SBVLIFA: Linguagens Formais e Autômatos

Aula 08: Autômatos de Pilha

Bacharelado em Ciência da Computação
Prof. Dr. David Buzatto

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

- Linguagens Livres de Contexto

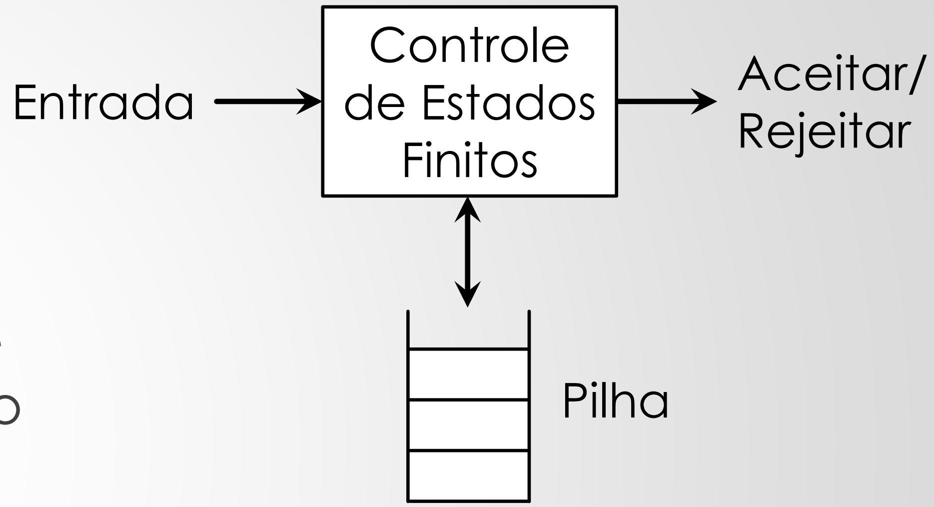
Tipo	Classe de Linguagens	Modelo de Gramática	Modelo de Reconhecedor
0	Recursivamente enumeráveis	Irrestrita	Máquina de Turing
1	Sensíveis ao contexto	Sensível ao contexto	Máquina de Turing com fita limitada
2	**Livres de contexto**	**Livre de contexto**	**Autômato de pilha**
3	Regulares	Linear (direita ou esquerda)	Autômato finito

Autômatos de Pilha

- Os **Autômatos de Pilha (PDA)** têm capacidade de reconhecer todas as linguagens livres de contexto e somente elas;
- Eles são essencialmente ε-NFAs com a inclusão de uma pilha;
- Essa pilha funciona exatamente como a estrutura de dados pilha, ou seja, os elementos podem ser inseridos/removidos somente no/do topo da pilha;
- Veremos duas variações de autômatos de pilha: 1) os que aceitam uma entrada ao alcançar um estado de aceitação; 2) os que aceitam uma entrada ao esvaziar a pilha;
- As CFGs podem ser convertidas em PDAs equivalentes e vice-versa.

Autômatos de Pilha

- **Um Exemplo Informal:**
  - Em uma transição, o autômato de pilha:
    1. Consome da entrada o símbolo que ele utiliza na transição. Se ε for usado como entrada, nenhum símbolo de entrada será consumido;
    2. Vai para um novo estado, que pode ser o mesmo;
    3. Substitui o símbolo no topo da pilha por qualquer string:
       - $\varepsilon \rightarrow$ pop;
       - O mesmo símbolo do topo;
       - Substituir o topo por outro símbolo (sem push ou pop);
       - O símbolo do topo pode ser substituído e então um ou mais novos símbolos podem ser inseridos.



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

- **Um Exemplo Informal:**
  - Consideremos a linguagem w-w-reverso, que é a linguagem dos palíndromos de comprimento par sobre o alfabeto $\{0, 1\}$: $L_{wwr} = \{ww^R \mid w \in (0 + 1)^*\}$
  - CFG: $P \rightarrow \varepsilon$

    $P \rightarrow 0P0$

    $P \rightarrow 1P1$
  - Como seria um PDA para essa linguagem?

Autômatos de Pilha

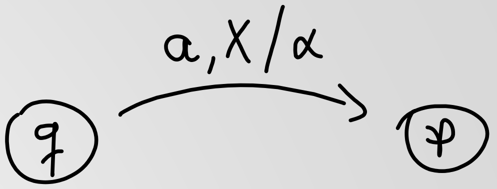
$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

- **Definição Formal:**
  - P: autômato de pilha, uma 7-upla, onde:
    - Q: conjunto finito de estados;
    - Σ: conjunto finito de símbolos de entrada (alfabeto);
    - Γ: conjunto finito de símbolos que podem ser inseridos na pilha (alfabeto da pilha);
    - δ: função de transição, na forma:

      $\delta(q, a, X) \rightarrow \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_n, \gamma_n)\}$, ou seja, $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \rightarrow P(Q \times \Gamma_\varepsilon)$
      - Se $\gamma = \varepsilon$, pop na pilha;
      - Se $\gamma = X$, a pilha fica inalterada;
      - Se $\gamma = YZ$, X é substituído por Z e Y é inserido na pilha.
    - q_0: estado inicial, tal que $q_0 \in Q$
    - Z_0 (ou $): o símbolo de início da pilha;
    - F: conjunto de estados finais ou de aceitação, tal que $F \subseteq Q$

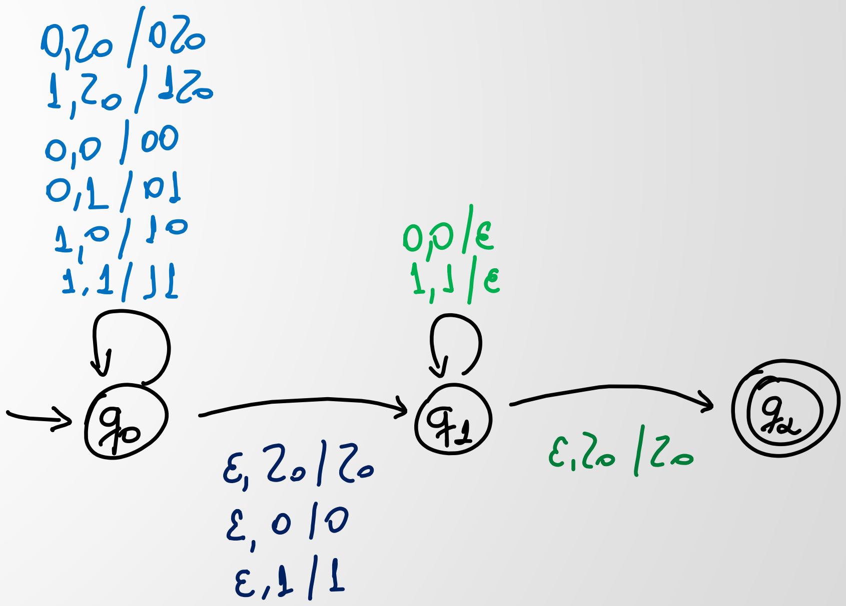
Autômatos de Pilha

$\delta(q, a, X) = \{(p, \alpha)\} \Rightarrow$



- **Definição Formal:**
  - Projetando um PDA para $L_{wwr} = \{ww^R \mid w \in (0+1)^*\}$:
    - $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
    - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
    - $\Sigma = \{0, 1\}$
    - $\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$
    - $F = \{q_2\}$
    - δ: →

$$
\begin{cases}
\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\} \\
\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\} \\
\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\} \\
\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\} \\
\delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\} \\
\delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\} \\
\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}
\end{cases}
$$



