ALGEBRA DOS CONJUNTOS

Gustavo Aurélio Prieto

RELAÇÕES

Relações

- Exemplos do Cotidiano que são Relações:
  - Parentesco;
  - Estatura - "maior ou igual";
  - Lista telefônica;
  - "faz fronteira com" - Países;
  - Fila de atendimento.

Definição de Relação

- Suponha A e B conjuntos. Uma Relação R de A em B é um subconjunto de um produto cartesiano, A x B, ou seja:

$$R \subseteq A \times B, \quad se\ (a, b) \in R$$

- Sendo que:
  - *A é denominado domínio, origem ou conjunto de partida de R;*
  - *B é denominado contradomínio, destino ou conjunto de chegada de R;*
  - *R é constituído de um conjunto de pares ordenados;*
  - *Dado o par ordenado (a, b), diz-se que: a relaciona-se com b.*

Exemplo de Relação

- Dado:

A = {a}, B = {a, b} e C = {0, 1, 2}

a) O conjunto vazio é uma relação entre quaisquer dois conjuntos.

b) A x B = { (a, a), (a, b) }

É uma relação com origem em A e destino em B, pois:

$$R \subseteq A \times B$$

Domínio de Definição e Conjunto Imagem

- Sendo:

$$R \subseteq A \times B = R : A \to B$$

- E se:

$$(a, b) \in R = aRb$$

- Então afirma-se que R está definida para a e que b é imagem de A.
  - *O conjunto de todos os elemento de A para os quais R está definida é chamado de **domínio de definição.***
  - *O conjunto de todos os elemento de B, imagem de R, é denominado **conjunto imagem.***

Exemplo: Conjunto de Definição e Conjunto Imagem

- Relação Conjunto Vazio

$$\emptyset : A \to B = \emptyset$$

- Domínio de Definição: ϕ
- Conjunto Imagem: ϕ

- Relação igualdade

$$=: A \to B = \{(a, a)\}$$

- Domínio de Definição = {a}
- Conjunto Imagem = {a}

Endorelação ou Auto-relação

- Sendo A um conjunto, então uma relação com origem em A e destino em A é dita uma endorelação.

$$R : A \to A$$

- Uma endorelação pode ser denotada por (A, R)

Exemplo de Endorelação

$$(B, =) = \{(a, a), (b, b)\}$$

- Relação de igualdade com o conjunto B como origem e destino.

$$(C, <) = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

- Relação “Menor que” com o conjunto C como origem e destino.

Endorelação como um Grafo

- Sendo uma relação:

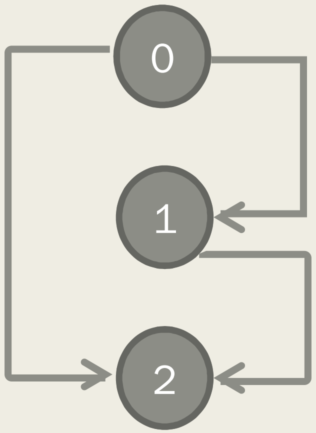
$$R : A \to A$$

- Cada elemento do conjunto A é denominado nodo ou nó.
- Cada relação (a, b) é representada como uma seta com origem em a e destino em b.

Exemplo de Representação de uma Relação como um Grafo

- Dada a Relação:

$$(C, <) = \{(0,1), (0,2), (1,2)\}$$



Relação Como Matriz

- Dados os conjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, ...b_m\}$$
$$R : A \to B$$

- Para representar-se a Relação R como uma matriz:
- Número de linhas n: número de elementos do domínio;
- Número de colunas m: número de elemento no contradomínio;
- Cada uma das mn posições da matriz contém um valor lógico (Verdadeiro ou Falso);
- Se o par ordenado (a_i, b_j) pertence a Relação:
  - *Então a posição da matriz linha i, coluna j recebe o valor Verdadeiro (1);*
  - *Então a posição da matriz linha i, coluna j recebe o valor Falso (0);*

Exemplo de Representação de uma Relação como uma Matriz

- Dada a Relação:

$$(C, <) = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

Relação Dual

- Também chamada de relação oposta ou relação inversa.

