SBVESDD: Estruturas de Dados

Aula 07: Estruturas de Dados Não-Lineares - Árvores, Árvores Binárias e Árvores Binárias de Busca

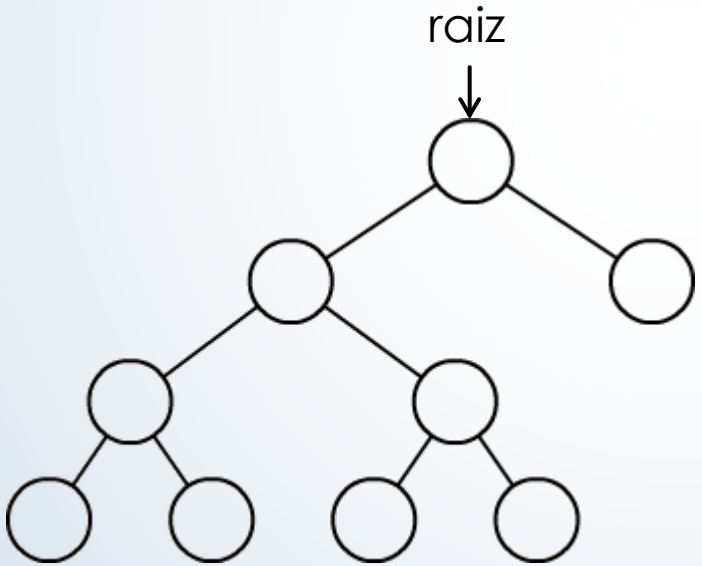
Bacharelado em Ciência da Computação
Prof. Dr. David Buzatto

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

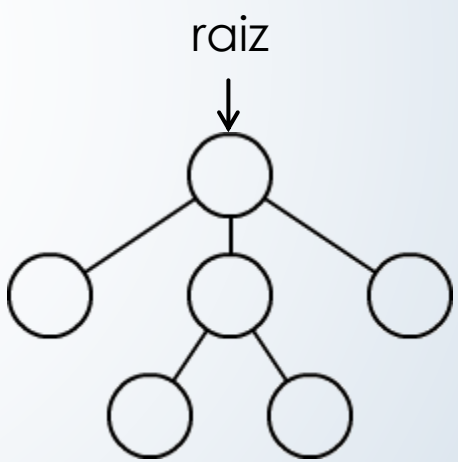
Árvore

- Árvores são grafos acíclicos com um nó ou vértice especial, denominado **raiz**.

Árvore 1



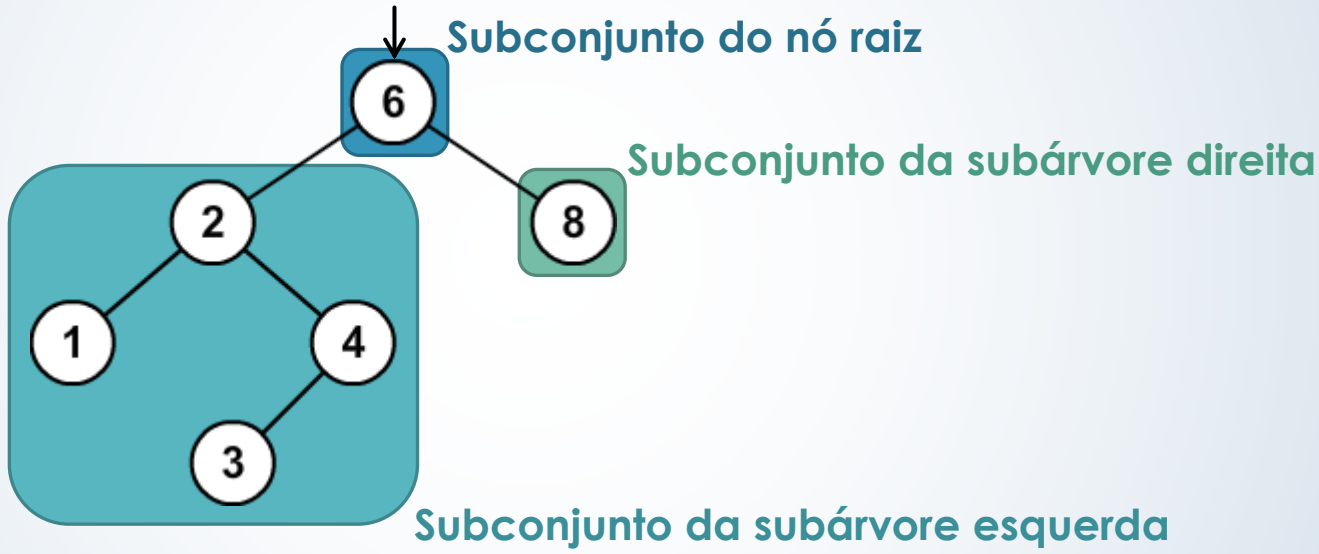
Árvore 2



Árvore Binária

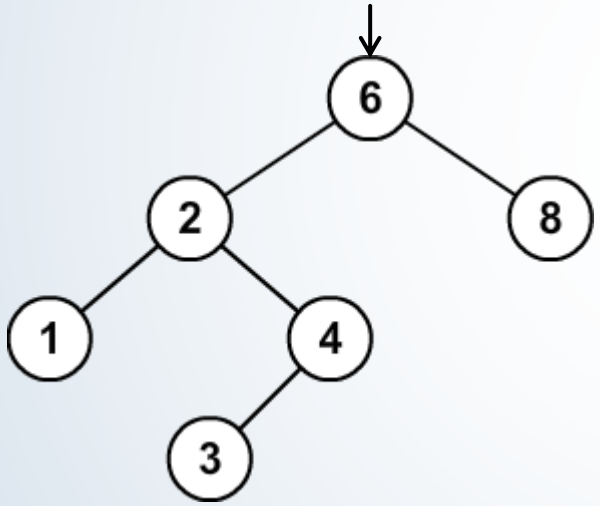
- Conjunto finito de elementos (nós);
- O primeiro nó é chamado de raiz;
- Formada por três subconjuntos:
  - Subconjunto do nó raiz;
  - Subconjunto da subárvore esquerda;
  - Subconjunto da subárvore direita;
- Implica em cada nó poder ter no máximo 2 filhos.

Árvore Binária

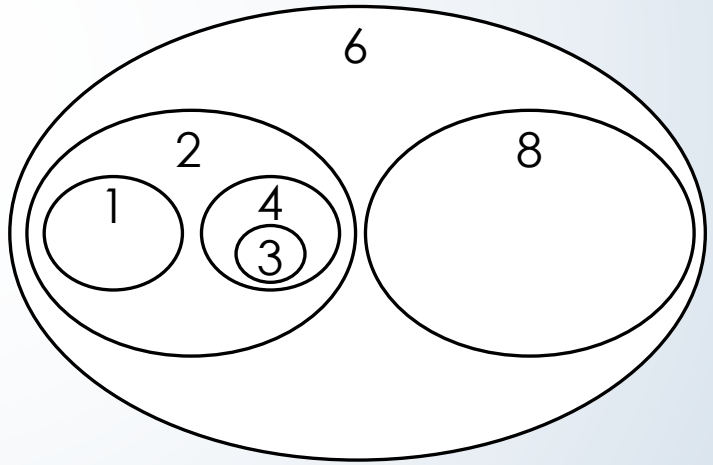


Árvore Binária

Representação em Árvore



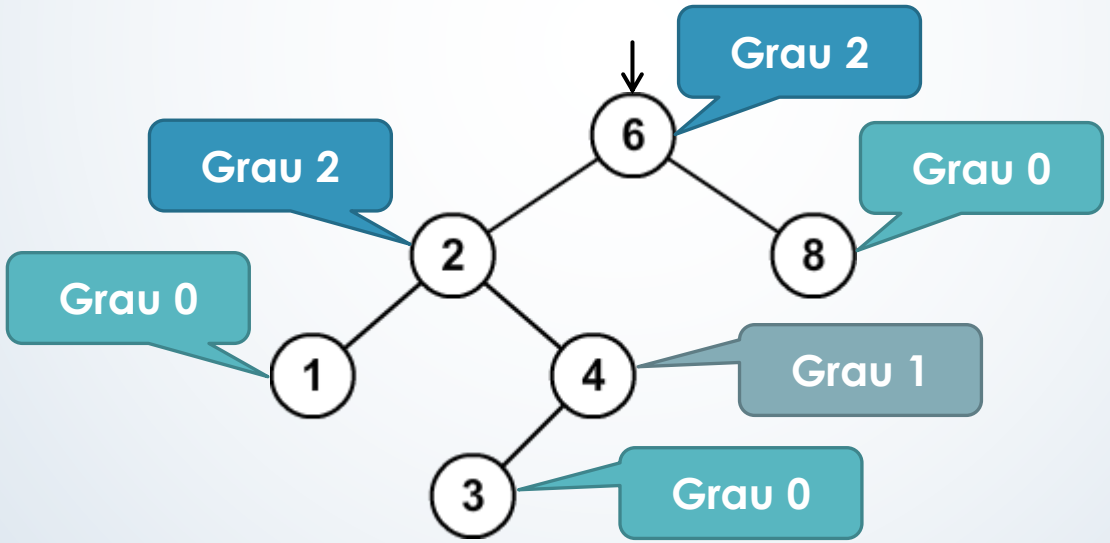
Representação em Conjunto



Árvore Binária

Propriedades

- O **grau** de um nó é igual ao seu número de subárvores;



Árvore Binária

Propriedades

- Em uma árvore binária, o grau máximo de um nó é 2;
- O grau de uma árvore é igual ao máximo dos graus de todos os seus nós;
- Uma árvore binária tem grau máximo igual a 2.

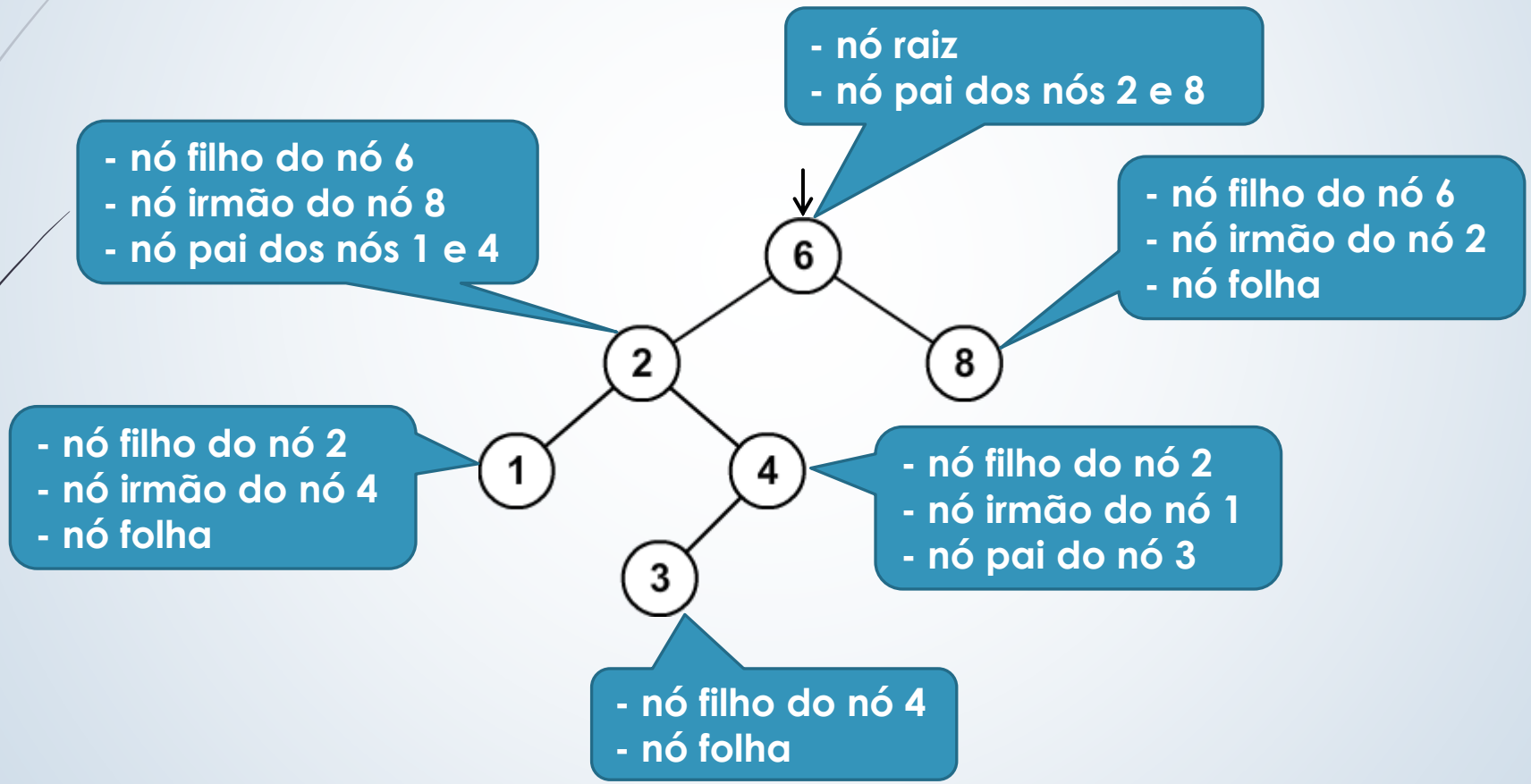
Árvore Binária

Propriedades

- **Nó pai:** nó acima e com ligação direta a outro nó;
- **Nó filho:** nó abaixo e com ligação direta a outro nó;
- **Nós irmãos:** nós que possuem o mesmo pai;
- **Nó folha ou terminal:** nó que não possui filhos;

Árvore Binária

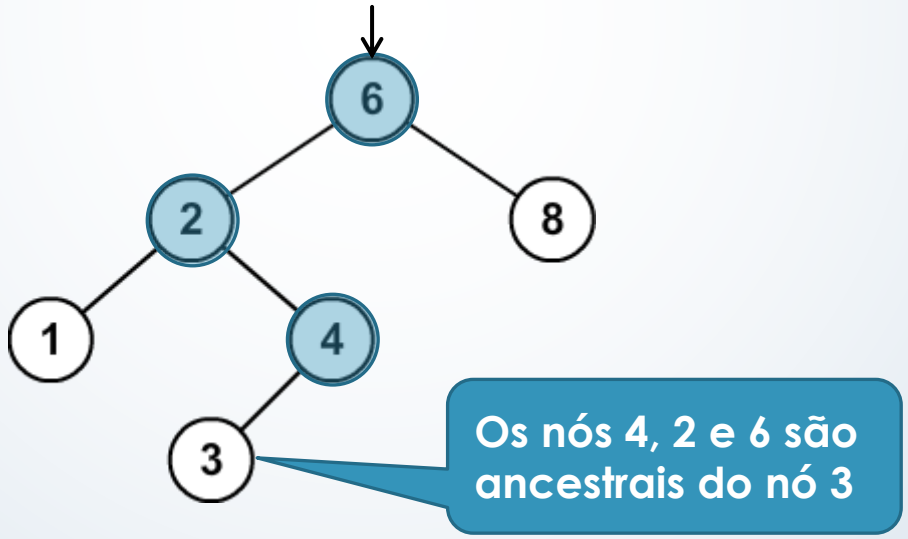
Propriedades



Árvore Binária

Propriedades

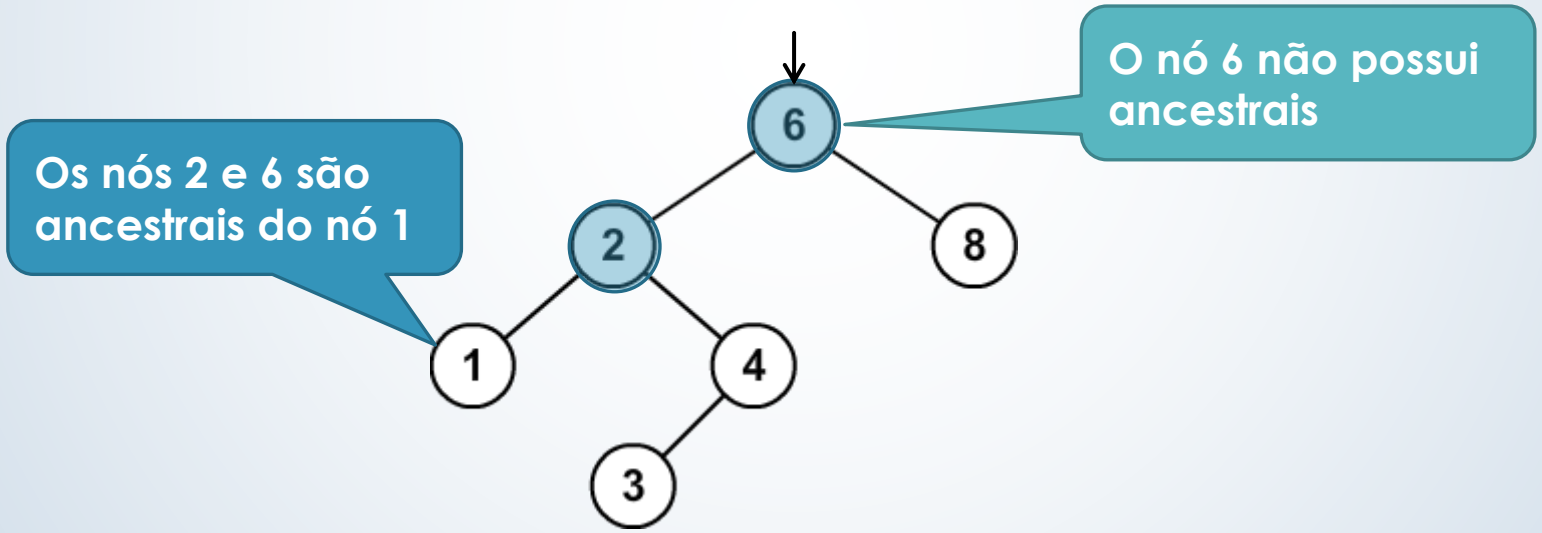
- **Nó ancestral:** nós que estão acima de um nó e possuem ligação direta ou indireta.



Árvore Binária

Propriedades

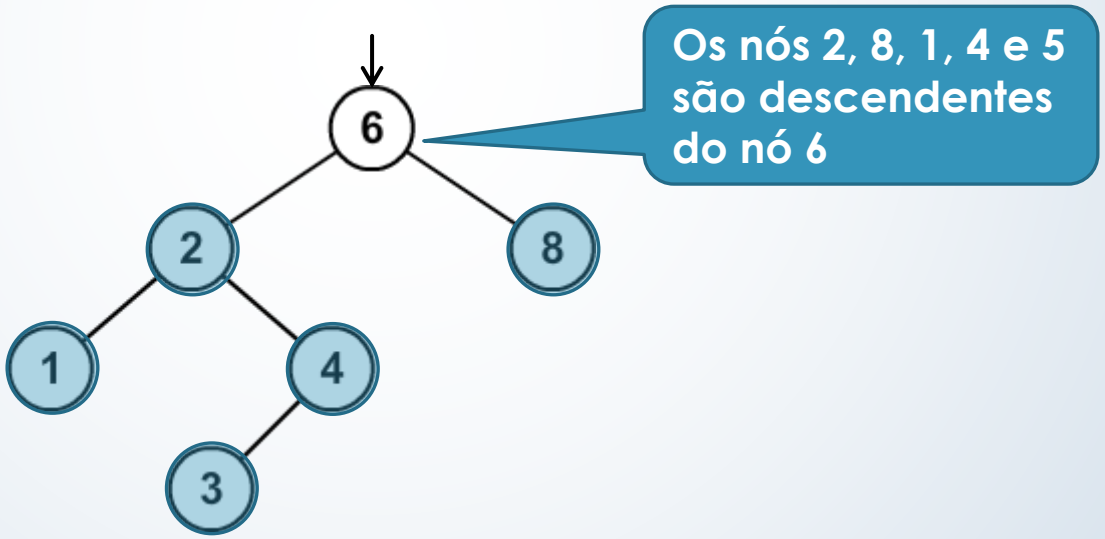
- **Nó ancestral:** nós que estão acima de um nó e possuem ligação direta ou indireta.



Árvore Binária

Propriedades

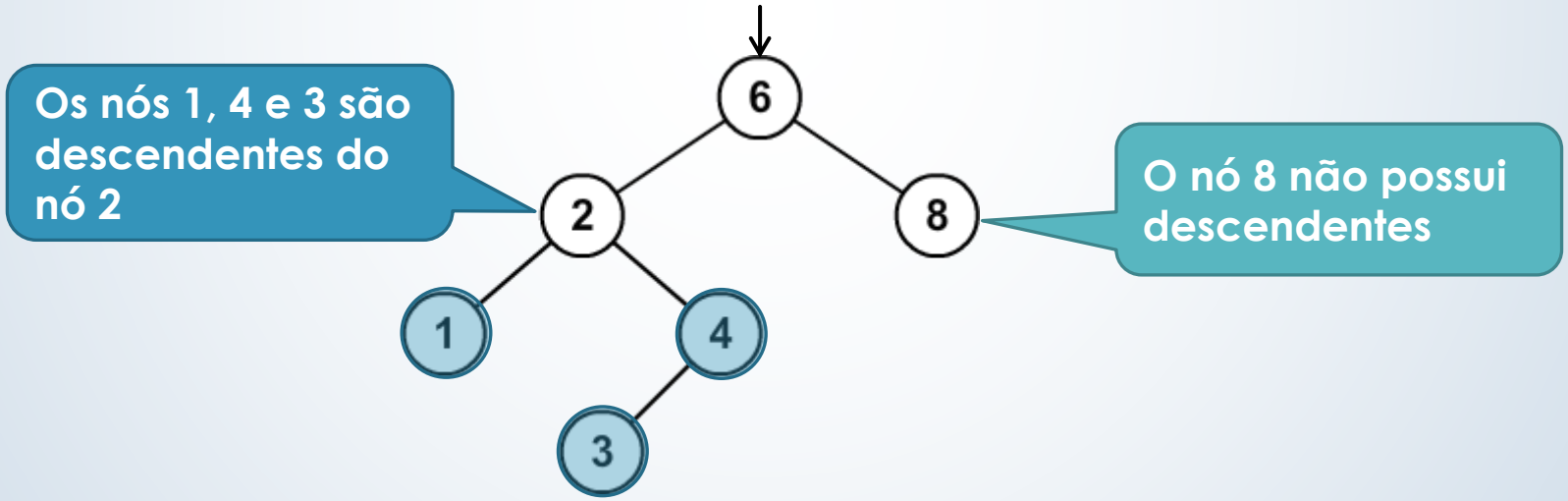
- **Nó descendente:** nós que estão abaixo de um nó e possuem ligação direta ou indireta.



