INTRODUÇÃO A TEORIA DOS CONJUNTOS

Gustavo Aurélio Prieto

Teoria dos Conjuntos

- Teoria matemática que trata das propriedades dos conjuntos.
- Georg Cantor (1845-1918)
  - *Matemático Russo que emigrou para a Alemanha;*
  - *Trabalho que trata sobre "a comparação de coleções infinitas".*

Conjunto

- Conjunto é uma coleção, sem repetição ou ordenação, de um grupo de elementos.

Elemento

- Objeto contido em um conjunto. Pode ser concreto ou uma entidade abstrata.

Definição de um Conjunto

- Pode-se definir um conjunto listando-se todos os elementos que o compõem (Denotação por Extensão).

$$Vogais = \{a, e, i, o, u\}$$

Definição de um Conjunto

- A definição de um conjunto através da aplicação de uma propriedade é denominada Denotação por Compreensão.

$$X = \{x \mid x \in \mathbb{N} \;\; e \;\; x > 10 \;\; e \;\; x < 20\}$$

- Lê-se: o conjunto de todos os elementos x tal que x é um número par.

Definição de um Conjunto

- Assim, a forma geral da definição de um conjunto por propriedade é:

$$\{x \mid p(x)\}$$

- Um determinado elemento x, faz parte deste conjunto desde que a propriedade p é verdadeira para x, ou seja, p(x) é verdadeira.

Pertinência

- Se um determinado elemento a pertence a um conjunto A.

$$a \in A$$

- a pertence ao conjunto A.

- Se um determinado elemento b não pertence a um conjunto B.

$$b \notin B$$

- b não pertence ao conjunto B.

Conjuntos Importantes

Conjunto Vazio

- Conjunto que não possui elementos.

$$\{\} \quad ou \quad \emptyset$$

Conjunto Unitário

- Conjunto composto por um único elemento.

Conjunto dos números pares e primos = {2}

Conjuntos Importantes

$\mathbb{Z}$ $inteiros$

$\mathbb{N}$ $naturais$

$\mathbb{R}$ $reais$

$\mathbb{I}$ $irracionais$

$\mathbb{Q}$ $racionais$

Tipo de Conjuntos

Conjunto Finito

- Pode ser denotado por extensão

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 4 \ \ e \ \ x < 6\}$$

Conjunto Infinito

- Obrigatoriamente deve ser denotado por compreensão

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Definição de uma Linguagem Formal

Alfabeto

- Conjunto finito de símbolos. Cada elemento do alfabeto também pode ser chamado de caractere.

Σ Conjunto Alfabeto

Palavra

- Sequência finita de caracteres de um alfabeto, justapostos.
- Também podem ser chamados de cadeia de caracteres ou sentença.

ε Palavra vazia

Σ^* Conjunto de todas as possíveis palavras sobre o alfabeto

Definição de uma Linguagem Formal

- Linguagem
  - Conjunto de palavras sobre um alfabeto.
- Exemplo de Linguagem:

Suponha o alfabeto:

$$\Sigma = \{a, b\}$$

O conjunto vazio e o conjunto formado pela palavra vazia, são possíveis linguagens sobre o alfabeto. Logicamente:

$$\phi \neq \{\varepsilon\}$$

Outro exemplo de linguagem é o conjunto de todos os palíndromos (palavras idênticas quando lidas da esquerda para a direita ou no sentido inverso).

$$Palindromos = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, aaa, aba, bab, bbb, \ldots\}$$

Subconjunto

- Quando todos os elementos de um conjunto A, também fazem parte de um conjunto B. Neste caso dizemos que A está contido em B:

$$A \subseteq B$$

- Quando esta afirmação é verdadeira, diz-se que A é um subconjunto de B.

Subconjunto

- Quando todos os elementos de um conjunto A, também fazem parte de um conjunto B, mas existe um elemento b que pertence a B e que não pertence a A. Neste caso dizemos que A **está contido própriamente em B:**

$$A \subseteq B,\ mas\ existe\ \ b \in B\ \ e\ \ b \notin A \qquad A \subset B$$

- Quando esta afirmação é verdadeira, diz-se que A é um **subconjunto próprio de B.**

Conjunto Potência

- Denotado por 2^A, sendo A um conjunto.
- Apresenta todos os possíveis subconjuntos de A.
  - $2^A = \{ B \mid B \subset A \}$
  - Sendo, $|2^A| = 2^{|A|}$
- Exemplo:
  - para $A = \{0, 1, 2\}$ temos:
  - $2^A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\} \}$
  - $|2^A| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

Igualdade de Conjuntos

- O conjunto universo, denotado por U contêm todos os conjuntos que estão sendo considerados. Define o contexto de uma discussão e, portanto, não é fixo.
- Definido o conjunto universo U, para qualquer conjunto A, têm-se:

$$A \subseteq U$$

- Assim dois conjuntos A e B são considerados iguais se e somente se possuem exatamente os mesmos elementos. Formalmente:

$$A = B \ \ se\ e\ somente\ se \ \ A \subseteq B \ \ e \ \ B \subseteq A$$

Exemplo de Igualdade

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x > 3 \;\; e \;\; x < 8\} = \{4, 5, 6\} \qquad (1)$$

$$\{4, 5, 6\} = \{4, 4, 5, 5, 5, 6\} \qquad (2)$$

Pois verifica-se que: $\{4, 5, 6\} \subseteq \{4, 4, 5, 5, 5, 6\}$ (3)

$$e \quad \{4, 4, 5, 5, 5, 6\} \subseteq \{4, 5, 6\}$$