$$R^{-1} : B \to A \quad ou \quad R^{op} : B \to A$$
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

- Exemplo de Relação Oposta:

$$<: C \to C = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$
$$<^{op}: C \to C = \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$$

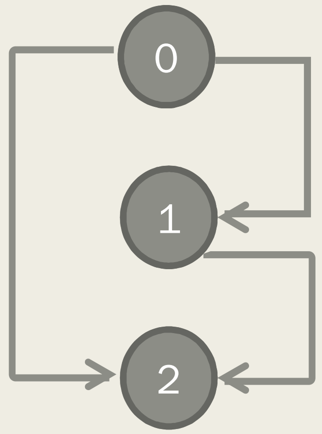
Relação Dual como Grafo

- O resultado de uma relação dual como um grafo é o grafo dual da endorelação, ou seja, é o grafo resultante da inversão do sentido das arestas.

Exemplo de Relação Inversa como um Grafo

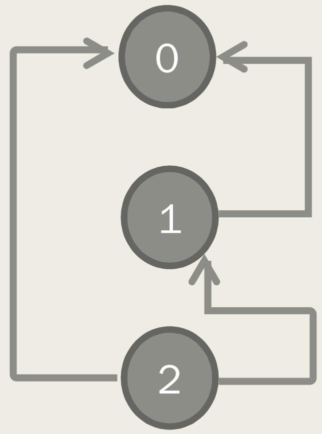
(C, <)

{ (0, 1), (0, 2), (1, 2) }



(C, $<^{op}$)

{ (1, 0), (2, 0), (2, 1) }



Relação Dual como uma Matriz

- A matriz da relação dual é a matriz transposta da matriz da endorelação.

Exemplo de Relação Inversa como uma Matriz

(C, <)

{ (0, 1), (0, 2), (1, 2) }

	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

(C, $<^{op}$)

{ (1, 0), (2, 0), (2, 1) }

	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	1	1	0

Composição de Relações

- Sejam as Relações:

$$R : A \to B \quad e \quad S : B \to C$$

- A composição R e S, resulta em uma relação composta que é denotada por:

$$S \circ R : A \to C$$

$$S \circ R : \{(a, c) \mid (\exists b \in B)(aRb \ \wedge \ bRc)\}$$

Outra Notação

- Na ciência da computação é usual representar a Relação de Composição por “;” e inverter a ordem das relações apresentadas, assim:

$$R : A \to B \quad e \quad S : B \to C$$

$$S \circ R : A \to C$$

$$R; S : A \to C$$

Exemplo de Composição de Relações

$$R : A \to B \quad e \quad S : B \to C$$
$$S \circ R : A \to C$$

$$R = \{(a, 1), (b, 3), (b, 4), (d, 5)\}$$
$$S = \{(1, x), (2, y), (5, y), (5, z)\}$$
$$S \circ R \{(a, x), (d, y), (d, z)\}$$

Composição de Relações como um Produto de Matrizes

$$R : A \to B \qquad (matriz\ \ 4 \times 5)$$
$$S : B \to C \qquad (matriz\ \ 5 \times 3)$$
$$T = S \circ R : A \to C \qquad (matriz\ \ 4 \times 3)$$

Exemplo de Composição de Relações

R	1	2	3	4	5
a	1	0	0	0	0
b	0	0	1	1	0
c	0	0	0	0	0
d	0	0	0	0	1

S	x	y	z
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	1	1

$S \circ R : A \to C$	x	y	z
a	1	0	0
b	0	0	0
c	0	0	0
d	0	1	1

Exemplo de Composição de Relações

$$t_{11} = (r_{11} \wedge s_{11}) \vee (r_{12} \wedge s_{21}) \vee$$
$$(r_{13} \wedge s_{31}) \vee (r_{14} \wedge s_{41}) \vee (r_{15} \wedge s_{51})$$

$$t_{11} = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee$$
$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$$

$$t_{11} = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1$$

Tipos de Relações

- Funcional;
- Injetora;
- Total;
- Sobrejetora;
- Monomorfismo;
- Isomorfismo;
- Epimorfismo;

Relação Funcional

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é uma relação funcional, se e somente se:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1 = b_2)$$

- Cada elemento de A está relacionado a no máximo um elemento de B.

