LÓGICA MATEMÁTICA

Gustavo Aurélio Prieto

Justificando...

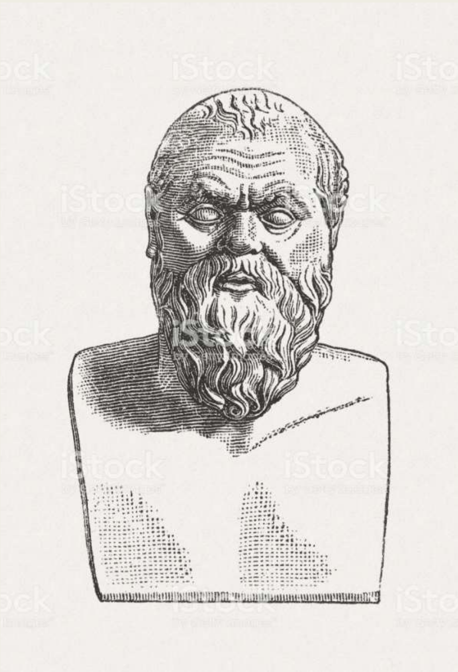
- Para o desenvolvimento de qualquer algoritmo e consequentemente de qualquer software são necessários conhecimentos básicos de lógica.

Teorema --> problema a ser implementado

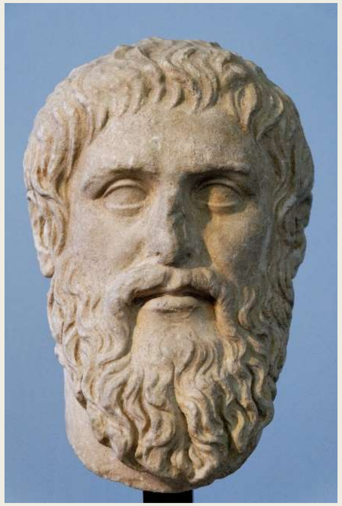
Demonstração --> solução computacional ou algoritmo

- Ou seja: se o algoritmo funciona, o problema possui solução!

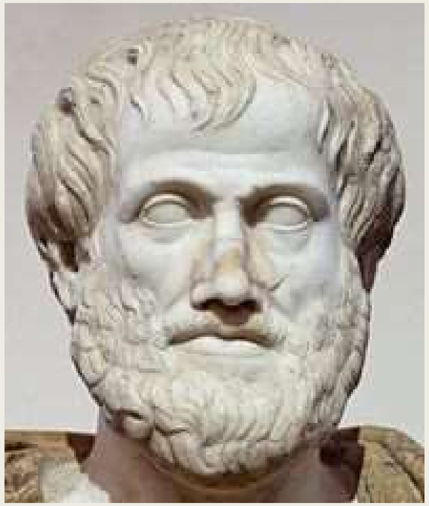
Grécia Antiga



Sócrates



Platão



Aristóteles

Aristóteles (384 a.c – 322 a.c)

- Aluno de Platão;
- Tutor de Alexandre o Grande;
- Foi influenciado por Sócrates e Platão;
- Influenciou toda a filosofia ocidental.
- Somente um terço do seu trabalho chegou até os dias de hoje.

Estudos:

- Física;
- Metafísica;
- Poesia
- Drama e a Música;
- Lógica;
- Retórica;
- Governo;
- Biologia e Zoologia.

Contribuições de Aristóteles - Organon

- Estabelecimento da lógica e da terminologia científica;
- Causa e efeito;
- Pensamento Dedutivo
  - *A conclusão se segue das premissas;*
    - `Se p então q`
    - `p`
    - `Logo, q`
  - *Do geral para o específico;*
  - *Classificação.*

Lógica Booleana

- Criada por Georges Boole, matemático inglês (1815-1864);
- "The Laws of Thought" - 1854
  - Evolução da Lógica Aristotélica no campo da matemática.
  - *Estudos e princípios utilizados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas.*

Proposição

- Proposição é uma frase, porém nem todas as frases são proposições.
- Proposição é uma construção (sentença, frase) a qual pode-se atribuir juízo. Ou seja, admite como resposta um dos dois valores lógicos:
  - *Verdadeiro (V);*
  - *Falso (F).*

- Exemplos de Proposição:
  - *A cidade de Salvador é a capital do estado do Amazonas (F);*
  - *O número 712 é ímpar (F);*
  - *Raiz quadrada de quatro é o número 2 (V).*
- Frases que não são Proposições:
  - *Pare!*
  - *Que dia é hoje?*
  - *Qual a cor da sua camisa?*

Leis Fundamentais

Meio Excluído

- Um proposição é falsa ou verdadeira: não há meio termo.

Contradição

- Uma proposição não pode ser, simultaneamente, verdadeira e falsa.

