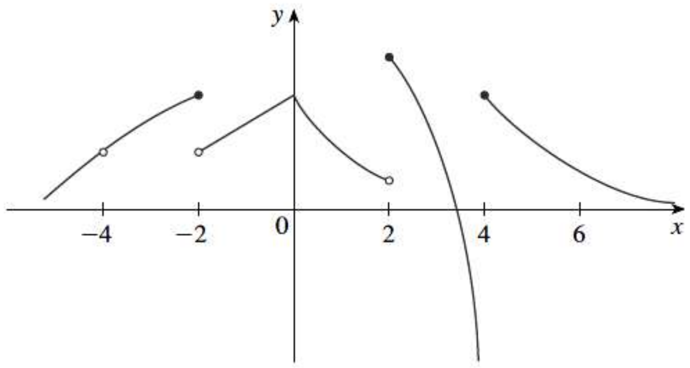
TAREFA DA SEMANA 06

01. (0,25 ponto) (Stewart) Se f é contínua em $(-\infty,\infty)$, o que se pode dizer sobre seu gráfico?

02. (Stewart) Considere o gráfico de f esboçado abaixo.



a) (0,25 ponto) Estabeleça os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
b) (0,5 ponto) Para cada um dos números estabelecidos na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.

03. (Stewart) (0,5 ponto) Explique por que a função definida abaixo é descontínua em $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{, se } x\neq 1\\ 1 & \text{, se } x=1\end{cases}$$

04. (Stewart) Explique, usando os teoremas estudados, por que as funções abaixo são contínuas em todos os números de seu domínio. Estabeleça o domínio.

a) (0,25 ponto) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$

b) (0,25 ponto) $f(x)=e^x\cdot \operatorname{sen}5x$

05. (Stewart) Use continuidade para calcular os limites:

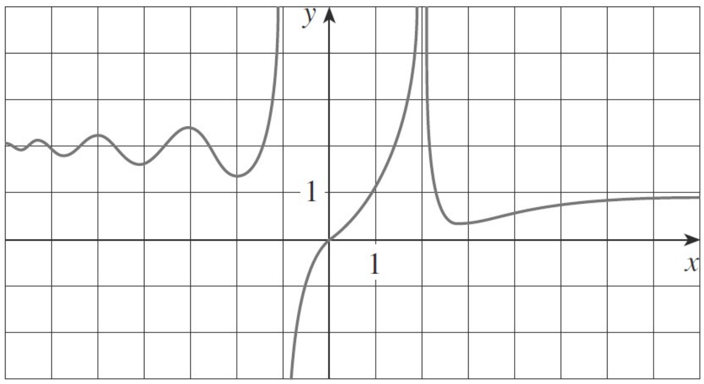
a) (0,25 ponto) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

b) (0,25 ponto) $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}x)$

06. (1,0 ponto) (Stewart) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação $x^4+x-3=0$ no intervalo $]1,2[$.

07. (Stewart) Responda:
a) (0,5 ponto) O gráfico de $y=f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
b) (0,5 ponto) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y=f(x)$? Ilustre com um gráfico as possibilidades.

08. (0,6 ponto, sendo 0,1 por item) (Stewart) Para a função f, cujo gráfico é dado, determine:



a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

f) As equações das assíntotas.

09. (1,0 ponto, sendo 0,5 por item) (Stewart) Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça todas as condições dadas:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

10. (2,4 pontos, sendo 0,4 por item) (Stewart) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{x-4}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+x^5\right)$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3+x^5}{1-x^2+x^4}$

11. (Stewart) Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva.

a) (0,75 ponto) $y=\dfrac{x}{x+4}$

b) (0,75 ponto) $y=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$

GABARITO DA TAREFA DA SEMANA 06

01. Pode-se dizer que o seu gráfico não tem buraco, quebra, salto ou assíntota vertical. Em outras palavras, pode-se desenhar o gráfico de f sem a necessidade de levantar a caneta do papel.

