SBVLIFA: Linguagens Formais e Autômatos

Aula 03: Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Bacharelado em Ciência da Computação
Prof. Dr. David Buzatto

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Linguagens Regulares

- Linguagens Regulares

Tipo	Classe de Linguagens	Modelo de Gramática	Modelo de Reconhecedor
0	Recursivamente enumeráveis	Irrestrita	Máquina de Turing
1	Sensíveis ao contexto	Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita limitada
2	Livres de contexto	Livre de contexto	Autômato de pilha
3	**Regulares**	**Linear (direita ou esquerda)**	**Autômato finito**

Linguagens Regulares

- **Relembrando...**
  - **Autômato Finito Determinístico (DFA):** o controle é determinístico, ou seja, **sempre está em um único estado** em qualquer instante;
  - **Autômato Finito Não-Determinístico (NFA):** o controle **pode estar em mais de um estado** em qualquer instante.

Linguagens Regulares
Autômatos Finitos Não-Determinísticos

- A adição do não-determinismo não permite a definição de quaisquer linguagens que não sejam reconhecidas por DFAs;
- O não-determinismo permite "programar" soluções para problemas usando uma linguagem de alto nível, que depois podem ser "compiladas" em DFAs que, por sua vez, podem então ser executados em computadores convencionais;
- Trocando em miúdos, o não-determinismo nos dá mais ferramentas para descrever o autômato finito, facilitando sua definição e então podemos convertê-lo, usando um algoritmo que estudaremos, para um DFA;
- Em relação à terminologia, chamaremos um Autômato Finito Não-Determinístico de NFA.

Linguagens Regulares

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

- Informalmente, a diferença entre DFAs e NFAs é que os NFAs permitem que haja mais de uma transição com o mesmo símbolo partindo de qualquer estado;
- Isso implica justamente na capacidade do controle de execução do autômato estar em mais de um estado ao mesmo tempo, visto que quando um símbolo for lido e duas ou mais transições forem tomadas, chega-se a estados diferentes;
- Em razão disso, a função de transição dos NFAs tem a mesma "cara", ou assinatura, da função de transição dos DFAs, ou seja, ela recebe um estado e um símbolo como entrada, mas com a diferença que ela retorna um conjunto de estados, mesmo que unitário, ao ser executada.

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

- **Definição Formal:**

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- A: autômato finito não-determinístico, uma 5-upla, onde:
  - Q: conjunto finito de estados;
  - Σ: conjunto finito de símbolos de entrada (alfabeto);
  - δ: função de transição, na forma $\delta(q, a) \rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, ou seja, $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$
  - q_0: estado inicial, tal que $q_0 \in Q$
  - F: conjunto de estados finais ou de aceitação, tal que $F \subseteq Q$
- **Obs:** $\mathcal{P}(Q)$ significa todos os subconjuntos de Q. Lê-se "conjunto potência de Q".

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exemplo

- **Para:**

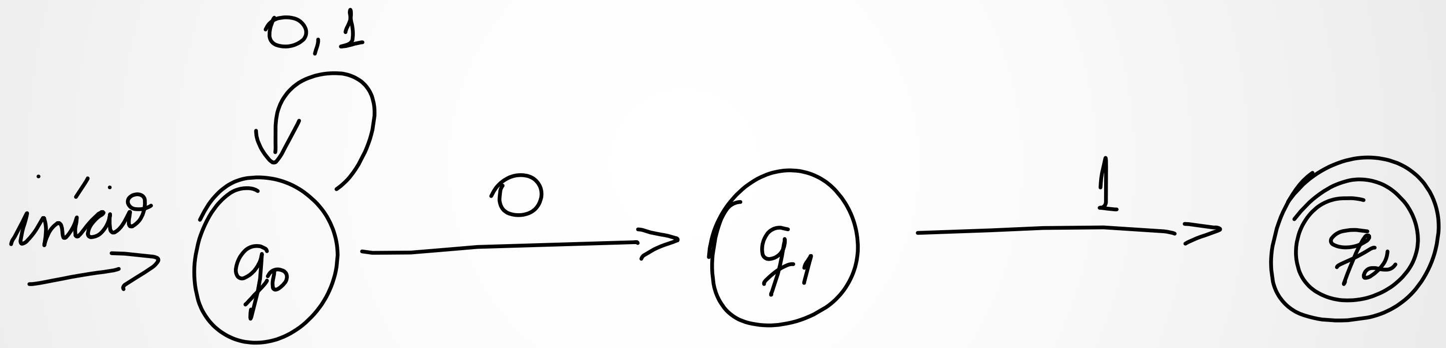
$$L = \{\, x01 \mid x \text{ é qualquer string de } 0's \text{ e } 1's \,\}$$

- Strings da linguagem: 01, 1101 e 00101, ...
- Strings que não são da linguagem: ε, 0, 111000, ...

