Computação Gráfica
Transformações Geométricas

Prof. Gabriel M. Alves

2024-10-07

versão: 976a48

Introdução

- A habilidade de simular a manipulação de objetos no espaço é fundamental para aplicações de computação gráfica.
- A manipulação espacial simulada dos objetos é conhecida como transformação.
- O uso de transformações em geometria está relacionado com dois aspectos de grande importância na CG:
  - mudança de coordenadas: os sistemas de coordenadas são utilizados para se obter a correta formulação analítica de um determinado problema. A mudança de coordenadas entre dois sistemas é feita por uma *transformação no espaço*.
  - deformação de objetos do espaço: temos as deformações rígidas e não-rígidas. As deformações rígidas mudam a posição dos objetos no espaço sem no entanto alterar as suas relações métricas (*isometrias* ou *movimentos rígidos*). As deformações não-rígidas alteram as relações métricas dos objetos.

Introdução

- *Transformações geométricas* são operações que alteram características como posição, orientação, forma ou tamanho do objeto.
- todas as transformações geométricas podem ser representadas por equações.
- a manipulação de objetos gráficos normalmente envolvem muitas operações de aritmética simples.
- o uso de matrizes são mais utilizadas, pois são mais fáceis de usar e entender do que as equações algébricas além disso o modelo organizacional da memória dos computadores se assemelha às matrizes.

Introdução

- Através de matrizes e de sua multiplicação, é possível representar todas as transformações lineares 2D e 3D.
  - Transformações lineares são transformações que preservam a estrutura linear do $\mathbb{R}^n$.
  - Uma transformação linear é caracterizada pelas propriedades: $L : \mathbb{R}^n \Leftarrow \mathbb{R}^n$
    - $\mathrm{L}(u + v) = \mathrm{L}(u) + \mathrm{L}(v)$ e $\mathrm{L}(\lambda\ u) = \lambda\ \mathrm{L}(u)$
    - u, v são pontos; λ é um escalar
- Várias transformações podem ser combinadas resultando em uma única matriz denominada matriz de transformação.

Revisão

- ponto: é uma localização no espaço. Notação: letra minúscula (ex: a)
- escalar: é um valor numérico. Notação: letra grega minúscula (ex: λ)
- vetor: é um segmento de reta orientado. Possui módulo, direção e sentido. Notação: letra maiúscula com seta (ex: $\vec{u}$)
- matriz: é um arranjo retangular de números ou variáveis organizado em linhas e colunas. Notação: letra maiúscula (ex: A)
  - Notação para os referenciar os elementos de uma matriz $A = (a_{ij})$
- adição e subtração de matrizes só faz sentido se os dois operandos tiverem a mesma dimensão.

Revisão

- multiplicação por um escalar: multiplicação dos elementos dos vetores e matrizes por um valor constante.
- Transposta de um vetor ou matriz: é o vetor ou matriz resultante da troca dos valores de suas linhas e colunas. Exemplo de um vetor transposto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo de uma matriz transposta:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propriedades da matriz transposta:
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A.B)^T = A^T \; . \; B^T$
  - $\det(A) = \det(A^T)$
- O uso da transposta torna sempre possível a multiplicação de dois vetores.
- Matriz simétrica: $A = A^T$ (a matriz deve ser quadrada)

Revisão

- Matriz diagonal: matriz que possui zeros em todas as posições exceto na diagonal.

$$A = diag(2, 10, 8) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriz identidade: é uma matriz diagonal em que cada posição da sua diagonal é 1.

$$I = diag(1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz oposta: os elementos da matriz -B possuem sinais inversos aos dos elementos da matriz B. Dizemos que -B é a matriz oposta de B.

Revisão

- Matriz inversa A^{-1}: ocorre quando o produto de duas matriz for igual a uma matriz identidade.
$$A.A^{-1} = I$$
- Multiplicação de matrizes: a multiplicação ocorre desde que o número de colunas da primeira seja igual ao número de linhas da segunda, na operação. A ordem das matrizes/vetores importa nesta operação.
- Lembre-se de utilizar a propriedade $(A.B)^T = A^T \, . \, B^T$ para comparar resultados de diferentes fontes da literatura.

