

SBVLIFA: Linguagens Formais e Autômatos

Aula 08: Autômatos de Pilha

Bacharelado em Ciência da Computação
Prof. Dr. David Buzatto

Autômatos de Pilha

→ Linguagens Livres de Contexto

Tipo	Classe de Linguagens	Modelo de Gramática	Modelo de Reconhecedor
0	Recursivamente enumeráveis	Irrestrita	Máquina de Turing
1	Sensíveis ao contexto	Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita limitada
2	Livres de contexto	Livre de contexto	Autômato de pilha
3	Regulares	Linear (direita ou esquerda)	Autômato finito

Tipo 0

Tipo 1

Tipo 2

Tipo 3

Autômatos de Pilha

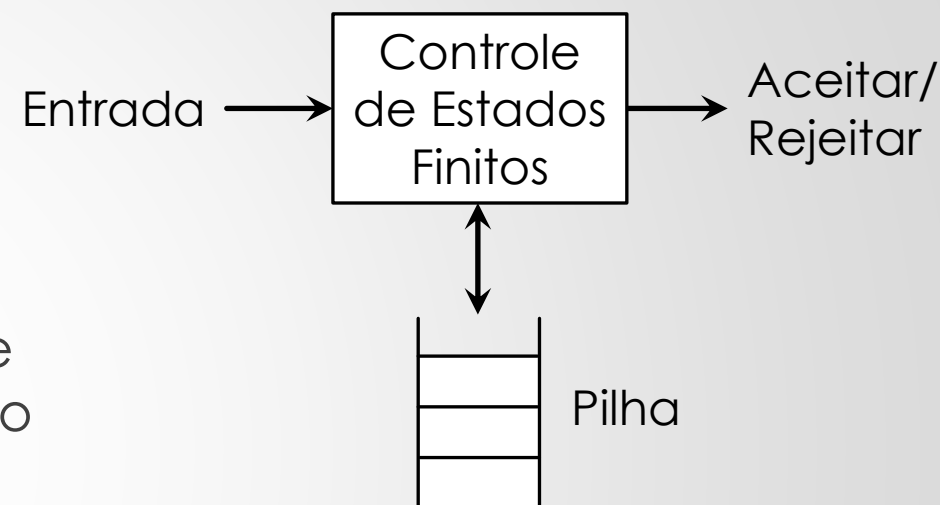
- Os **Autômatos de Pilha (PDA)** têm capacidade de reconhecer todas as linguagens livres de contexto e somente elas;
- Eles são essencialmente ε -NFAs com a inclusão de uma pilha;
- Essa pilha funciona exatamente como a estrutura de dados pilha, ou seja, os elementos podem ser inseridos/removidos somente no/do topo da pilha;
- Veremos duas variações de autômatos de pilha: 1) os que aceitam uma entrada ao alcançar um estado de aceitação; 2) os que aceitam uma entrada ao esvaziar a pilha;
- As CFGs podem ser convertidas em PDAs equivalentes e vice-versa.

Autômatos de Pilha

► Um Exemplo Informal:

► Em uma transição, o autômato de pilha:

1. Consome da entrada o símbolo que ele utiliza na transição. Se ε for usado como entrada, nenhum símbolo de entrada será consumido;
2. Vai para um novo estado, que pode ser o mesmo;
3. Substitui o símbolo no topo da pilha por qualquer string:
 - $\varepsilon \rightarrow$ pop;
 - O mesmo símbolo do topo;
 - Substituir o topo por outro símbolo (sem push ou pop);
 - O símbolo do topo pode ser substituído e então um ou mais novos símbolos podem ser inseridos.



► Um Exemplo Informal:

- Consideremos a linguagem w - w -reverso, que é a linguagem dos palíndromos de comprimento par sobre o alfabeto $\{0, 1\}$: $L_{ww^R} = \{ww^R \mid w \in (0 + 1)^*\}$
- CFG: $P \rightarrow \varepsilon$
 $P \rightarrow 0P0$
 $P \rightarrow 1P1$
- Como seria um PDA para essa linguagem?

Autômatos de Pilha

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

➤ Definição Formal:

➤ P : autômato de pilha, uma 7-upla, onde:

- Q : conjunto finito de estados;
- Σ : conjunto finito de símbolos de entrada (alfabeto);
- Γ : conjunto finito de símbolos que podem ser inseridos na pilha (alfabeto da pilha);
- δ : função de transição, na forma:

$$\delta(q, a, X) \rightarrow \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_n, \gamma_n)\}, \text{ ou seja, } \delta: Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma_\epsilon \rightarrow P(Q \times \Gamma_\epsilon)$$

- Se $\gamma = \epsilon$, pop na pilha;
 - Se $\gamma = X$, a pilha fica inalterada;
 - Se $\gamma = YZ$, X é substituído por Z e Y é inserido na pilha.
- q_0 : estado inicial, tal que $q_0 \in Q$
 - Z_0 (ou \$): o símbolo de início da pilha;
 - F : conjunto de estados finais ou de aceitação, tal que $F \subseteq Q$

Autômatos de Pilha

$$\delta(q, a, X) = \{(p, \alpha)\} \Rightarrow q \xrightarrow{a, X / \alpha} p$$

Definição Formal:

Projetando um PDA para $L_{ww^R} = \{ww^R \mid w \in (0 + 1)^*\}$:

► $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

► $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

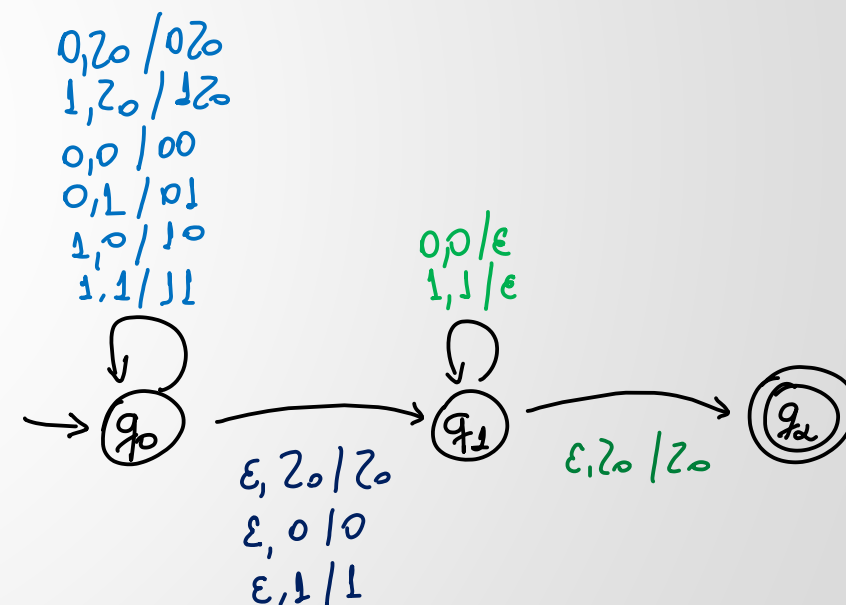
► $\Sigma = \{0, 1\}$

► $\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$

► $F = \{q_2\}$

► δ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\} \\ \delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\} \\ \delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\} \\ \delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\} \\ \delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\} \\ \delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\} \\ \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\} \\ \delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\} \\ \delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\} \\ \delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\} \end{array} \right.$$



