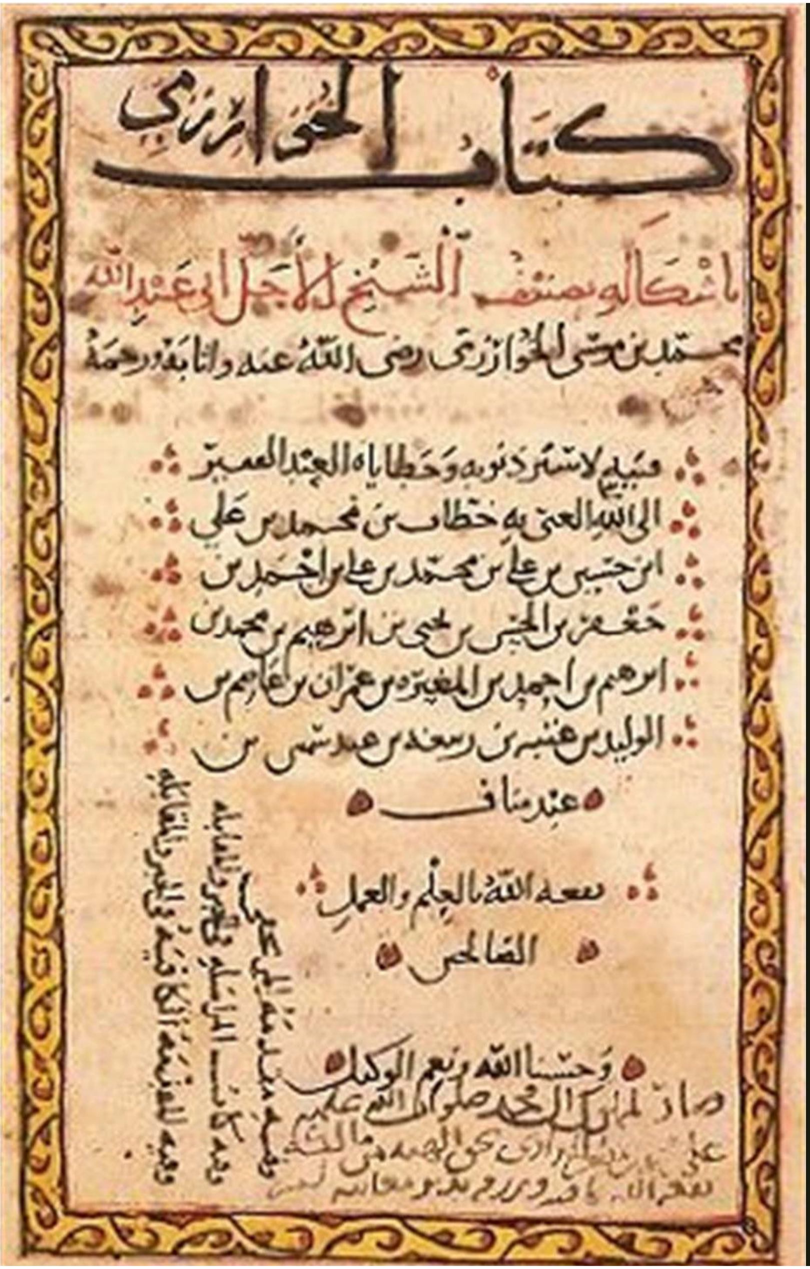
ALGEBRA DOS CONJUNTOS

Gustavo Aurélio Prieto



Algebra

- A palavra algebra vem do árabe "al-jabr", parte do título do livro "*Ilm al-jabr wa'l-muķābala*", escrito em 820 DC, um compêndio sobre a solução de equações polinomiais até o segundo grau.
- Foi escrito pelo matemático persa *Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī*.
- A palavra é utilizada para a realização de cálculos.