Árvore Binária

Propriedades

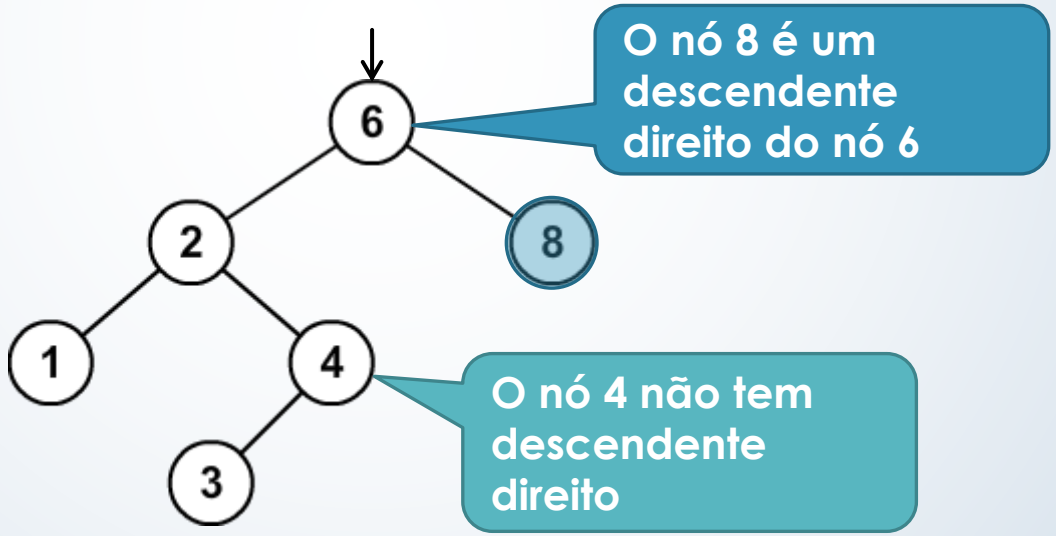
- **Nó descendente:** nós que estão abaixo de um nó e possuem ligação direta ou indireta.



Árvore Binária

Propriedades

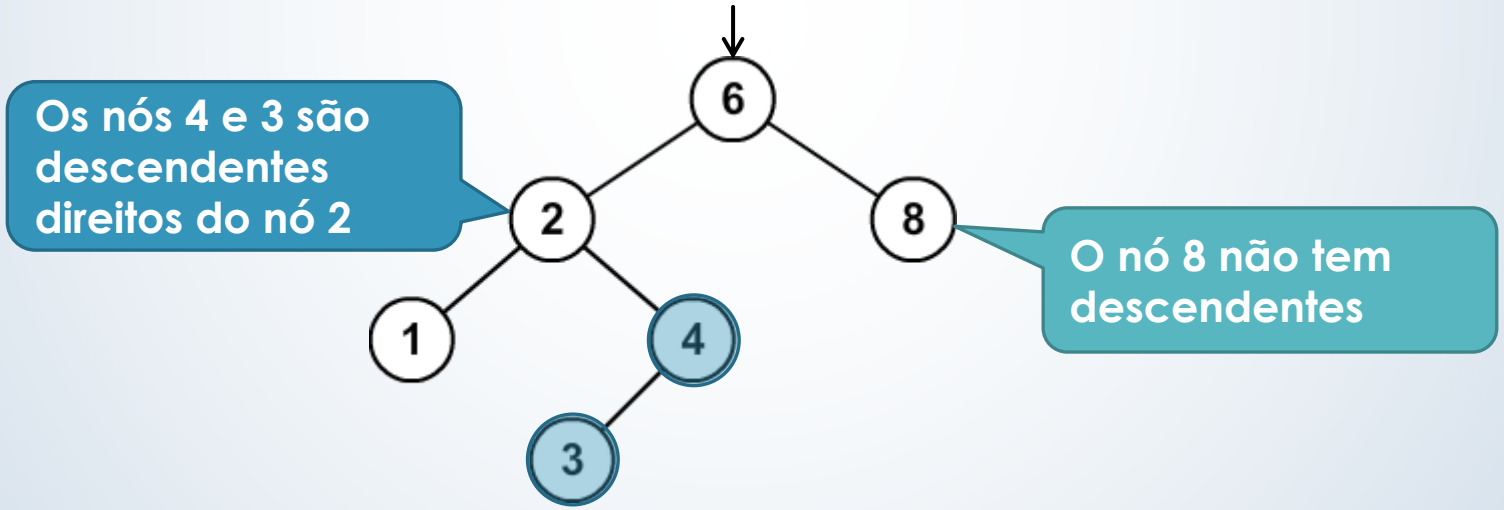
- **Nó descendente direito:** nós que estão abaixo de um nó, possuem ligação direta ou indireta e fazem parte da subárvore direita.



Árvore Binária

Propriedades

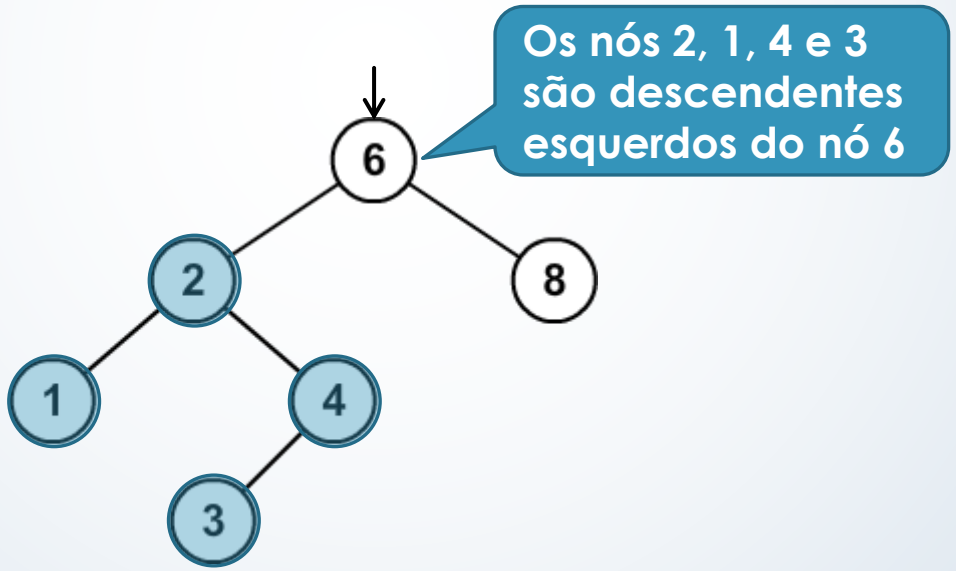
- **Nó descendente direito:** nós que estão abaixo de um nó, possuem ligação direta ou indireta e fazem parte da subárvore direita.



Árvore Binária

Propriedades

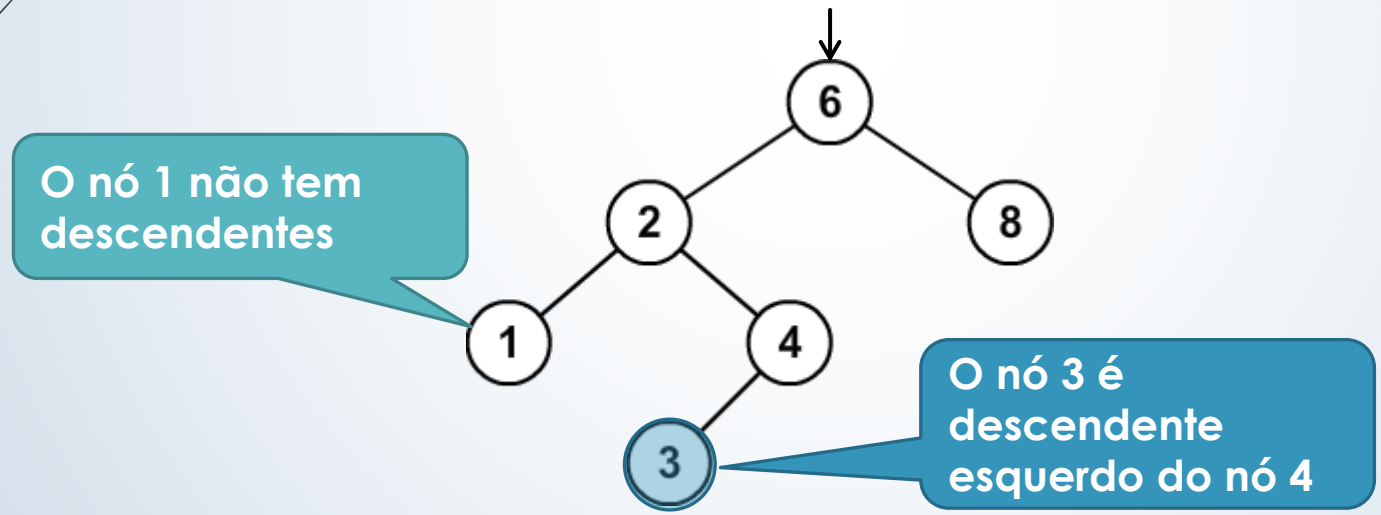
- **Nó descendente esquerdo:** nós que estão abaixo de um nó, possuem ligação direta ou indireta e fazem parte da subárvore esquerda.



Árvore Binária

Propriedades

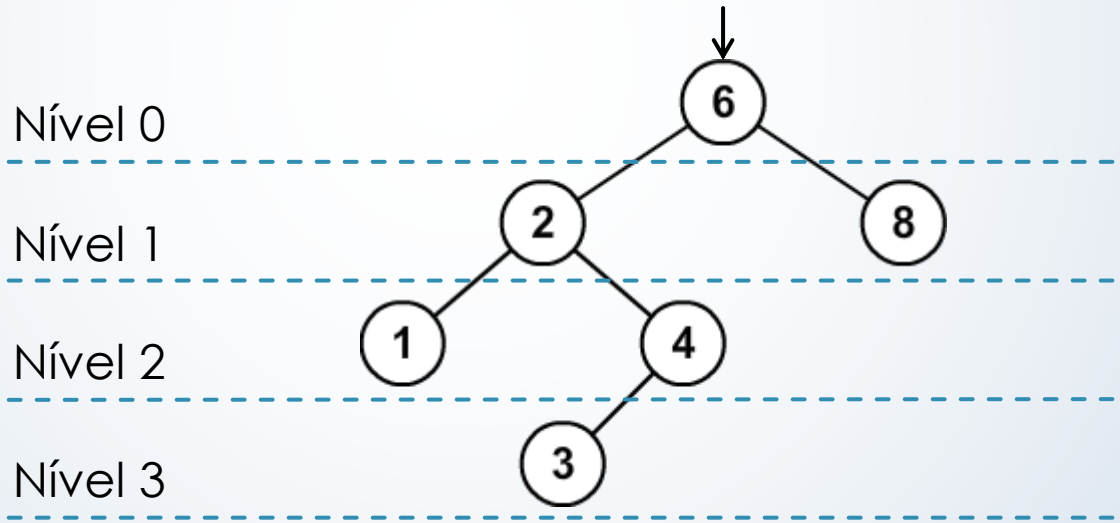
- **Nó descendente esquerdo:** nós que estão abaixo de um nó, possuem ligação direta ou indireta e fazem parte da subárvore esquerda.



Árvore Binária

Propriedades

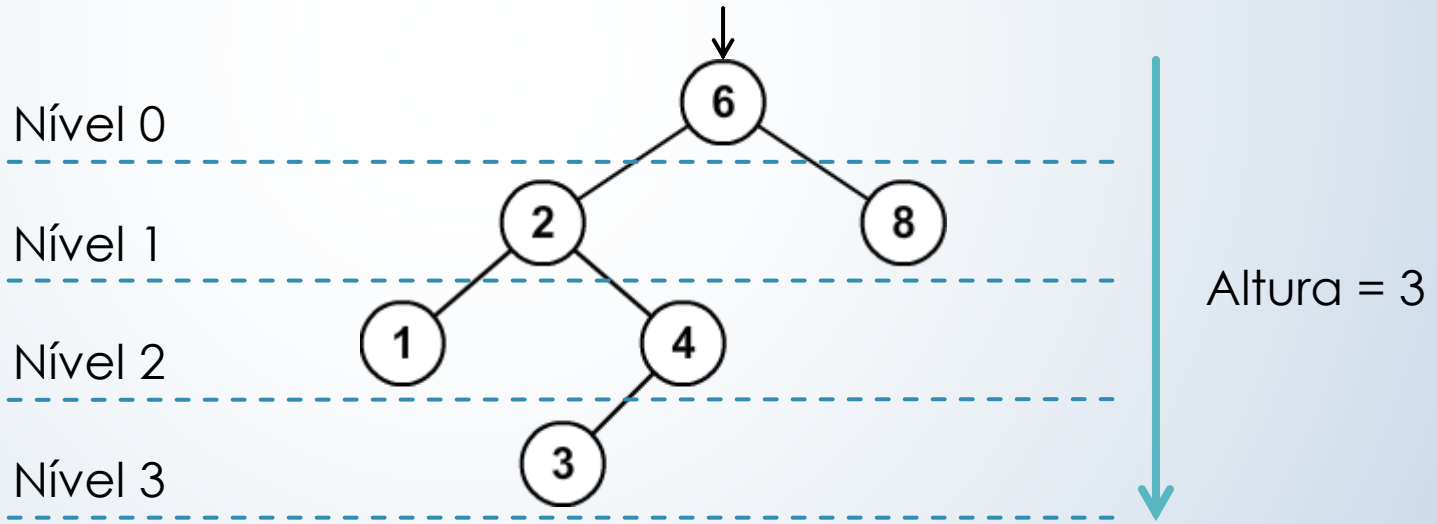
- **Nível de um nó:** é a sua distância em relação ao nó raiz. O nível da raiz é sempre zero.



Árvore Binária

Propriedades

- **Altura ou profundidade de uma árvore:** é o nível do nó mais distante da raiz.



Árvore Binária

Propriedades

- **Número máximo de nós em um nível (k):**

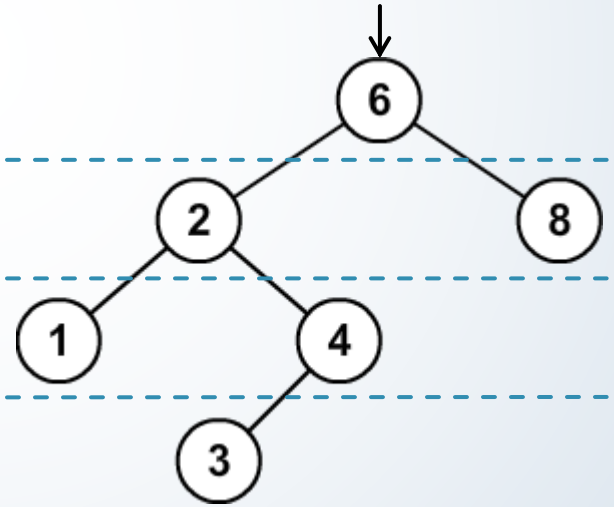
$$k = 2^n \mid n \text{ é o nível}$$

Nível 0 = 2^0 = 1 nó

Nível 1 = 2^1 = 2 nós

Nível 2 = 2^2 = 4 nós

Nível 3 = 2^3 = 8 nós

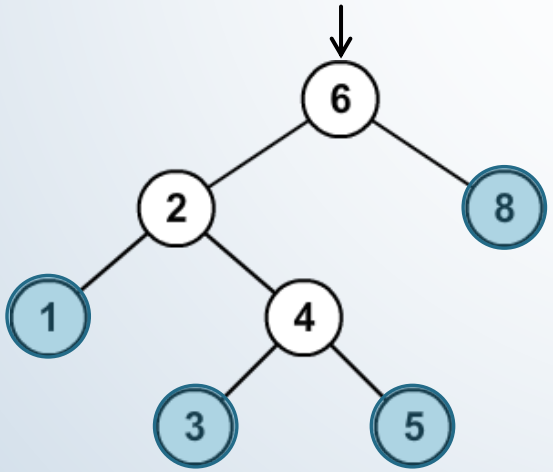


Árvore Binária

Propriedades

- **Árvore estritamente binária:** árvore em que todos os nós tem 0 ou 2 filhos;
- **Número de nós de uma árvore estritamente binária (k):**

$$k = 2n - 1 \mid n \text{ é a quantidade de nós folha}$$

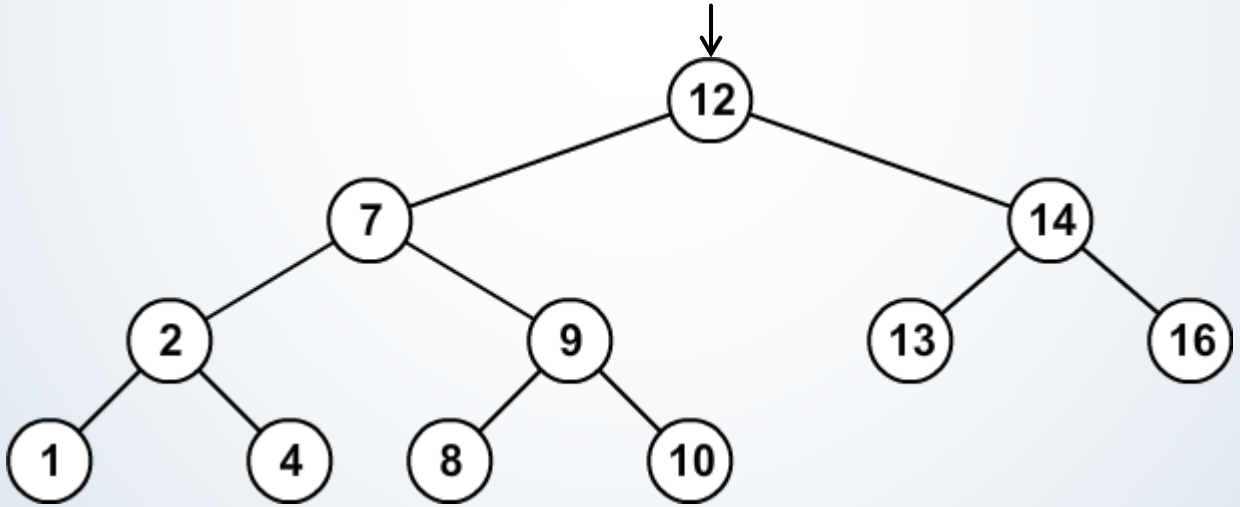


Quantidade de nós folha: 4
Os nós folha são: 1, 3, 5, e 8
Número de nós da árvore estritamente binária:
$k = 2n - 1 = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

Árvore Binária

Propriedades

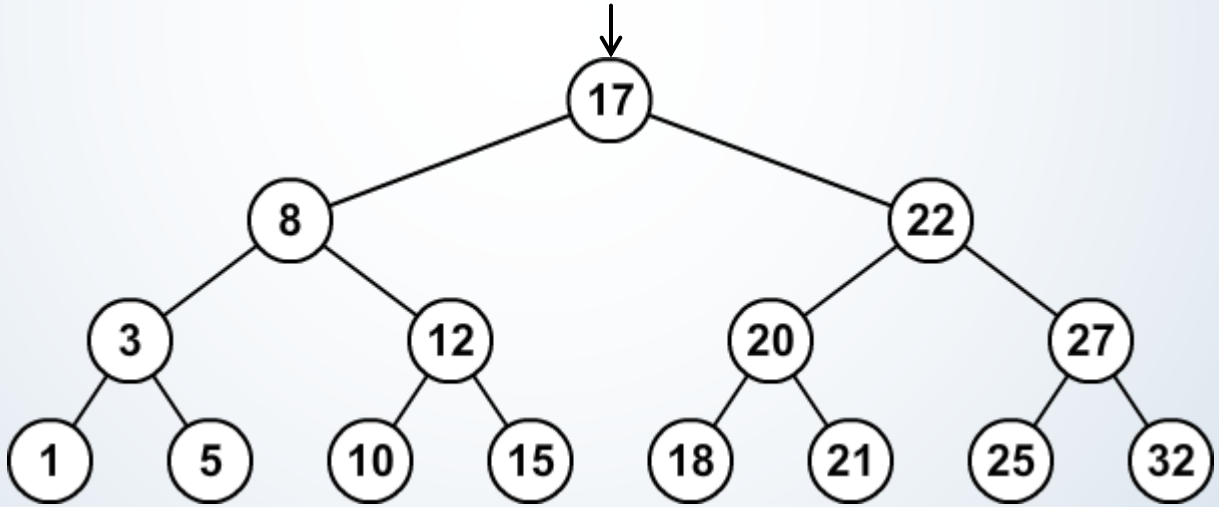
- **Árvore completa:** árvore binária em que todos os níveis, com exceção do último e do penúltimo, estão totalmente preenchidos e os nós sem filhos estão situados à esquerda.