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

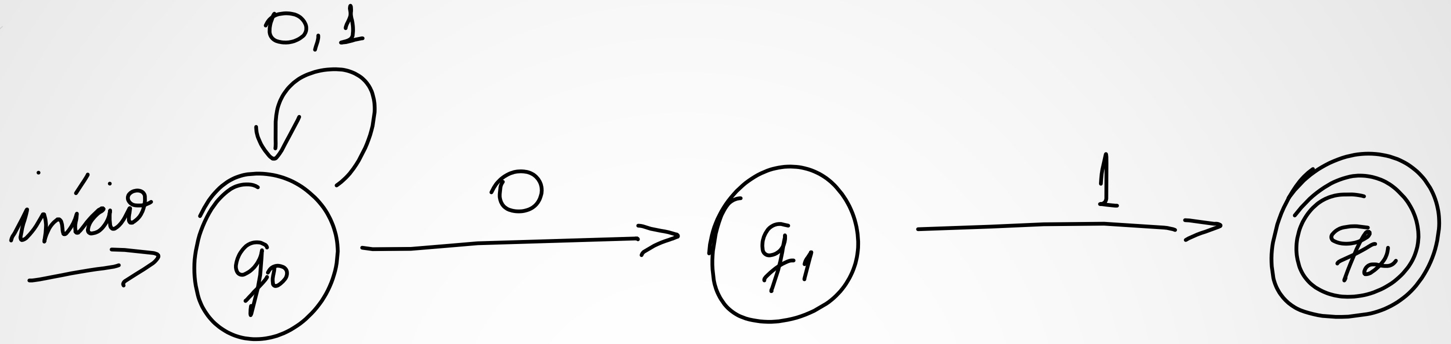
Exemplo

- **Diagrama de transições:**



Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exemplo



- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde:
- $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$
- $\Sigma = \{ 0, 1 \}$
- $F = \{q_2\}$
- δ:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos
Extensão da Função de Transição às Strings

- Necessária para tornar exata a noção da linguagem de um NFA;
- Se δ é a função de transição, $\hat{\delta}$ (delta chapéu) é a função de transição estendida;
- Definição:
  - **Base:** $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$

  Se estamos em q e não lemos nada, ficamos em q
  - **Indução:**
    - $w = xa$, onde a é o último símbolo de w e x é o restante de w;
    - $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$
    - $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$
    - $\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$
  - Ou seja, calculamos $\hat{\delta}(q, w)$ calculando primeiro $\hat{\delta}(q, x)$ e depois seguindo todas as transições de quaisquer desses estados que sejam rotuladas por a.

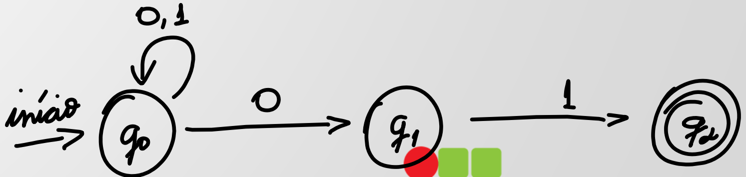
Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Extensão da Função de Transição às Strings

- **Exemplo:** Para $A = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, \{q_2\})$, realizar a computação de $\hat{\delta}(q_0, w)$ para cada prefixo w de 00101, começando em δ e aumentando o tamanho:
  - $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

δ

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



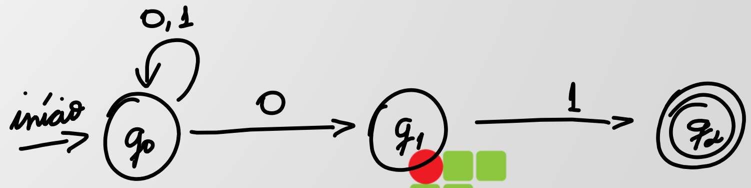
Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Extensão da Função de Transição às Strings

- **Exemplo:** Para $A = (\{ q_0, q_1, q_2 \}, \{ 0, 1 \}, \delta, q_0, \{q_2\})$, realizar a computação de $\hat{\delta}(q_0, w)$ para cada prefixo w de 00101, começando em δ e aumentando o tamanho:
  - $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