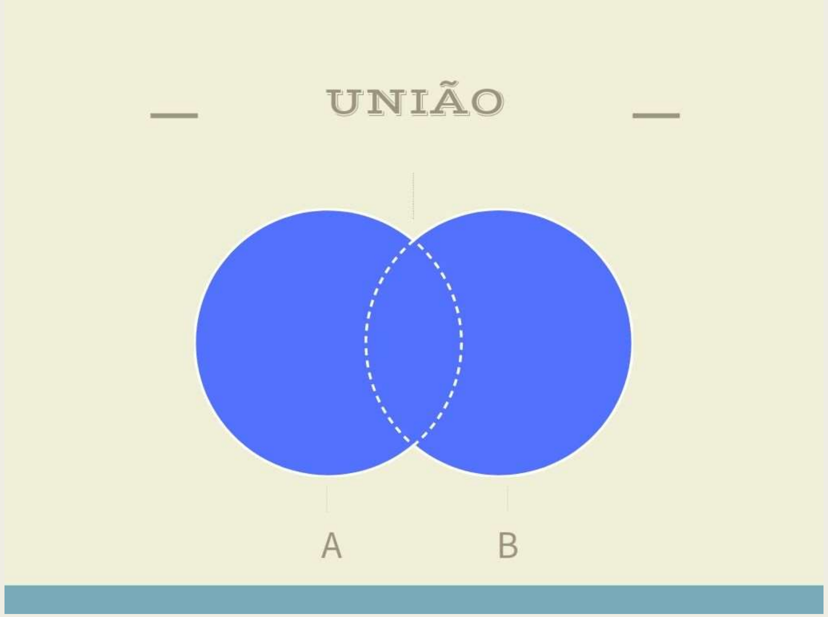
Algebra e Ciências da Computação

- 1950: Teoria dos Autômatos e Linguagens Formais.
- Definição de um conjunto de operações sobre uma coleção de objetos.
- Algebra de Conjuntos --> Operações a serem realizadas sobre conjuntos.

OPERAÇÕES NÃO REVERSÍVEIS

União ou Reunião

- Operação binária que quando aplicada a dois conjuntos, resulta em um conjunto constituído pelos elementos pertencentes a pelo menos um dos dois conjuntos.



Sejam A e B conjuntos, a união de A e B é denotada por:

$$A \cup B$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Exemplo de União

- Sendo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\} \ e \ B = \left\{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = y\right\}$$

- A = {3, 4, 5, 6, 7, ...}
- B = {0, 1}
- $A \cup B$ = {0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, ...}

Propriedades da União

$$\phi \cup \phi = \phi$$

$$\mathbb{U} \cup \phi = \mathbb{U}$$

$$\mathbb{U} \cup A = \mathbb{U}$$

$$\mathbb{U} \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$$

- Elemento Neutro

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

- Idenpotência

$$A \cup A = A$$

- Comutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

- Associativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$
$$= A \cup B \cup C$$