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

- **Descrição Instantânea (ID):**
  - A ID de um PDA representa a configuração atual do autômato;
  - É representada pela tripla (q, w, γ), onde:
    - q: é o estado;
    - w: é a parte restante da entrada;
    - γ: é o conteúdo da pilha.
  - Notação de **dedução**:
    - Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, definimos $\underset{P}{\vdash}$ ou $\vdash$ como a seguir: suponha que $\delta(q, a, X)$ contém (p, α), então para todas as strings w em Σ^* e β em Γ^*, temos

$$(q, aw, X\beta) \vdash (p, w, \alpha\beta)$$

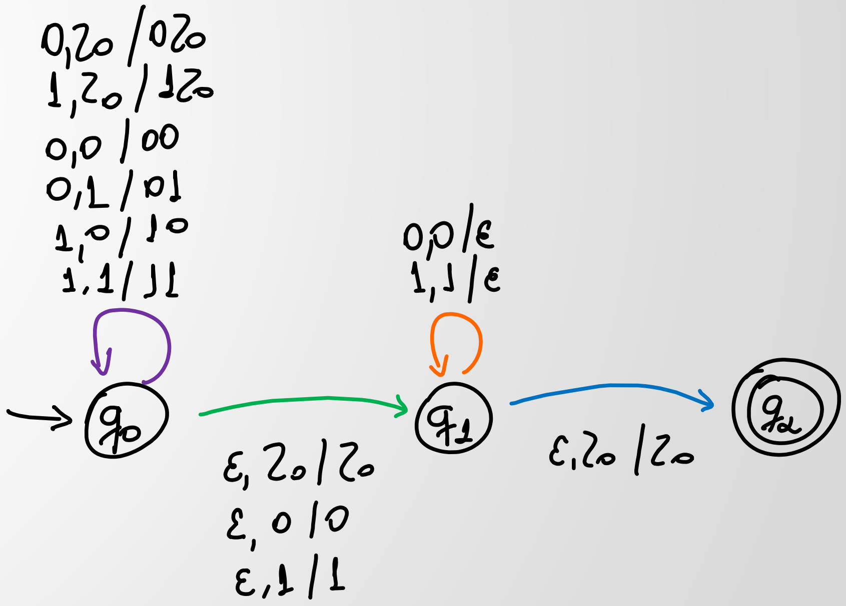
    - **Generalizando:**
      - **Base:** $I \overset{*}{\vdash} I$ pra qualquer ID I
      - **Indução:** $I \overset{*}{\vdash} J$ se existe alguma ID K tal que $I \vdash K$ e $K \overset{*}{\vdash} J$. Ou seja, $I \overset{*}{\vdash} J$ se existe uma sequência de IDs $K_1, K_2, \dots, K_n$ tal que $I = K_1$, $J = K_n$ e, para todo $i = 1, 2, n, \dots, n-1$, temos $K_i \vdash K_{i+1}$

Autômatos de Pilha

Descrição Instantânea (ID):

- Exemplo: quais são as IDs que o PDA de L_{wwr} pode alcançar sobre a entrada 1111?

$$
\begin{tikzcd}
(q_0, 1111, Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
(q_0, 111, 1Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 1111, Z_0) \arrow[r] & (q_2, 1111, Z_0) \\
(q_0, 11, 11Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 111, 1Z_0) \arrow[r] & (q_1, 11, Z_0) \arrow[d] \\
(q_0, 1, 111Z_0) \arrow[d] \arrow[dr] & (q_1, 11, 11Z_0) \arrow[dr] & (q_2, 11, Z_0) \\
(q_0, \varepsilon, 1111Z_0) \arrow[d] & (q_1, 1, 111Z_0) \arrow[d] & (q_1, 1, 1Z_0) \arrow[d] \\
(q_1, \varepsilon, 1111Z_0) & (q_1, \varepsilon, 11Z_0) & (q_1, \varepsilon, Z_0) \arrow[d] \\
 & & (q_2, \varepsilon, Z_0)
\end{tikzcd}
$$



Autômatos de Pilha

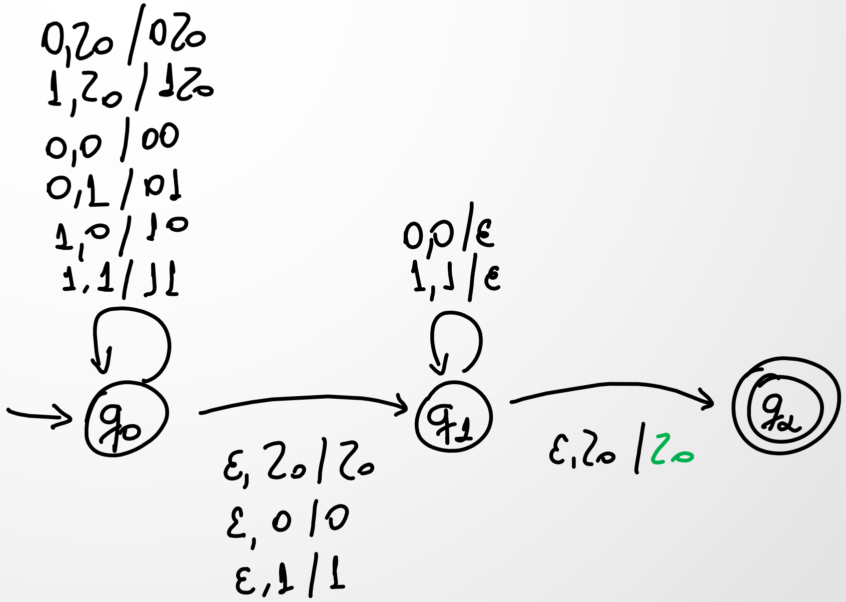
- **Tipos de Aceitação:**
  - Os PDAs podem ser projetados para aceitar uma string de duas formas:
    - Aceitação por estado final;
    - Aceitação por pilha vazia;
  - Os dois métodos são equivalentes, pois uma linguagem L tem um PDA que a aceita pelo estado final se e somente se L tem um PDA que a aceita por pilha vazia;
  - De forma inversa, dado um PDA P, geralmente as linguagens que são aceitas por estado final e por pilha vazia são diferentes.