Árvore Binária

Propriedades

- **Árvore cheia:** árvore binária em que se um nó tem alguma subárvore vazia, ele estará no último nível. É uma árvore estritamente binária e completa.

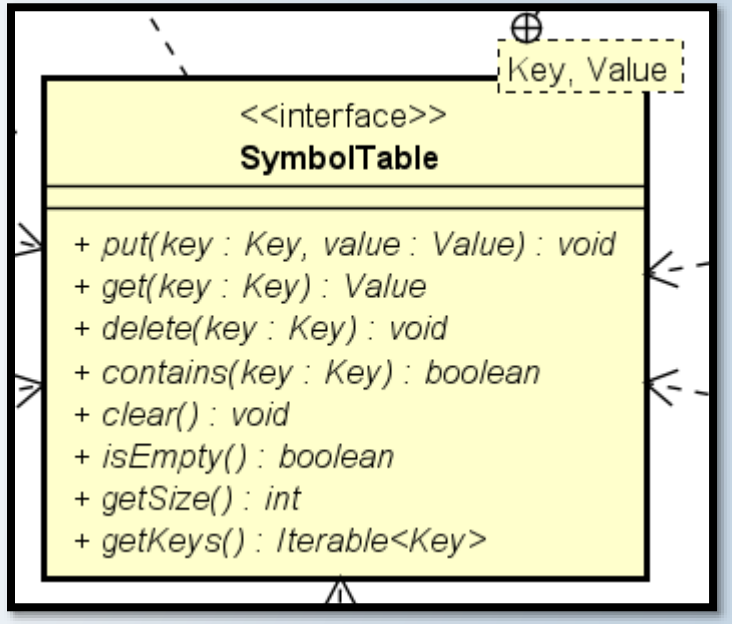


Árvore Binária de Busca

- **Invariante/Condição de existência:**
  - Todos os nós de uma subárvore direita são maiores que o nó raiz;
  - Todos os nós de uma subárvore esquerda são menores que o nó raiz;
  - Cada subárvore é também uma árvore binária de busca.

Árvore Binária de Busca

- **Implementação:**
  - Veremos agora a ideia por trás das operações de inserção (**`put`**) e remoção (**`delete`**) de nós de uma árvore binária de busca;
  - Na nossa implementação real, contida na classe **`BinarySearchTree`**, as operações são feitas, em sua maioria, usando uma chave (**`key`**) como identificador do nó, tendo um valor associado à ela;
  - As operações inerentes à nossa implementação real estão atreladas a API da tabela de símbolos;
  - Nos próximos slides consideraremos, por questão de simplicidade (por enquanto), que a árvore armazena apenas as chaves.



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

raiz

Árvore Binária de Busca

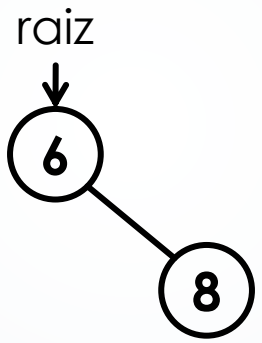
Inserção (`put`)

```
abb.put( 6 );
```

Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

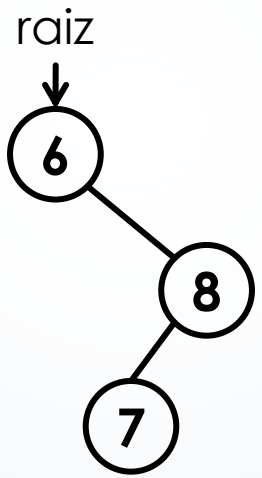
```
abb.put( 8 );
```



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

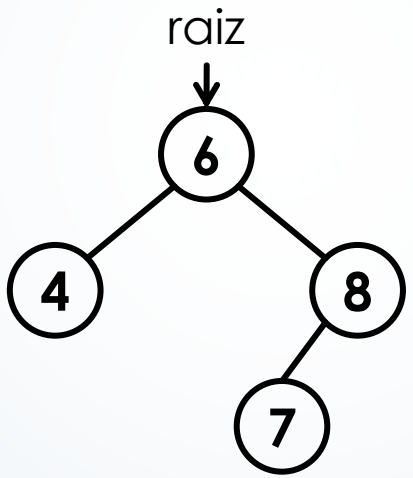
```
abb.put( 7 );
```



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

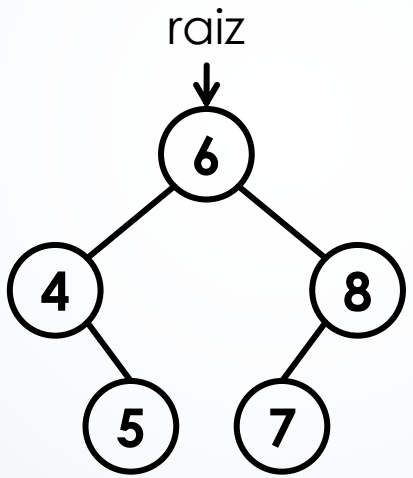
```
abb.put( 4 );
```



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

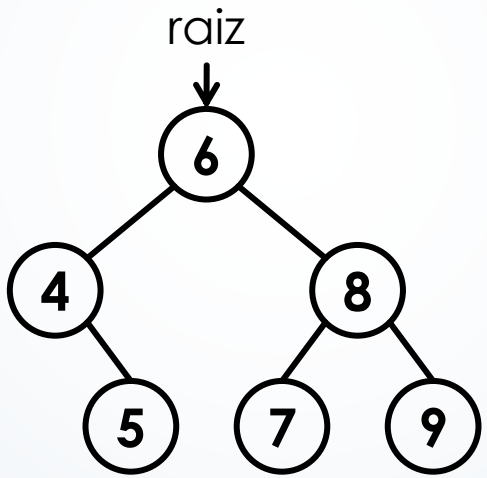
```
abb.put( 5 );
```



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

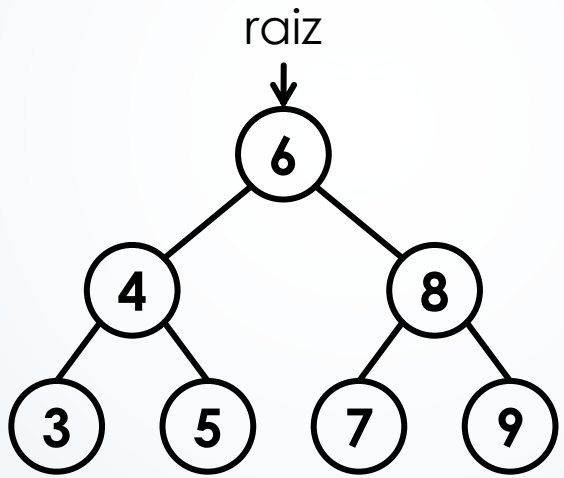
```
abb.put( 9 );
```



Árvore Binária de Busca

Inserção (`put`)

```
abb.put( 3 );
```



Árvore Binária de Busca

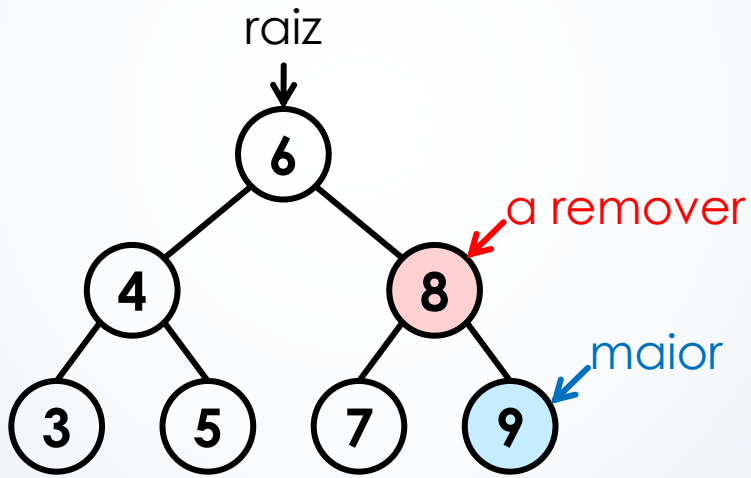
Remoção (`delete`)

- Se:
  - Todos os nós de uma subárvore direita são maiores que o nó raiz;
  - Todos os nós de uma subárvore esquerda são menores que o nó raiz;
  - Cada subárvore é também uma árvore binária de busca;
- Então:
  - A remoção de um nó com filhos faz com que o nó maior que ele (à sua direita) ocupe sua posição;
  - Se o nó à direita não existe, então o nó à esquerda ocupa sua posição;
  - Caso o nó seja um nó folha, não há a necessidade de reestruturação da árvore;
- Essas condições são necessárias para manter a invariante das árvores binárias de busca. Note que pode-se realizar a mesma operação de forma reflexiva, ou seja, para o outro lado.

Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

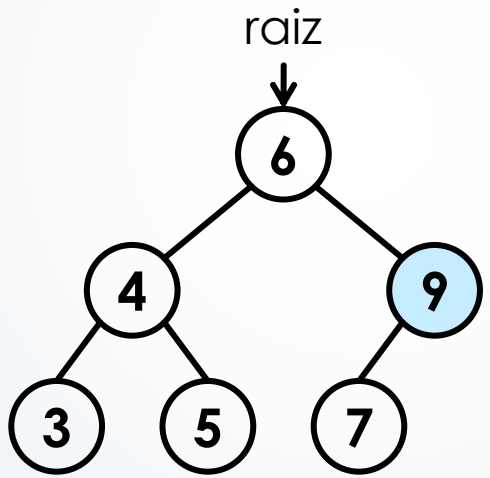
```
abb.delete( 8 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

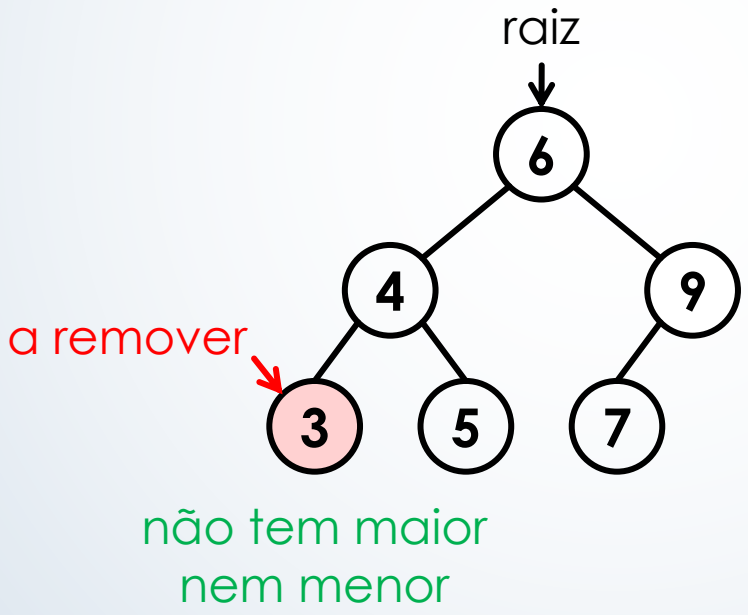
```
abb.delete( 8 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

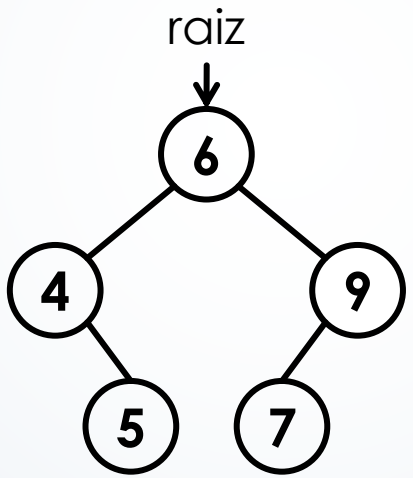
```
abb.delete( 3 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

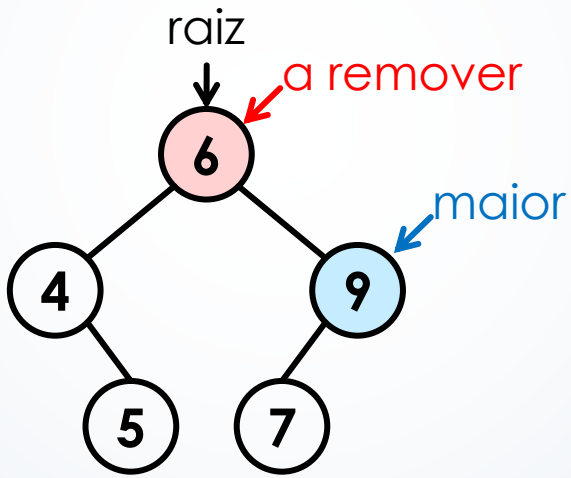
```
abb.delete( 3 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

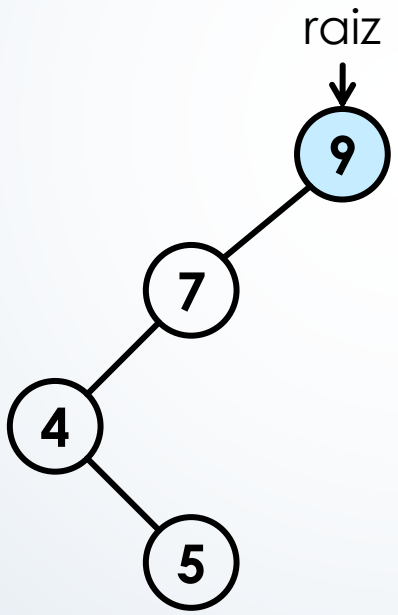
```
abb.delete( 6 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

```
abb.delete( 6 );
```



Importante!

A política de remoção de nós, onde o maior nó ocupa a posição do nó excluído, faz com que, quando o nó removido possui filhos para os dois lados, a altura da árvore aumente! Esse algoritmo de remoção é denominado Hibbard Deletion.

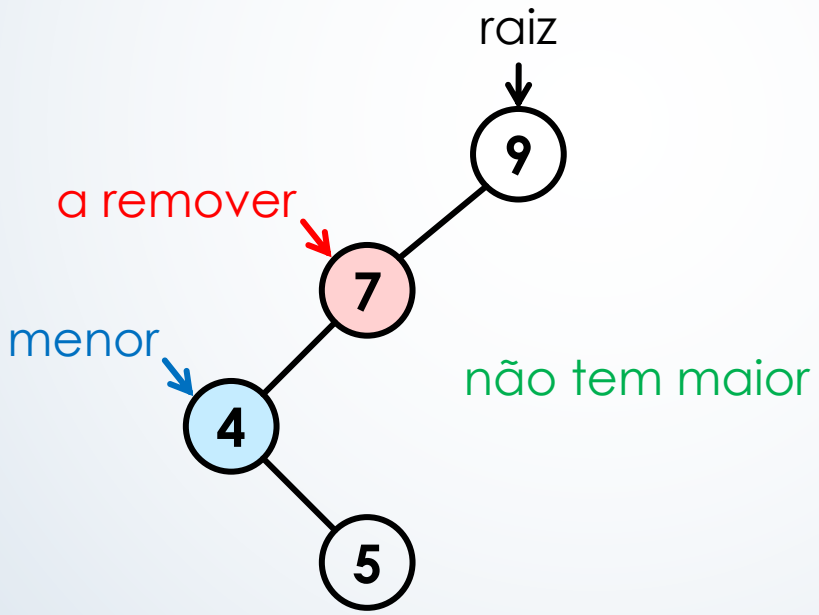
Para pensar:

- Isso é bom ou ruim?
- Há alguma situação análoga na inserção?

Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

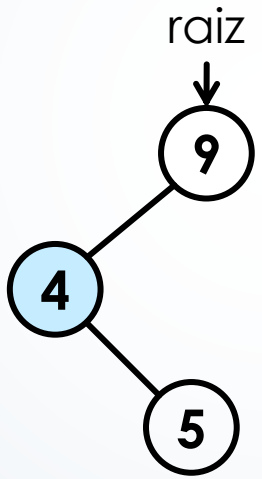
```
abb.delete( 7 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

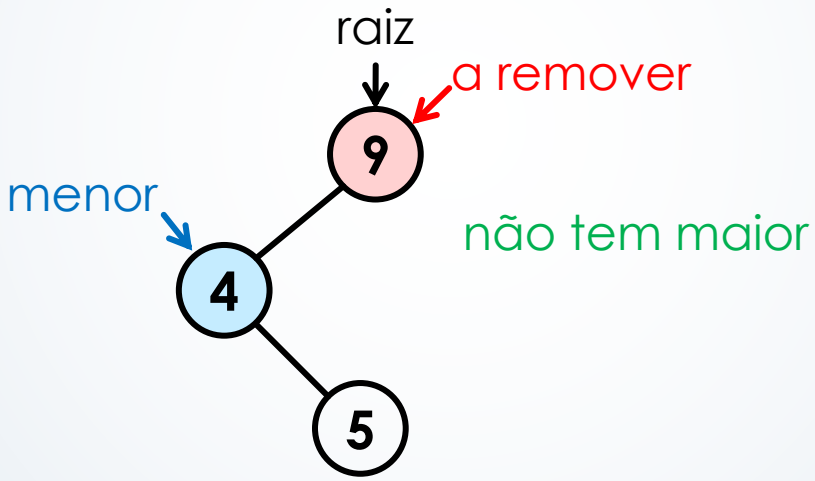
```
abb.delete( 7 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

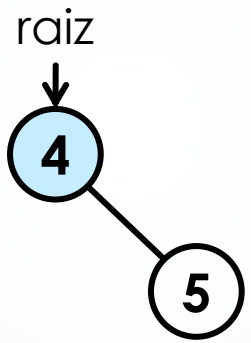
```
abb.delete( 9 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

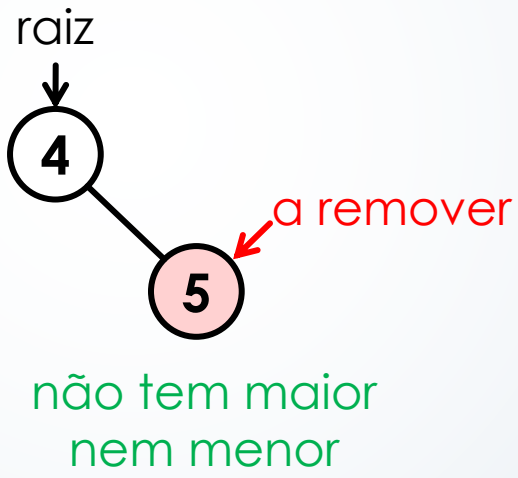
```
abb.delete( 9 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

```
abb.delete( 5 );
```



Árvore Binária de Busca

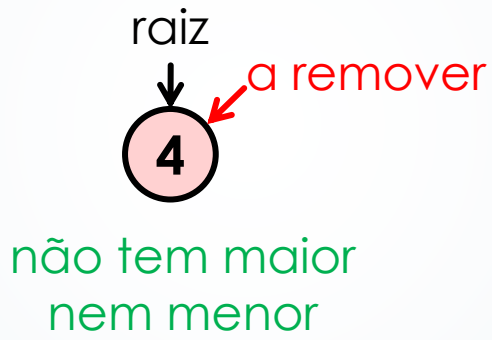
Remoção (`delete`)

```
abb.delete( 5 );
```

Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

```
abb.delete( 4 );
```



Árvore Binária de Busca

Remoção (`delete`)

