# Démonstration rotation de 45° entre $(p^+, p^-)$ et $(p, u)$

## Équation des ondes 1D

Soit l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$$

### Solution en pression

Soit $P(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ où $f$ et $g$ fonctions quelconques.
On a que

$$\frac{\partial^2 f(x-ct)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f(x-ct)}{\partial x^2} = c^2 f''(x-ct) - c^2 f''(x-ct) = 0$$

Et

$$\frac{\partial^2 g(x+ct)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 g(x+ct)}{\partial x^2} = c^2 g''(x+ct) - c^2 g''(x+ct) = 0$$

On a bien, par somme que $P(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ est solution de l'équation des ondes 1D.
On posera $p^+ = f(x-ct)$ et $p^- = g(x+ct)$.

### Solution en débit

Par Euler linéarisé :

$$\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} P \\
&= -\left[\frac{\partial p^+}{\partial x} + \frac{\partial p^-}{\partial x}\right] .\vec{u_x} \\
&= -\left[\frac{\partial f(x-ct)}{\partial (x-ct)} \frac{\partial (x-ct)}{\partial x} + \frac{\partial g(x+ct)}{\partial (x+ct)} \frac{\partial (x+ct)}{\partial x}\right] .\vec{u_x} \\
&= -\left[\frac{\partial f(x-ct)}{\partial (x-ct)} + \frac{\partial g(x+ct)}{\partial (x+ct)}\right] .\vec{u_x}
\end{aligned}$$

Puis en intégrant et en projetant sur $\vec{u_x}$ :

$$\begin{aligned}
\rho_0 v &= -\int \frac{\partial f(x-ct)}{\partial (x-ct)} + \frac{\partial g(x+ct)}{\partial (x+ct)} dt \\
&= -\left[-\frac{1}{c} f(x-ct) + \frac{1}{c} g(x+ct)\right] \\
&= \frac{1}{c} f(x-ct) - \frac{1}{c} g(x+ct)
\end{aligned}$$

D'où :

$$v = \frac{1}{\rho_0 c}(p^+ - p^-)$$

Et en utilisant le débit $u = v.S$ et l'impédance acoustique caractéristique $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$ :

$$u = Z_c^{-1}(p^+ - p^-)$$

## Lien $(p^+, p^-)$ et $(p, u)$

On a donc que :

$$\begin{cases} P & = p^+ + p^- \\ Z_c.u & = p^+ - p^- \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P \\ Z_c.u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^+ \\ -p^- \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^+ \\ -p^- \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} P \\ Z_c.u \end{pmatrix} &= \frac{2}{\sqrt{2}} R_{\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} p^+ \\ -p^- \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où on a $R_\theta$ la matrice de rotation d'angle $\theta$ :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc finalement, $\begin{pmatrix} P \\ Z_c.u \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle 45° de $\begin{pmatrix} p^+ \\ -p^- \end{pmatrix}$ dans le sens $\curvearrowleft$, à un facteur près.

D'où, on trouve la courbe $p^+ = G[-p^-]$ en faisant tourner la courbe $u = F[P]$ (adimensionnée par l'impédance caractéristique) de 45° dans dans le sens $\curvearrowright$.