Autômatos de Pilha

- **Aceitação por Estado Final:**
  - Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $L(P)$, a linguagem aceita por P pelo estado final, é:

$$L(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \alpha)\}$$

  - Onde $q \in F$ e $\alpha \in \Gamma^*$



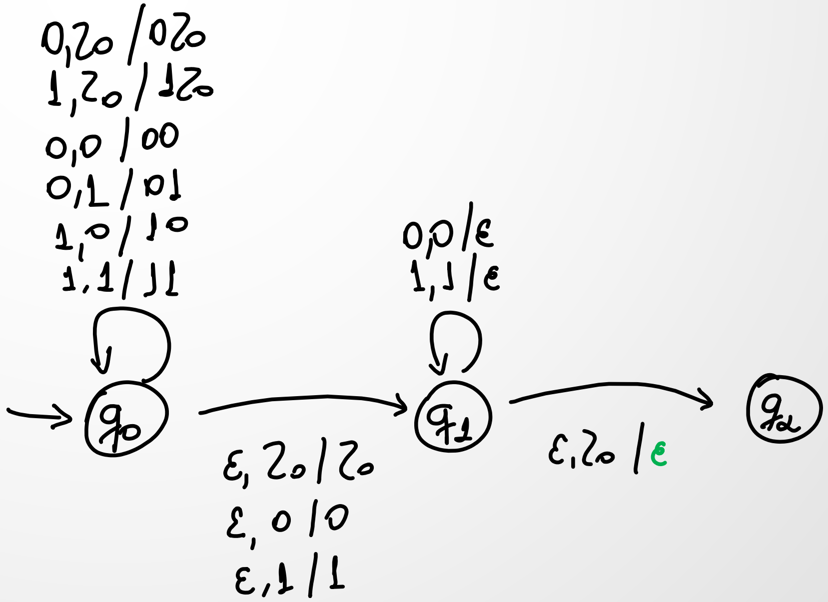
Autômatos de Pilha

Aceitação por Pilha Vazia:

- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $N(P)$, o conjunto de entradas w que P pode consumir e que ao mesmo tempo esvazia sua pilha, é definido como:

$$N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$$

- Onde $q \in Q$
- A letra N em $N(P)$ significa pilha nula ou pilha vazia.



Autômatos de Pilha

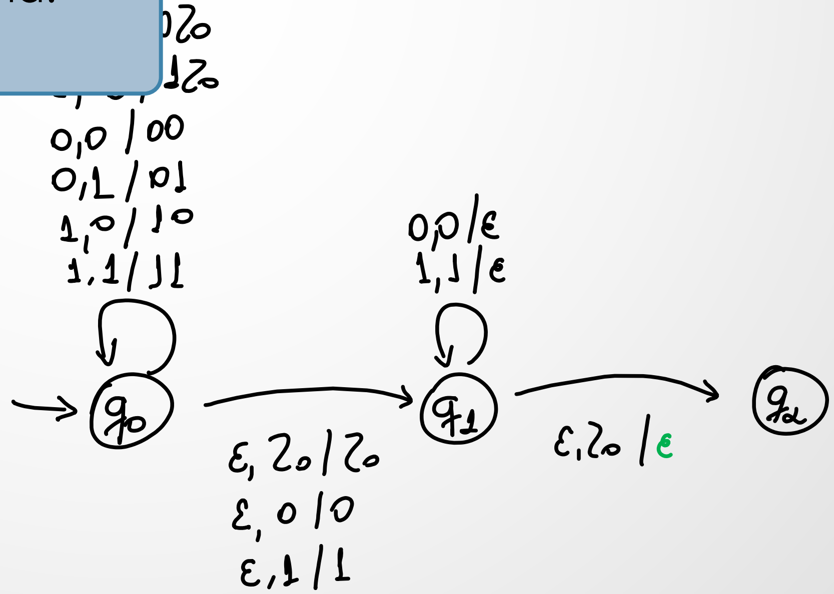
Aceitação por Pilha Vazia:

- Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, então $N(P)$, o conjunto de entradas w que P pode consumir … a pilha, é definido como:

  … $q_0, w, Z_0) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$

O conjunto de estados de aceitação pode ser omitido na definição do PDA que aceita por pilha vazia, pois é irrelevante! Sendo assim, um PDA que aceita por pilha vazia pode ser definido como uma sêxtupla na forma:
$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$

… significa pilha nula ou pilha vazia.



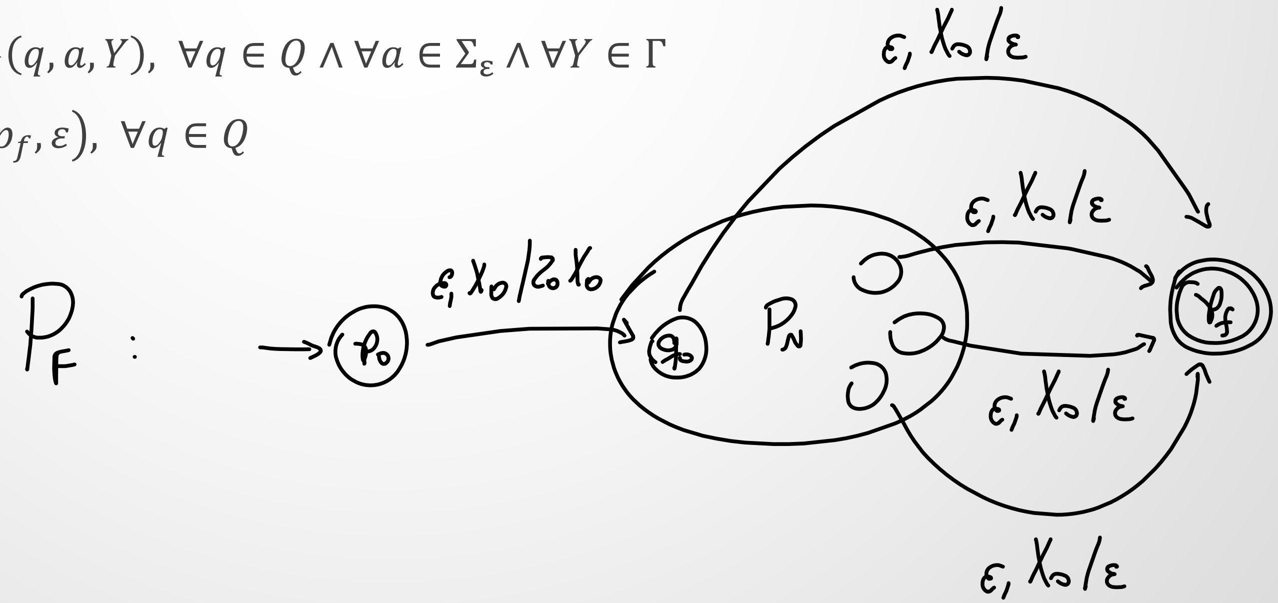
Autômatos de Pilha

De Pilha Vazia ao Estado Final:

- Se $L = N(P_N)$ para algum PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, existe um PDA P_F tal que $L = L(P_F)$ e que é definido como:

$$P_F = \left(Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\}\right)$$

- Onde δ_F é definida por:
  1. $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  2. $\delta_F(q, a, Y) \supset \delta_N(q, a, Y),\ \forall q \in Q \land \forall a \in \Sigma_\varepsilon \land \forall Y \in \Gamma$
  3. $\delta_F(q, \varepsilon, X_0) \supset (p_f, \varepsilon),\ \forall q \in Q$



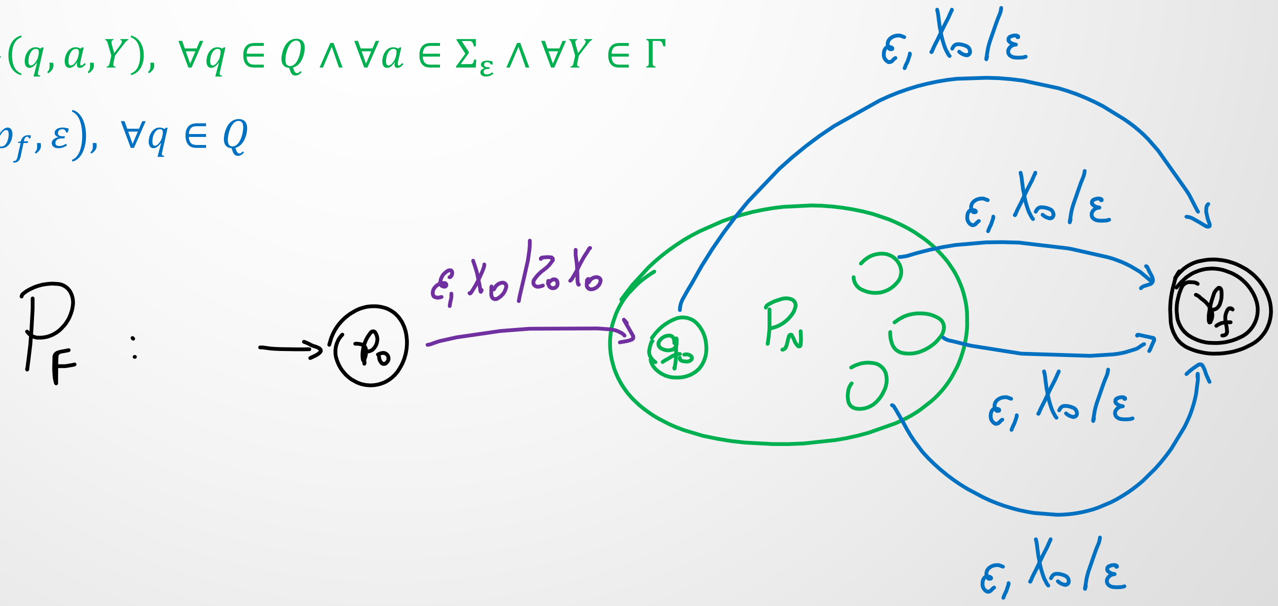
Autômatos de Pilha

De Pilha Vazia ao Estado Final:

- Se $L = N(P_N)$ para algum PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, existe um PDA P_F tal que $L = L(P_F)$ e que é definido como:

$$P_F = \left(Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\}\right)$$

- Onde δ_F é definida por:
  1. $\delta_F(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  2. $\delta_F(q, a, Y) \supset \delta_N(q, a, Y),\ \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma_\varepsilon \wedge \forall Y \in \Gamma$
  3. $\delta_F(q, \varepsilon, X_0) \supset (p_f, \varepsilon),\ \forall q \in Q$



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

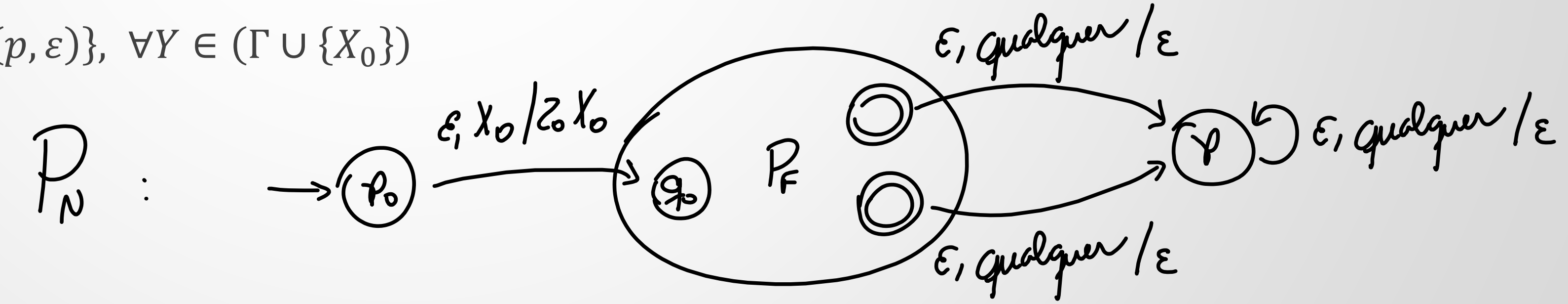
Autômatos de Pilha

De Estado Final para Pilha Vazia:

- Se $L = L(P_F)$ para algum PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, existe um PDA P_N tal que $L = N(P_N)$ e que é definido como:

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

- Onde δ_N é definida por:
  1. $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  2. $\delta_N(q, a, Y) \supset \delta_F(q, a, Y),\ \forall q \in Q \wedge \forall a \in \Sigma_\varepsilon \wedge \forall Y \in \Gamma$
  3. $\delta_N(q, \varepsilon, Y) \supset (p, \varepsilon),\ \forall q \in F \wedge \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$
  4. $\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\},\ \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$



