * m(M) * m(P) = 3 * 4 * 2 = 24$

Permutações

- Qualquer disposição de um conjunto de n objetos em uma dada ordem é chamada de permutação. Uma disposição de r <= n destes objetos em uma determinada ordem é chamada de "permutação de n objetos tomados r por vez".

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo

- Dado o conjunto de letras Q = {A, B, C, D, E, F}. Encontre o número m de permutações dos seis objetos, tomados 3 por vez.
- Ou seja, determine quantas “palavras de três letras” podem ser encontradas utilizando as seis letras definidas pelo conjunto Q, sem repetição.
- $P(6, 3) = 6 * 5 * 4 = 120$

Probabilidade

- S: espaço amostral
- A: evento do espaço amostral
- n(S): número total de casos possíveis
- n(A): número de casos onde ocorre o evento

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Exemplo

- Suponha um Baralho com quatro naipes: { ♥,♦,♠,♣ }
- Cada naipe possui 13 cartas: {A, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, K, Q, J}
- Número de Cartas do Baralho: 4 * 13 = 52
- Qual a probabilidade de eu retirar uma carta do baralho e ela ser um “A”?

$$\frac{numero \;\; de \;\; A}{total \;\; de \;\; cartas} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

- Qual a probabilidade de eu retirar uma carta do baralho e ela ser de ♣?

$$\frac{numero \;\; de \;\; \clubsuit}{total \;\; de \;\; cartas} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Exemplo

- Qual a probabilidade de eu selecionar uma carta do baralho e ela ser um A de ♣?

$$\frac{numero\ \ de\ \ A\ \ de\ \ \clubsuit}{total\ \ de\ \ cartas} = \frac{1}{52}$$

- Qual a probabilidade de eu selecionar uma carta do baralho que seja um A ou de ♣ ?

$$\frac{numero\ \ de\ \ A\ \ ou\ \ \clubsuit}{total\ \ de\ \ cartas} = \frac{(4-1)+13}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