Autômatos de Pilha

► Descrição Instantânea (ID):

- A ID de um PDA representa a configuração atual do autômato;
- É representada pela tripla (q, w, γ) , onde:
 - q : é o estado;
 - w : é a parte restante da entrada;
 - γ : é o conteúdo da pilha.

► Notação de dedução:

- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, definimos \vdash_P ou \vdash como a seguir: suponha que $\delta(q, a, X)$ contém (p, α) , então para todas as strings w em Σ^* e β em Γ^* , temos

$$(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$$

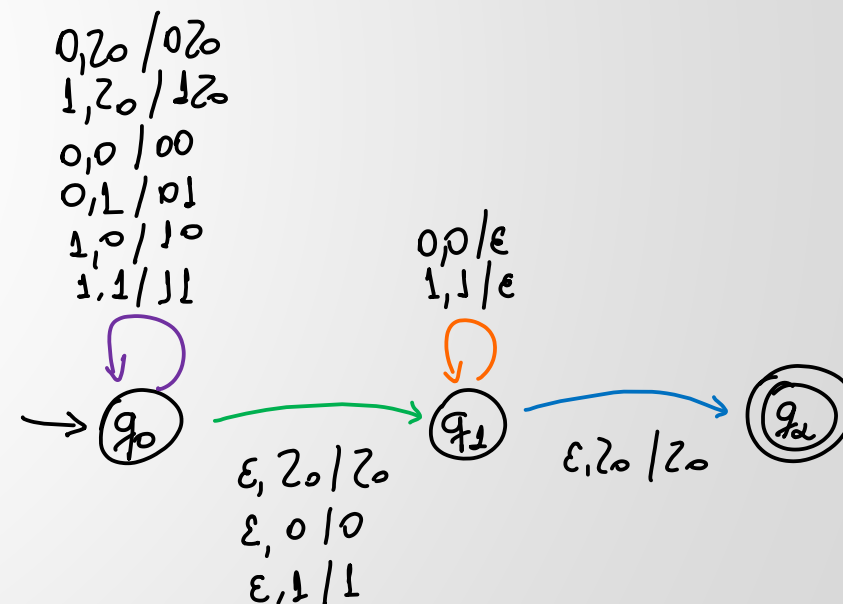
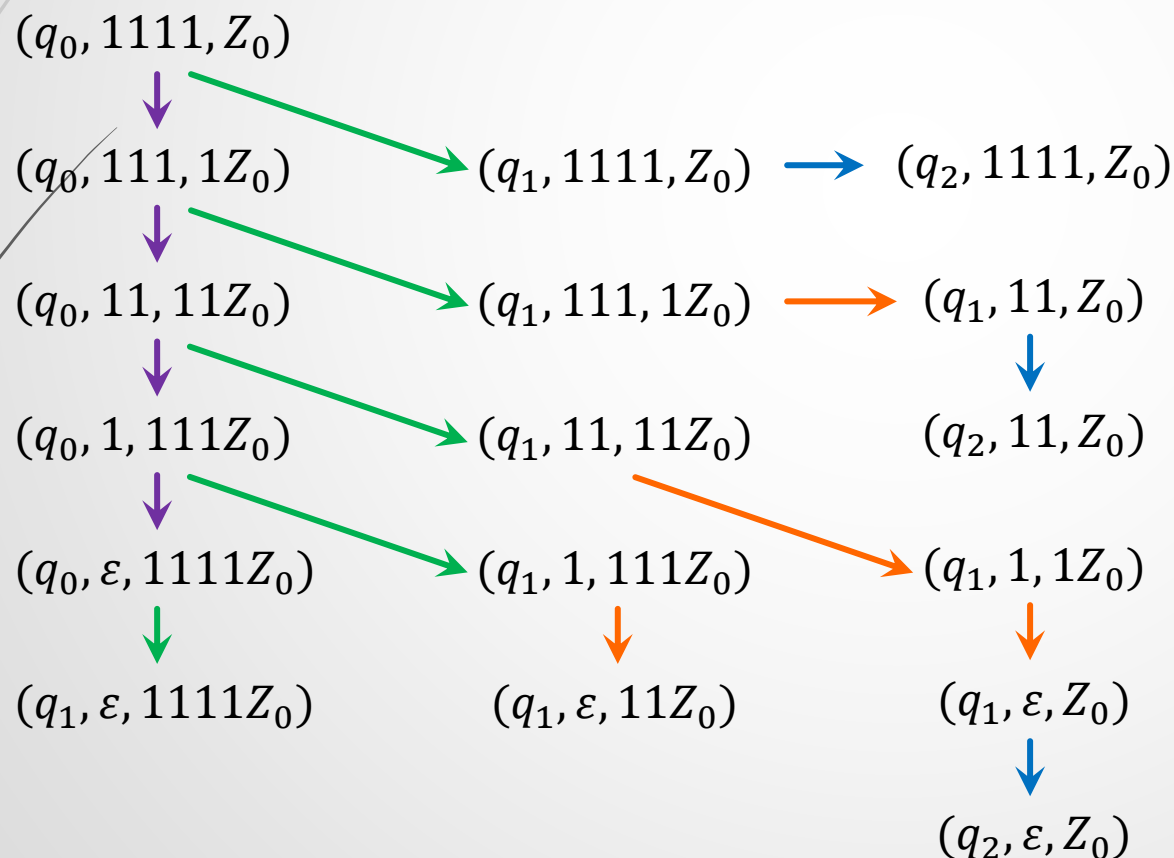
► Generalizando:

- **Base:** $I \vdash^* I$ pra qualquer ID I
- **Indução:** $I \vdash^* J$ se existe alguma ID K tal que $I \vdash K$ e $K \vdash^* J$. Ou seja, $I \vdash^* J$ se existe uma sequência de IDs K_1, K_2, \dots, K_n tal que $I = K_1, J = K_n$ e, para todo $i = 1, 2, n, \dots, n - 1$, temos $K_i \vdash K_{i+1}$

Autômatos de Pilha

► Descrição Instantânea (ID):

- Exemplo: quais são as IDs que o PDA de L_{wwr} pode alcançar sobre a entrada 1111?