```
abb.delete( 4 );
```

raiz

Árvore Binária

Para pensar

- As árvores binárias de busca, da forma que foram apresentadas até agora, tem um grave defeito. Você é capaz de identificá-lo? Pense... se uma árvore binária de busca será usada como infraestrutura para permitir que uma tabela de símbolos seja implementada, queremos sempre que as operações realizadas, como inserção, exclusão e consulta sejam o mais rápidas possíveis. Dada a natureza da construção das árvores binárias de busca, qual seria então essa falha?
- Não conseguiu? Construa uma árvore binária de busca com os seguintes valores, nessa exata ordem: 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
- O que você nota?
- Extrapole a ideia para a construção com mil elementos em ordem. Qual a ordem de crescimento da inserção, remoção e consulta no pior caso?

Árvore Binária

Percursos

- **Percurso:** forma de percorrer uma estrutura de dados, no caso, uma árvore binária;
- Principais tipos de percurso em árvores binárias:
  1. **Pré-ordem:** primeiramente processa-se a raiz, depois percorre-se a subárvore esquerda e então percorre-se a subárvore direita. Chamado de ***preorder traversal*** em inglês;
  2. **Em ordem ou ordem simétrica:** percorre-se primeiramente a subárvore esquerda, ao terminar processa-se a raiz e então percorre-se a subárvore direita. Chamado de ***inorder traversal*** em inglês;
  3. **Pós-ordem ou ordem final:** percorre-se primeiramente a subárvore esquerda, depois percorre-se a subárvore direita e então processa-se a raiz. Chamado de ***postorder traversal*** em inglês;
  4. **Em nível:** iniciando no nível zero, progride-se nível a nível, processando cada raiz, da esquerda para a direita. Chamado de ***level-order traversal*** em inglês;

Árvore Binária

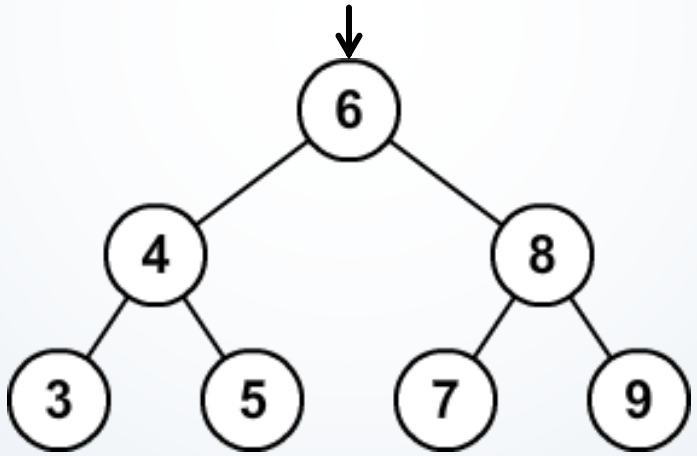
Percursos

- **Observações:**
  - Os percursos pré-ordem, em ordem e pós-ordem são análogos à Busca em Profundidade (***Depth-First Search***) em grafos;
  - O percurso em nível é análogo à Busca em Largura (***Breadth-First Search***) em grafos;
- Aplicações:
  1. **Pré-ordem:** cópia de uma árvore binária de busca, criação de hierarquias, como índices em documentos de texto, ordenação topológica (grafos), obtenção de expressão pré-fixada em uma árvore de expressão etc;
  2. **Em ordem:** processa os nós de forma crescente, podendo ser empregado, por exemplo, em ordenações, obtenção de expressão infixada em uma árvore de expressão etc;
  3. **Pós-ordem:** ordenação topológica (grafos), obtenção de expressão pós-fixada em uma árvore de expressão etc;
  4. **Em nível:** obtenção da distância entre nós.

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

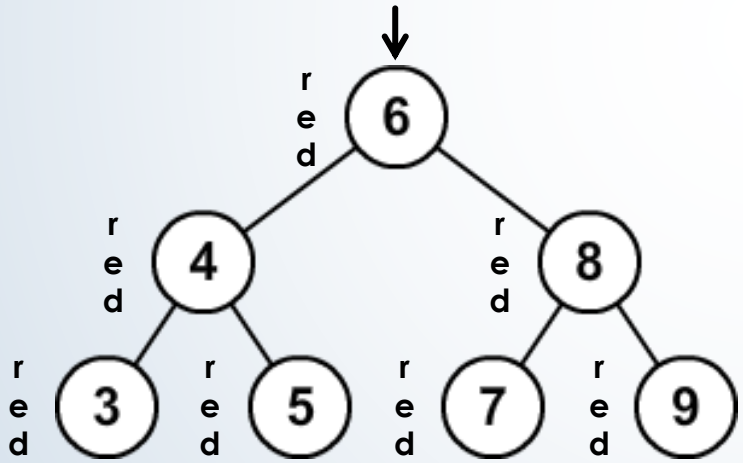
- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

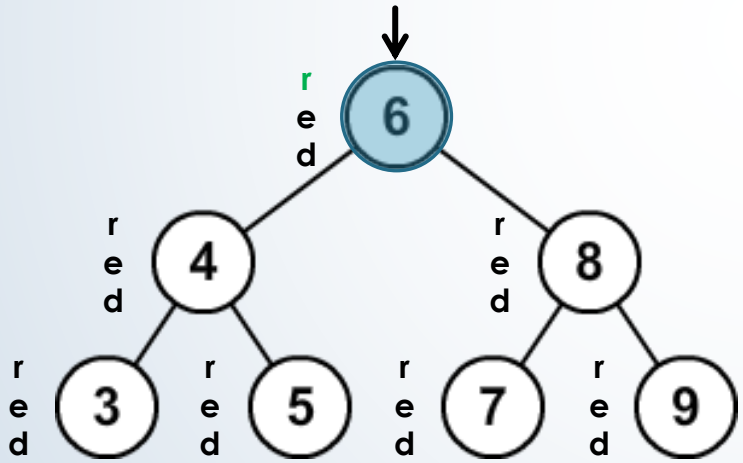
- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

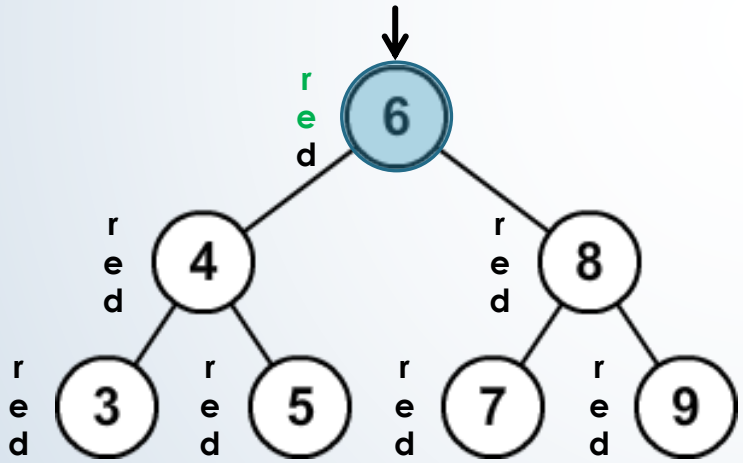


6

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

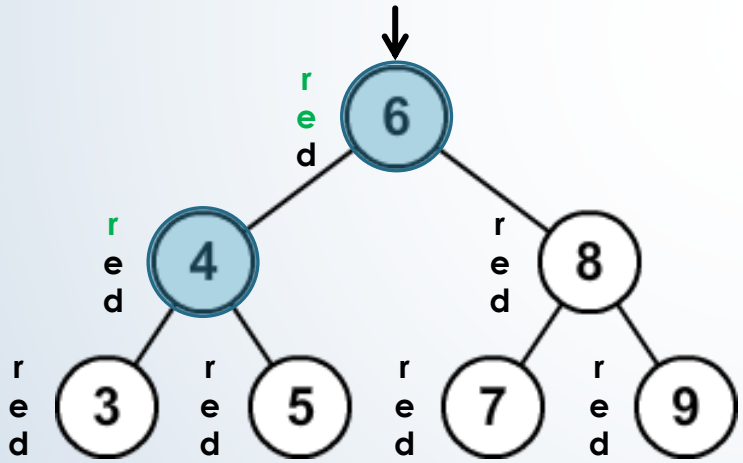


6

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

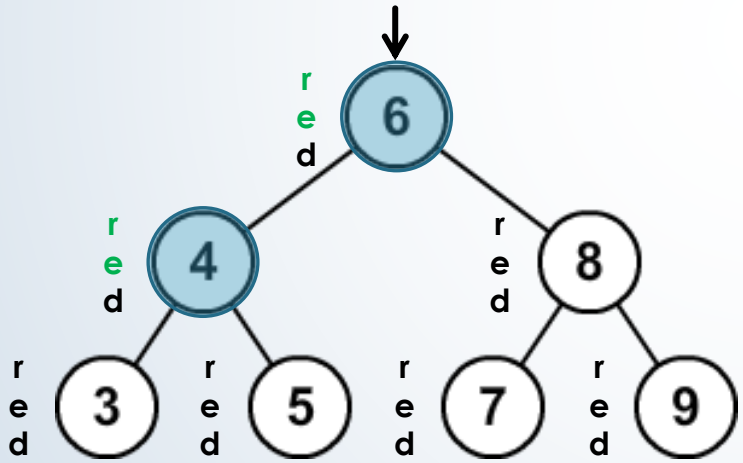


6 4

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