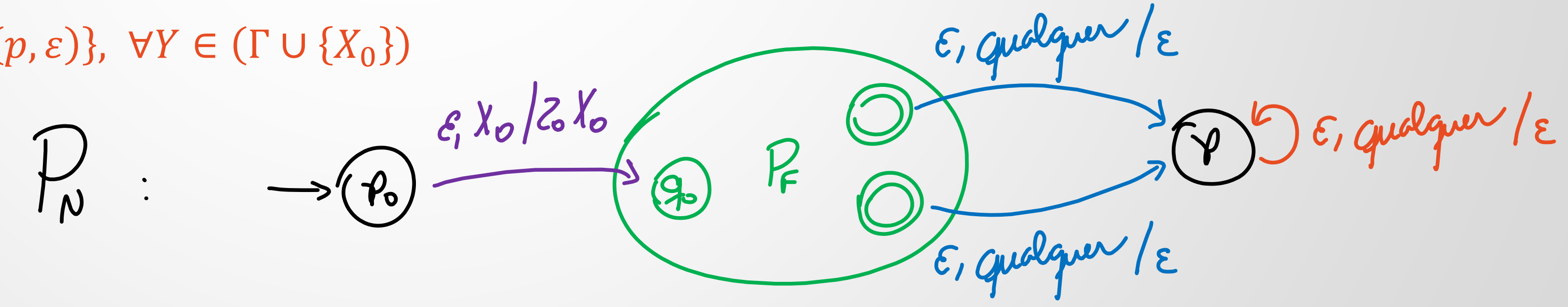
Autômatos de Pilha

De Estado Final para Pilha Vazia:

- Se $L = L(P_F)$ para algum PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$, existe um PDA P_N tal que $L = N(P_N)$ e que é definido como:

$$P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$$

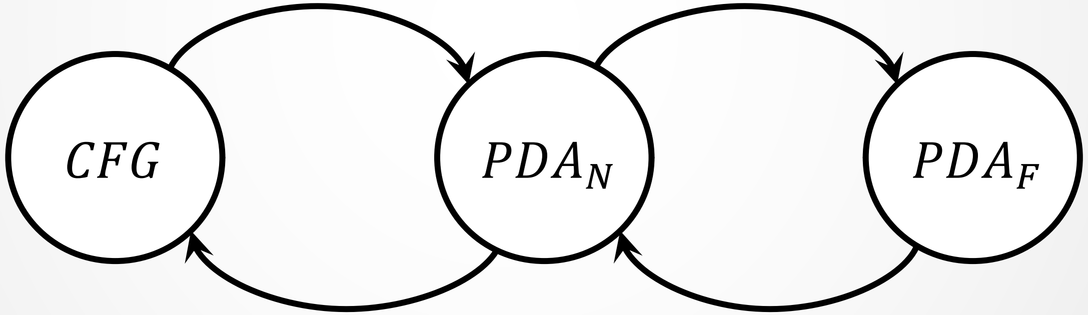
- Onde δ_N é definida por:
  1. $\delta_N(p_0, \varepsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$
  2. $\delta_N(q, a, Y) \supset \delta_F(q, a, Y),\ \forall q \in Q \land \forall a \in \Sigma_\varepsilon \land \forall Y \in \Gamma$
  3. $\delta_N(q, \varepsilon, Y) \supset (p, \varepsilon),\ \forall q \in F \land \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$
  4. $\delta_N(p, \varepsilon, Y) = \{(p, \varepsilon)\},\ \forall Y \in (\Gamma \cup \{X_0\})$



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

- **Equivalência entre PDAs e CFGs:**



Autômatos de Pilha

- **De CFGs para PDAs:**
  - Seja $G = (V, T, Q, S)$, construir o PDA P que aceite $L(G)$ por pilha vazia, da seguinte forma:

$$P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$$

  - Onde δ é definida como:
    1. Para cada variável A, $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \text{ é uma produção de } G\}$
    2. Para cada terminal a, $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Seja $G = (V, T, Q, S)$, construir o PDA P que aceite $L(G)$ por pilha vazia, da seguinte forma: $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$

Onde δ é definida como:

1. Para cada variável A, $\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \beta) \mid A \rightarrow \beta \text{ é uma produção de } G\}$
2. Para cada terminal a, $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$

$E \rightarrow I \mid E + E \mid E * E \mid (E)$

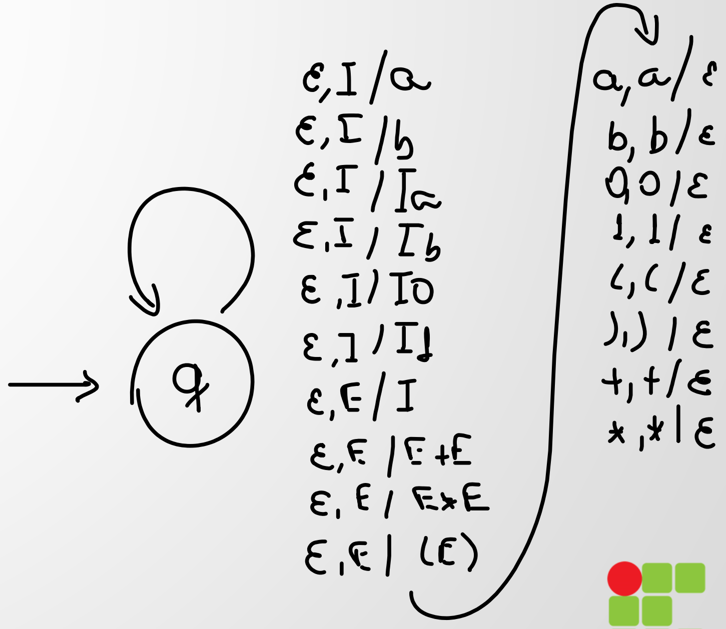
$I \rightarrow a \mid b \mid Ia \mid Ib \mid I0 \mid I1$

- **Exemplo:**
  - Converter a gramática de expressões em um PDA:
    - O conjunto de terminais (T) para o PDA é $\{a, b, 0,1, (,), +,*\}$. Esses oito símbolos e os símbolos I e E (V) formam o alfabeto da pilha ($V \cup T$). A função de transição para o PDA é:

a) $\delta(q, \varepsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$

b) $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, I), (q, E + E), (q, E * E), (q, (E))\}$

c) $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, 0, 0) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, 1, 1) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, (, ( ) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q,),)) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, +, +) = \{(q, \varepsilon)\}$
$\delta(q, *, *) = \{(q, \varepsilon)\}$



Autômatos de Pilha

- **De PDAs para CFGs:**
  - Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
  - Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
    - V consiste em:
      1. No símbolo S
      2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$
    - As produções de G são:
      a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
      b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
         1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
         2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

      Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção

$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

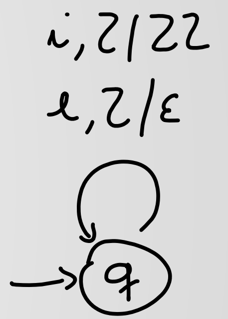
Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 1:

- Converter o PDA $P_N(\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qZq]\}$, pois S é o símbolo de início e $[qZq]$ é a única tripla que pode formada a partir dos símbolos de pilha de P_N
  - R (produções):
    - Para S, $S \to [qZq]$
      - Obs: se houvesse n estados, teríamos n produções desse tipo
    - Dado que $\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$, temos:
      - $[qZq] \to i[qZq][qZq]$
      - Obs: se existissem n estados, essa única regra produziria n^2 produções!
    - Dado que $\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$, temos:
      - $[qZq] \to e$
  - Substituindo $[qZq]$ por A, temos, finalmente:

$$S \to A$$
$$A \to iAA \mid e$$

ou $S \to iSS \mid e$



δ_N:
$\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$
$\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \varepsilon)\}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

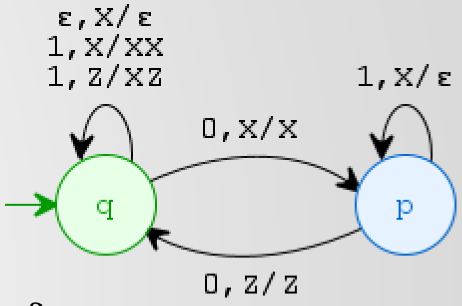
Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:

***V* consiste em:**

1. **No símbolo S**
2. **Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$**

As produções de G são:

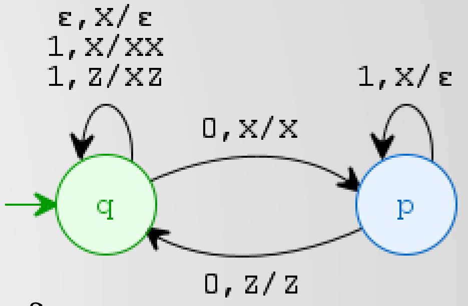
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção

$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$



δ_N:

1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

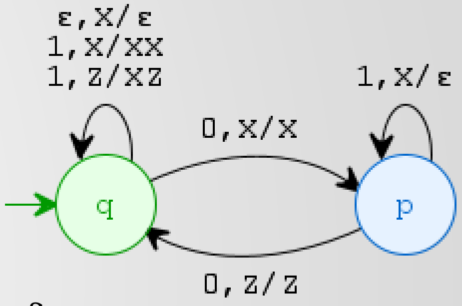
Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
- **a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$**
- b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:
  1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
  2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \to [qZq] \mid [qZp]$



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

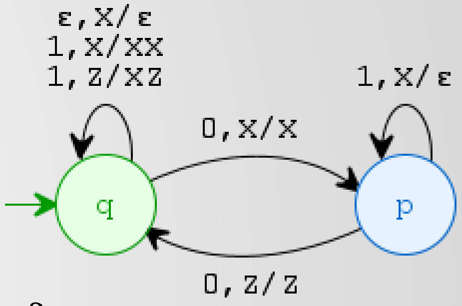
Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$
    - 1.
      - $[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$
      - $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$
      - $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$
      - $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$



δ_N:
1. $\boxed{\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1 Y_2)\}$
$\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, \underline{XZ})\}$

comprimento 2
listas de estados
de comprimento 2:
qq, pq,
qp e pp

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
1. **$a \in \Sigma_\varepsilon$**
2. **k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)**

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

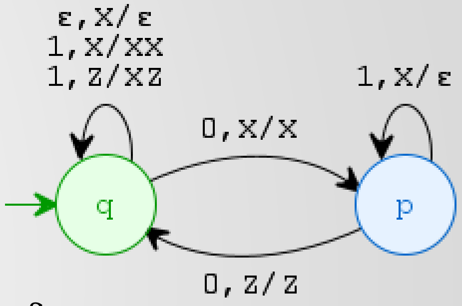
Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$
    - **2.**
      - $[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$
      - $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$
      - $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$
      - $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$

$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1 Y_2)\}$
$\delta_N(q, 1, X) = \{(q, \underbrace{XX})\}$

comprimento 2

listas de estados de comprimento 2:
qq, pq,
qp e pp



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\boxed{\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$

b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:

   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$

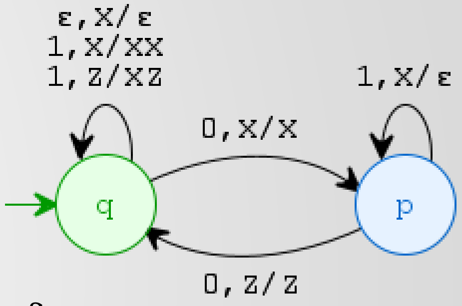
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção

$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\dots[r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \to [qZq] \mid [qZp]$
    - **3.**
      - $[qXq] \to 0[pXq]$
      - $[qXp] \to 0[pXp]$



δ_N:
1. $\delta_N(q,1,Z) = \{(q,XZ)\}$
2. $\delta_N(q,1,X) = \{(q,XX)\}$
3. $\boxed{\delta_N(q,0,X) = \{(p,X)\}}$
4. $\delta_N(p,0,Z) = \{(q,Z)\}$
5. $\delta_N(q,\varepsilon,X) = \{(q,\varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p,1,X) = \{(p,\varepsilon)\}$

$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1)\}$
$\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$

comprimento 1

listas de estados de comprimento 1:
q e
p

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

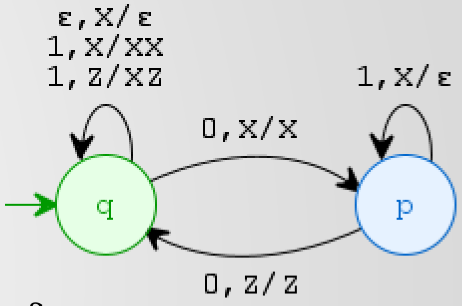
As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$
b) **Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:**
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. **k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)**

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

- **Exemplo 2:**
  - Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
  - $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
    - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
    - R (produções):
      - $S \to [qZq] \mid [qZp]$
      - **4.**
        - $[pZq] \to 0[qZq]$
        - $[pZp] \to 0[qZp]$

$\delta(q, a, X) = \{(r, Y_1)\}$
$\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$

comprimento 1
listas de estados de comprimento 1:
q e
p



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\boxed{\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

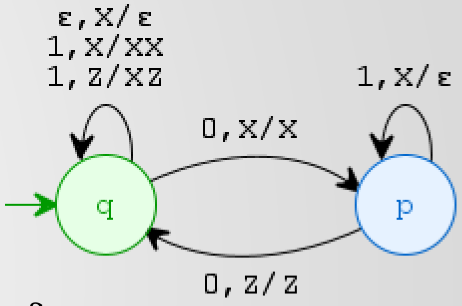
Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$
b) **Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:**
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. **k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)**

