Expression de la fonction de réflexion

En reprenant les expressions du champs de pression $p(x,t)$ et du champs de débit $u(x,t)$ en décomposition d'ondes aller et retour [1], on a :

$$p(x,t) = p^+(t - x/c) + p^-(t + x/c) \tag{1}$$
$$u(x,t) = Z_c^{-1}[p^+(t - x/c) - p^-(t + x/c)]. \tag{2}$$

Où $Z_c = \rho_0 c/S$ désigne l'impédance caractéristique d'un tuyau, et $P^{\pm}(\omega, x) = TF[p^{\pm}(t,x)]$. En remarquant que $p^{\pm}(t \pm x/c) = p^{\pm}(t) * \delta(t \pm x/c)$, on obtient les expressions de p et u dans le domaine fréquentiel :

$$P(\omega, x) = P^+(\omega)e^{-jkx} + P^-(\omega)e^{jkx} \tag{3}$$
$$U(\omega, x) = Z_c^{-1}\left[P^+(\omega)^{-jkx} - P^-(\omega)^{jkx}\right]. \tag{4}$$

Avec $k = 2\pi fc$ le nombre d'ondes.

En évaluant 3 et 4 en $x = l$, et en utilisant la relation $U(\omega, l) == Z_r^{-1}(\omega)P(\omega, l)$ où $Z_r(\omega)$ désigne l'impédance de rayonnement, on obtient

$$P(\omega, l) = P^+(\omega)e^{-jkl} + P^-(\omega)e^{jkl} \tag{5}$$
$$Z_r^{-1}(\omega)P(\omega, l) = Z_c^{-1}\left[P^+(\omega)^{-jkl} - P^-(\omega)^{jkl}\right] \tag{6}$$

En injectant 5 dans 6, on obtient une relation entre P^+ et P^- :

$$P^+(\omega)e^{-jkl}\left[Z_c^{-1} - Z_r^{-1}\right] = P^-(\omega)e^{jkl}\left[Z_r^{-1} + Z_c^{-1}\right] \tag{7}$$

On en tire une expression de la fonction de réflexion $R(\omega) = TF[r(t)]$ [2]:

$$R(\omega) = \frac{P^-(\omega)}{P^+(\omega)} = \frac{Z_c^{-1} - Z_r^{-1}}{Z_c^{-1} + Z_r^{-1}}e^{-2jkl} \tag{8}$$

$$\boxed{R(\omega) = \frac{Z_r - Z_c}{Z_r + Z_c}e^{-2jkl}} \tag{9}$$

Le notebook CalcFonctionReflexion illustre la fonction de réflexion dans les domaines temporel et fréquentiel.

[1] cf preuve de Viet-Toan

[2] Qui n'est en revanche pas raccord avec Chaigne & Kergomard, chap 4 sec 5, eq 4.25 (sinon, la phase s'annule et le retard est pas bon, du coup, aucune idée)