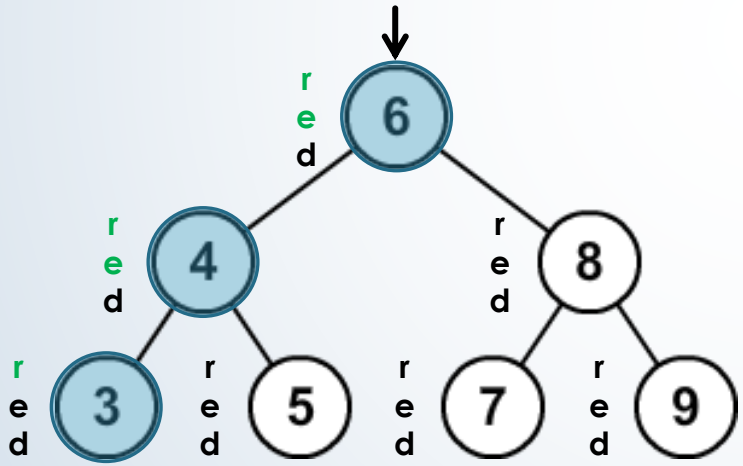


6 4

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

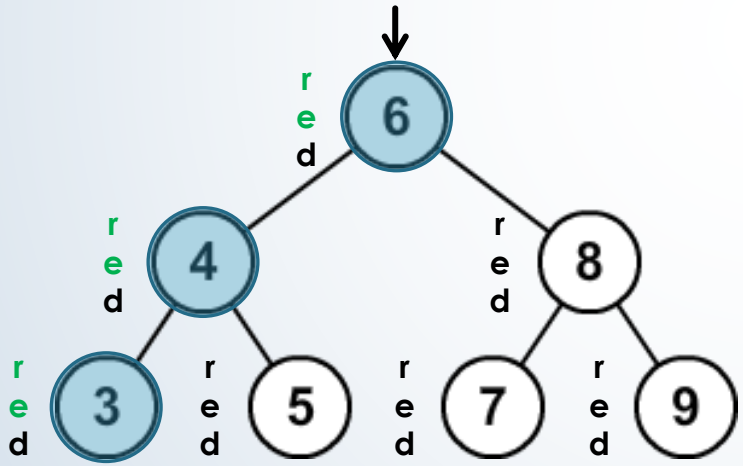


6 4 3

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

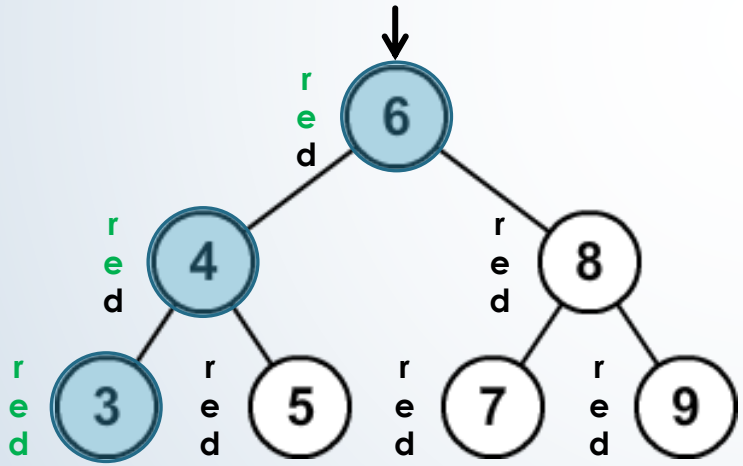


6 4 3

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

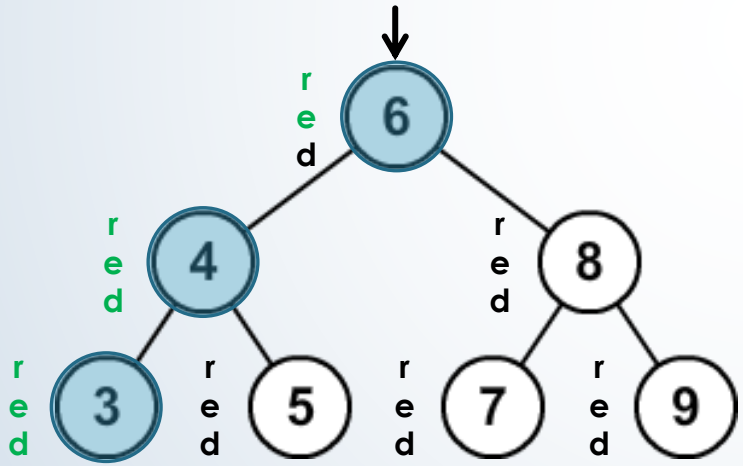


6 4 3

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

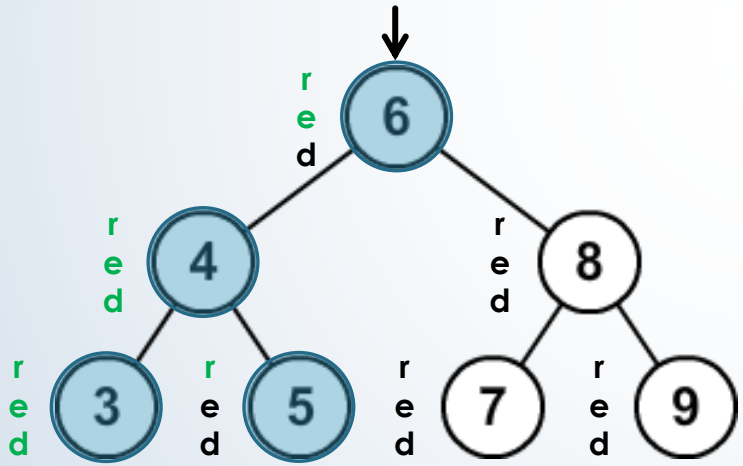


6 4 3

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

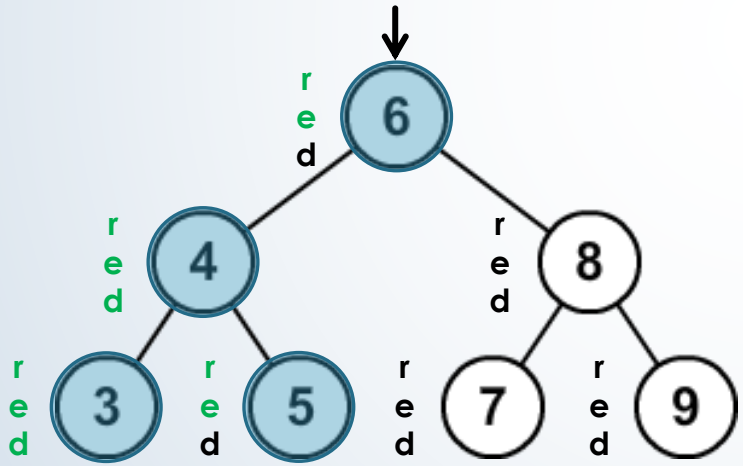


6 4 3 5

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

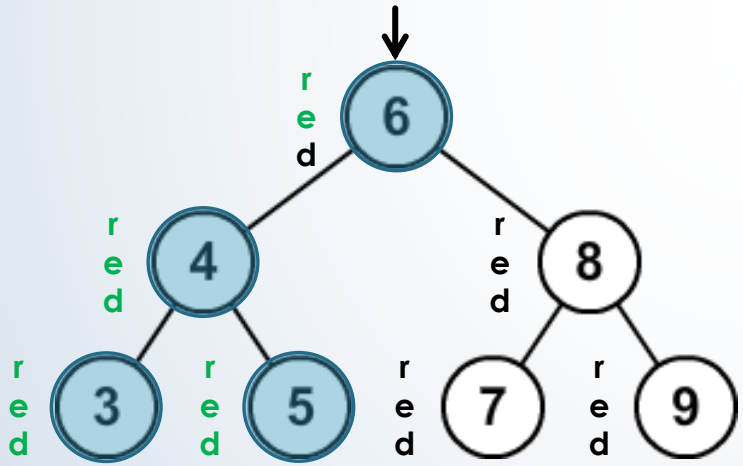


6 4 3 5

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

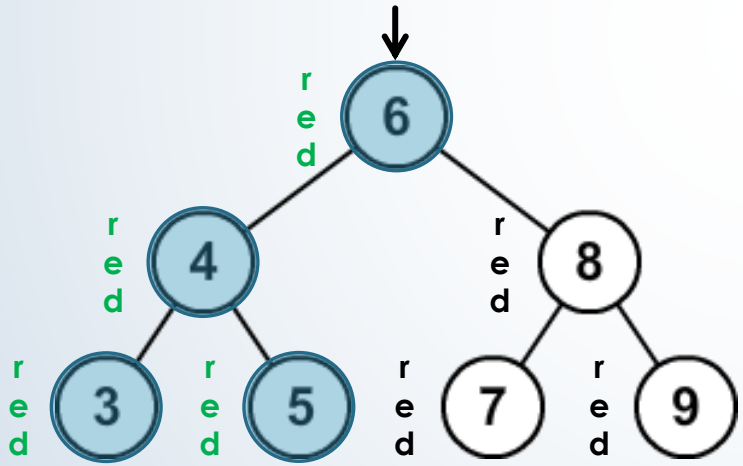


6 4 3 5

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

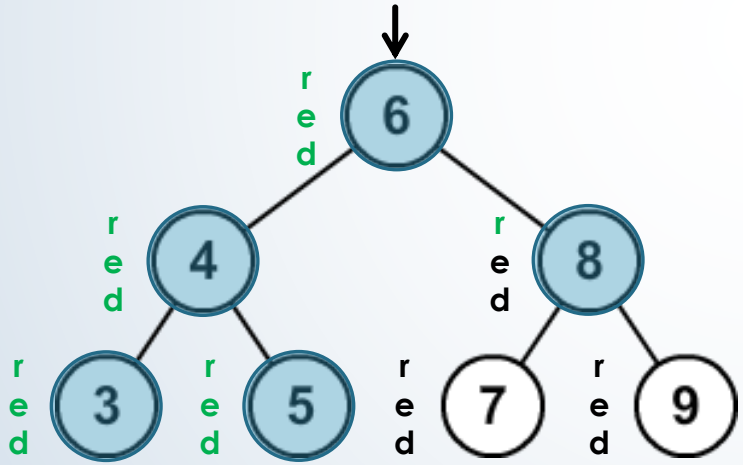


6 4 3 5

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

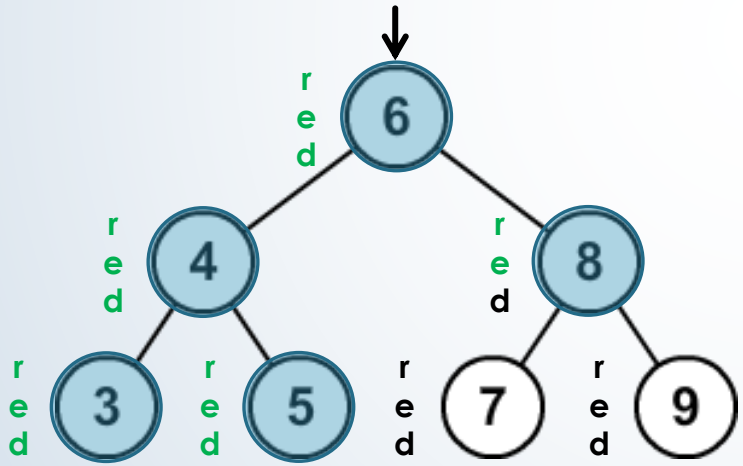


6 4 3 5 8

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

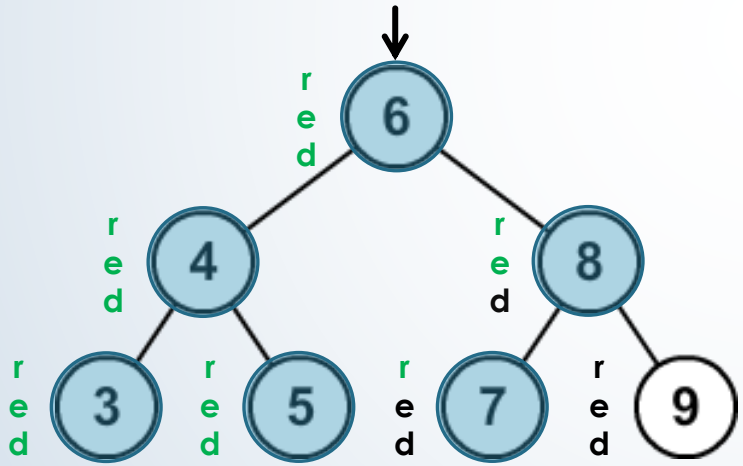


6 4 3 5 8

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

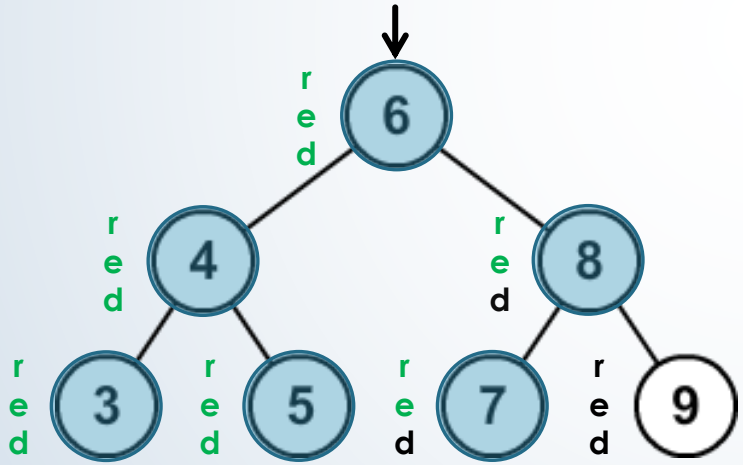


6 4 3 5 8 7

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

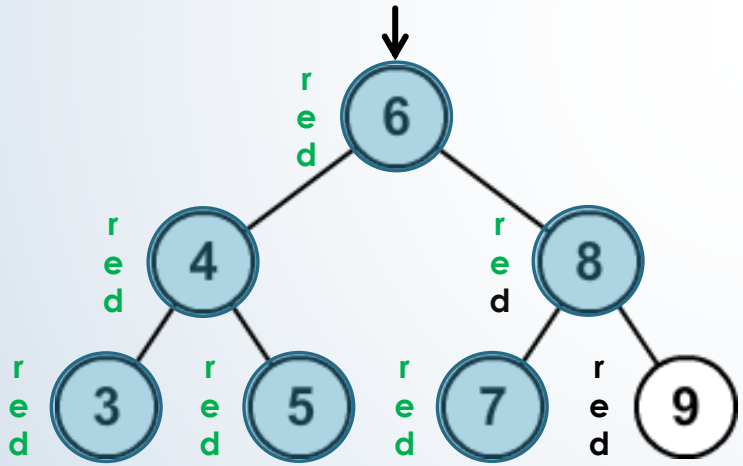


6 4 3 5 8 7

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

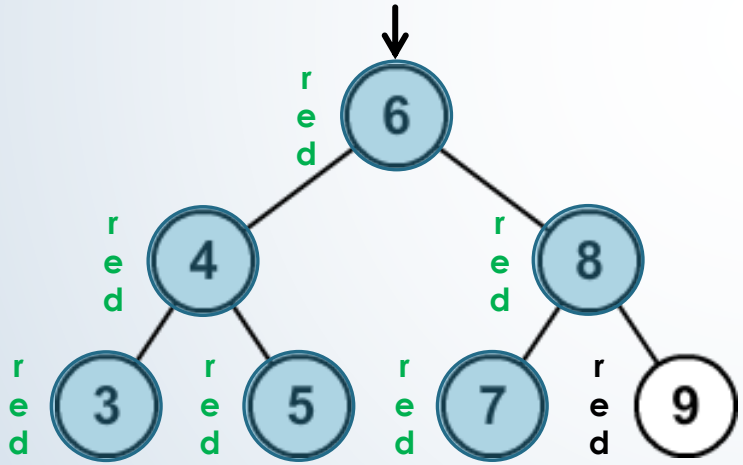


6 4 3 5 8 7

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

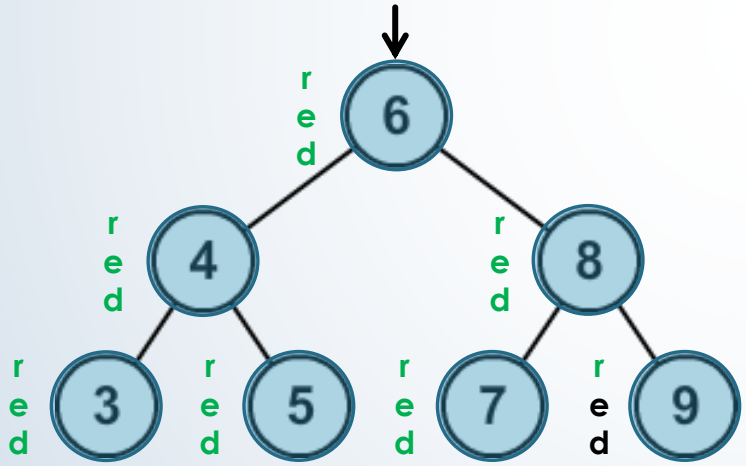


6 4 3 5 8 7

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

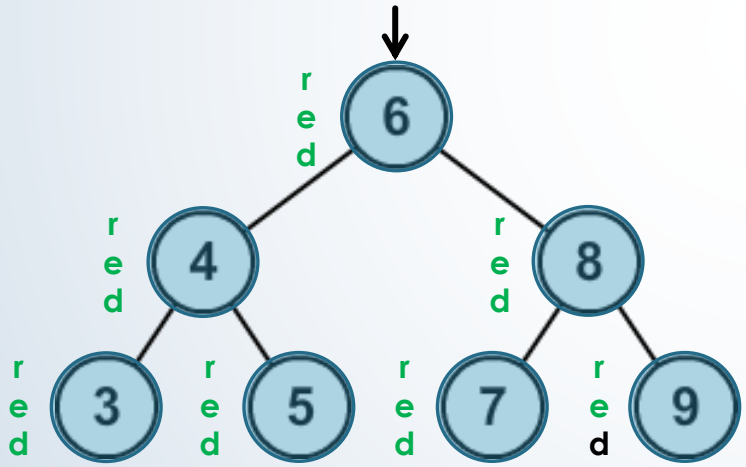


6 4 3 5 8 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

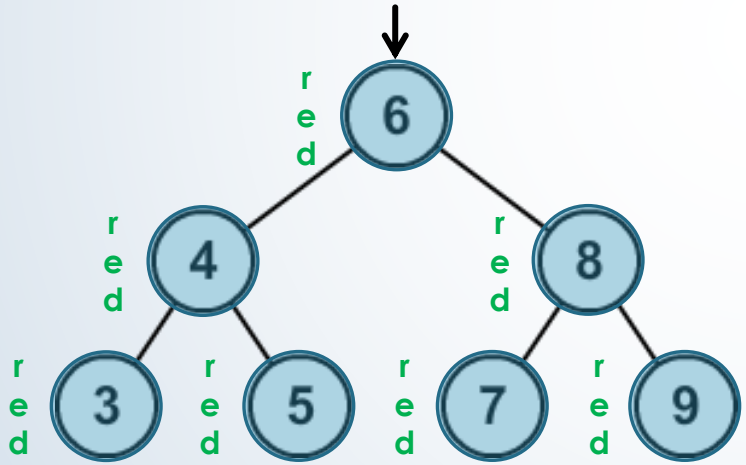


6 4 3 5 8 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

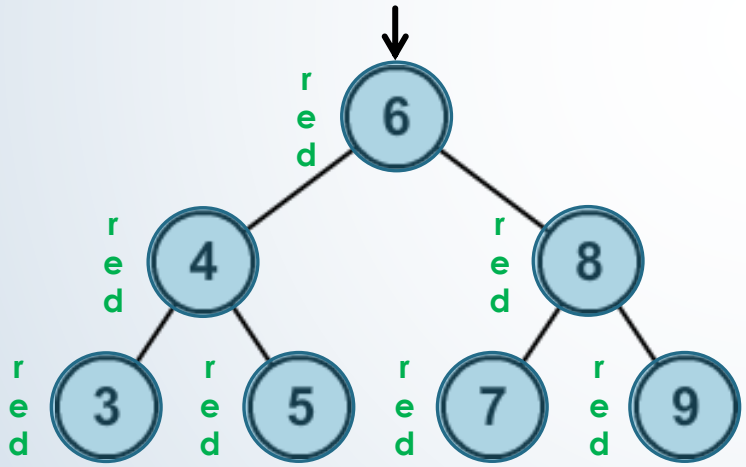


6 4 3 5 8 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

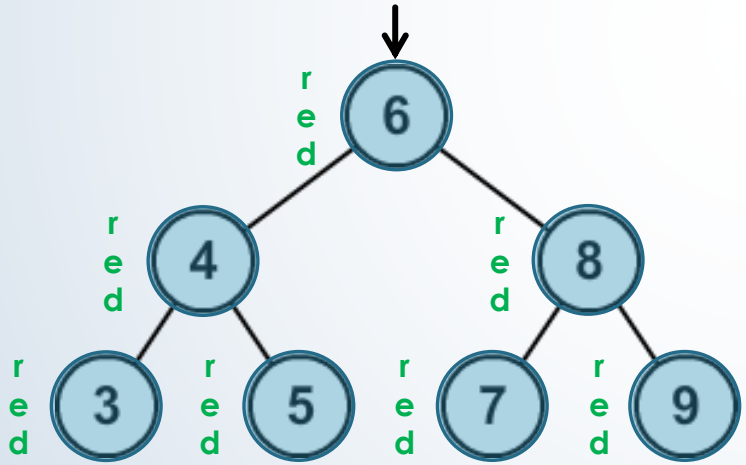


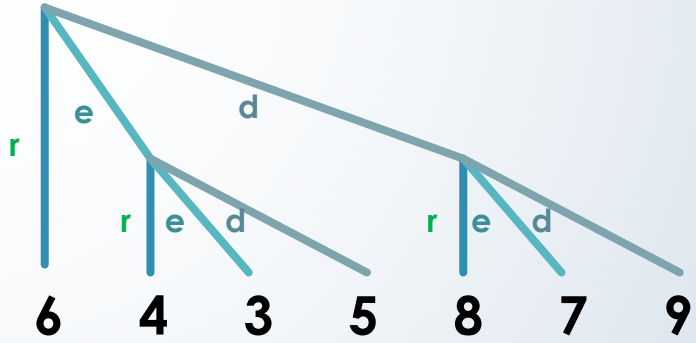
6 4 3 5 8 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem

- Raiz ➔ Esquerda ➔ Direita

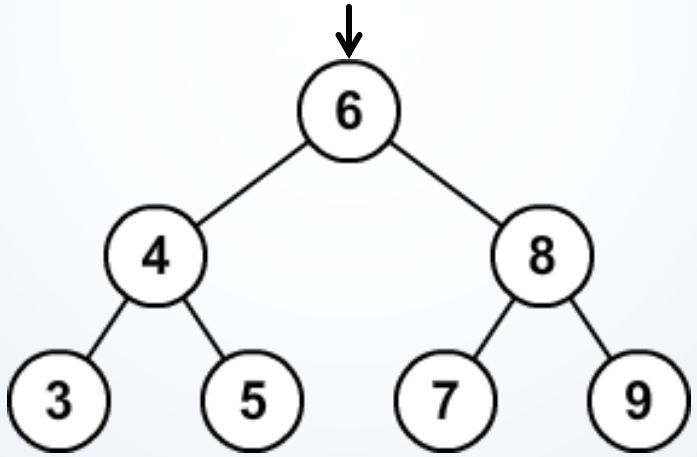




Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

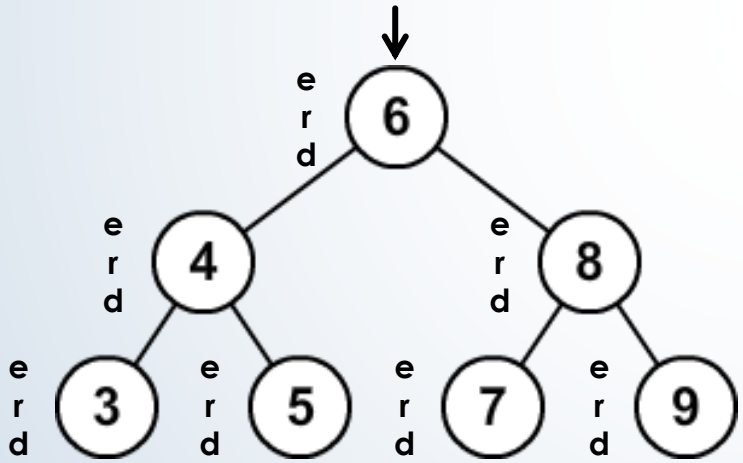
- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

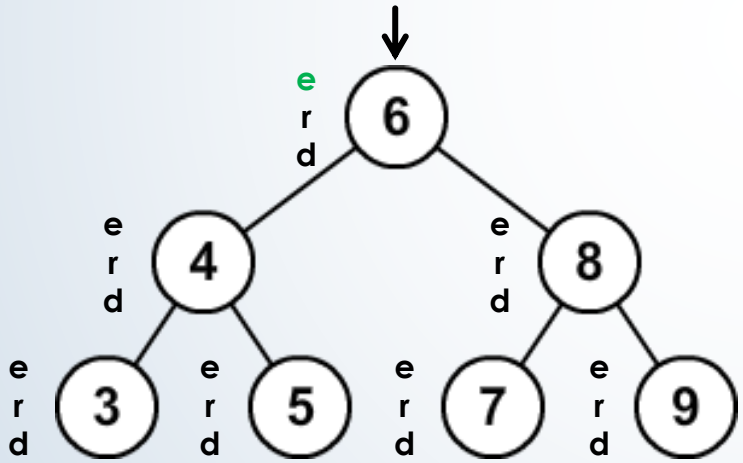
- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

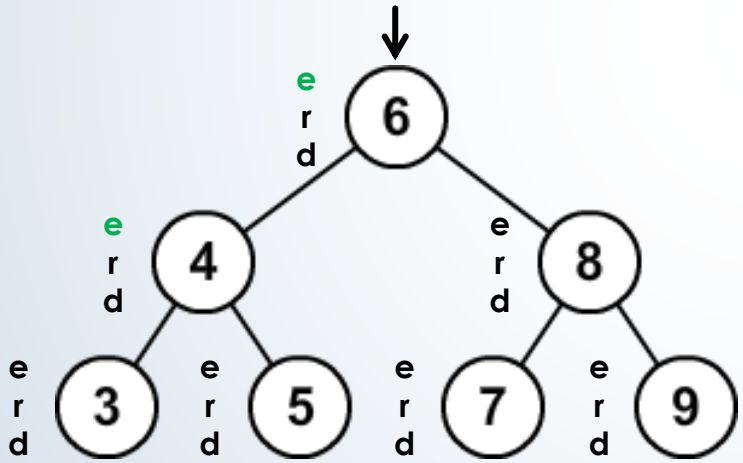
- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

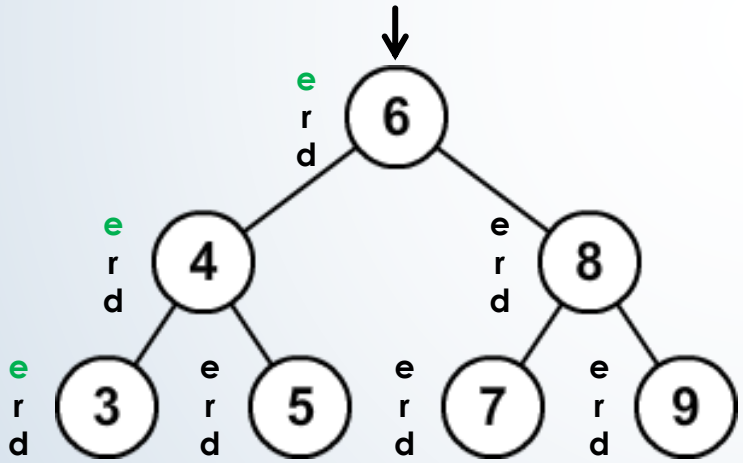
- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

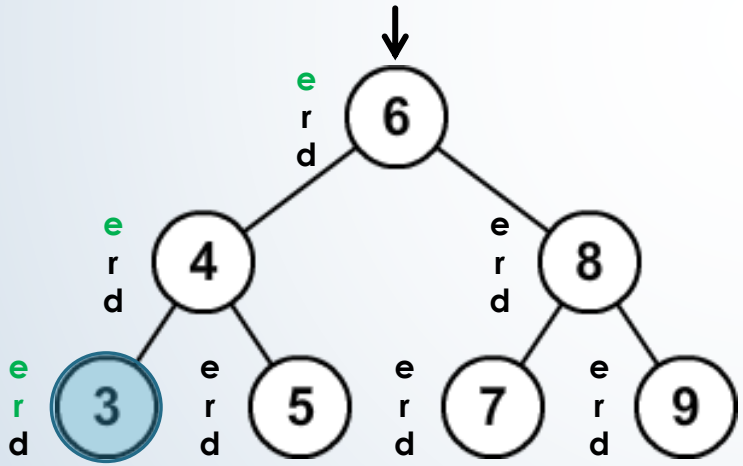
- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita



Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

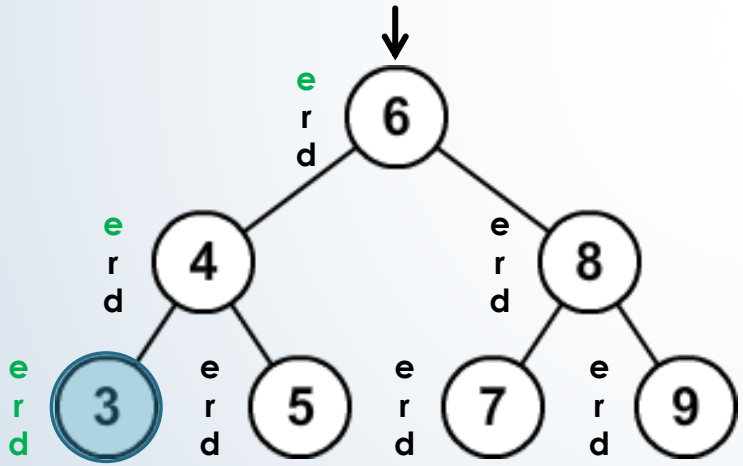


3

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

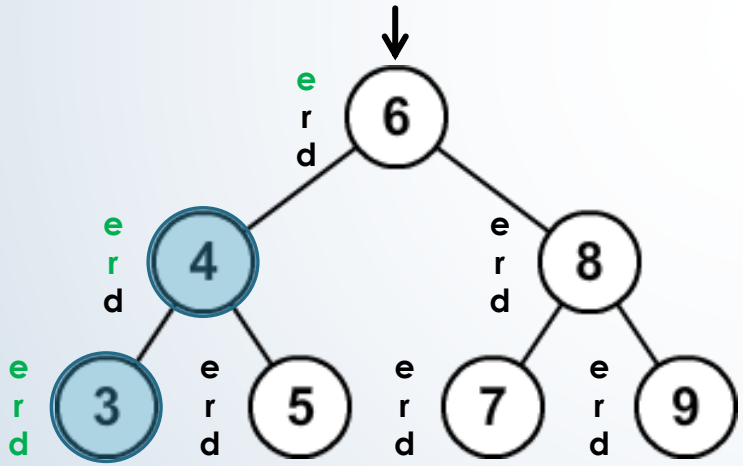


3

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

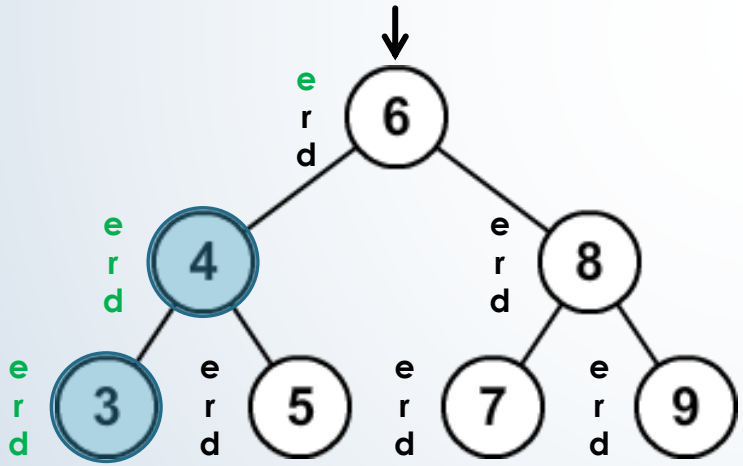


3 4

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

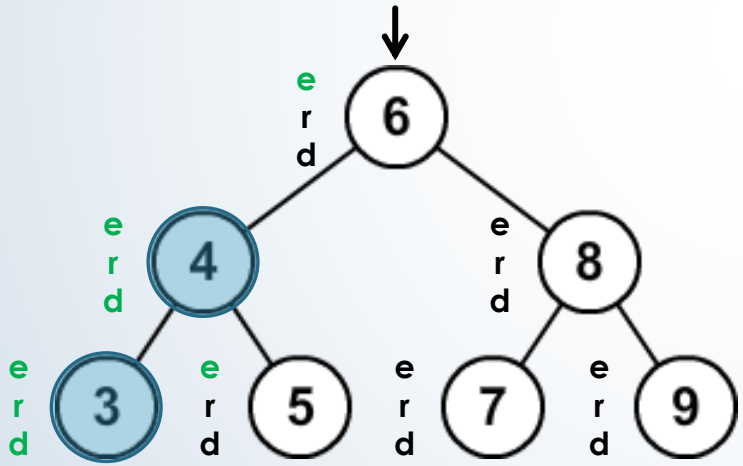


3 4

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

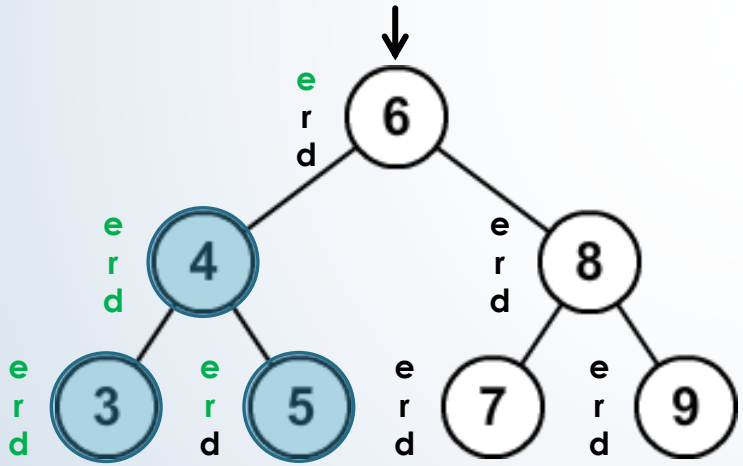