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2]\dots[r_{k-1}Y_kr_k]$$

- **Exemplo 2:**
  - Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
  - $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
    - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
    - R (produções):
      - $S \to [qZq] \mid [qZp]$
      - **5.**
        - $[qXq] \to \varepsilon$



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\boxed{\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}}$
6. $\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}$

$$\delta(q, a, X) = \{(r, \varepsilon)\}$$
$$\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$$

comprimento 0

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:

a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) **Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:**
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. **k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)**

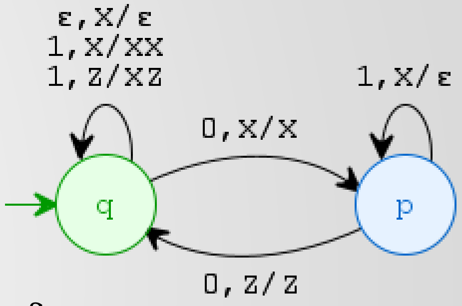
Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$
    - **6.**
      - $[pXp] \rightarrow 1$

$\delta(q, a, X) = \{(r, \varepsilon)\}$
$\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \underline{\varepsilon})\}$

comprimento 0



δ_N:
1. $\delta_N(q, 1, Z) = \{(q, XZ)\}$
2. $\delta_N(q, 1, X) = \{(q, XX)\}$
3. $\delta_N(q, 0, X) = \{(p, X)\}$
4. $\delta_N(p, 0, Z) = \{(q, Z)\}$
5. $\delta_N(q, \varepsilon, X) = \{(q, \varepsilon)\}$
6. $\boxed{\delta_N(p, 1, X) = \{(p, \varepsilon)\}}$

Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

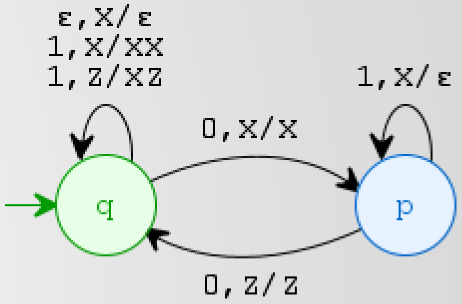
As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção

$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, [qXq], [qZq], [qXp], [qZp], [pXq], [pZq], [pXp], [pZp]\}$
  - R (produções):
    - $S \rightarrow [qZq] \mid [qZp]$
    - $[qZq] \rightarrow 1[qXq][qZq]$
    - $[qZq] \rightarrow 1[qXp][pZq]$
    - $[qZp] \rightarrow 1[qXq][qZp]$
    - $[qZp] \rightarrow 1[qXp][pZp]$
    - $[qXq] \rightarrow 1[qXq][qXq]$
    - $[qXq] \rightarrow 1[qXp][pXq]$
    - $[qXp] \rightarrow 1[qXq][qXp]$
    - $[qXp] \rightarrow 1[qXp][pXp]$
    - $[qXq] \rightarrow 0[pXq]$
    - $[qXp] \rightarrow 0[pXp]$
    - $[pZq] \rightarrow 0[qZq]$
    - $[pZp] \rightarrow 0[qZp]$
    - $[qXq] \rightarrow \varepsilon$
    - $[pXp] \rightarrow 1$



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

Autômatos de Pilha

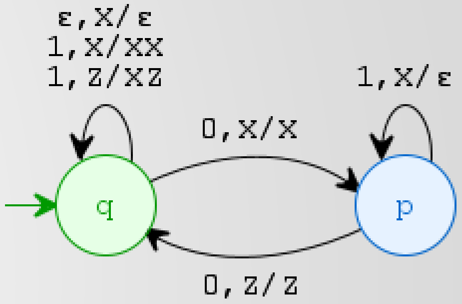
Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \to [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \dots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \dots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \to a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \dots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}$
  - R (produções):
    - $S \to A \mid B$
    - $A \to 1CA$
    - $A \to 1DE$
    - $B \to 1CB$
    - $B \to 1DF$
    - $C \to 1CC$
    - $C \to 1DG$
    - $D \to 1CD$
    - $D \to 1DH$
    - $C \to 0G$
    - $D \to 0H$
    - $E \to 0A$
    - $F \to 0B$
    - $C \to \varepsilon$
    - $H \to 1$



Autômatos de Pilha

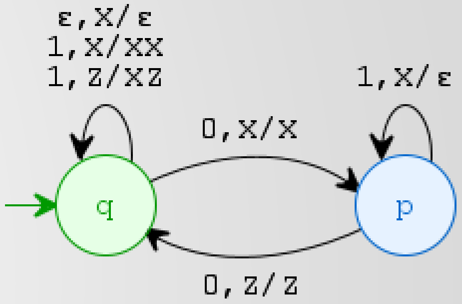
Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

Exemplo 2:

- Converter o PDA $P_N(\{q, p\}, \{0,1\}, \{X, Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:



- $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
  - $V = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}$
  - R (produções):
    - $S \rightarrow A \mid B$
    - $A \rightarrow 1CA \mid 1DE$
    - $B \rightarrow 1CB \mid 1DF$
    - $C \rightarrow 1CC \mid 1DG \mid 0G \mid \varepsilon$
    - $D \rightarrow 1CD \mid 1DH \mid 0H$
    - $E \rightarrow 0A$
    - $F \rightarrow 0B$
    - $H \rightarrow 1$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus São João da Boa Vista

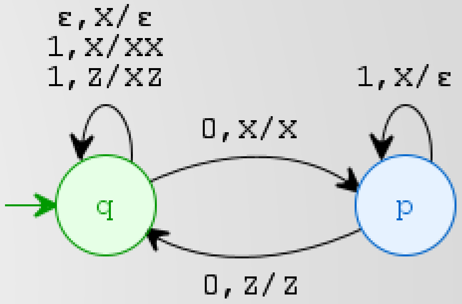
Autômatos de Pilha

Seja $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$, então existe uma CFG G tal que $L(G) = N(P)$.
Construção de $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
V consiste em:
1. No símbolo S
2. Em todos os símbolos na forma $[pXq]$, onde p e q são estados em Q e $X \in \Gamma$

As produções de G são:
a) Para todos os estados p, G tem a produção $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$
b) Seja $\delta(q, a, X)$ contendo o par $(r, Y_1 Y_2 \ldots Y_k)$, onde:
   1. $a \in \Sigma_\varepsilon$
   2. k pode ser qualquer número, inclusive 0, no caso do par (r, ε)

Assim, para todas as listas de estados $r_1, r_2, \ldots, r_k$, G tem a produção
$$[qXr_k] \rightarrow a[rY_1r_1][r_1Y_2r_2] \ldots [r_{k-1}Y_kr_k]$$