► Tipos de Aceitação:

- Os PDAs podem ser projetados para aceitar uma string de duas formas:
 - Aceitação por estado final;
 - Aceitação por pilha vazia;
- Os dois métodos são equivalentes, pois uma linguagem L tem um PDA que a aceita pelo estado final se e somente se L tem um PDA que a aceita por pilha vazia;
- De forma inversa, dado um PDA P , geralmente as linguagens que são aceitas por estado final e por pilha vazia são diferentes.

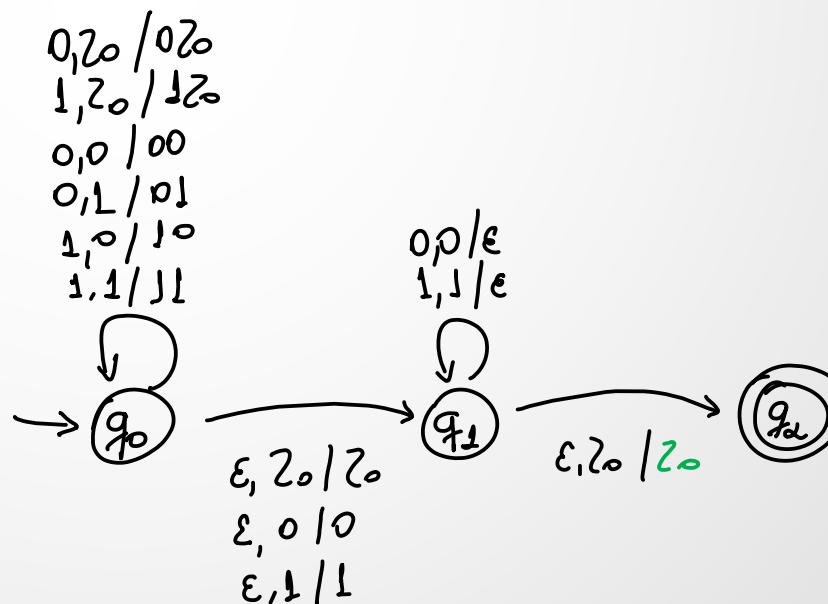
Autômatos de Pilha

➤ Aceitação por Estado Final:

- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $L(P)$, a linguagem aceita por P pelo estado final, é:

$$L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \xrightarrow{*}_P (q, \varepsilon, \alpha)\}$$

- Onde $q \in F$ e $\alpha \in \Gamma^*$



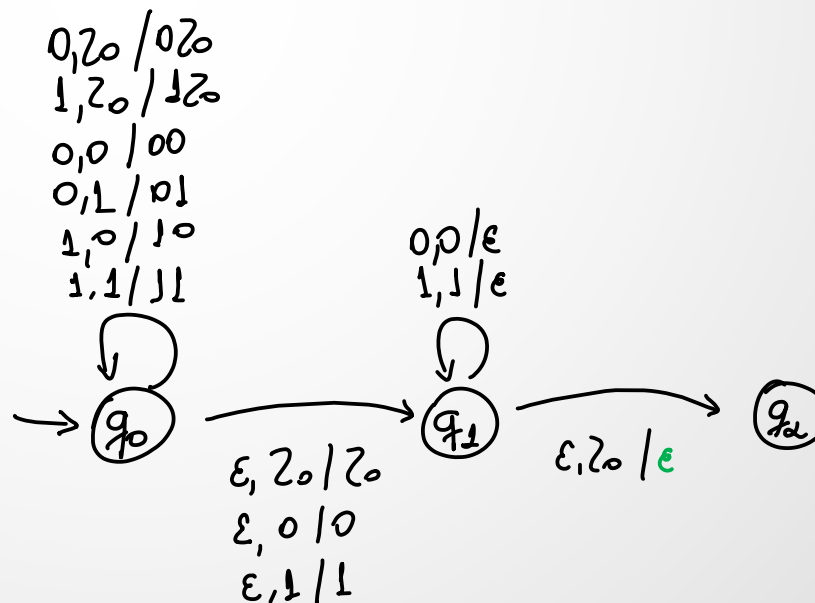
Autômatos de Pilha

► Aceitação por Pilha Vazia:

- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $N(P)$, o conjunto de entradas w que P pode consumir e que ao mesmo tempo esvazia sua pilha, é definido como:

$$N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \xrightarrow{*}_P (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

- Onde $q \in Q$
- A letra N em $N(P)$ significa pilha nula ou pilha vazia.



Autômatos de Pilha

► Aceitação por Pilha Vazia:

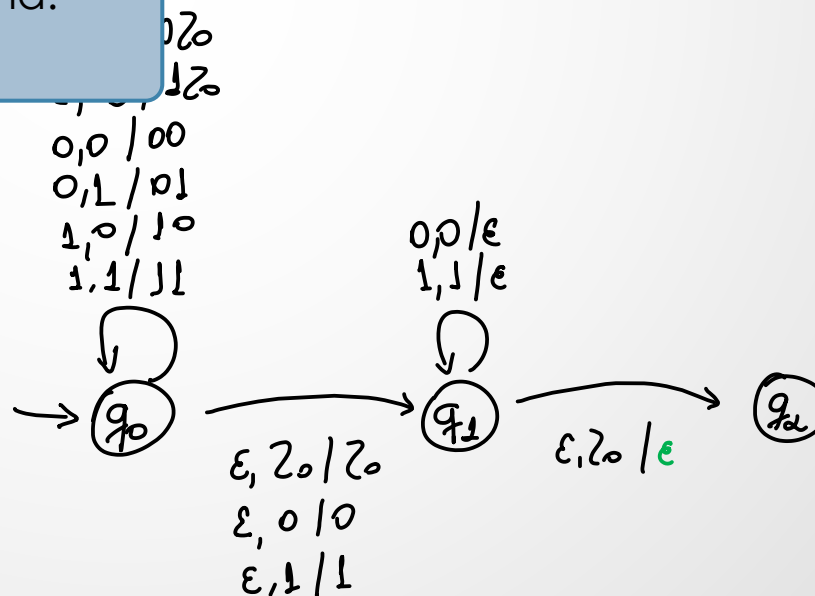
- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $N(P)$, o conjunto de entradas w que P pode consumir com a pilha, é definido como:

O conjunto de estados de aceitação pode ser omitido na definição do PDA que aceita por pilha vazia, pois é irrelevante! Sendo assim, um PDA que aceita por pilha vazia pode ser definido como uma sêxtupla na forma:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$$

significa pilha nula
ou pilha vazia.

$$\{w \mid (q_0, w, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_P (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$



Autômatos de Pilha

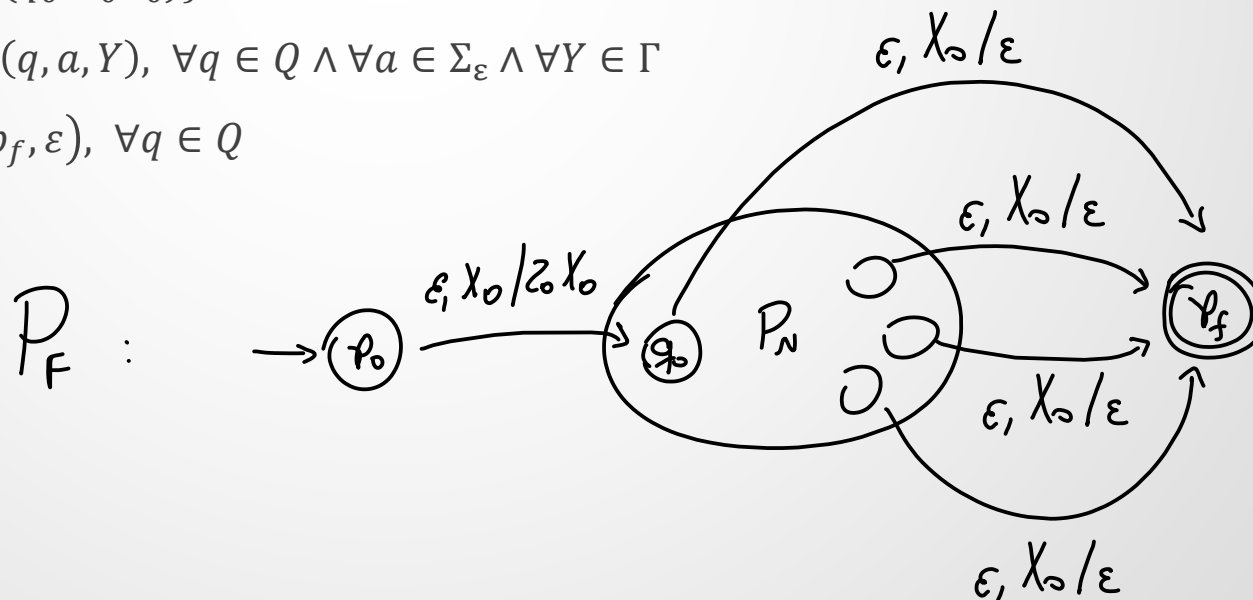
► De Pilha Vazia ao Estado Final:

- Se $L = N(P_N)$ para algum PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, existe um PDA P_F tal que $L = L(P_F)$ e que é definido como:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

- Onde δ_F é definida por:

1. $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
2. $\delta_F(q, a, Y) \supset \delta_N(q, a, Y), \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma_\varepsilon \wedge \forall Y \in \Gamma$
3. $\delta_F(q, \varepsilon, X_0) \supset (p_f, \varepsilon), \forall q \in Q$



Autômatos de Pilha

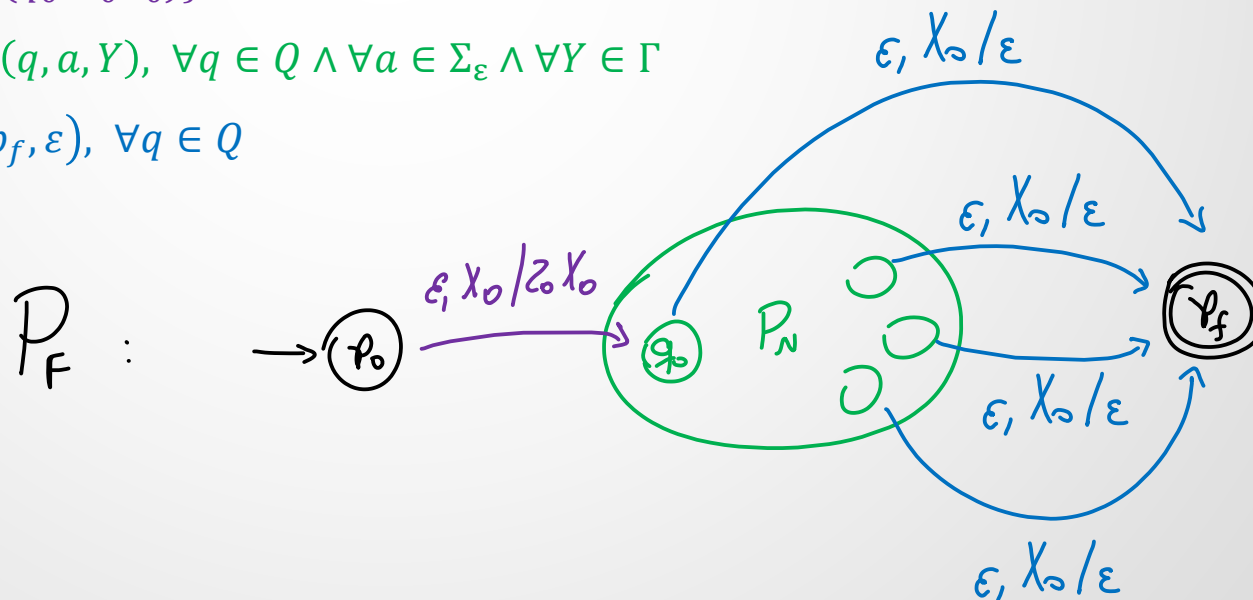
► De Pilha Vazia ao Estado Final:

- Se $L = N(P_N)$ para algum PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, existe um PDA P_F tal que $L = L(P_F)$ e que é definido como:

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

- Onde δ_F é definida por:

1. $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
2. $\delta_F(q, a, Y) \supset \delta_N(q, a, Y), \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma_\varepsilon \wedge \forall Y \in \Gamma$
3. $\delta_F(q, \varepsilon, X_0) \supset (p_f, \varepsilon), \forall q \in Q$



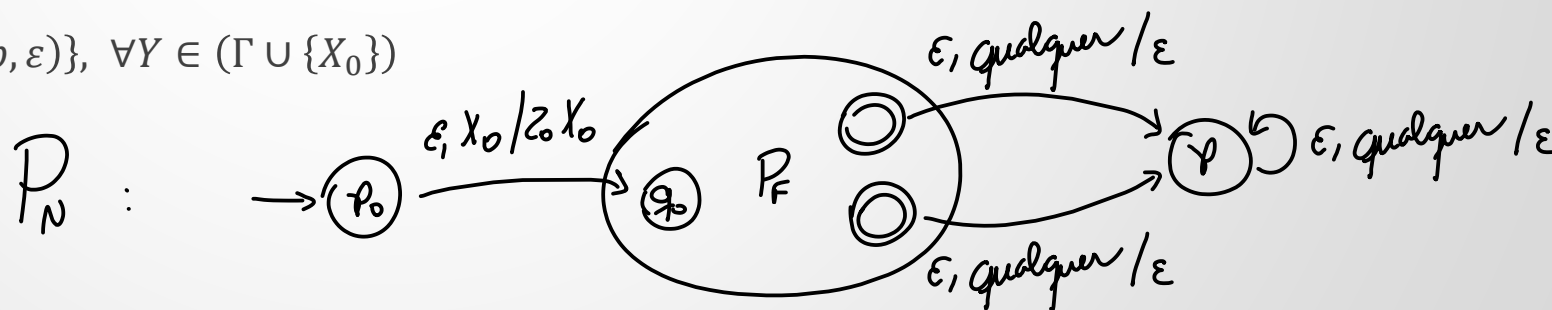
► De Estado Final para Pilha Vazia:

- Se $L = L(P_F)$ para algum PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, existe um PDA P_N tal que $L = N(P_N)$ e que é definido como:

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

- Onde δ_N é definida por:

1. $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
2. $\delta_N(q, a, Y) \supset \delta_F(q, a, Y), \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma \wedge \forall Y \in \Gamma$
3. $\delta_N(q, \varepsilon, Y) \supset (p, \varepsilon), \forall q \in F \wedge \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$
4. $\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}, \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$



Autômatos de Pilha

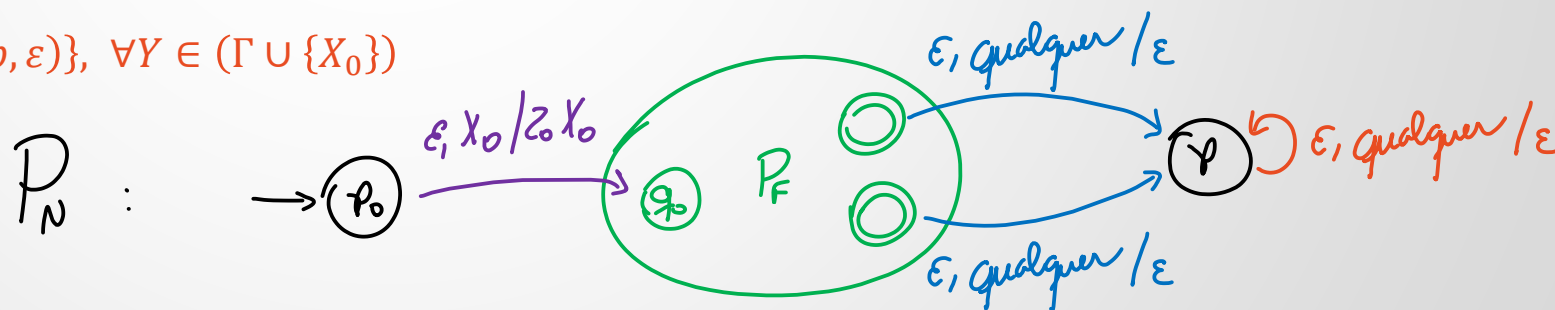
► De Estado Final para Pilha Vazia:

- Se $L = L(P_F)$ para algum PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, existe um PDA P_N tal que $L = N(P_N)$ e que é definido como:

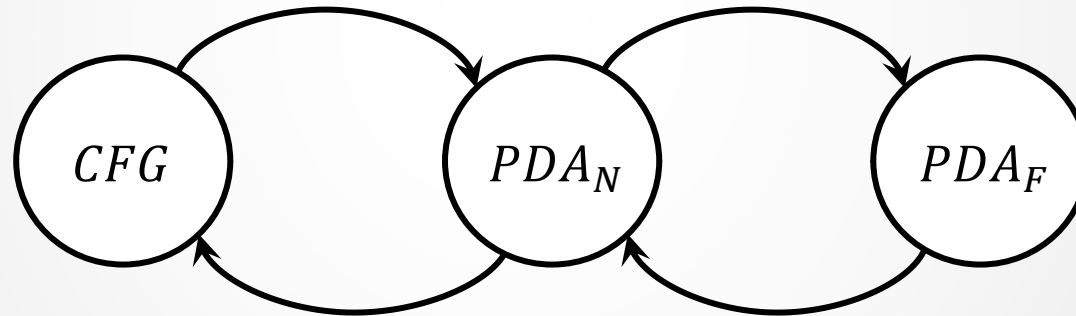
$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

- Onde δ_N é definida por:

1. $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$
2. $\delta_N(q, a, Y) \supset \delta_F(q, a, Y), \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma \wedge \forall Y \in \Gamma$
3. $\delta_N(q, \varepsilon, Y) \supset (p, \varepsilon), \forall q \in F \wedge \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$
4. $\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\}, \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$



► Equivalência entre PDAs e CFGs:



► De CFGs para PDAs:

- Seja $G = (V, T, Q, S)$, construir o PDA P que aceite $L(G)$ por pilha vazia, da seguinte forma:

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$$

- Onde δ é definida como:

1. Para cada variável A , $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \text{ é uma produção de } G\}$
2. Para cada terminal a , $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Seja $G = (V, T, Q, S)$, construir o PDA P que aceite $L(G)$ por pilha vazia, da seguinte forma: $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$

Onde δ é definida como:

1. Para cada variável A , $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \text{ é uma produção de } G\}$
2. Para cada terminal a , $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

Exemplo:

Converter a gramática de expressões em um PDA:

- O conjunto de terminais (T) para o PDA é $\{a, b, 0, 1, (,), +, *\}$. Esses oito símbolos e os símbolos I e E (V) formam o alfabeto da pilha ($V \cup T$). A função de transição para o PDA é:

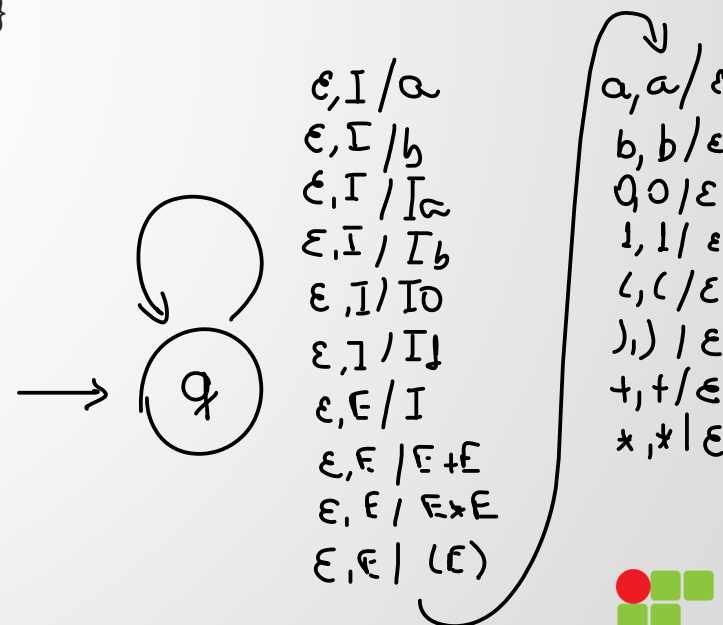
a) $\delta(q, \varepsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$

b) $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, I), (q, E + E), (q, E * E), (q, (E))\}$

c) $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, 0, 0) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, 1, 1) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, (, () = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q,),) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, +, +) = \{(q, \varepsilon)\}$
 $\delta(q, *, *) = \{(q, \varepsilon)\}$

$$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$$

$$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$$



Autômatos de Pilha

► De PDAs para CFGs:

► Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

► Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

► V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

► As produções de G são:

a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0Z_0p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Autômatos de Pilha

Exemplo 1:

- Converter o PDA $P_N(\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
 - $V = \{S, [qZq]\}$, pois S é o símbolo de início e $[qZq]$ é a única tripla que pode formada a partir dos símbolos de pilha de P_N
 - R (produções):
 - Para S , $S \rightarrow [qZq]$
 - Obs: se houvesse n estados, teríamos n produções desse tipo
 - Dado que $\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$, temos:
 - $[qZq] \rightarrow i[qZq][qZq]$
 - Obs: se existissem n estados, essa única regra produziria n^2 produções!
 - Dado que $\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$, temos:
 - $[qZq] \rightarrow e$
- Substituindo $[qZq]$ por A , temos, finalmente:

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow iAA \mid e$$

ou

$$S \rightarrow iSS \mid e$$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

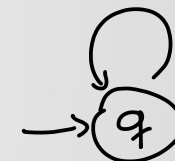
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

$i, Z / ZZ$
 $e, Z / \varepsilon$



δ_N :

$$\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$$

$$\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

- No símbolo S
- Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

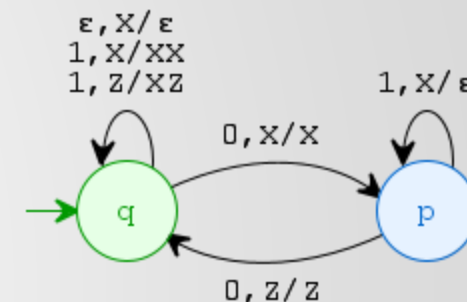
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

- $a \in \Sigma_\epsilon$
- k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$



δ_N :

- $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
- $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
- $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
- $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
- $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
- $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

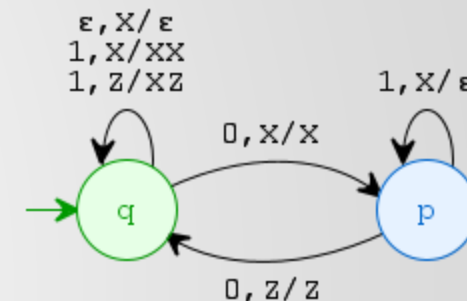
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$



δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

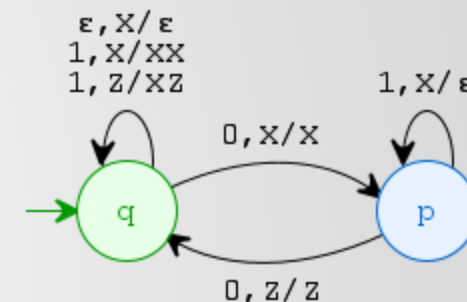
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[r_1 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 1.

➤ $[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$

➤ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$

➤ $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$

➤ $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

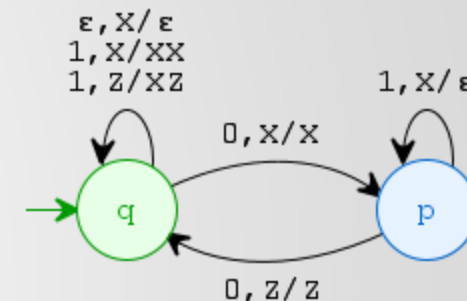
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1 Y_2)\}$

$\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$

comprimento 2
listas de estados
de comprimento 2:

$qq, pq,$

qp e pp

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$

2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$

3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$

4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$

5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$

6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 2.

➤ $[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$

➤ $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$

➤ $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$

➤ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

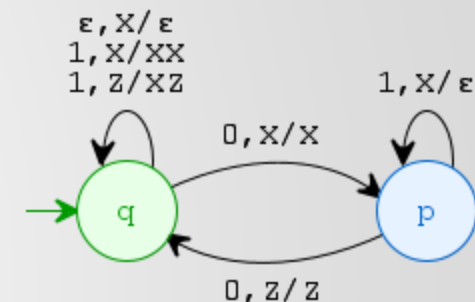
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1 Y_2)\}$

$\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$

comprimento 2
listas de estados
de comprimento 2:

$qq, pq,$

qp e pp

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 3.

