CID

Circuitos Digitais

Aula 01 – Bases Numéricas

Binário
Decimal
Octal
Hexadecimal

Introdução

O número é um conceito abstrato que representa a idéia de quantidade; portanto, é um conceito fundamental para a área de computação.

Um sistema de numeração é o conjunto de símbolos utilizados para representar quantidades e as regras que definem a forma de representação.

Um sistema de numeração é determinado fundamentalmente pela BASE, que indica a quantidade de símbolos e o valor de cada símbolo.

Decimal (base 10): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Binário (base 2): 0, 1
Octal (base 8): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Hexadecimal (base 16): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Base B genérica: (0) a (B – 1)

Introdução

Em sistemas digitais, o sistema de numeração binário é o mais importante. Como usa apenas os símbolos 0 e 1, é mais fácil de ser representado por circuitos eletrônicos (presença (presença ou não de tensão, tensão, chave aberta ou fechada, fechada, etc.).

Os símbolos binários são denominados de Bits (Binary Digit). O conjunto de 8 bits é denominado de Byte.

Para a representação de números binários grandes utilizamos os sistemas de numeração octal e hexadecimal.

$$1100\ 0000\ 0000\ 0000_2 = 140000_8 = A000_{16}$$

Introdução

A base 10 é importante por ser a que manipulamos cotidianamente;

A base 2 é útil por conta dos circuitos lógicos, porém documentar números grandes apenas com 0 e 1s é complicado; documentar números grandes apenas com 0 e 1s é complicado;

As bases 8 (sistema octal) e 16 (sistema hexadecimal) compactam significativamente a representação de números binários.

Notação Posicional

Em um sistema numérico posicional de base r, um número D tem seu valor dado por:

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i . r^i$$

$$d_{(p-1)} \quad d_{(p-2)} \quad \ldots \quad d_1 \quad d_0 \,, d_{-1} \quad \ldots \quad D_{-n}$$

r : base do sistema;
p : número de dígitos à esquerda da vírgula;
n : número de dígitos à direita da vírgula;

O valor de cada símbolo é determinado de acordo com a sua posição no número.

Notação Posicional

10^3	10^2	10^1	10^0		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1	2	3	4	,	5	6	7
MSD							LSD

1234,567

$$1.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 4.10^0 + 5.10^{-1} + 6.10^{-2} + 7.10^{-3}$$

Generalização de bases

Seja “b” a base de representação de um número e A, B, C, D, E, ... os símbolos dos algarismos deste sistema, então o número EDCBA na base “b”, escrito convencionalmente como:

$$EDCBA_b$$

representa a grandeza:

$$E.b^4 + D.b^3 + C.b^2 + B.b^1 + A.b^0$$

Sistema Binário

O sistema binário, como sugere o nome, tem dois algarismos aos quais damos geralmente os símbolos 0 e 1;

Eles correspondem a qualquer conjunto dual, como: não e sim; falso e verdadeiro; desligado e ligado; negativo e positivo, etc;

Nos circuitos lógicos, 0 e 1 representam respectivamente níveis de tensão baixa e alto ou estados de saturação e corte de transistores;

Daí, uma outra designação comum: L e H (Low e High levels do inglês: baixo e alto níveis de tensão).

Sistema Binário

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i . 2^i$$

(MSD) $d_{(p-1)}$ $d_{(p-2)}$ ... d_1 d_0 , d_{-1} ... D_{-n} (LSB)

MSB: most significant digit (dígito mais significativo)
LSB: least significant digit (dígito menos significativo)

Sistema Octal

Sistema de base 8;

Contém 8 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7;

É utilizado por ser um sistema que tem relação direta com o sistema binário (veremos esta relação quando tratarmos de transformação entre bases);

Os valores posicionais são:

$$8^4 \quad 8^3 \quad 8^2 \quad 8^1 \quad 8^0 \quad , \quad 8^{-1} \quad 8^{-2} \quad 8^{-3} \quad 8^{-4}$$

Sistema Hexadecimal

Do hexa=6 e deci=10, sistema numérico de base 16;

Este sistema possui 16 símbolos distintos em sua contagem ;

Além dos 10 dígitos (0 a 9), utiliza as letras A, B, C, D, E e F que fazem o papel das grandezas 10,11,12,13,14,15;

Usamos as letras maiúsculas pela necessidade de termos que representar cada uma destas grandezas com um único algarismo.

O sistema Hexadecimal é um sistema muito utilizado em computadores.