- **Exemplo 2:**
  - Converter o PDA $P_N(\{q,p\}, \{0,1\}, \{X,Z\}, \delta_N, q, Z)$ em uma CFG G:
  - $G = (V, \Sigma, R, S)$, onde:
    - $V = \{S, A, B, C, D\}$
    - R (produções):
      - $S \rightarrow A \mid B$
      - $A \rightarrow 1CA \mid 1D0A$
      - $B \rightarrow 1CB \mid 1D0B$
      - $C \rightarrow 1CC \mid 1D \mid 0 \mid \varepsilon$
      - $D \rightarrow 1CD \mid 1D1 \mid 01$

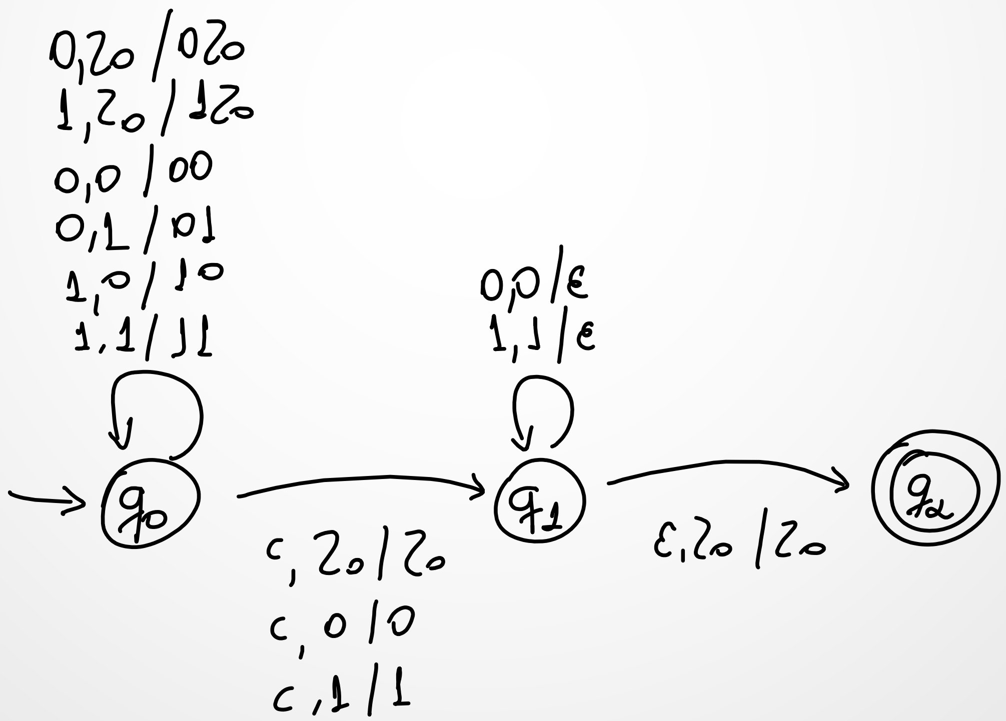


Autômatos de Pilha

- **Autômatos de Pilha Determinísticos (DPDA):**
  - DPDAs têm aplicação importante em analisadores sintáticos, afinal de contas, para um analisador sintático existir, ele precisa ser "executado" em um computador e, para isso, a necessidade de ser determinístico é inerente;
  - Formalmente, um PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ é determinístico se e somente se:
    - $|\delta(q, a, X)| \leq 1, \forall q \in Q \land \forall a \in \Sigma_\varepsilon \land \forall X \in \Gamma$
    - $\delta(q, a, X) \neq \emptyset, \exists a \in \Sigma \rightarrow \delta(q, \varepsilon, X) = \emptyset$
  - A linguagem L_{wwr} é livre de contexto, mas não existe um DPDA que a reconheça, sendo assim, os DPDAs reconhecem linguagens que ficam "entre" os tipos 3 e 2, ou seja, uma classe de linguagens que fica entre as linguagens regulares e as CFLs. Se essa linguagem for alterada, inserindo um "marcador de centro", ou seja, a linguagem L_{wcwr}, ela passa a ser reconhecida por um DPDA;
  - As linguagens aceitas por DPDAs pelo estado final incluem, propriamente as linguagens regulares, mas não estão incluídas propriamente nas CFLs;
  - Além disso, todas as linguagens que os DPDAs aceitam possuem gramáticas não-ambíguas, entretanto tem-se que tomar cuidado, pois há linguagens não inerentemente ambíguas que não são aceitas por DPDAs, como o caso da L_{wwr}.

Autômatos de Pilha

- **Autômatos de Pilha Determinísticos (DPDA):**
  - **Exemplo:** DPDA para a linguagem L_{wcwr}:



Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.1: Para o PDA $P = (\{q,p\}, \{0,1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q, Z_0, \{p\})$ com função de transição definida como:

$$\delta(q,0,Z_0) = \{(q,XZ_0)\}$$
$$\delta(q,0,X) = \{(q,XX)\}$$
$$\delta(q,1,X) = \{(q,X)\}$$
$$\delta(q,\varepsilon,X) = \{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,\varepsilon,X) = \{(p,\varepsilon)\}$$
$$\delta(p,1,X) = \{(p,XX)\}$$
$$\delta(p,1,Z_0) = \{(p,\varepsilon)\}$$

A partir da ID inicial $\delta(q,w,Z_0)$, mostre todas as IDs acessíveis quando a entrada w é:

a) 01

b) 0011

c) 010

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.2: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.3: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$L = \{w \mid w \text{ tem quantidades iguais de } 0'\text{s e } 1'\text{s}\}$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.4: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{w \mid \text{em } w \text{ a quantidade de } 0'\text{s é o dobro da quantidade de } 1'\text{s}\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.5: Projete um PDA para aceitar a linguagem abaixo. Escolha se o PDA aceitará por estado final ou por pilha vazia de modo que seja mais conveniente para você.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.6: Converta a gramática abaixo em um PDA que aceite a mesma linguagem por pilha vazia.

$$S \rightarrow 0S1 \mid A$$
$$A \rightarrow 1A0 \mid S \mid \varepsilon$$

Autômatos de Pilha

Exercícios Escritos

Exercício e8.7: Converta a gramática abaixo em um PDA que aceite a mesma linguagem por pilha vazia.

$$S \rightarrow aAA$$
$$A \rightarrow aS \mid bS \mid \varepsilon$$

Bibliografia

HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.; MOTWANI, R. **Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2002. 560 p.

RAMOS, M. V. M.; JOSÉ NETO, J.; VEGA, I. S. **Linguagens Formais: Teoria, Modelagem e Implementação**. Porto Alegre: Bookman, 2009. 656 p.

SIPSER, M. **Introdução à Teoria da Computação**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017. 459 p.