➤ $[qXq] \rightarrow 0[pXq]$

➤ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

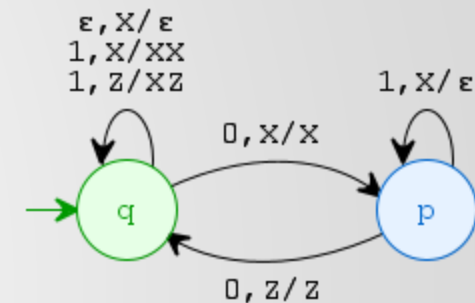
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1)\}$

$\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$

comprimento 1
listas de estados
de comprimento 1:

q e
 p

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 4.

➤ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$

➤ $[pZp] \rightarrow 0[qZp]$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

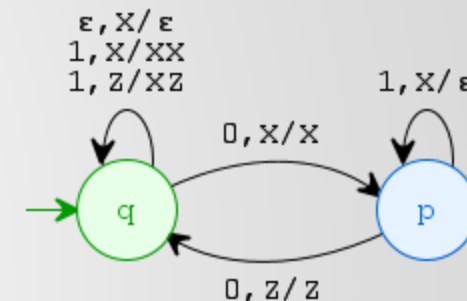
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1)\}$

$\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$

comprimento 1
listas de estados
de comprimento 1:

q e
 p

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 5.

➤ $[qXq] \rightarrow \varepsilon$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

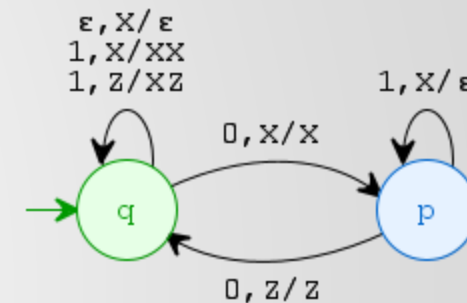
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, \varepsilon)\}$

$\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$

comprimento 0

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ 6.

➤ $[pXp] \rightarrow 1$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

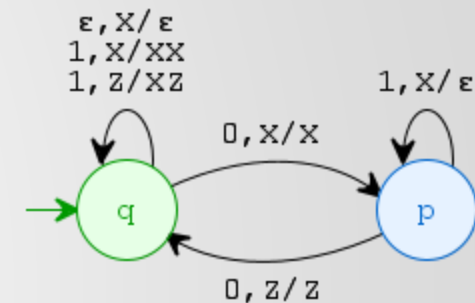
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\epsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ϵ)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[r_1 Y_1 r_1][r_2 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_{k-1} r_{k-1}]$



$\delta(q, a, X) = \{(r, \epsilon)\}$

$\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

comprimento 0

δ_N :

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \epsilon, X) = \{(q, \epsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \epsilon)\}$

Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$

➤ $[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$

➤ $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$

➤ $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$

➤ $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$

➤ $[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$

➤ $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$

➤ $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$

➤ $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$

➤ $[qXq] \rightarrow 0[pXq]$

➤ $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$

➤ $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$

➤ $[pZp] \rightarrow 0[qZp]$

➤ $[qXq] \rightarrow \varepsilon$

➤ $[pXp] \rightarrow 1$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S

2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

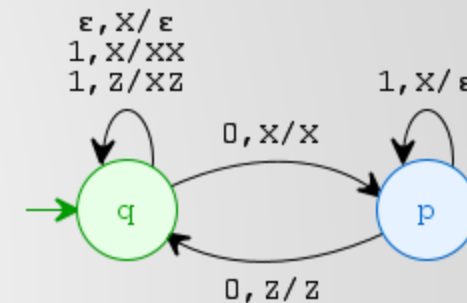
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$

2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[r_1 Y_1 r_1][r_2 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_{k-1} r_{k-1}]$



Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow A \mid B$

➤ $A \rightarrow 1CA$

➤ $A \rightarrow 1DE$

➤ $B \rightarrow 1CB$

➤ $B \rightarrow 1DF$

➤ $C \rightarrow 1CC$

➤ $C \rightarrow 1DG$

➤ $D \rightarrow 1CD$

➤ $D \rightarrow 1DH$

➤ $C \rightarrow 0G$

➤ $D \rightarrow 0H$

➤ $E \rightarrow 0A$

➤ $F \rightarrow 0B$

➤ $C \rightarrow \varepsilon$

➤ $H \rightarrow 1$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

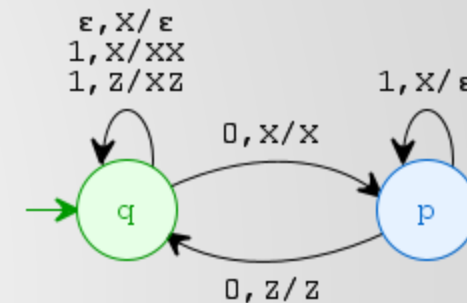
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[r_1 Y_1 r_1][r_1 Y_2 r_2] \dots [r_{k-1} Y_k r_k]$



Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow A \mid B$

➤ $A \rightarrow 1CA \mid 1DE$

➤ $B \rightarrow 1CB \mid 1DF$

➤ $C \rightarrow 1CC \mid 1DG \mid 0G \mid \varepsilon$

➤ $D \rightarrow 1CD \mid 1DH \mid 0H$

➤ $E \rightarrow 0A$

➤ $F \rightarrow 0B$

➤ $H \rightarrow 1$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

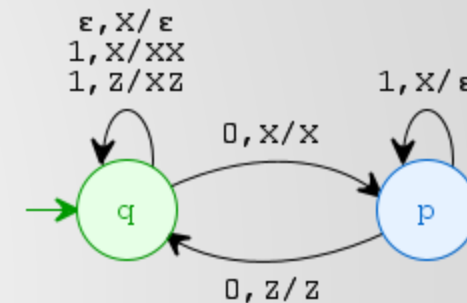
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[r_1 Y_1 r_1][r_2 Y_2 r_2] \dots [r_k Y_k r_k]$



Exemplo 2:

➤ Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0, 1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G :

➤ $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

➤ $V = \{S, A, B, C, D\}$

➤ R (produções):

➤ $S \rightarrow A \mid B$

➤ $A \rightarrow 1CA \mid 1D0A$

➤ $B \rightarrow 1CB \mid 1D0B$

➤ $C \rightarrow 1CC \mid \varepsilon$

➤ $D \rightarrow 1CD \mid 1D1 \mid 01$

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.

Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

V consiste em:

1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

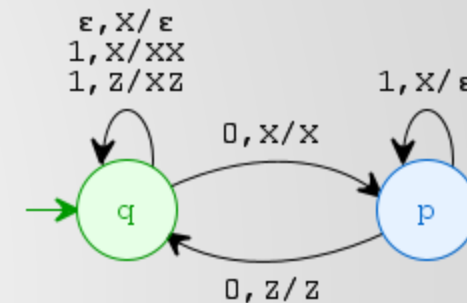
a) Para todos os estados p , G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados r_1, r_2, \dots, r_k , G tem a produção

$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$



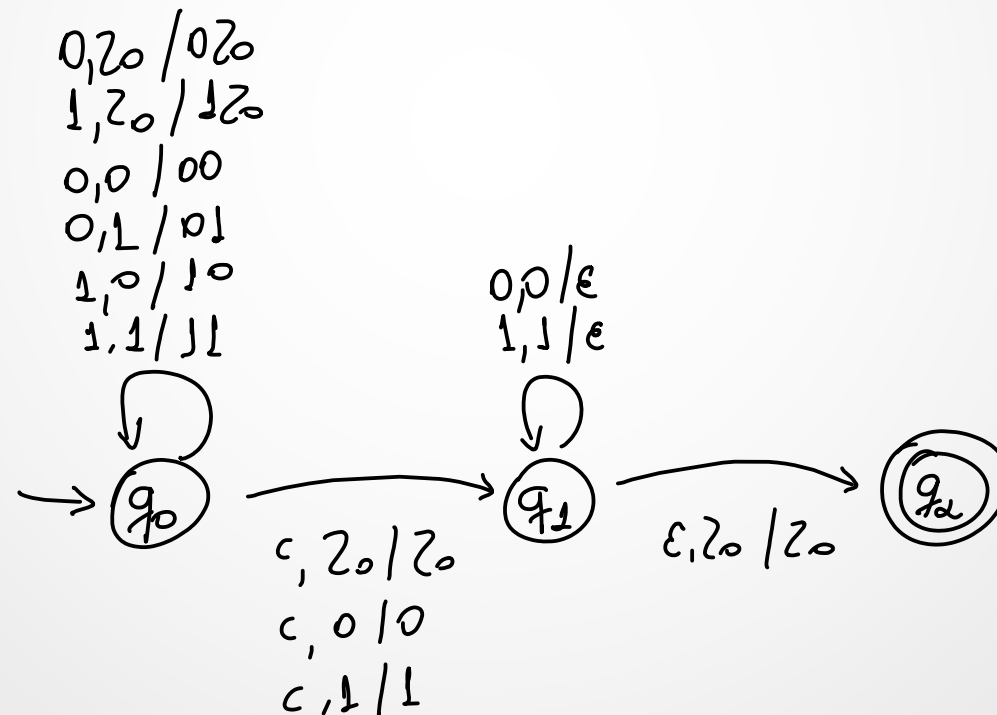
➤ Autômatos de Pilha Determinísticos (DPDA):

- DPDAs têm aplicação importante em analisadores sintáticos, afinal de contas, para um analisador sintático existir, ele precisa ser “executado” em um computador e, para isso, a necessidade de ser determinístico é inerente;
- Formalmente, um PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ é determinístico se e somente se:
 - $|\delta(q, a, X)| \leq 1, \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma_\epsilon \wedge \forall X \in \Gamma$
 - $\delta(q, a, X) \neq \emptyset, \exists a \in \Sigma \rightarrow \delta(q, \epsilon, X) = \emptyset$
- A linguagem L_{wwr} é livre de contexto, mas não existe um DPDA que a reconheça, sendo assim, os DPDAs reconhecem linguagens que ficam “entre” os tipos 3 e 2, ou seja, uma classe de linguagens que fica entre as linguagens regulares e as CFLs. Se essa linguagem for alterada, inserindo um “marcador de centro”, ou seja, a linguagem L_{wcwr} , ela passa a ser reconhecida por um DPDA;
- As linguagens aceitas por DPDAs pelo estado final incluem, propriamente as linguagens regulares, mas não estão incluídas propriamente nas CFLs;
- Além disso, todas as linguagens que os DPDAs aceitam possuem gramáticas não-ambíguas, entretanto tem-se que tomar cuidado, pois há linguagens não inerentemente ambíguas que não são aceitas por DPDAs, como o caso da L_{wwr} .

Autômatos de Pilha

➤ Autômatos de Pilha Determinísticos (DPDA):

➤ **Exemplo:** DPDA para a linguagem L_{wcwr} :



Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.1: Para o PDA $P = (\{q, p\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ com função de transição definida como:

$$\delta(q, 0, Z_0) = \{(q, XZ_0)\}$$

$$\delta(q, 0, X) = \{(q, XX)\}$$

$$\delta(q, 1, X) = \{(q, X)\}$$

$$\delta(q, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, \varepsilon, X) = \{(p, \varepsilon)\}$$

$$\delta(p, 1, X) = \{(p, XX)\}$$

$$\delta(p, 1, Z_0) = \{(p, \varepsilon)\}$$

A partir da ID inicial $\delta(q, w, Z_0)$, mostre todas as IDs acessíveis quando a entrada w é:

a) 01

b) 0011

c) 010

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.2: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.3: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{w \mid w \text{ tem quantidades iguais de } 0\text{'s e } 1\text{'s}\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.4: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{w \mid \text{em } w \text{ a quantidade de } 0\text{'s é o dobro da quantidade de } 1\text{'s} \}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.5: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.6: Converta a gramática abaixo em um PDA que aceite a mesma linguagem por pilha vazia.

$$S \rightarrow 0S1 \mid A$$

$$A \rightarrow 1A0 \mid S \mid \varepsilon$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.7: Converta a gramática abaixo em um PDA que aceite a mesma linguagem por pilha vazia.

$$S \rightarrow aAA$$

$$A \rightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon$$

Bibliografia

HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.; MOTWANI, R. **Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. 560 p.

RAMOS, M. V. M.; JOSÉ NETO, J.; VEGA, I. S. **Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 656 p.

SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 459 p.