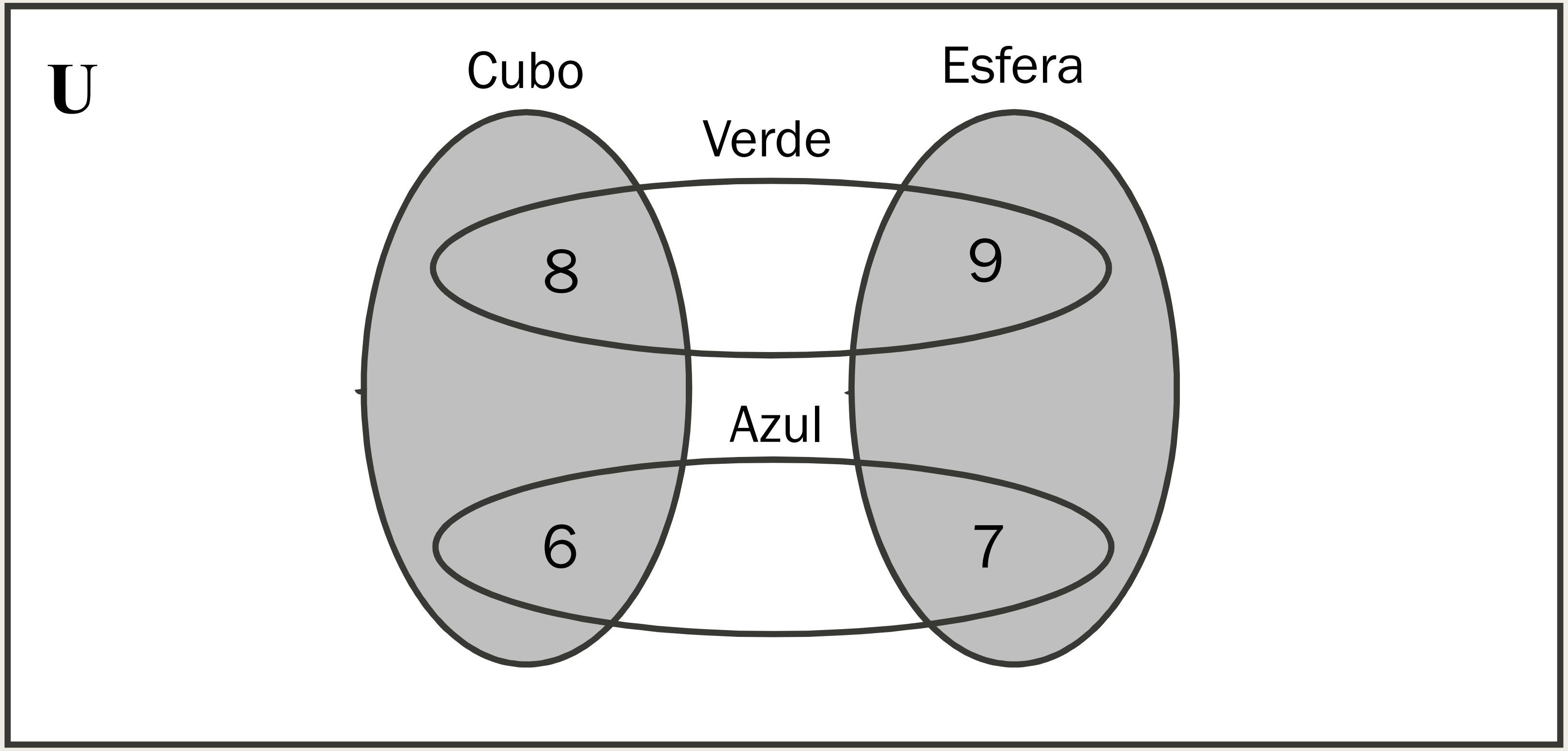
Probabilidade com Diagrama de Venn

Imagine uma caixa com um conjunto de cubos e esferas de diferentes cores. No total temos 30 objetos distribuídos da seguinte forma:

- 8 – Cubos Verdes
- 9 – Esferas Verdes
- 6 – Cubos Azuis
- 7 – Esferas Azuis

Representando este problema através de um Diagrama de Venn.

Probabilidade com Diagrama de Venn



Probabilidade com Diagrama de Venn

- P (Cubo ou Azul) = P(Cubo) + P(azul) – P(Cubo e Azul)

$$P(cubo\ \ ou\ \ azul) = \frac{14}{30} + \frac{13}{30} - \frac{6}{30} = \frac{21}{30}$$

- P(x ou y) = P(x) + P(y) – P(x e y)

Probabilidade Composta de Eventos Independentes

- Para calcular a probabilidade de um evento A e logo em seguida a ocorrência de um evento B. Na condição dos eventos serem independentes, ou seja, a probabilidade de A não afeta a probabilidade de B. Utilizamos a seguinte regra:

$$P(A \ e \ B) = P(A) * P(B)$$

Exemplo:

- Imagine um poliedro regular de seis faces enumeradas de forma a termos os seguintes resultados possíveis: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- O poliedro é perfeitamente regular e balanceado, de forma que a possibilidade de uma face ficar para cima é igual para cada uma das faces.

$$P(1 \ e \ 1) = P(1) * P(1) = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Probabilidade Composta com Eventos Dependentes

- Imagine uma caixa completamente vedada e fosca. Dentro delas estão 4 esferas de cor verde e três esferas de cor azul. As esferas são do mesmo peso e tamanho.
- Uma pessoa pode enfiar a mão dentro da caixa e retirar uma esfera de cada vez. Cada vez que uma esfera é retirada ela não irá ser reposta dentro da caixa.
- Qual a probabilidade de retirar duas esferas da cor verde?

$$P(1^aV\ e\ 2^aV) = 1^aV * 2^aV = \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

Combinação

- Dado o conjunto de letras Q = {A, B, C, D, E, F}. Encontre o número m de combinações dos seis objetos, tomados 3 por vez.
- Ou seja, determine quantas "conjuntos de três letras" podem ser encontradas utilizando as seis letras definidas pelo conjunto Q, sem repetição. Porém a ordem das letras não é relevante.
- A B C = A C B e assim por diante.

- P(6, 3) = 6 * 5 * 4 = 120

Tomando a combinação {ABC} quantas permutações eu consigo obter com estas letras?

- P(3,3) = 3 * 2 * 1 = 6

Então basta dividir P(6,3) por P(3,3)

- C(6,3) = 120 / 6 = 20

Fórmula da Combinação

$$C(n,k) = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Probabilidades em Combinações

- Uma moeda possui dois lados completamente discerníveis, denominados “cara” e “coroa”.
- Em 8 lançamentos sucessivos de uma moeda qual a probabilidade de três destes lançamentos serem “cara”, sem levar em conta a ordem?

Probabilidades em Combinações

$$P(obter\ 3\ caras\ em\ 8\ tentativas) = \frac{C(8,3)}{total\ de\ resultados}$$

$$total\ de\ resultados = 2^8$$

$$C(8,3) = \frac{8!}{3! * (8-3)!} = \frac{8!}{3! * 5!} = 56$$

$$\frac{56}{2^8} = \frac{7}{32}$$