02. a) f é descontínua em

- -4, pois a função não está definida para $x=-4$ (buraco)
- -2, pois não existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ (há um salto no gráfico)
- 2, pois não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (há um salto no gráfico)
- 4, pois $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$ (assíntota vertical no gráfico)

b) f é descontínua tanto a direita quanto à esquerda em -4, contínua à esquerda em -2 e contínua à direita em 2 e em 4.

03. A função é descontínua em $x=1$ pois $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$, já que

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2} \text{ e } f(1)=1.$$

04. a) A função é contínua em todo os números de seu domínio pois é uma função racional. O seu domínio é $D_f=\mathbb{R}-\{-3,-2\}$.

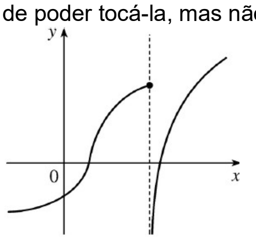
b) A função é contínua em todo os números de seu domínio pois é resultado do produto de duas funções contínuas em todos os números reais: $y=e^x$ é função exponencial e $y=\operatorname{sen}5x$ é uma função composta entre uma função trigonométrica e uma função polinomial. O domínio de f é $D_f=\mathbb{R}$.

05. a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}=\dfrac{7}{3}$

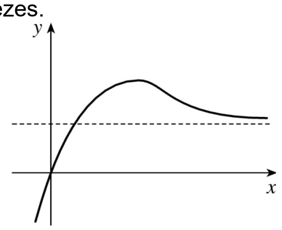
b) $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen}x)=0$

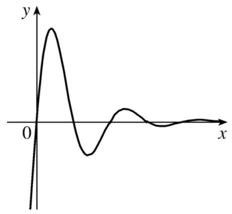
06. Seja $f(x)=x^4+x-3$. Temos $f(1)=-1$ e $f(2)=15$. Como $f(1)<0<f(2)$ e f é contínua em $[1,2]$, uma vez que é um polinômio, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existe um número c entre 1 e 2 tal que $f(c)=0$. Em outras palavras, está provado que a equação dada tem pelo menos uma raiz no intervalo $]1,2[$.

07. a) O gráfico de uma função pode interceptar uma assíntota vertical no sentido de poder tocá-la, mas não atravessá-la.

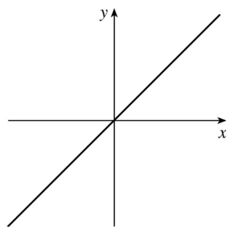


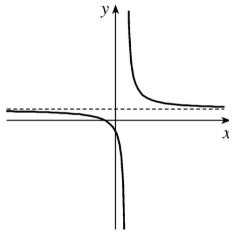
O gráfico de uma função pode interceptar uma assíntota horizontal. Pode, inclusive, interceptá-la um número infinito de vezes.

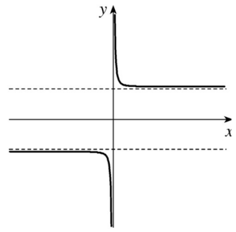




b) O gráfico de uma função pode ter 0, 1 ou 2 assíntotas horizontais.







08. a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\infty$

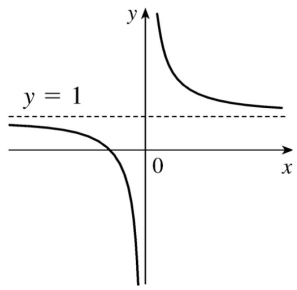
c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=1$

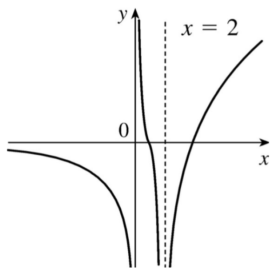
e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$

f) Assíntotas verticais: $x=-1$ e $x=2$
Assíntotas horizontais: $y=1$ e $y=2$

09. a)



b)



10. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x+3}=0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{x-4}=3$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}=-\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ não existe

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+x^5\right)=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^3+x^5}{1-x^2+x^4}=\infty$

11. a) Assíntota Horizontal: $y=1$; Assíntota Vertical: $x=-4$

b) Assíntota Horizontal: $y=1$; Assíntotas Verticais: $x=1$ e $x=-1$.