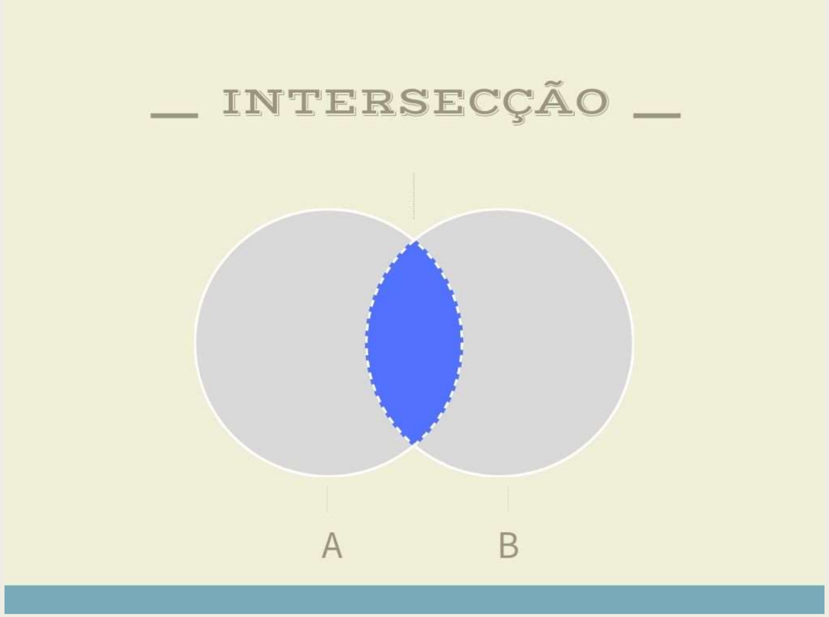
Intersecção

- Operação binária que quando aplicada a dois conjuntos, resulta em um conjunto constituído pelos elementos pertencentes simultaneamente aos dois conjuntos.

Sejam A e B conjuntos, a intersecção de A e B é denotada por:

$$A \cap B$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$



Exemplo de Intersecção

- Sendo:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\right\} \ e \ B = \left\{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = y\right\}$$

- A = {3, 4, 5, 6, 7, ...}
- B = {0, 1}
- $A \cap B$ = { }

Propriedades da Intersecção

$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$$
$$\mathbb{U} \cap \emptyset = \emptyset$$
$$\mathbb{U} \cap A = A$$
$$\mathbb{U} \cap \mathbb{U} = \mathbb{U}$$

- Elemento Neutro

$$A \cap \mathbb{U} = \mathbb{U} \cap A = A$$

- Idenpotência

$$A \cap A = A$$

- Comutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

- Associativa

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cap B \cap C$$

Propriedades da Intersecção

- Distributiva da União sobre a Intersecção

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Distributiva da Intersecção sobre a União

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- Absorção

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

OPERAÇÕES REVERSÍVEIS

Operações Reversíveis possuem Várias Aplicações

- Rollback
- Backtracking

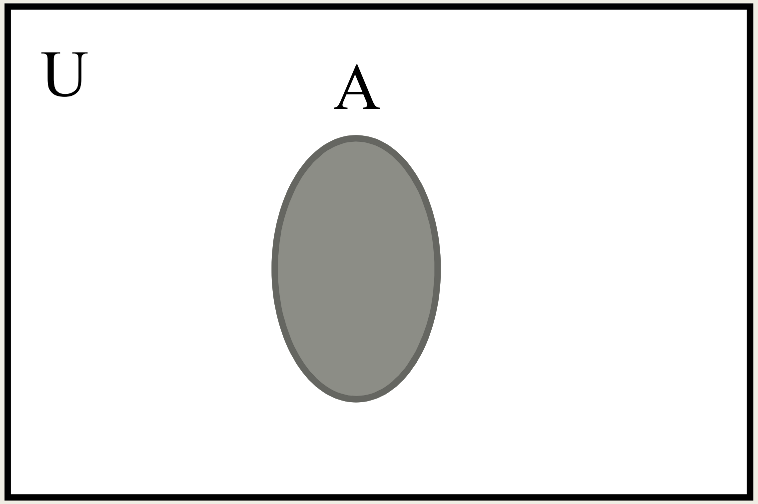
Complemento

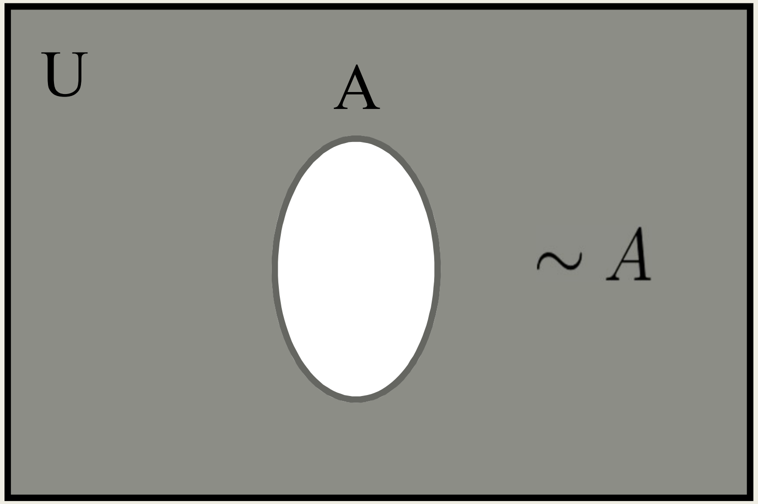
- Operação unitária que é definida de acordo com o conjunto universo U. Estando o conjunto A contido no universo, o complemento de A são todos os elementos do universo que não existem em A.