Funcionalidade

- O valor lógico (Verdadeiro ou Falso) de uma proposição composta é unicamente determinado pelos valores lógicos de suas proposições constituintes.

Álgebra Booleana

- Álgebra Tradicional:
  - *Uma variável pode assumir valores que vão de menos infinito a mais infinito.*
- Álgebra Booleana:
  - *Uma variável pode assumir somente dois valores Verdadeiro (V) ou Falso (F).*
- Proposição → Variável Booleana.
  - *Exemplo:*
    - “2 + 2 é igual a 1” = a
    - “hoje é sábado” = b

Proposição

- Proposição Atômica: não pode ser decomposta em proposições menores.
  - Exemplo: Buenos Aires é a capital do Brasil.
- Proposição Composta: proposições complexas criadas a partir da combinação de proposições atômicas através do uso de conectivos (e, ou, não, etc...).
  - Exemplo: Vou comprar um desktop ou um notebook.

Conjunção - (e)

- A conjunção retorna verdade apenas quando as duas entradas são verdadeiras;
- Em todos os outros casos a conjunção retorna falso.

$$a \wedge b \qquad\qquad a\ e\ b$$

a	b	$a \wedge b$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disjunção - (ou)

- A disjunção retorna verdade quando qualquer uma das entradas são verdadeiras;
- Somente quando as duas entradas são falsas a disjunção retorna falso.

$$a \vee b \qquad\qquad a \; ou \; b$$

a	b	$a \vee b$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Negação - (não)

- A negação retorna verdade quando a entrada é falsa.
- Caso a entrada seja verdadeira a negação retorna falso.

a	$\neg a$
F	V
V	F

$\neg a$ $\quad\quad$ $não\ a$

Condição - (se...então)

- A condição parte da noção de que uma premissa verdadeira sempre leva a uma conclusão verdadeira.
- Caso a premissa seja falsa, nada se pode afirmar. Assim:
  - A condição retorna falso quando a premissa "a" é verdadeira e a conclusão "c" é falsa;
  - A condição retorna verdadeiro em caso contrário;

a	c	$a \to c$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

$a \to c$ $\quad$ $se\ a\ então\ c$

Bicondição

- A bicondição parte da noção de que é uma condição "nos dois sentidos":
  - Sentido de "ida": "a" é a premissa e "d" é a conclusão;
  - Sentido de "volta": "d" é a premissa e "a" é a conclusão;
- Assim, a bicondição retorna verdadeiro quando ambas as entradas são verdadeiras ou ambas as entradas são falsas;
- A bicondição retorna falso em caso contrário.

a	d	$a \leftrightarrow d$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$a \leftrightarrow d \qquad a \ se \ e \ somente \ se \ d$

Fórmula Lógica

- Sentença corretamente construída através de um alfabeto constituído dos seguintes símbolos:
  - Conectivos;
  - Parênteses;
  - Identificadores (variáveis);
  - Constantes.
- O resultado de uma fórmula depende tão somente das variáveis que as constituem.

Ordem de Precedência

- Parênteses (mais internos para os mais externos);
- Negação;
- Conjunção e Disjunção;
- Condição;
- Bicondição.

Tabelas-verdade

- O objetivo das tabelas-verdade é permitir o estudo passo-a-passo do comportamento de uma fórmula lógica.
- Como construir uma tabela-verdade:
  1. Definir a equação a ser estudada;
  2. Identificar as variáveis de entradas e escrever todas as possíveis combinações para as mesmas;
  3. Solucionar a fórmula, operador a operador, respeitando as normas de precedência.

Exemplo de Cálculo de Tabela-verdade

$a \wedge (\neg b)$

1

a	b
F	F
F	V
V	F
V	V

2

a	b	$\neg b$
F	F	V
F	V	F
V	F	V
V	V	F

3

a	b	$\neg b$	$a \wedge (\neg b)$
F	F	V	F
F	V	F	F
V	F	V	V
V	V	F	F

$$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
F	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

Tautologia

- Seja uma fórmula w, então:
- Diz-se que w é uma tautologia se w é verdadeira para todas as combinações possíveis de suas sentenças variáveis.
- A fórmula:

$$a \vee \neg a$$

- É uma tautologia.

a	$\neg a$	$a \vee \neg a$
F	V	V
V	F	V

Contradição

- Seja uma fórmula w, então:
- Diz-se que w é uma contradição se w é falsa para todas as combinações possíveis de suas sentenças variáveis.
- A fórmula:

$$a \wedge \neg a$$

- É uma contradição.

a	$\neg a$	$a \wedge \neg a$
F	V	F
V	F	F

Relação de Implicação

- Sejam a e b duas fórmulas, então a implica b, denotado por:

$$a \Rightarrow b \quad ou \quad a \models b$$

- Se e somente se:

$$a \rightarrow b \quad e' \; uma \; tautologia$$

Exemplo: Implicação de Adição

- Adição:

$$a \Rightarrow a \vee b$$

- A implicação fica comprovada se a condição:

$$a \rightarrow a \vee b$$

- É uma tautologia.