Comparação

HEXA	DECIMAL	OCTAL	BINÁRIO
0	0	0	0000
1	1	1	0001
2	2	2	0010
3	3	3	0011
4	4	4	0100
5	5	5	0101
6	6	6	0110
7	7	7	0111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
A	10	12	1010
B	11	13	1011
C	12	14	1100
D	13	15	1101
E	14	16	1110
F	15	17	1111

Conversão Binária ⟶ Decimal

Devemos considerar os valores posicionais na base 2 e fazer a soma das potências dos bits em “1”:

$$\mathbf{11011_{(2)} = (1x2^4) + (1x2^3) + (0x2^2) + (1x2^1) + (1x2^0)}$$

$$\mathbf{1101_{(2)} = 27_{(10)}}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SÃO PAULO

Conversão Octal ⟶ Decimal

Assim como fizemos no sistema binário também utilizamos os valores posicionais:

EXEMPLO 1:

$$372_{(8)} = (3 \times 8^2) + (7 \times 8^1) + (2 \times 8^0)$$
$$372_{(8)} = 192 + 56 + 2$$
$$372_{(8)} = 250_{(10)}$$

EXEMPLO 2:

$$24{,}6_{(8)} = (2 \times 8^1) + (4 \times 8^0) + (6 \times 8^1)$$
$$24{,}6_{(8)} = 16 + 4 + 0{,}75$$
$$24{,}6_{(8)} = 20{,}75_{(10)}$$

Conversão Octal ⟶ Decimal

Iremos utilizar as potências com base 16 (valores posicionais);

EXEMPLO 1:

$356_{(16)} = (3 \times 16^2) + (5 \times 16^1) + (6 \times 16^0)$

$356_{(16)} = 768 + 80 + 6$

$356_{(16)} = 854_{(10)}$

EXEMPLO 2:

$2AF_{(16)} = (2 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (15 \times 16^0)$

$2AF_{(16)} = 512 + 160 + 15$

$2AF_{(16)} = 687_{(10)}$

Conversão base (r) qualquer ⟶ Decimal

Para converter de binária, octal ou hexadecimal para decimal, use o método da soma dos pesos de cada dígito (valor posicional):

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i . r^i$$

Conversão Decimal ⟶ Binário

Há duas formas de converter o número decimal inteiro para o equivalente binário. A primeira é fazer a soma das potências de 2, onde os bits “0” e “1” são colocados nos lugares apropriados:

$$45_{(10)} = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$45_{(10)} = 64 + 32 + 16 + 08 + 04 + 02 + 01$$

$$45_{(10)} = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1$$

$$45_{(10)} = = 101101_{(2)}$$

Conversão Decimal ⟶ Binário

A segunda forma (mais mecânica) é utilizar as divisões sucessivas por 2, e a escrita de modo inverso dos restos de cada divisão até que o quociente 0 seja obtido.

25 | 2
1 12 | 2
0 6 | 2
0 3 | 2
1 **1**

37 | 2
1 18 | 2
0 9 | 2
1 4 | 2
0 2 | 2
0 **1**

$25_{(10)} = 11001_{(2)}$

$37_{(10)} = 100101_{(2)}$

Conversão Decimal ⟶ Octal

Também utiliza-se o método das divisões sucessivas, só que agora a base é 8

$$266_{(10)} = ???_{(8)}$$

$$266_{(10)} = 412_{(8)}$$

266	8			
26	33	8		
2	1	4	8	
			0	

Conversão Decimal ⟶ Hexadecimal

Da mesma forma utiliza-se o processo de divisões sucessivas;

EXEMPLO 1

214 | 16
54 13 | 16
6 0

$$214_{(10)} = D6_{(16)}$$

EXEMPLO 2

423 | 16
103 26 | 16
7 10 1 | 16
0

$$423_{(10)} = 1A7_{(16)}$$

Conversão Fracionária Decimal $\longrightarrow$ Outros

Tomemos o seguinte exemplo: $91{,}6_{(10)} \longrightarrow X_{(2)}$

A parte inteira do número é convertida conforme o processo já demonstrado e obtemos assim o n° $1011011_{(2)}$.

A parte fracionária $0{,}6_{(10)}$ é convertida da seguinte maneira:

Multiplica-se a parte fracionária pela base “b”, neste caso o 2, e separa-se a parte inteira do produto. O resultado obtido da subtração da parte inteira do produto passa a ser o próximo multiplicando. Faz-se sucessivamente esta operação até que consiga uma precisão satisfatória. Lê-se os algarismos separados de cima para baixo.

Conversão Fracionária Decimal ⟶ Outros

Veja o exemplo:

$0{,}6_{(10)} \longrightarrow X_{(2)}$

0,6 x 2 = 1,2
menos a parte inteira (1) = 0,2
Vezes 2 = 0,4
menos a parte inteira (0) = 0,4
Vezes 2 = 0,8
menos a parte inteira (0) = 0,8
Vezes 2 = 1,6
menos a parte inteira (1) = 0,6
Vezes 2 = 1,2
menos a parte inteira (1) = 0,2 ......assim por diante.......