Sejam A e B conjuntos, a união de A e B é denotada por:

$$\sim A$$

$$\sim A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$





Exemplo de Complemento

- Sendo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\} \ e \ B = \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = y\}$$

- A = {3, 4, 5, 6, 7, ...}
- B = {0, 1}
- $\sim A$ = {0, 1, 2}

Propriedades do Complemento

$$\sim \emptyset = \mathbb{U}$$

$$\sim \mathbb{U} = \emptyset$$

$$A \cup \sim A = \mathbb{U}$$

$$A \cap \sim A = \emptyset$$

Duplo Complemento

$$para, \quad A \subseteq \mathbb{U}$$

$$\sim\sim A = A$$

- Considerando-se o duplo complemento, conclui-se que a negação é reversível.

De Morgan

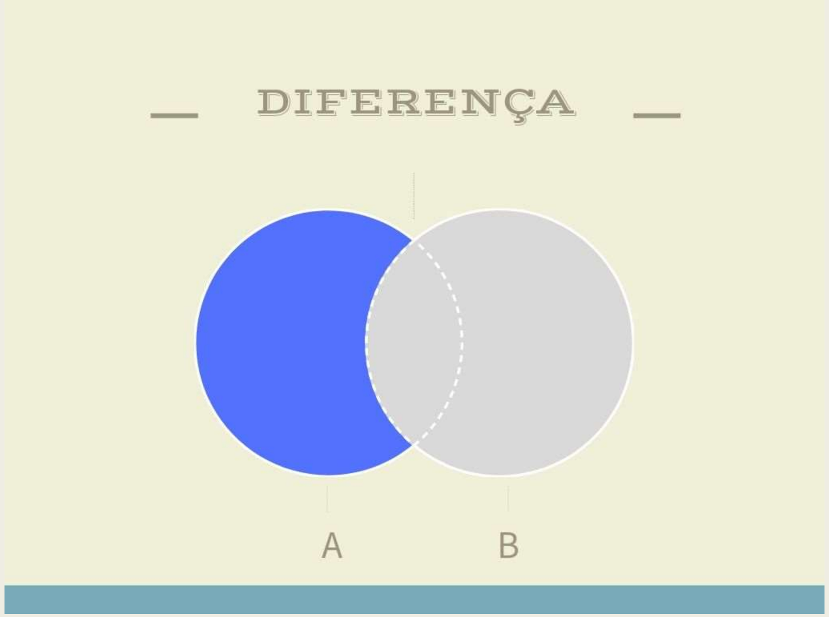
$$\sim (A \cup B) = (\sim A) \cap (\sim B)$$
$$\sim (A \cap B) = (\sim A) \cup (\sim B)$$

- Através do desenvolvimento sobre De Morgan...

$$assim,$$
$$A \cup B = \sim ((\sim A) \cap (\sim B))$$
$$A \cap B = \sim ((\sim A) \cup (\sim B))$$

Diferença

- Operação binária que quando aplicada a dois conjuntos, resulta em um conjunto constituído pelos elementos pertencentes ao conjunto A e que não pertencem ao conjunto B



Sejam A e B conjuntos, a A diferença B é denotada por:

$$A - B$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

Exemplo de Diferença

- Sendo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\} \ e \ B = \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = y\}$$

- A = {3, 4, 5, 6, 7, ...}
- B = {0, 1}
- $A - B$ = {3, 4, 5, 6, 7, ...}

Propriedades da Diferença

$$\emptyset - \emptyset = \emptyset$$
$$\mathbb{U} - \emptyset = \mathbb{U}$$
$$\mathbb{U} - A = \sim A$$
$$\mathbb{U} - \mathbb{U} = \emptyset$$

Diferença e Complemento

$$A - B = A \cap (\sim B)$$

A operação diferença não pode ser revertida

Conjunto das Partes ou Conjunto Potência

- Dado um conjunto A, define-se uma operação chamada conjunto das partes ou conjunto potência, aplicada a A, que resulta no conjunto de todos os subconjuntos de A.