δ

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$



Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Definição de Linguagem de um NFA

- Dado um NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, sua linguagem $L(A)$ é definida por:

$$L(A) = \{\, w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \ \cap F \neq \emptyset \,\}$$

- Isto é, $\mathrm{L}(A)$ é o conjunto de strings w em Σ^* tais que $\hat{\delta}(q_0, w)$ contém pelo menos um estado de aceitação. **Se L é $L(A)$ para algum NFA A, dizemos que L é uma linguagem regular, pois um NFA possui um DFA equivalente.**

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos Finitos Não-Determinísticos
Equivalência entre DFAs e NFAs

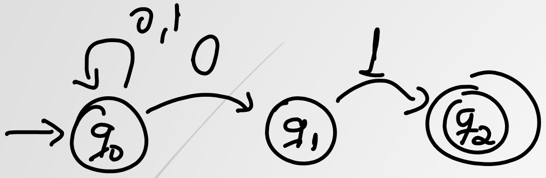
- Dado um NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$, construir o DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$ tal que $L(N) = L(D)$
  - Os alfabetos são os mesmos;
  - O estado inicial de D é o conjunto que contém apenas o estado inicial de N.
- Construção dos outros componentes:
  - Q_D é o conjunto de subconjuntos de Q_N, isto é, Q_D é o *conjunto potência* de Q_N. Se Q_N tem n estados, Q_D terá 2^n estados. O número de estados de Q_D pode ser efetivamente muito menor que 2^n, pois vários estados poderão ser inacessíveis e, por consequência, "descartados" do DFA;
  - F_D é o conjunto de subconjuntos S de Q_N tais que $S \cap F_N \neq \emptyset$, isto é, F_D representa todos os conjuntos de estados de N que incluem pelo menos um estado de aceitação de N;
  - Para cada conjunto $S \subseteq Q_N$ e para cada símbolo de entrada a em Σ,

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p\ em\ S} \delta_N(p, a)$$

  - Isto é, para calcular $\delta_D(S, a)$, examinamos todos os estados p em S, vemos para quais estados N vai a partir de p sobre a entrada a e unimos todos esses estados.

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Equivalência entre DFAs e NFAs

NFA 

$N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$

$Q_N = \{q_0, q_1, q_2\}$

$F_N = \{q_2\}$

δ_N:

	0	1
$\rightarrow q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\emptyset$

Construção do DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D)$

N tem 3 estados, D tem 2^3 estados

$Q_D = \{\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$

$F_D = \{\{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$ → todos os estados de Q_D que têm o(s) estado(s) final(is) de Q_N

δ_D:

	0	1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Equivalência entre DFAs e NFAs

δ_D:

	0	1
$\emptyset$ A	$\emptyset$ A	$\emptyset$ A
$\rightarrow \{q_0\}$ B	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0\}$ B
$\{q_1\}$ C	$\emptyset$ A	$\{q_2\}$ D
$* \{q_2\}$ D	$\emptyset$ A	$\emptyset$ A
$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_2\}$ F
$* \{q_0, q_2\}$ F	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0\}$ B
$* \{q_1, q_2\}$ G	$\emptyset$ A	$\{q_2\}$ D
$* \{q_0, q_1, q_2\}$ H	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_2\}$ F

Renomeando os estados

	0	1
A	A	A
→ B	E	B
C	A	D
* D	A	A
E	E	F
* F	E	B
* G	A	D
* H	E	F

Quais estados são acessíveis?

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Equivalência entre DFAs e NFAs

δ_D:

	0	1
$\emptyset$ A	$\emptyset$ A	$\emptyset$ A
$\rightarrow \{q_0\}$ B	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0\}$ B
$\{q_1\}$ C	$\emptyset$ A	$\{q_2\}$ D
$* \{q_2\}$ D	$\emptyset$ A	$\emptyset$ A
$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_2\}$ F
$* \{q_0, q_2\}$ F	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0\}$ B
$* \{q_1, q_2\}$ G	$\emptyset$ A	$\{q_2\}$ D
$* \{q_0, q_1, q_2\}$ H	$\{q_0, q_1\}$ E	$\{q_0, q_2\}$ F

Renomeando os estados

	0	1
A	A	A
$\rightarrow$ B	E	B
C	A	D
$*$D	A	A
E	E	F
$*$F	E	B
$*$G	A	D
$*$H	E	F

Quais estados são acessíveis?