3 4

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

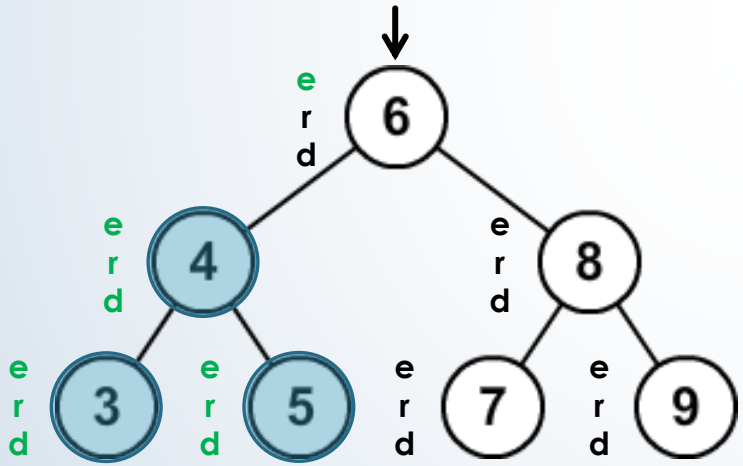


3 4 5

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

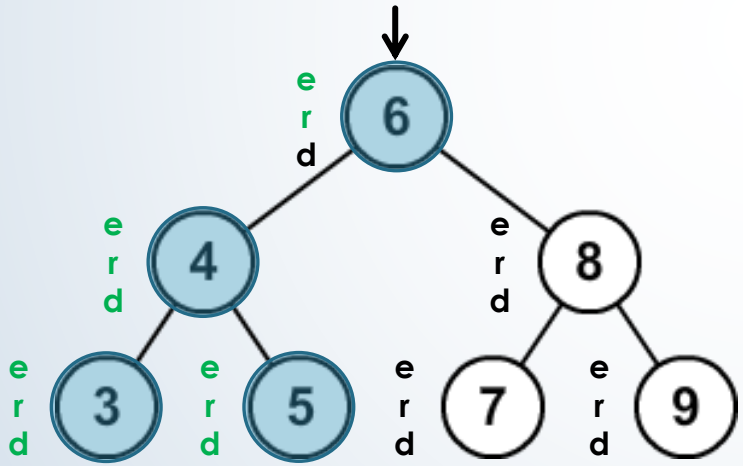


3 4 5

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

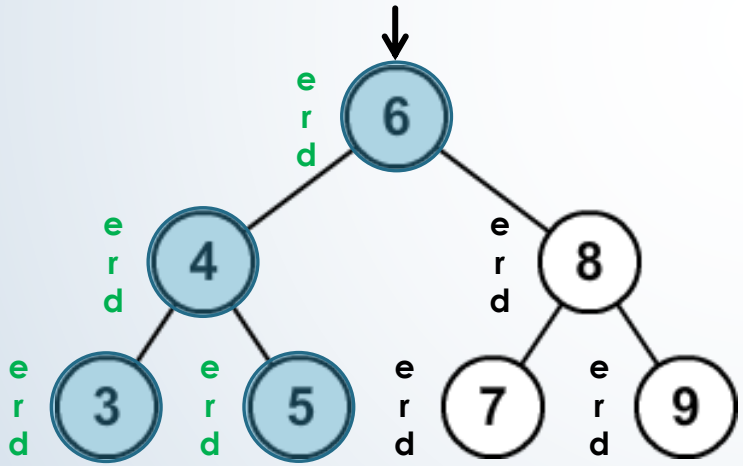


3 4 5 6

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

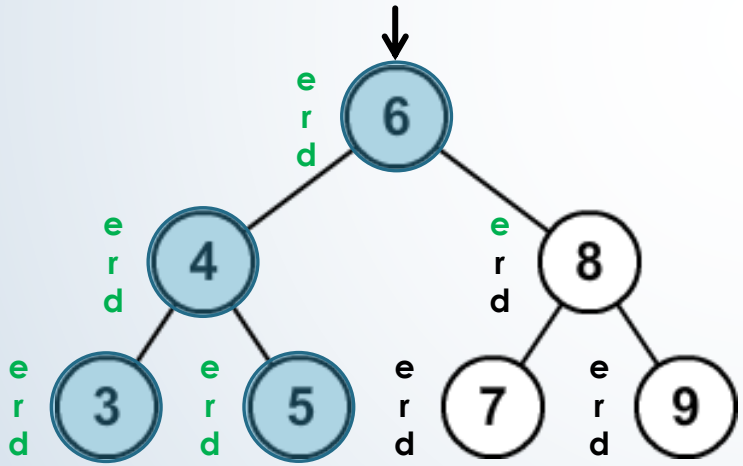


3 4 5 6

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

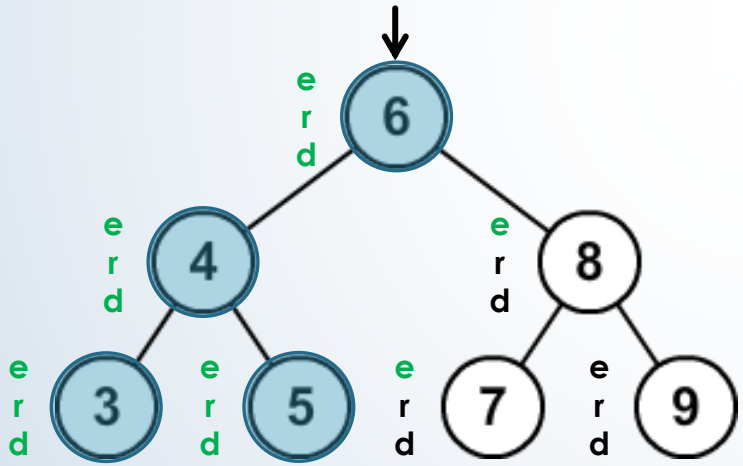


3 4 5 6

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

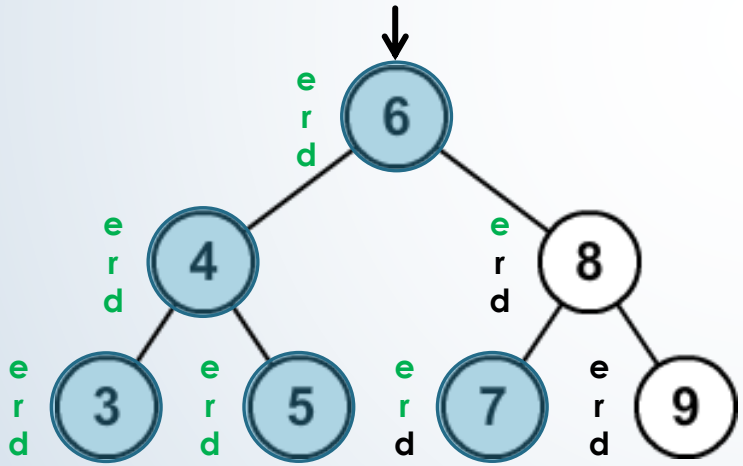


3 4 5 6

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

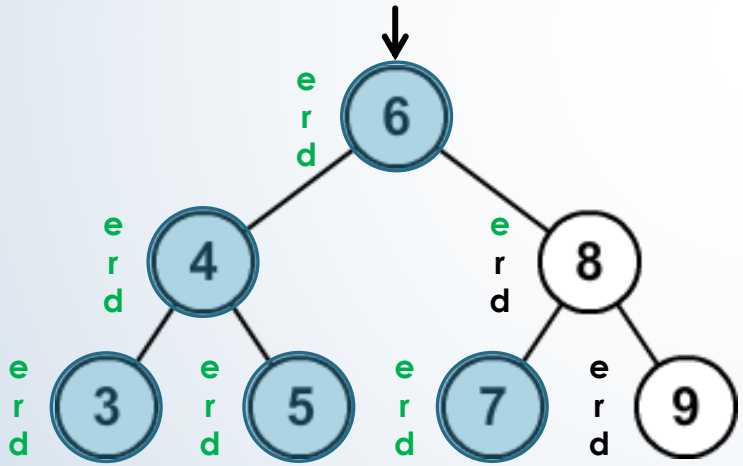


3 4 5 6 7

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

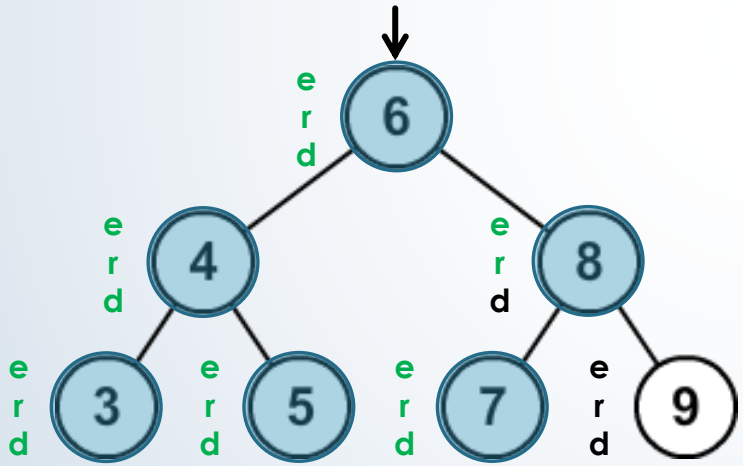


3 4 5 6 7

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

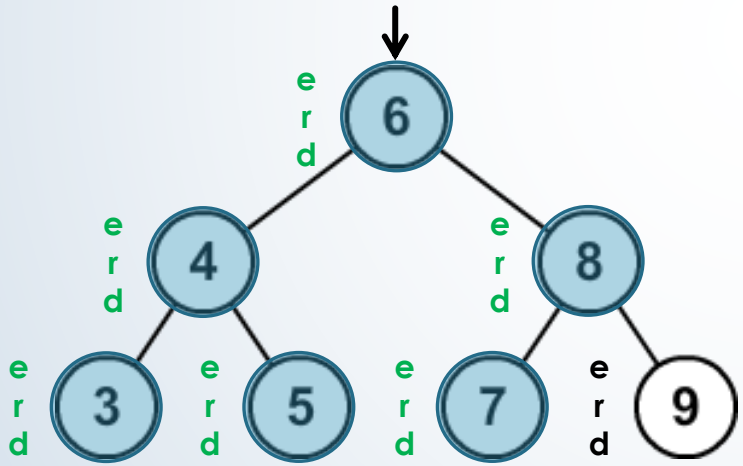


3 4 5 6 7 8

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

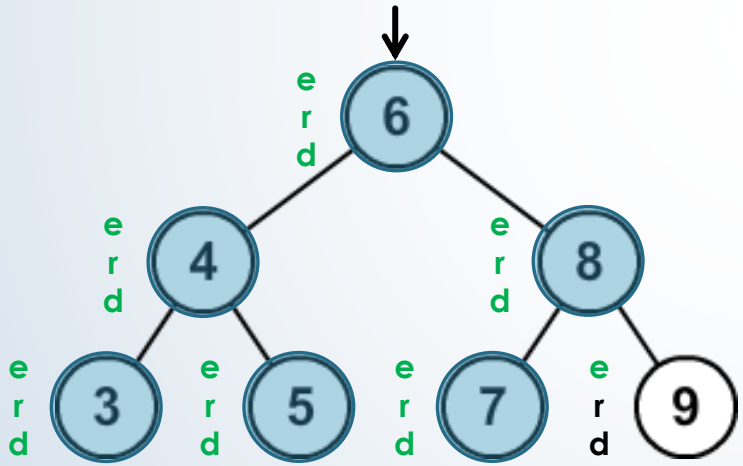


3 4 5 6 7 8

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

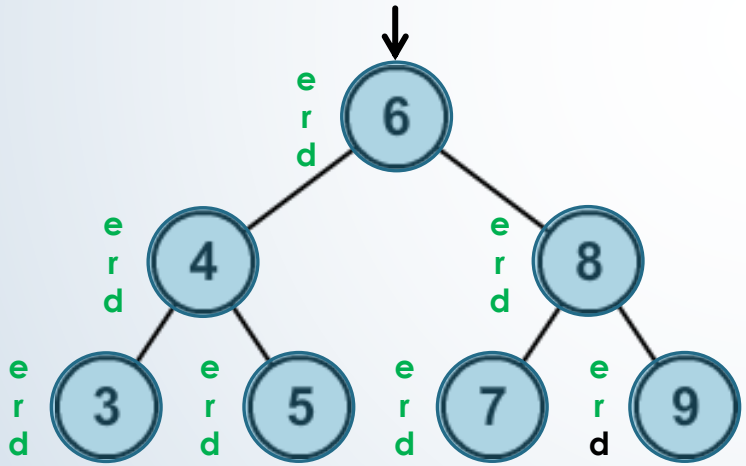


3 4 5 6 7 8

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

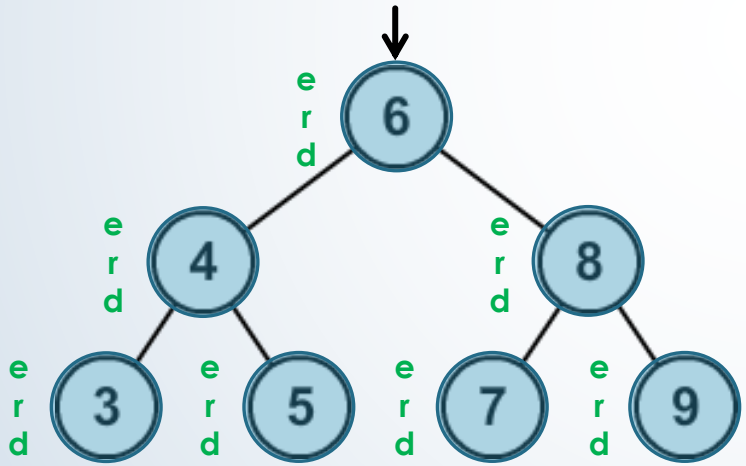


3 4 5 6 7 8 9

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

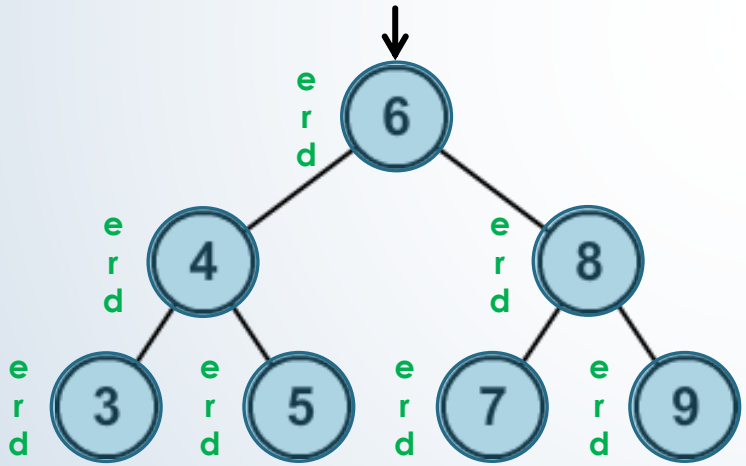


3 4 5 6 7 8 9

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

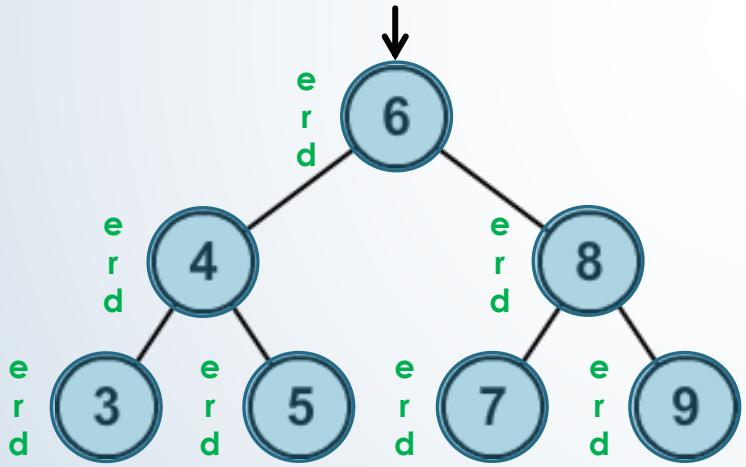


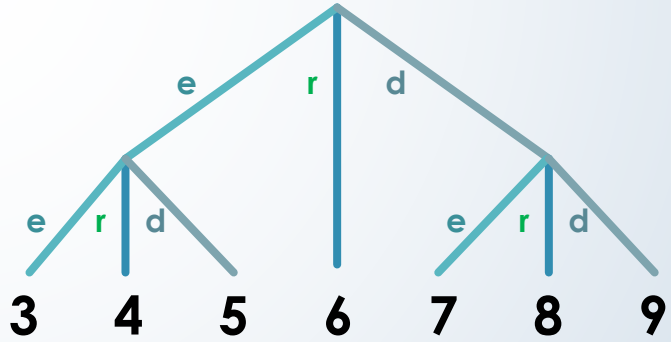
3 4 5 6 7 8 9

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica)

- Esquerda ➔ Raiz ➔ Direita

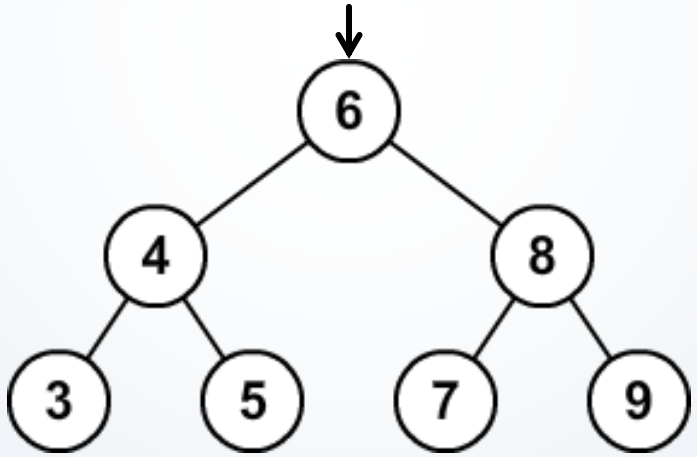




Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

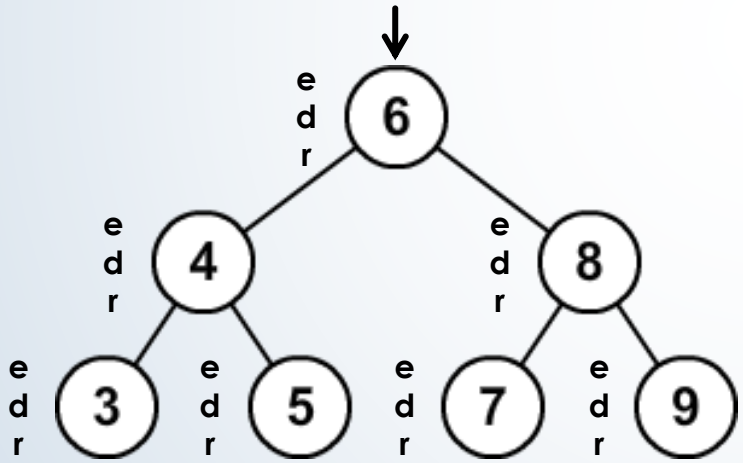
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

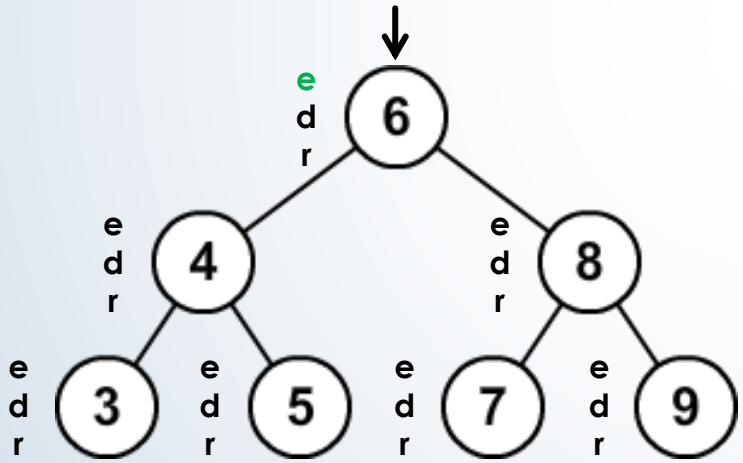
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

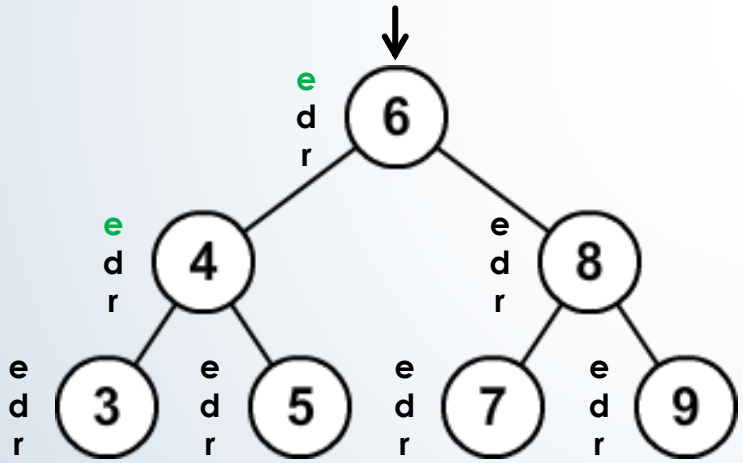
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

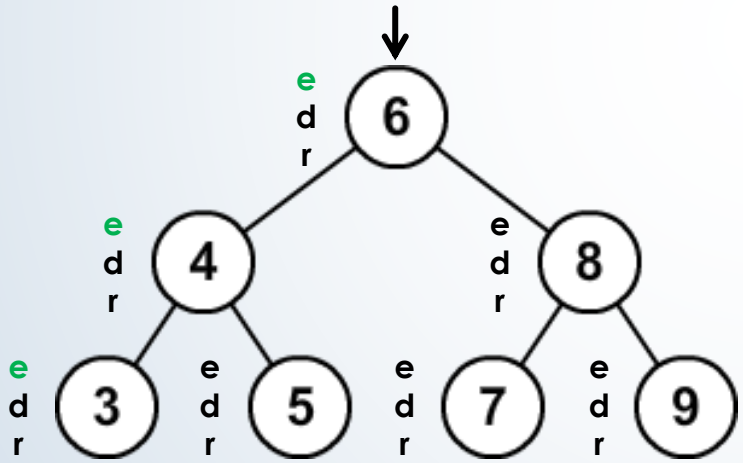
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

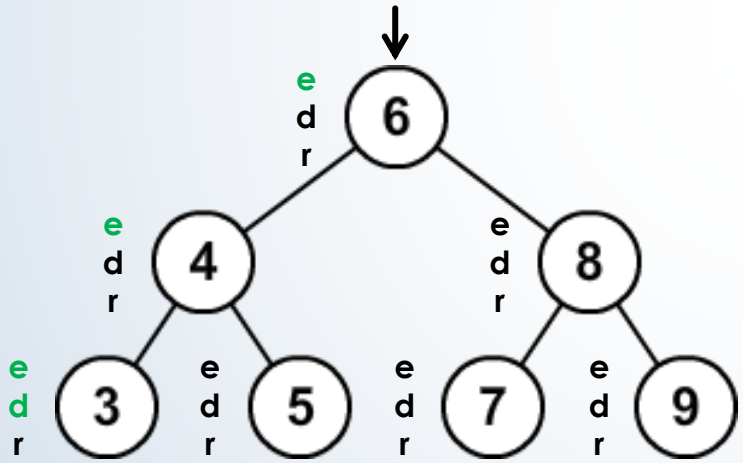
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

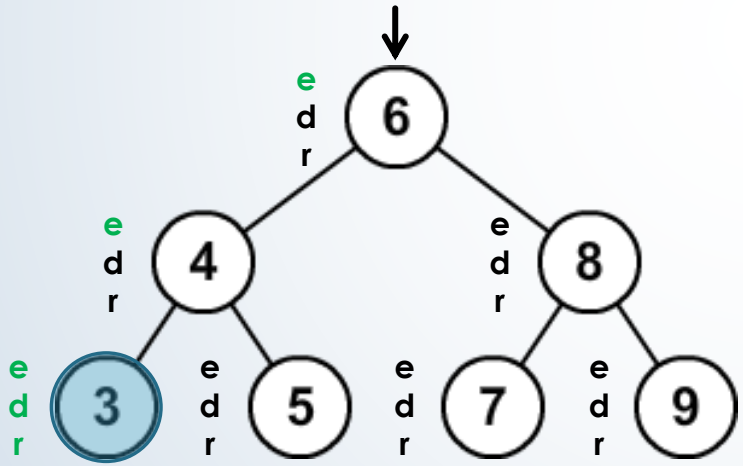
- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz



Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

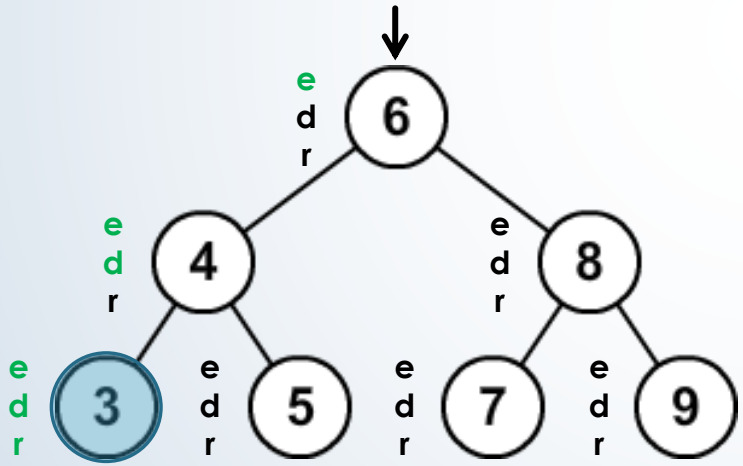


3

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

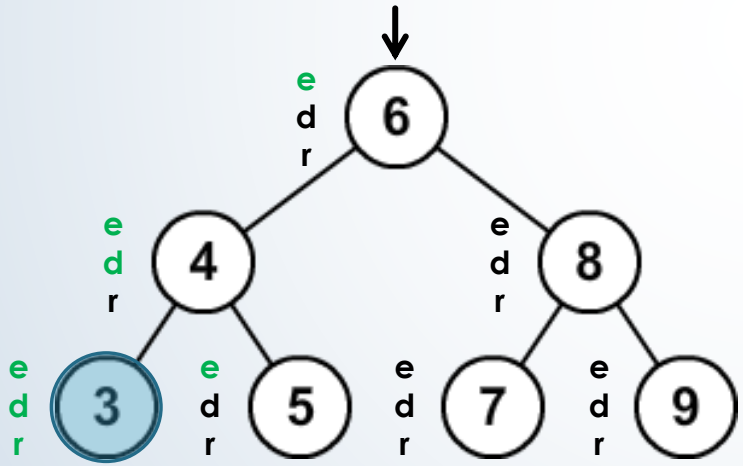


3

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

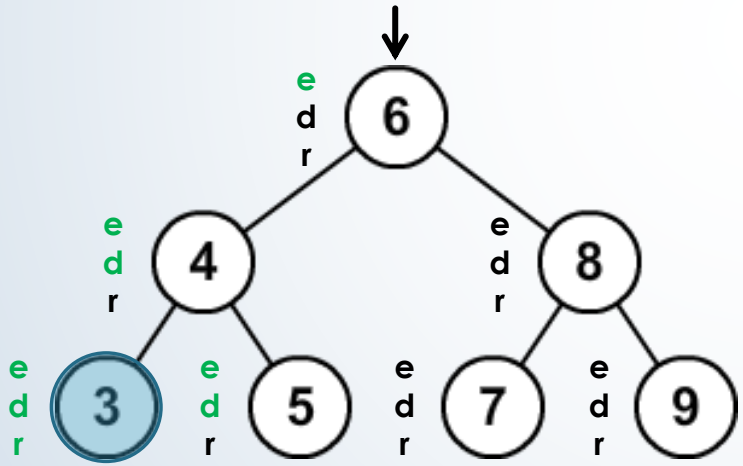


3

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

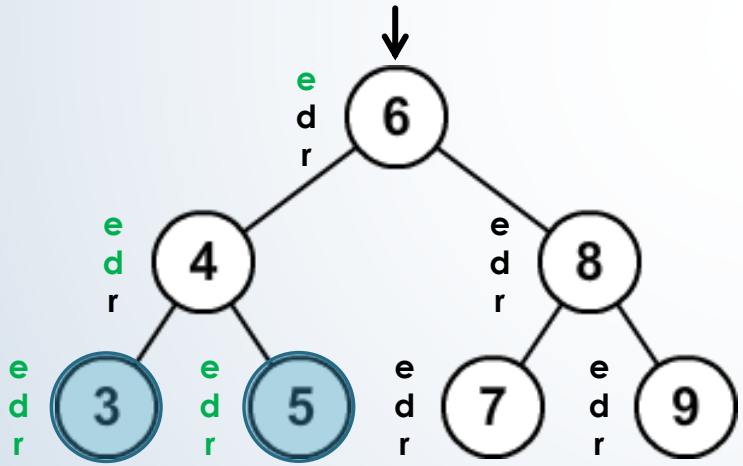


3

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

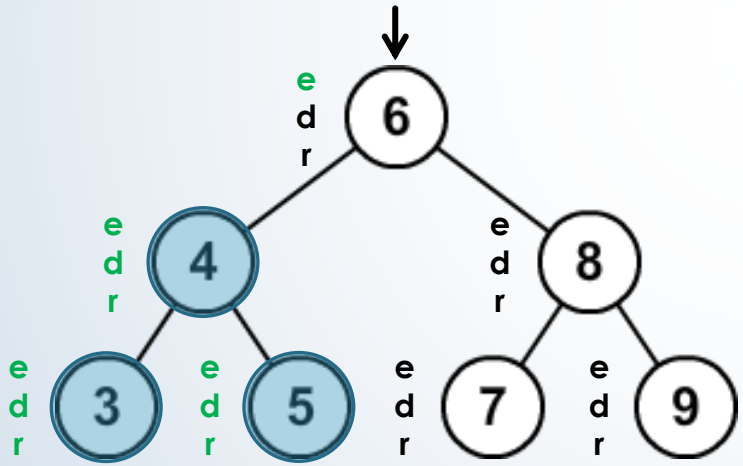


3 5

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

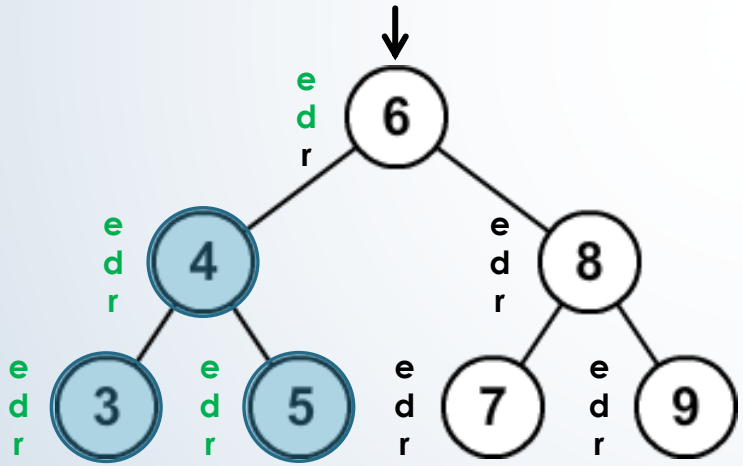


3 5 4

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

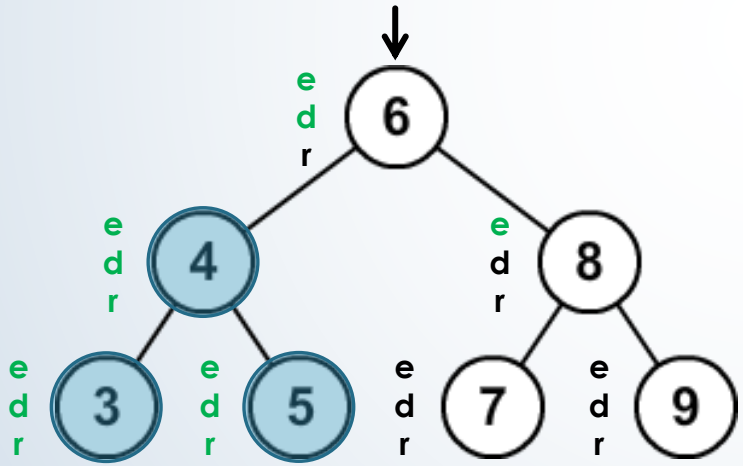


3 5 4

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

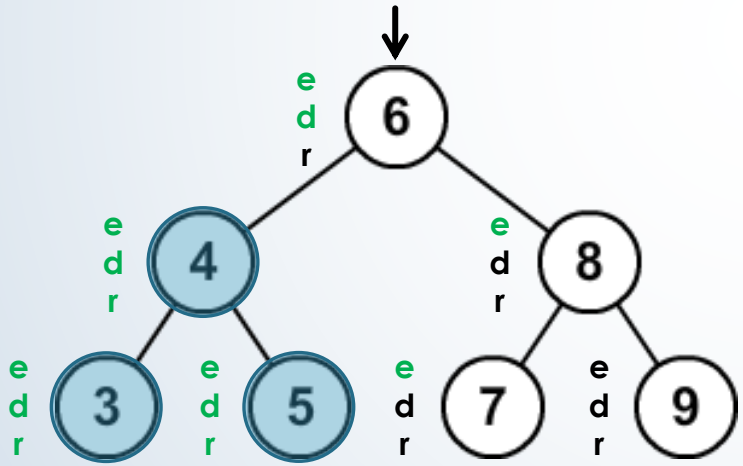


3 5 4