Exemplos de Relações Funcionais

$$A = \{a\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{0, 1, 2\}$$

São	Não São
$\emptyset : A \to B$	$A \times B : A \to B$
$\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$	$<: C \to C$
$=: A \to B$	

Representação de uma Relação Funcional como:

- **Matriz:** Existe no máximo um valor verdadeiro para cada linha da matriz.
- **Grafo:** Existe no máximo uma aresta partindo de cada nodo.

Relação Injetora

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é uma relação injetora, se e somente se:

$$(\forall b \in B)(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)$$
$$(a_1 R b \wedge a_2 R b \to a_1 = a_2)$$

- Cada elemento de B está relacionado a, no máximo, um elemento de A.

Exemplos de Relações Injetoras

$$A = \{a\}\,,\quad B = \{a, b\}\,,\quad C = \{0, 1, 2\}$$

São	Não São
$\emptyset : A \to B$	$B \times A : B \to A$
$\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$	$<: C \to C$
$=: A \to B$	
$A \times B : A \to B$	

Funcional vs Injetora

- As relações funcionais e injetora NÃO SÃO complementares.
- A relação funcional é a relação dual da relação injetora e vice-versa.

Relação Total

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é uma relação total, se e somente se:

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$$

- O domínio de definição é a origem A.

Exemplos de Relações Totais

$$A = \{a\}\,,\quad B = \{a,b\}\,,\quad C = \{0,1,2\}$$

São	Não São
$=: A \to B$	$\{(0,a),(1,b)\} : C \to B$
$A \times B : A \to B$	$<: C \to C$
	$\emptyset : A \to B$

Representação de uma Relação Total como:

- **Matriz:** Existe pelo menos um valor verdadeiro em cada linha da matriz.
- **Grafo:** Existe pelo menos uma aresta partindo de cada nodo.

Relação Sobrejetora

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é uma relação sobrejetora, se e somente se:

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$$

- O conjunto imagem é o destino B.

Exemplos de Relações Sobrejetoras

$$A = \{a\}, \quad B = \{a, b\}, \quad C = \{0, 1, 2\}$$

São	Não São
$=: A \to A$	$=: A \to B$
$\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$	$<: C \to C$
$A \times B : A \to B$	$\emptyset : A \to B$

Total vs Sobrejetora

- As relações totais e sobrejetoras NÃO SÃO complementares.
- A relação total é a relação dual da relação sobrejetora e vice-versa.

Monomorfismo ou Monorelação

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é um monomorfismo, se e somente se for ao mesmo tempo:
  - *Total e*
  - *Injetora*
- O domínio de definição é a origem A e cada elemento de B está relacionado a, no máximo, um elemento de A.

Exemplos de Monomorfismo

$$A = \{a\}\,,\quad B = \{a, b\}\,,\quad C = \{0, 1, 2\}$$

São	Não São
$=: A \to B$	$\emptyset : A \to B$
$A \times B : A \to B$	$<: C \to C$
	$\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$
	$B \times C : B \to C$

Representação de um Monomorfismo como:

- **Matriz:** Existe pelo menos um valor verdadeiro em cada linha (como na relação total) e no máximo um valor verdadeiro em cada coluna (como em uma relação injetora).
- **Grafo:** Existe pelo menos uma aresta partindo de um nodo (como na relação total) e no máximo uma aresta chegando em um nodo (como na relação injetora).

Epimorfismo ou Epirelação

- Seja:

$$R : A \to B$$

- uma relação. Então, R é um epimorfismo, se e somente se for ao mesmo tempo:
  - *Funcional e*
  - *Sobrejetora*
- O conjunto imagem é o destino B e cada elemento de A está relacionado a, no máximo, um elemento de B.

Exemplos de Epirelações

$$A = \{a\}\,, \quad B = \{a, b\}\,, \quad C = \{0, 1, 2\}$$

São	Não São
$=: A \to A$	$\emptyset : A \to B$
$\{(0, a), (1, b)\} : C \to B$	$<: C \to C$
	$=: A \to B$
	$A \times B : A \to B$