Os estados acessíveis são:
B, E e F

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Equivalência entre DFAs e NFAs

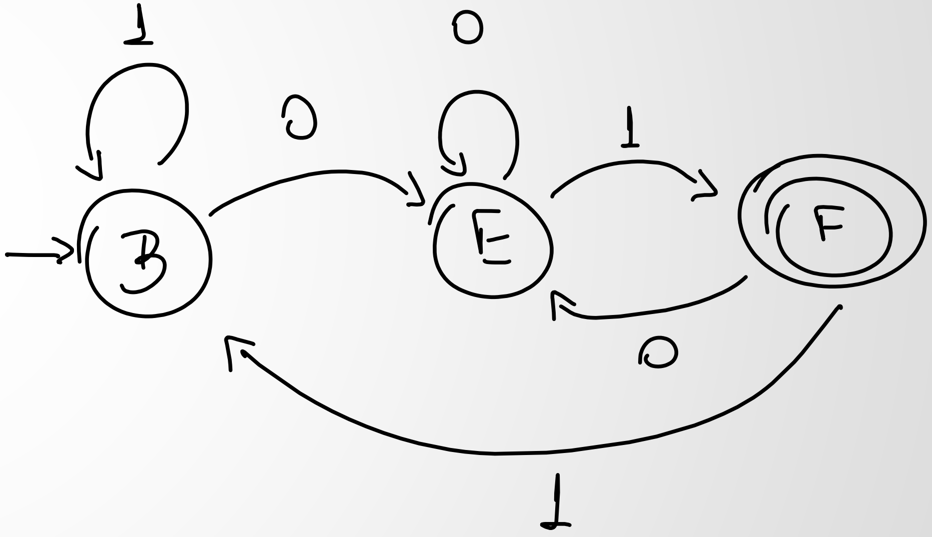
$D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, B, F_D)$

$Q_D = \{B, E, F\}$

$F_D = \{F\}$

δ_D:

	0	1
$\rightarrow B$	E	B
E	E	F
$*F$	E	B



Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exercícios Escritos

Exercício e3.1: Para cada linguagem abaixo, todas sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, defina formalmente o seu respectivo NFA, apresentando a tabela e o diagrama de transições:

a) $L = \{ w \mid w \text{ termina em } 00 \}$

b) $L = \{ w \mid w \text{ começa com } 1 \text{ e termina com } 0 \}$

c) $L = \{ w \mid w \text{ possui três } 0's \text{ consecutivos} \}$

d) $L = \{ w \mid w \text{ contém a subcadeia } 0101\text{, isto é, } w = x0101y \text{ para algum } x \text{ e algum } y \}$

Dica: procure usar o não-determinismo para facilitar sua modelagem, você perceberá que a construção dos autômatos se tornará quase que trivial em comparação aos DFAs que reconhecem as mesmas linguagens!

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exercícios Escritos

Exercício e3.2: Para cada NFA do exercício anterior, construa um DFA equivalente.

Exercício e3.3: Converta o seguinte NFA em DFA:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\emptyset$
$* s$	$\{s\}$	$\{s\}$

Exercício e3.4: Converta o seguinte NFA em DFA:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{q, s\}$	$\{q\}$
$* q$	$\{r\}$	$\{q, r\}$
r	$\{s\}$	$\{p\}$
$* s$	$\emptyset$	$\{p\}$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exercícios Escritos

Exercício e3.5: Converta o seguinte NFA em DFA:

	0	1
$\rightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\{r, s\}$	$\{t\}$
r	$\{p, r\}$	$\{t\}$
$* s$	$\emptyset$	$\emptyset$
$* t$	$\emptyset$	$\emptyset$

Exercício e3.6: Converta o seguinte NFA em DFA:

	a	b	c
$\rightarrow * q_0$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_4\}$
$* q_2$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$* q_4$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Exercícios Escritos

Exercício e3.7: Converta o seguinte NFA em DFA:

	a	b
$\rightarrow q_0$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$* q_3$	$\emptyset$	$\emptyset$

Exercício e3.8: Converta o seguinte NFA em DFA:

	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$
q_2	$\{q_0, q_4\}$	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_1, q_3, q_4\}$
$* q_3$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
$* q_4$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Bibliografia

HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.; MOTWANI, R. **Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. 560 p.

RAMOS, M. V. M.; JOSÉ NETO, J.; VEGA, I. S. **Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 656 p.

SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 459 p.