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

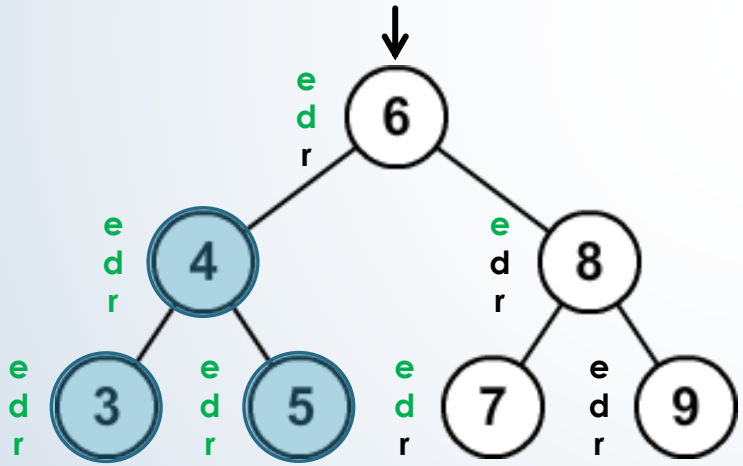


3 5 4

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

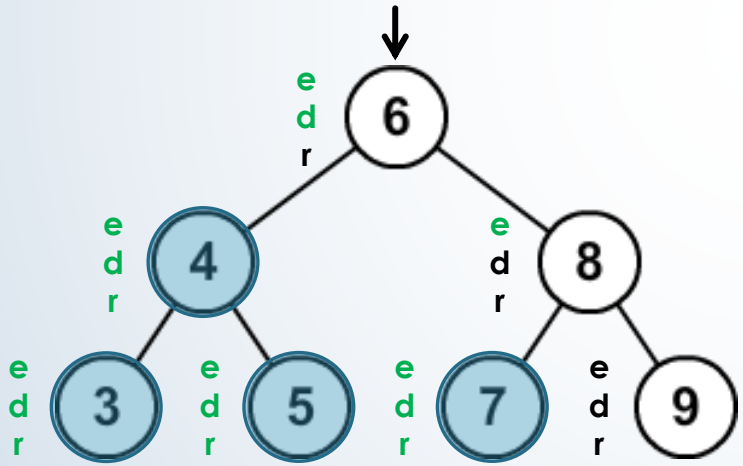


3 5 4

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

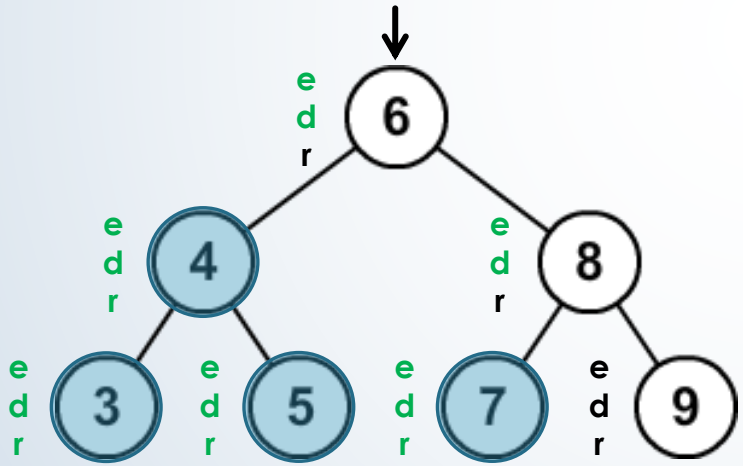


3 5 4 7

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

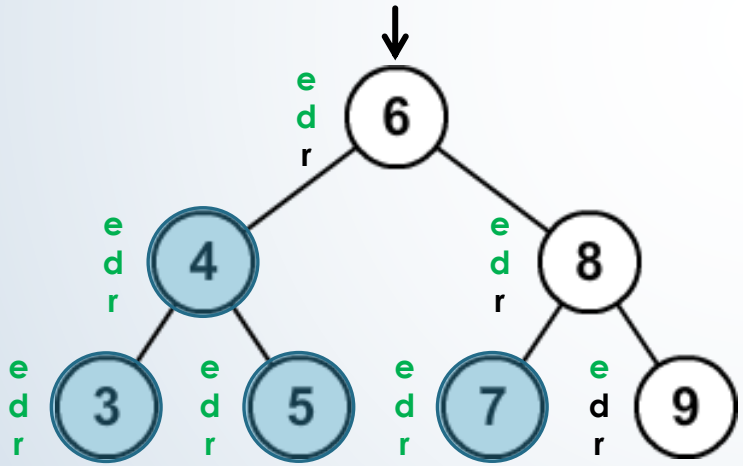


3 5 4 7

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

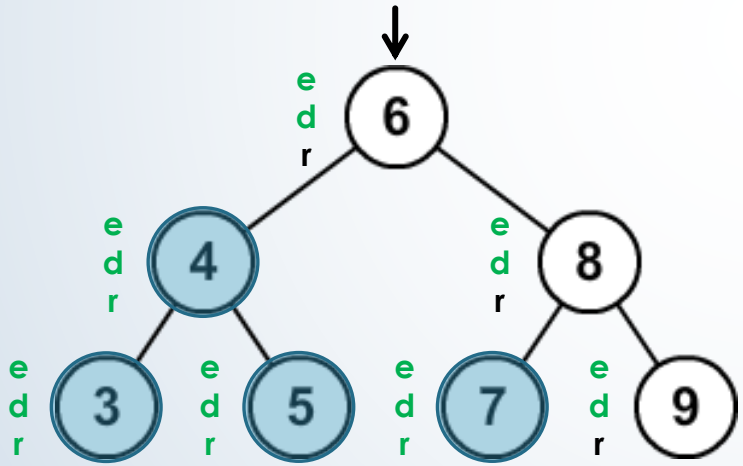


3 5 4 7

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

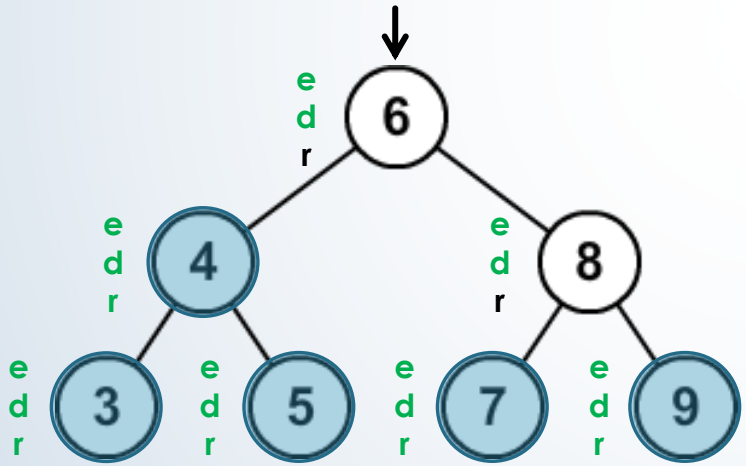


3 5 4 7

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

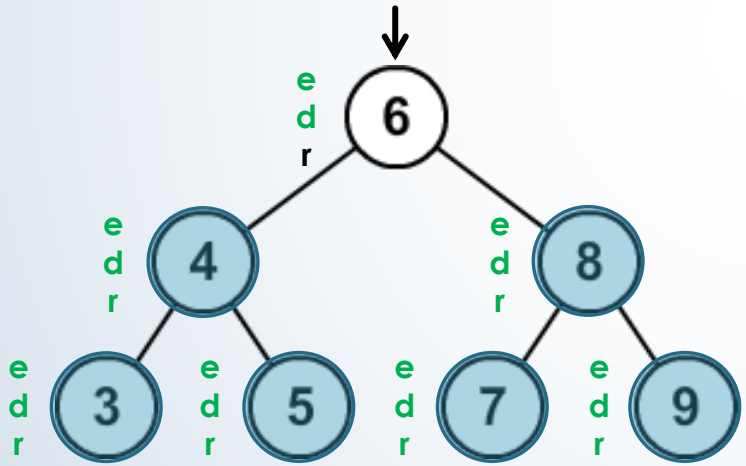


3 5 4 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

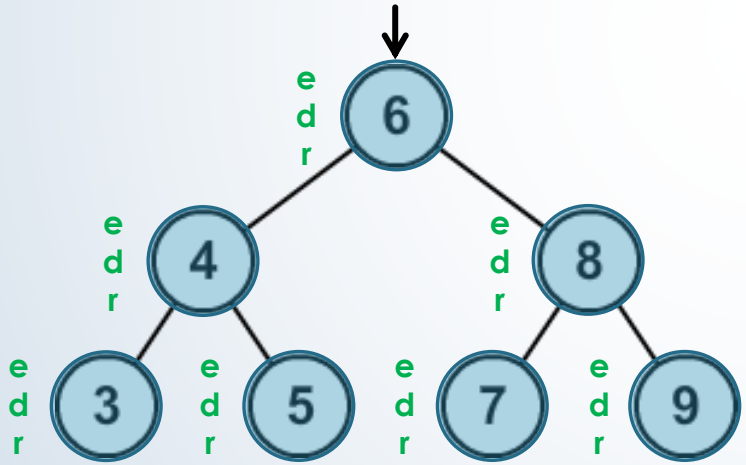


3 5 4 7 9 8

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

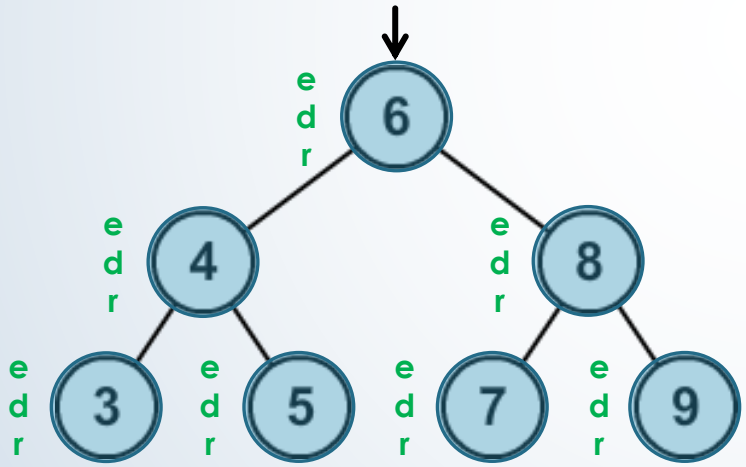


3 5 4 7 9 8 6

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

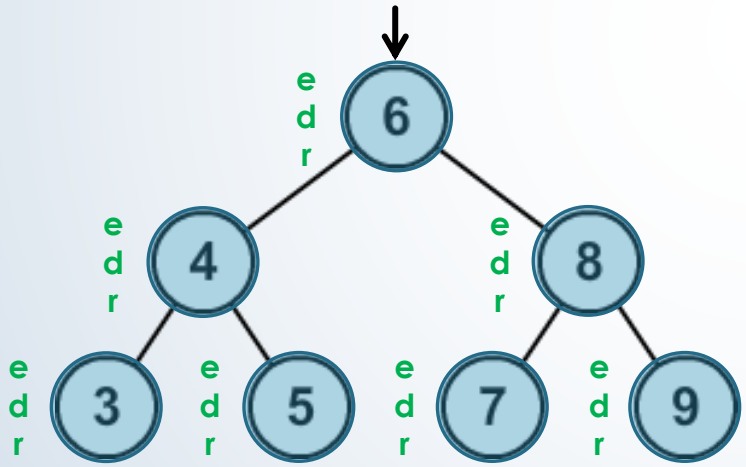


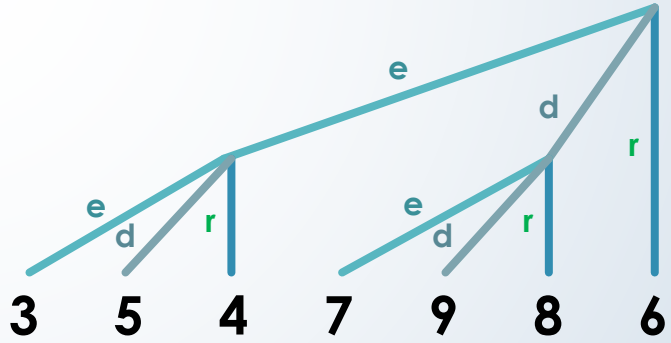
3 5 4 7 9 8 6

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final)

- Esquerda ➔ Direita ➔ Raiz

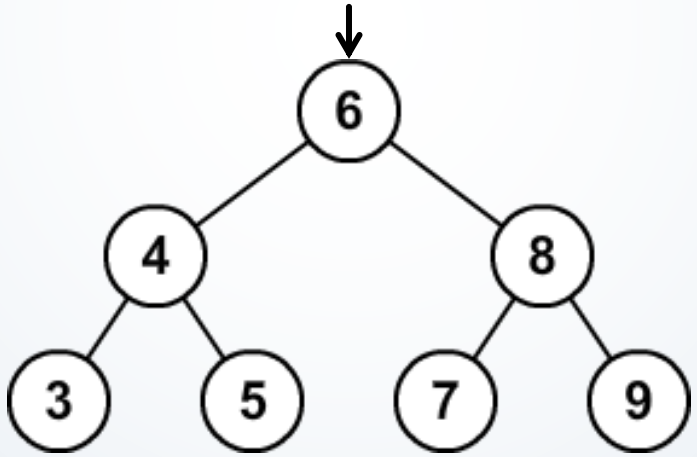




Árvore Binária

Percursos – Em nível

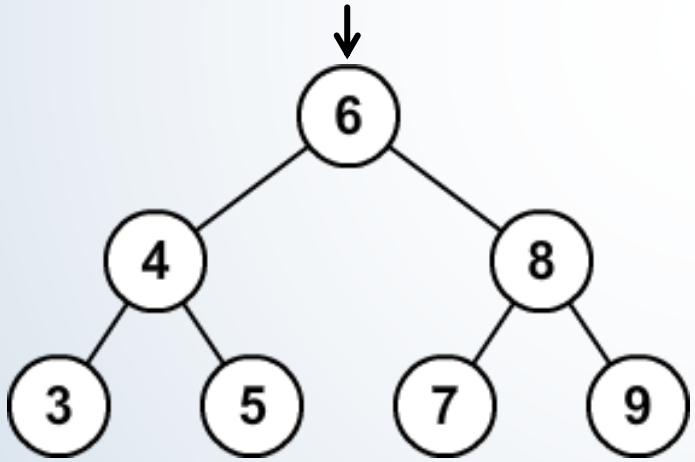
- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.



Árvore Binária

Percursos – Em nível

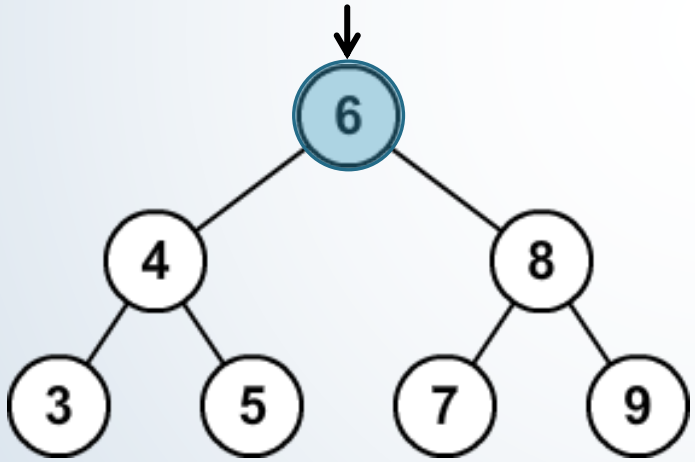
- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.



Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

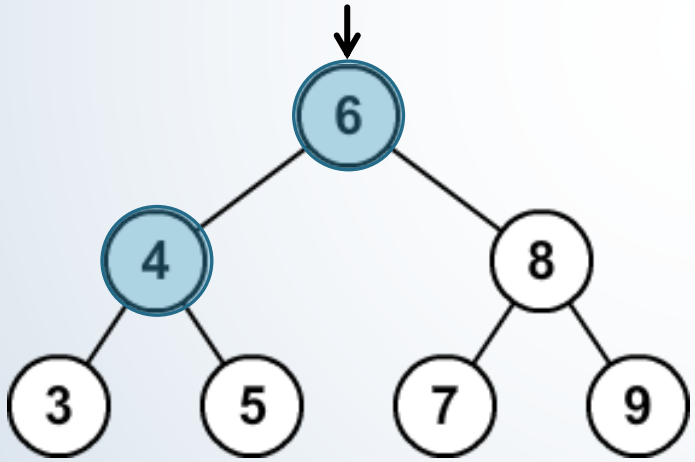


6

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

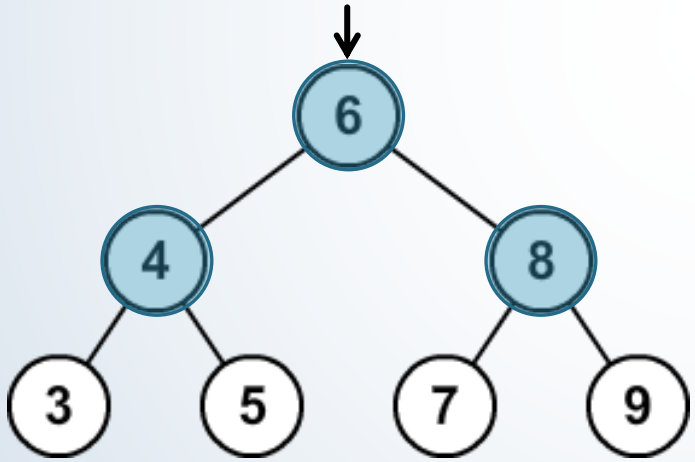


6 4

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

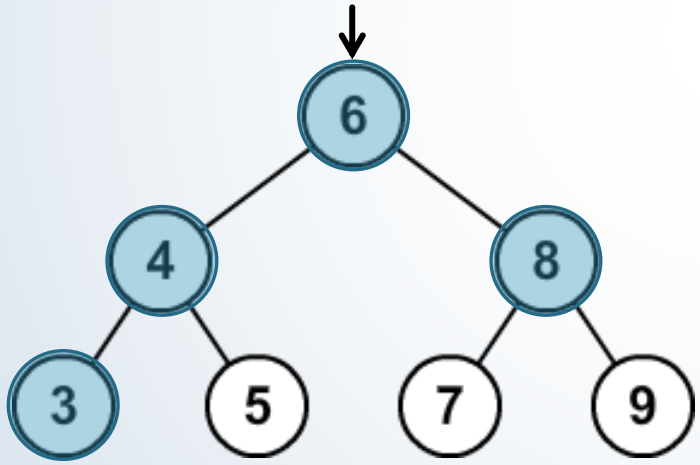


6 4 8

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

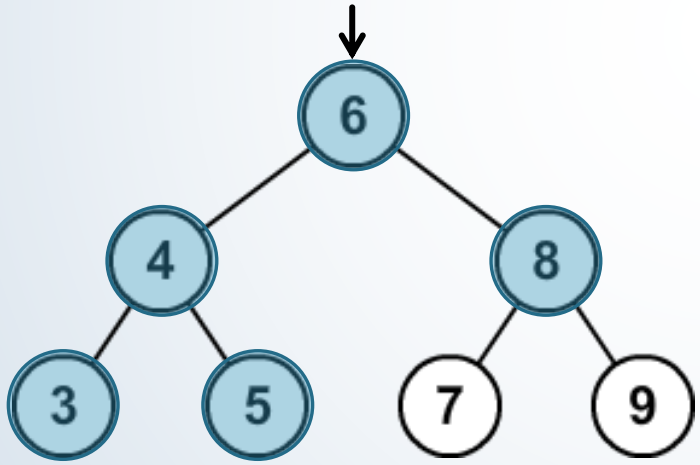


6 4 8 3

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

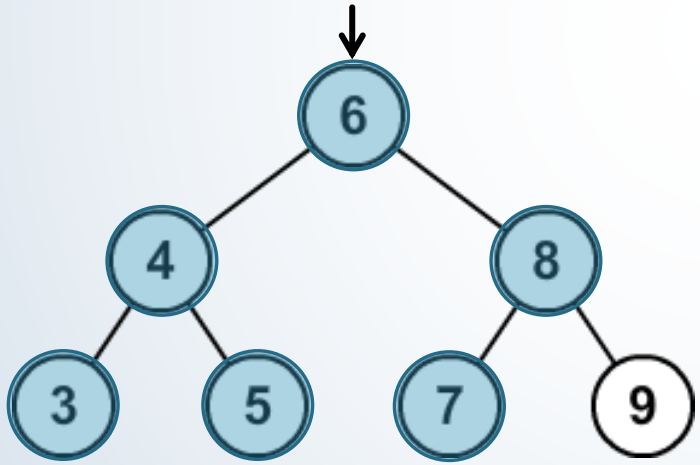


6 4 8 3 5

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

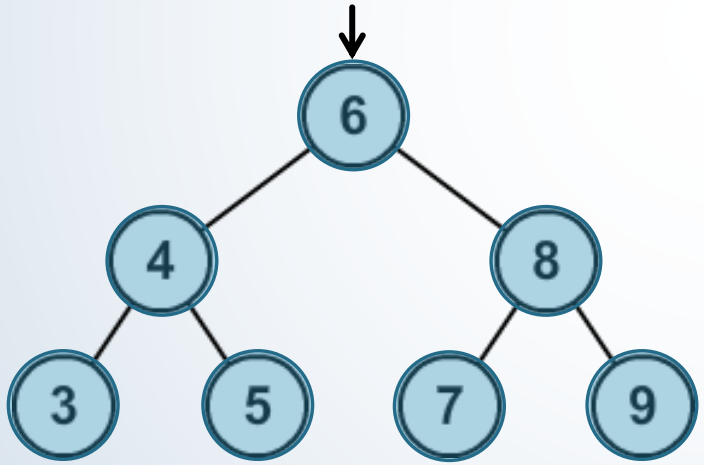


6 4 8 3 5 7

Árvore Binária

Percursos – Em nível

- Nível a nível, iniciando no nível 0, da esquerda para a direita.

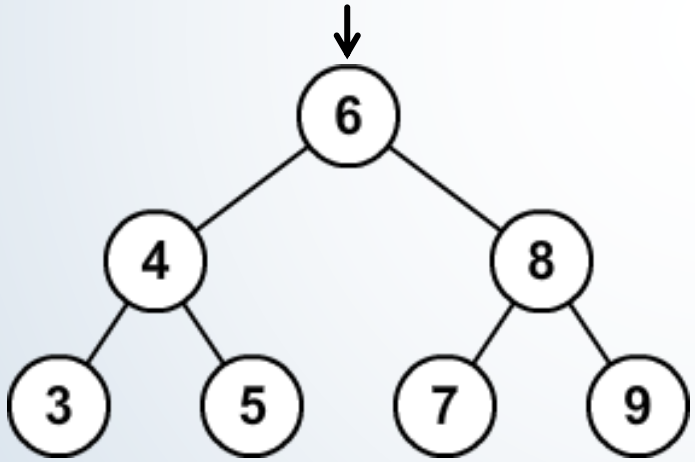


6 4 8 3 5 7 9

Árvore Binária

Percursos – Pré-ordem inverso

- Raiz ➔ Direita ➔ Esquerda

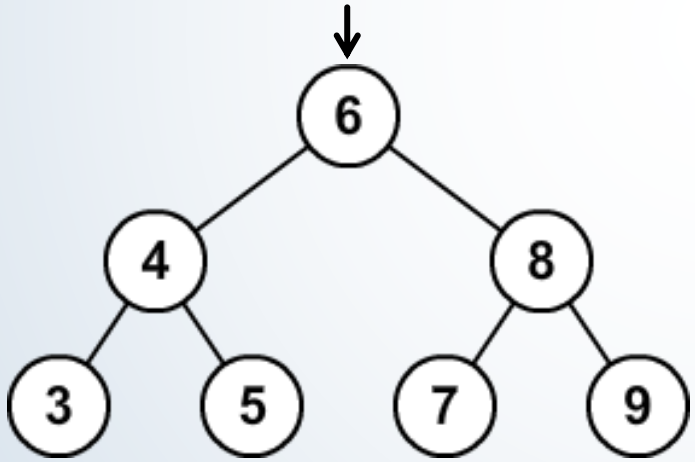


6 8 9 7 4 5 3

Árvore Binária

Percursos – Em ordem (ordem simétrica) inverso

- Direita ➔ Raiz ➔ Esquerda

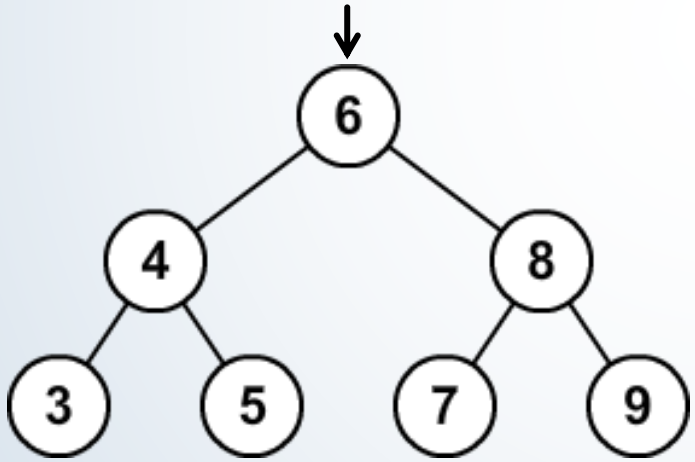


9 8 7 6 5 4 3

Árvore Binária

Percursos – Pós-ordem (ordem final) inverso

- Direita ➔ Esquerda ➔ Raiz

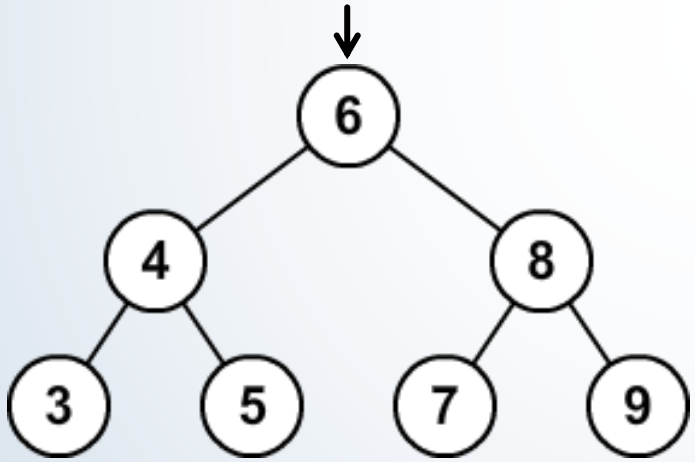


9 7 8 5 3 4 6

Árvore Binária

Percursos – Em nível inverso

- Nível a nível, iniciando no último, da direita para a esquerda.

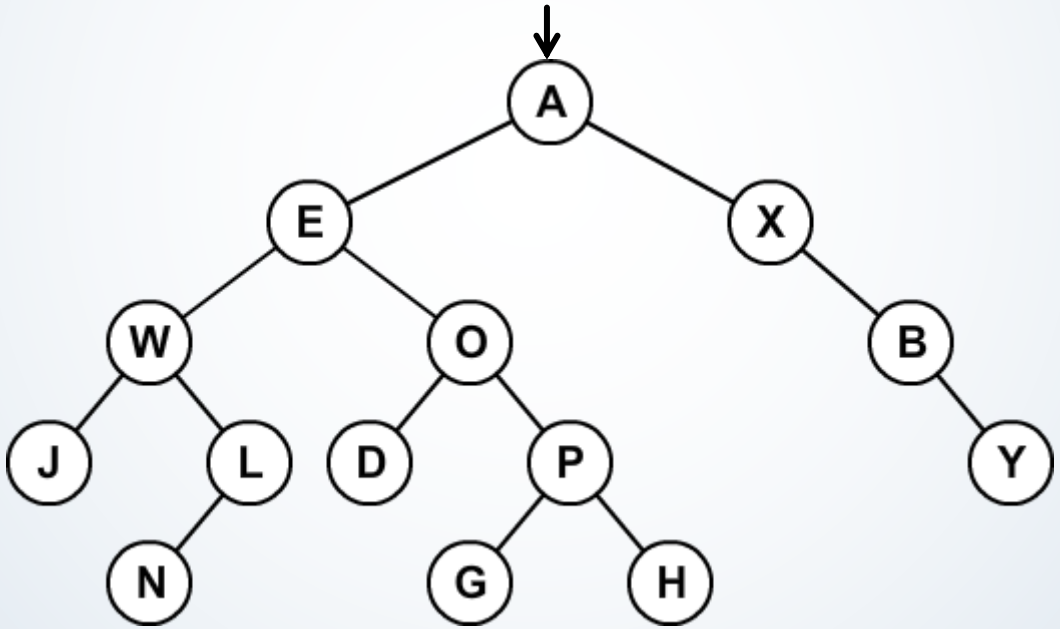


9 7 5 3 8 4 6

Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

- **Exercício e7.1:** Considere a árvore binária abaixo, em que as chaves são caracteres e estão representadas dentro de cada nó, e responda às perguntas a seguir:



Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