Revisão

- O produto escalar de dois vetores corresponde a multiplicação de seus componentes correspondentes e pela soma dos produtos resultantes. Essa operação também é denominada produto interno (espaço euclidiano) e é simbolizada por $\bullet$, exemplo:

$$\vec{u} = [1 \quad 2], \qquad \vec{v} = [3 \quad 4], \qquad \vec{u} \bullet \vec{v} = 11$$

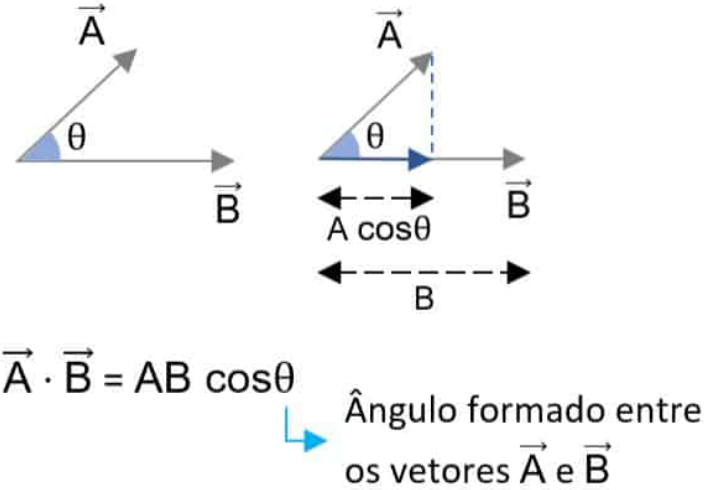
- módulo de um vetor (norma): $\vec{u} \bullet \vec{u} = \vec{u}^2$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

  - o módulo pode ser útil, pois às vezes queremos apenas a direção e o sentido dele, logo facilita os cálculos.
  - vetor unitário: também chamado de normalização de um vetor é dado por:

$$\vec{u}_{unitario} = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$$

- Ângulo entre vetores:



Revisão

- Para encontrarmos o ângulo temos:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

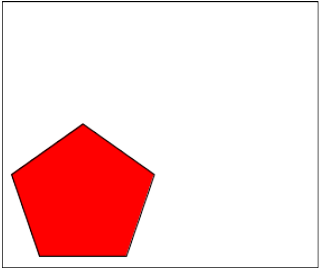
- Caso os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sejam unitários:

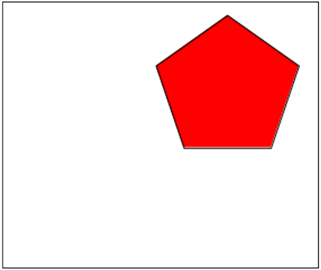
$$\theta = \cos^{-1}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

- Geometricamente o produto escalar é a medida de projeção de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.
- O produto escalar pode ser utilizado para:
  - verificar se dois vetores são ortogonais,
  - calcular a projeção de um vetor sobre outro,
  - encontrar o ângulo formado entre dois vetores.
- Produto vetorial simbolizado por $\times$ é uma operação entre dois vetores que resulta em um terceiro vetor ortogonal a eles.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

- Translação: significa movimentar o objeto, portanto todos os pontos do objeto são deslocados por meio da adição de um mesmo vetor de deslocamento (ou vetor de translação).
    - podemos movimentar os pontos ou o sistema de coordenada.





Transformações geométricas

- Translação em Three.js
- propriedade `position` ajusta a posição absoluta do objeto na cena

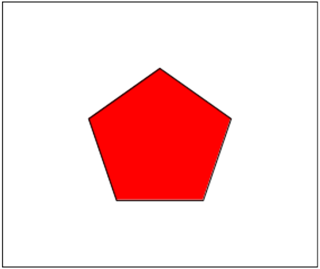
```
objeto.position.set(x, y, z); //THREE.Vector3
// ajuste individual
objeto.position.x = x;
objeto.position.y = y;
objeto.position.z = z;
```

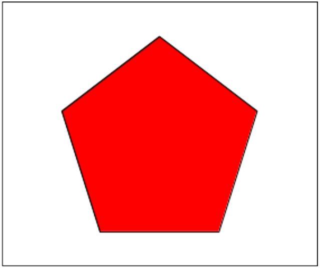
- métodos `translateX()`, `translateY()` e `translateZ()` ajustam a posição relativa do objeto, considerando sua posição atual

```
objeto.translateX(x);
objeto.translateY(y);
objeto.translateZ(z);
```

Transformações geométricas

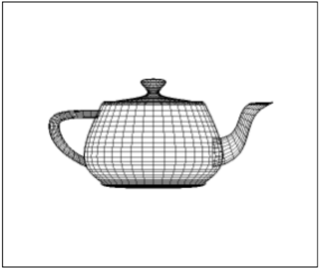
- Escala: significa mudar as dimensões de escala. Neste caso, teremos que multiplicar os valores de suas coordenadas por um fator de escala.
    - não é uma alteração de corpo rígido já que geralmente deforma o corpo transformado
    - uniforme: os fatores de escala são iguais, preservam a proporção
    - não-uniforme: os fatores de escala são diferentes e não preservam a proporção
    - propriedade `scale` (`scale.set(x,y,z)` ou individual como `scale.x = x;`)

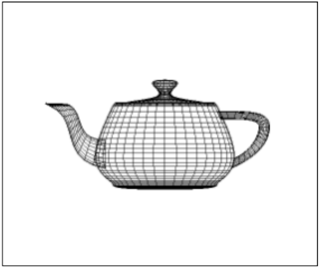




Transformações geométricas

- Reflexão: é o espelhamento (*flip*) do objeto que pode ocorrer em um ou mais eixos. Se ocorrer o espelhamento em x e y temos uma reflexão em torno da origem.