- A saber, o número de conjuntos obtidos na operação conjunto das partes é como segue abaixo:

$$P(A) \;\; ou \;\; 2^A$$

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

$$|X| = n \;\; P(X) = 2^n$$

Exemplo de Conjunto das Partes

- Sendo:

$$A = \{a\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{a, b, c\}$$
$$D = \{a, \emptyset, \{a, b\}\}$$

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$$
$$P(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$
$$P(C) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Conjunto das Partes é Reversível.

- Ao efetuar a união de todos os conjuntos resultantes. Recupera-se o conjunto original.

Produto Cartesiano

- Operação binária que quando aplicada a dois conjuntos, resulta em um conjunto constituído de sequencias de dois componentes, sendo o primeiro, um elemento pertencente ao conjunto A, e o segundo, um elemento pertencente ao conjunto B.

Sejam A e B conjuntos, a A produto cartesiano B é denotada por:

$$A \times B$$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Sequência Finita:
Uma sequência de n componentes, que é denominada n-upla ordenada.
Consiste de n objetos em uma ordem fixa.
Em particular uma 2-upla ordenada é denominada de par ordenado, onde o primeiro componente é x e o segundo Y.
Exemplo: (x, y)

Exemplo de Produto Cartesiano

$$sendo : A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{0, 1, 2\}$$

$$A \times B = \{(a, a), (a, b)\}$$
$$B \times C = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$$
$$B^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$$

$$(A \times B) \times C = \{((a, a), 0), ((a, a), 1), ((a, a), 2), ((a, b), 0), ((a, b), 1), ((a, b), 2)\}$$
$$A \times (B \times C) = \{(a, (a, 0)), (a, (a, 1)), (a, (a, 2)), (a, (b, 0)), (a, (b, 1)), (a, (b, 2))\}$$

Propriedades do Produto Cartesiano

Não Comutativo

$$B \times C \neq C \times B$$

Não Associativo

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

Propriedades do Produto Cartesiano

Distributividade Sobre a União

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

Distributividade Sobre a Intersecção

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Reversibilidade do Produto Cartesiano

- A união de todos os primeiros elementos, leva ao conjunto A.
- A união de todos os segundos elementos, leva ao conjunto B.

Levando em conta o conjunto resultante { (a, a), (a, b) }

A = {a}

B = {a, b}

União Disjunta

- Na união disjunta, elementos semelhantes são mantidos no resultado final. Para garantir a não repetição a seguinte notação é implementada:

  (elemento, conjunto de origem)

Sejam A e B conjuntos, a união disjunta de A e B é denotada por:

$$A + B$$

$$A+B = \{(a, A) \mid a \in A\ \} \cup \{(b, B) \mid b \in B\}$$

Exemplo:

A = {João, Maria, José}

B = {Pedro, Ana, José}

A + B = { (João, A), (Maria, A), (José, A), (Pedro, B), (Ana, B), (José, B) }

Reversibilidade da União Disjunta

- Como cada elemento possui um identificador do seu conjunto origem, é possível reverter aos conjuntos originais, bastando efetuar a união dos elementos de cada identificador.

Lógica e Conjuntos

Conectivos vs Operadores

Conectivo Lógico	Operação sobre Conjuntos
negação	complemento
disjunção	união
conjunção	intersecção

Relações

Relação Lógica	Relação sobre Conjuntos
implicação	continência
equivalência	igualdade