a) Quais são os nós da subárvore direita do nó A?

b) Quais são os nós da subárvore direita do nó O?

c) Quais são os nós da subárvore esquerda do nó E?

d) Qual é o grau do nó E?

e) Qual é o grau do nó L?

f) Qual é o grau do nó N?

g) Qual é o grau do nó B?

h) Qual é o grau da árvore?

i) Para cada nó da árvore, diga: qual é o seu pai, qual(is) são seu(s) filho(s) e se o nó é um nó folha (nó terminal).

j) Quais são os nós ancestrais do nó P?

Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

k) Quais são os nós ancestrais do nó G?

l) Quais são os nós ancestrais do nó N?

m) Quais são os nós ancestrais do nó Y?

n) Quais são os nós ancestrais do nó A?

o) Quais são os nós descendentes do nó Y?

p) Quais são os nós descendentes do nó O?

q) Quais são os nós descendentes do nó G?

r) Quais são os nós descendentes do nó E?

s) Quais são os nós descendentes direito do nó O?

t) Quais são os nós descendentes direito do nó L?

Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

u) Quais são os nós descendentes direito do nó W?

v) Quais são os nós descendentes esquerdo do nó E?

w) Quais são os nós descendentes esquerdo do nó O?

x) Quais são os nós descendentes esquerdo do nó L?

y) Qual a altura da árvore?

z) Qual o nível do nó Y?

aa) Qual o nível do nó P?

bb) Qual o nível do nó W?

cc) Qual o nível do nó J?

dd) Qual o nível do nó A?

Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

- **Exercício e7.2:** Construa uma árvore binária de busca para cada série de chaves apresentadas a seguir.
  a) 4, 8, 7, 6, 10, 9, 3, 2.
  b) 5, 4, 3, 2, 9, 7, 8, 12, -4, 22.
  c) K, L, X, M, N, O, R, Q, T, A.
  d) R, G, T, A, Q, E, F, O, P, L.
  e) maria, joão, josé, marcos, adriana, murilo.
  f) urso, cachorro, abelha, cavalo, gato, formiga, leão, galinha, girafa, macaco.

Árvore Binária de Busca

Exercícios Escritos

- **Exercício e7.3:** Para cada árvore do exercício anterior, apresente os 8 percursos estudados, ou seja, pré-ordem, em ordem, pós-ordem, em nível e suas variações inversas.

Árvore Binária de Busca

Exercícios de Implementação

- **Exercício i7.1:** No projeto **ESDC4Aula07**, é fornecido o esqueleto de uma classe chamada **BinarySearchTreeSort**, que contém o método

```
public static <Type extends Comparable<Type>> void sort( Type[] array )
```

- Sua tarefa é implementar um algoritmo de ordenação que use uma árvore binária de busca para ordenar o array passado como parâmetro. Os testes de unidade para a aceitação ou não do que deve ser feito foram implementados. Use a implementação **BinarySearchTreeDupKeys** contida no projeto **ESDC4Aula07**. Essa implementação é uma versão simplificada da classe **BinarySearchTree** contida no projeto de estruturas de dados disponível no GitHub, com a diferença que aceita chaves duplicadas, característica necessária para realizar a ordenação.

Bibliografia

SEDGEWICK, R.; WAYNE, K. **Algorithms**. 4. ed. Boston: Pearson Education, 2011. 955 p.

GOODRICHM M. T.; TAMASSIA, R. **Estruturas de Dados & Algoritmos em Java**. Porto Alegre: Bookman, 2013. 700 p.

CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. **Algoritmos – Teoria e Prática**. 3. ed. São Paulo: GEN LTC, 2012. 1292 p.