Lista de Exercícios - Lógica Matemática

1) Suponha que o valor-verdade das proposições p e q são respectivamente, falso e verdadeiro, ou seja: V(p) = F e V(q) = V. Com base nisso, determine o valor lógico das proposições apresentadas abaixo.
   a. $p \wedge \neg q$
   b. $p \vee \neg q$
   c. $\neg p \wedge q$
   d. $\neg p \wedge \neg q$
   e. $\neg p \vee \neg q$
   f. $p \wedge (\neg p \vee q)$

2) Construa as tabelas-verdade das fórmulas listadas abaixo e diga se são tautologias, contradições ou nenhuma das duas.
   a. $\neg(p \vee \neg q)$
   b. $\neg(p \rightarrow \neg q)$
   c. $p \wedge q \rightarrow p \vee q$
   d. $\neg p \rightarrow (q \rightarrow p)$
   e. $\neg q \rightarrow \neg (q \vee p)$
   f. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$
   g. $q \leftrightarrow \neg q \wedge p$
   h. $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$
   i. $\neg(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
   j. $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee r)$
   k. $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$
   l. $\neg p \wedge r \rightarrow q \vee \neg r$
   m. $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \neg r$
   n. $\neg (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee s)$
   o. $p \rightarrow (p \rightarrow \neg r) \leftrightarrow q \vee r$
   p. $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\neg p \leftrightarrow q \vee \neg r)$

3) Sabendo que as seguintes proposições, x=0 e x=y, são verdadeiras e que, y=z e y=t, são falsas. Determine o valor-verdade de cada uma das fórmulas abaixo.

a. $(x = 0) \wedge (x = y) \rightarrow (y \neq z)$
b. $(x \neq 0) \vee (y = t) \rightarrow (y = z)$
c. $(x \neq y) \vee (y \neq z) \rightarrow (y = t)$
d. $(x \neq 0) \vee (y \neq z) \rightarrow (y \neq z)$
e. $(x \neq 0) \rightarrow ((y \neq z) \vee (y \neq t))$
f. $(x = 0) \rightarrow ((y \neq z) \wedge (y = t) \wedge (y \neq t))$
g. $(x = 0) \rightarrow ((y \neq z) \vee (y \neq t) \vee (y = t))$

4) Prove que as seguintes equivalências são válidas.

a. IDENPOTENCIA: $p \wedge p \Leftrightarrow p \quad e \quad p \vee p \Leftrightarrow p$
b. COMUTATIVA: $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \quad e \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
c. ASSOCIATIVA: $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r \quad e$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
d. DISTRIBUTIVA: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad e$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
e. DUPLA NEGAÇÃO: $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
f. DE MORGAN: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
g. ABSORÇÃO: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p \quad e \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

5) Prove, por meio de uma tabela-verdade, que o conectivo NAND pode ser expresso usando os conectivos usados nesta disciplina. Abaixo é apresentada a tabela verdade do conectivo NAND.

x	y	x NAND y
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

6) Suponha como universo o conjunto dos números inteiros. Determine o valor-verdade para cada uma das proposições abaixo.
   a. $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(x - 1 < x)$
   b. $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(x^2 > x)$
   c. $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(x + 4 > x)$
   d. $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(x + 2 > 1)$
   e. $(\exists x \in \mathbb{Z})\,(x + 2 = x)$
   f. $(\exists x \in \mathbb{Z})\,(x^2 = x)$
   g. $(\exists x \in \mathbb{Z})\,(|x| = 0)$
   h. $(\forall x \in \mathbb{Z})\,(|x| = x)$

7) Suponha uma variável x pertencente ao conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Caso seja possível, apresente um contraexemplo para cada uma das proposições abaixo.
   a. $(\forall x)(x + 5 < 12)$
   b. $(\forall x)(x\ e'\ primo)$
   c. $(\forall x)(x^2 > 1)$
   d. $(\forall x)(x\ e'\ par)$

8) Suponha duas variáveis x e y pertencentes ao conjunto universo U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}. Determine o valor-verdade para cada uma das proposições abaixo
   a. $(\forall x)(\forall y)(x + 5 < y + 12)$
   b. $(\forall x)(\exists y)(x * y \quad não\ e'\ primo)$
   c. $(\exists x)(\forall y)(x * y \quad não\ e'\ primo)$
   d. $(\exists x)(\exists y)(x^2 > y)$
   e. $(\forall x\ \forall y)\,(x + y > y)$
   f. $(\forall x\ \exists y)\,(x + y > y)$

9) Utilize quantificadores a fim de transpor as proposições para o conjunto dos números inteiros. O valor-verdade de todas as proposições deve obrigatoriamente ser verdadeiro.

   a. $(x - 2) * (x + 2) = x$
   b. $x^2 + 2 \neq 0$
   c. $x^2 + 2x + 1 = 0$