Conversão Fracionária Decimal ⟶ Outros

Lendo de cima para baixo teremos 10011, então $0{,}6_{(10)} = 10011_{(2)}$.

Fazendo uma verificação, podemos ver que $0{,}10011_{(2)}$ é igual a:

$$1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{19}{32} = \mathbf{0{,}59375}$$

Note que houve uma diferença de precisão na representação da grandeza nas diferentes bases.

Conversão Decimal ⟶ base (b) qualquer

Para a parte inteira: divisões sucessivas por (b);

Para a parte fracionária: multiplicações sucessivas por (b).

Conversão Octal ⟶ Binário

A principal vantagem do sistema octal é a transcrição de cada dígito octal para binário, sem a necessidade de cálculos:

OCTAL	BINÁRIO
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

EXEMPLO 1:

$472_{(8)} = [100][111][010]$

$472_{(8)} = 100111010_{(2)}$

EXEMPLO 2:

$5431_{(8)} = [101][100][011][001]$

$5431_{(8)} = 101100011001_{(2)}$

Conversão Hexadecimal ⟶ Binário

Assim como na conversão octal para binário, utilizamos a substituição de cada dígito hexadecimal para seu correspondente binário;

HEXA	BINÁRIO
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111

HEXA	BINÁRIO
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

EXEMPLO

$$9F2_{(16)} = [1001][1111][0010]$$
$$9F2_{(16)} = 100111110010_{(2)}$$

Conversão Binário ⟶ Octal

A conversão de números binários inteiros para octais inteiros se dá substituindo o conjunto de cada 3 binários pelo octal equivalente;

Esta divisão deverá ser feita da direita (LSB) para esquerda (MSB); se faltar bits à esquerda preencher com zeros.

EXEMPLO 1:

$\mathbf{100111010_{(2)} = [100][111][010]}$

$\mathbf{100111010_{(2)} = 472_{(8)}}$

EXEMPLO 2:

$\mathbf{11010110_{(2)} = [011][010][110]}$

$\mathbf{11010110_{(2)} = 326_{(8)}}$

Conversão Binário ⟶ Hexadecimal

Análogo à conversão Binário para Octal, só que agrupando 4 dígitos ao invés de 3.

EXEMPLO

$$1110100110_{(2)} = [0011][1010][0110]$$
$$1110100110_{(2)} = 3A6_{(16)}$$

Conversão Hexadecimal ⟶ Octal

Converter para Binário e depois para Octal ou Hexadecimal.

EXEMPLO

$$B2F_{(16)} = [1011][0010][1111]$$
$$B2F_{(16)} = 101100101111_{(2)}$$
$$B2F_{(16)} = [101][100][101][111]$$
$$B2F_{(16)} = 5457_{(8)}$$

Resumo das Conversões

De binário, octal ou hexadecimal para decimal, use o método da soma dos pesos de cada dígito (valor posicional);

De decimal para binário, octal ou hexadecimal, utilize o método das divisões/multiplicações sucessivas;

De binário para octal ou hexadecimal, agrupe os bits da direita para esquerda e converta cada grupo;

De octal ou hexadecimal para binário converta cada dígito em 3 (octal) ou 4 (hexadecimal) bits equivalentes;

De octal para hexadecimal ou (vice-versa) utilize a conversão para binário, daí então faça a conversão desejada.

Resumo das Conversões

Por que não convertemos cada dígito diretamente de Decimal para Binário como no exemplo abaixo?

EXEMPLO

$$\mathbf{874_{(10)} = [1000][0111][0010]}$$

Resumo das Conversões

Por que não convertemos cada dígito diretamente de Decimal para Binário como no exemplo abaixo?

EXEMPLO

$$\mathbf{874_{(10)} = [1000][0111][0010]}$$

10 não é potência de 2 ! !

Grandeza x Representação

"Temos trinta e cinco computadores no laboratório."

Note a diferença entre a grandeza (a quantidade de objetos) e uma possível representação da mesma.

Podemos representar tal grandeza em qualquer um dos sistemas vistos;

Grandeza x Representação

"Temos trinta e cinco computadores no laboratório."

Note a diferença entre a grandeza (a quantidade de objetos) é uma possível representação da mesma.

Podemos representar tal grandeza em qualquer um dos sistemas vistos;

Decimal = $35_{(10)}$;
Binário = $10011_{(2)}$;
Octal = $43_{(8)}$;
Hexadecimal = $23_{(16)}$

Grandeza x Representação

Notar que os sistemas Octal e Hexadecimal podem ser usados como formas compactadas de representar um número em Binário;

Octal agrupando agrupando 3 dígitos dígitos binários binários em um dígito Octal ;

Hexadecimal agrupando 4 dígitos binários em um dígito Hexadecimal

CID

Circuitos Digitais

Aula 01 – Bases Numéricas

Binário
Decimal
Octal
Hexadecimal

Obrigado!