a	b	$a \vee b$	$a \rightarrow a \vee b$
F	F	F	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	V	V

Exemplo: Implicação de Simplificação

- Simplificação:

$$a \wedge b \Rightarrow a$$

- A implicação fica comprovada se a condição:

$$a \wedge b \rightarrow a$$

- É uma tautologia.

a	b	$a \wedge b$	$a \wedge b \rightarrow a$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

Relação de Equivalência

- Sejam a e b duas fórmulas, então a equivale a b, denotado por:

$$a \Leftrightarrow b$$

- Se e somente se:

$$a \leftrightarrow b \qquad e' \; uma \; tautologia$$

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Fica comprovada se a bicondição: $a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ É uma tautologia

a	b	c	$b \wedge c$	$a \vee (b \wedge c)$	$a \vee b$	$a \vee c$	$(a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
F	F	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	V	V

$$a \leftrightarrow b \Leftrightarrow (a \rightarrow b) \land (b \rightarrow a)$$

Verifique se a bicondição é uma Tautologia

$$a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \rightarrow b) \land (b \rightarrow a)$$

Se a tautologia é confirmada, então provamos formalmente que a **bicondição** pode ser expressa por duas condições.

a	b	$a \leftrightarrow b$	$(a \rightarrow b)$	$(b \rightarrow a)$	$(a \rightarrow b) \land (b \rightarrow a)$	$a \leftrightarrow b \leftrightarrow (a \rightarrow b) \land (b \rightarrow a)$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V
V	V	V	V	V	V	V

$$a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$$

Verifique se a bicondição é uma Tautologia

$$a \to b \leftrightarrow \neg b \to \neg a$$

Se a tautologia é confirmada, então provamos formalmente a equivalência conhecida como **contraposição.**

a	b	$a \to b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg b \to \neg a$	$a \to b \leftrightarrow \neg b \to \neg a$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	V	V

$$a \to b \Leftrightarrow a \land \neg b \to F$$

Verifique se a bicondição é uma Tautologia

$$a \to b \Leftrightarrow a \land \neg b \to F$$

Se a tautologia é confirmada, então provamos formalmente a equivalência conhecida como redução ao absurdo.

a	b	$a \to b$	$\neg b$	$a \land \neg b$	$a \land \neg b \to F$	$a \to b \leftrightarrow a \land \neg b \to F$
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
V	V	V	F	F	V	V

PROPOSIÇÕES E CONJUNTOS

Quantificadores

- Considerando a sentença abaixo:

$$n > 1$$

- Dependendo do valor de *n* a sentença pode assumir um valor verdadeiro ou falso.
- Assim, para cada valor de *n* a sentença se torna uma proposição diferente.

Proposição Sobre um Conjunto

- Dado um elemento x:

$$x \in A$$

- Pode-se definir uma proposição p que descreve uma propriedade deste elemento.

$$p(x)$$

- Esta proposição define dois conjuntos:

Conjunto Falsidade de p	Conjunto Verdade de p
$\{x \in A \mid p(x)\ e'\ falsa)\}$	$\{x \in A \mid p(x)\ e'\ verdadeira)\}$

Exemplo:

- Para a proposição:

$$n! < 10$$

$$\{1, 2, 3\} \quad e' \; o \; conjunto \; verdade$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\} \quad e' \; o \; conjunto \; falsidade$$

Quantificadores

$$\forall$$

Quantificador Universal

- Para todo x pertencente a A, p(x)

$$\forall x \in A,\ p(x)$$

- Ou seja, a proposição é verdadeira para todos os elementos x, pertencentes ao conjunto A.

$$\exists$$

Quantificador Existencial

- Existe (pelo menos) um x pertencente a A, p(x)

$$\exists\ x \in A,\ p(x)$$

- Ou seja, a proposição é verdadeira para pelo menos um elemento x, pertencente ao conjunto A.

Exemplo Quantificadores

verificar o valor-verdade para cada uma das proposições

- P(n) = n < 1
  - Conjunto verdade: {0}
  - Conjunto falsidade: {1, 2, 3,...}

Assim,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(n < 1) \qquad e' \; falsa$$

$$(\exists n \in \mathbb{N})\,(n < 1) \qquad e' \; verdadeira$$

- P(n) = n + 1 > n
  - Conjunto verdade: {0, 1, 2, ...}
  - Conjunto falsidade: { }

Assim,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(n + 1 > n) \qquad e' \; verdadeira$$

$$(\exists n \in \mathbb{N})\,(n + 1 > n) \qquad e' \; verdadeira$$