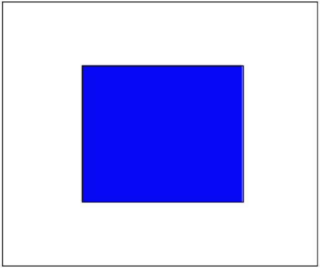
Saiba mais!

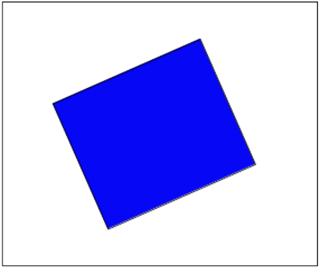
Utah teapot - Wikipedia (*Newell teapot*)

Transformações geométricas

- Rotação: significa girar. No caso 2D, a matriz de transformação é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$





- Em 3D teremos três possíveis matrizes de rotação, uma para cada eixo.
- Um giro de α graus em torno do eixo-z altera o plano xy e a matriz de rotação é dada por:

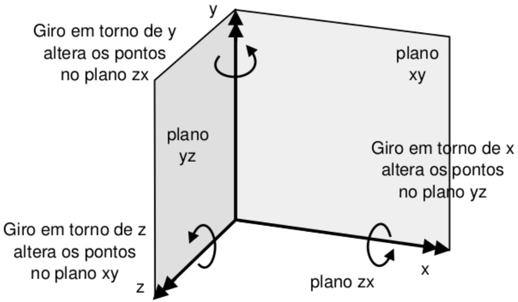
$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotação no eixo-x altera o plano yz e a matriz de rotação é dada por:

$$R_x(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

- Rotação ao redor do eixo-y, ou no plano zx é dada pela matriz:

$$R_y(\delta) = \begin{bmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{bmatrix}$$



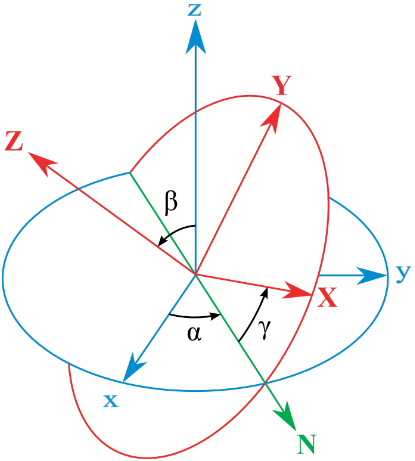
- Three.js determina a rotação em radianos.

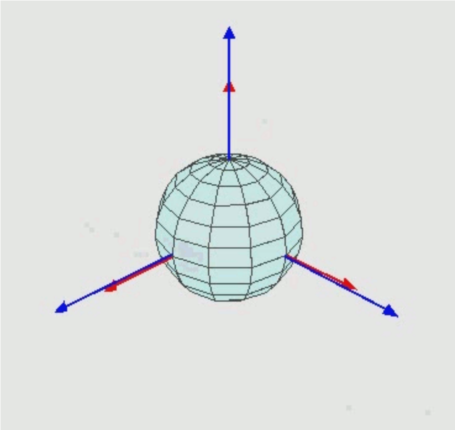
```
objeto.rotation.set(pitch, yaw, roll); //THREE.Euler
// ajuste individual
objeto.rotation.x += 0.01; // 0.01 radianos
objeto.rotation.y += 0.01;
objeto.rotation.z += 0.01;
```

$$radianos = graus \times \frac{\pi}{180}$$

$$graus = radianos \times \frac{180}{\pi}$$

- Ângulos de Euler descrevem a orientação de um corpo rígido girante em um espaço euclidiano tridimensional.





Referências

- WebGL2 Fundamentals. Disponível em: https://webgl2fundamentals.org
- Ginsburg, D.; Purnomo, B. OpenGL ES 3.0: Programming Guide. Second Edition. Addison-Wesley. 2014.
- Bailey, M.; Cunningham S. Graphics Shaders: Theory and Practice. Second Edition. CRC Press. 2012.
- Dave Shreiner, Graham Sellers, John M. Kessenich, Bill Licea-Kane. *OpenGL Programming Guide: The Official Guide to Learning OpenGL*, Version 4.3, Addison-Wesley. 2013.
- Wikipedia. Ângulos de Euler. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ângulos_de_Euler

Encerramento

- Dúvidas?
- Comentários?

Contato

Gabriel Marcelino Alves
gabriel.marcelino@ifsp.edu.br