1- Para demonstrar que $S(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$

Precisamos mostrar que S satisfaz as quatro propriedades:

(1) Comutatividade $S(x,y) = S(y,x)$

(2) Associatividade $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

(3) monotonicidade se $x \leq x'$ e $y \leq y'$, então $S(x,y) \leq S(x',y')$

(4) Elemento neutro $S(x,0) = x$

vamos mostrar, que: (1)

$S(x,y) = S(y,x)$

como T é comutativa, temos $T(N(x), N(y)) = T(N(y), N(x))$, então:

$$S(x,y) = N(T(N(x), N(y))) = N(T(N(y), N(x))) = S(y,x)$$

vamos mostrar, que: (2)

$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$

vamos começar com o lado esquerdo:

$$S(x, S(y,z)) = N(T(N(x), N(S(y,z))))$$

sabemos que:

$$S(y,z) = N(T(N(y), N(z))$$

logo: $N(x, S(y,z)) = T(N(y), N(z))$

substituindo: $S(x, S(y,z)) = N(T(N(x), T(N(y), N(z))))$

outro lado: $S(S(x,y),z) = N(T(N(S(x,y)), N(z)))$

sabemos que: $S(x,y) = N(T(N(x), N(y))) \to N(S(x,y)) = T(N(x), N(y))$

logo: $S(S(x,y),z) = N(T(T(N(x), N(y)), N(z))$

usamos a associatividade de T: $T(N(x), T(N(y), N(z))) = T(T(N(x), N(y)), N(z))$

os dois são iguais:

$$S(x, S(y,z)) = S(S(x,y),z)$$

③ monotonicidade

se $x \leq x'$ e $y \leq y'$, então $N(x) \geq N(x')$ e $N(y) \geq N(y')$, pois a negação fuzzy é decrescente.

Como T é monotônica crescente em ambos os argumentos:

$$T(N(x), N(y)) \geq T(N(x'), N(y'))$$

Logo: $N(T(N(x), N(y))) \leq N(T(N(x'), N(y')))$ (pois N é decrescente)

$$S(x,y) \leq S(x', y')$$

④ Elemento neutro

$$\begin{aligned} S(x,0) &= N(T(N(x), N(0))) \\ &= N(T(N(x),1)) \quad (\text{pois } N(0)=1) \\ &= N(N(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

$S(x,y) = N(T(N(x), N(y)))$ é uma t-conorma

2- Um operador $I:[0,1]^2 \to [0,1]$ é uma implicação fuzzy se satisfazer, no mínimo as propriedades:

1: $I(1,y) = y$
2: $I(0,y) = 1$
3: monotonicidade e y: se $y_1 \leq y_2 \to I(x, y_1) \leq I(x, y_2)$
4: monotonicidade decrescente em x: se $x_1 \leq x_2 \to I(x_1, x_2) \geq I(x_2, y)$

$I(1,Y) = Y$

$$
\begin{aligned}
I(1,Y) &= S(N(1), T(1,y)) \\
&= S(0, T(1,y)) \quad (\text{pois } N(1) = 0) \\
&= T(1,Y) \quad (\text{pois } S(0,a) = a) \\
&= y \quad (\text{propriedade da t-norma})
\end{aligned}
$$

$I(0,Y) = 1$

$$
\begin{aligned}
I(0,Y) &= S(N(0), T(0,Y)) \\
&= S(1, T(0,Y)) \quad (\text{pois } N(0) = 1) \\
&= S(1,0) \quad (\text{pois } T(0,Y) = 0) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

monotonicidade em Y:

se $y_1 \leq y_2$, então:

$T(x, y_1) \leq T(x, y_2)$ (pela monotonicidade de T)

$S(N(x), T(x, y_1) \leq S(N(x), T(x, y_2))$ (pela motonocidade de S)

Logo: $I(x, Y_1) \leq I(x, Y_2)$

monotonicidade em x:

se $x_1 \leq x_2$, então:

$N(x_1) \geq N(x_2)$ (pois N é decrescente)

$T(x_1, Y) \leq T(x_2, y)$ (pois T é crescente)

$I(x_1, Y) = S(N(x_1), T(x_1, Y)) \geq S(N(x_2), T(\cancel{X}_2, Y)) = I(x_2, Y)$

$I(x,Y) = S(N(x), T(x,Y))$, o operador define uma implicação fuzzy

(3) $A + X = B$

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{2-x}{2}, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2}, & 6 < x \leq 8 \\ \frac{10-x}{2}, & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

Representar A e B como números fuzzy triangulares

Com base nas funções dadas:

A é um número fuzzy triangular com suporte em $[-2,2]$ e pico em $x=0$, ou seja,

$A = (-2, 0, 2)$

B é um número fuzzy triangular com suporte em $[6,10]$ e pico em $x=8$,

ou seja: $B = (6, 8, 10)$

Usar a propriedade da soma de número fuzzy triangular

$A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$, então:

$$X = B - A = (b_1 - a_3, b_2 - a_2, b_3 - a_1)$$

substituindo:

$a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = 2$

$b_1 = 6, b_2 = 8, b_3 = 10$

temos:

$$X = (6-2, 8-0, 10-(-2)) = (4, 8, 12)$$

4- Cardinalidade escalar

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu A(x)$$

Grau de vizinhança entre dois conjuntos A e B

$$V(A,B) = \frac{1}{|A|}\left(|A| - \sum_{x \in X} \max\{0, \mu A(x) - \mu B(x)\}\right)$$

a)

i) $A = \{(v;0.4),(w;0.2),(x;0.5),(y;0.4),(z;1)\}$

$|A| = 0.4+0.2+0.5+0.4+1 = 2.5$ ///

ii) $B = \{(x,1),(y,1),(z,1)\}$

$|B| = 1+1+1 = 3$ ///

iii) $C = \frac{x}{x+1}$, para $X = \{0,1,2,\dots 10\}$

$|C| = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \dots \frac{10}{11} \simeq 7.9801$

iv) $D = 1 - \frac{x}{10}$, para $X = \{0,1,2,\dots,10\}$

$|D| = 1 - \frac{1}{10} + 1 - \frac{2}{10} + 1 - \frac{3}{10}, \dots, 0 = 5.5$ ///

b) $$V(A,B) = \frac{1}{|A|}\left(|A| - \sum_{x \in X} \max\{0, \mu A(x) - \mu B(x)\}\right)$$

1. Cálculo de $V(A,B)$

Conjuntos fuzzy:

$A = \{(v;0.4),(w;0.2),(x;0.5),(y;0.4),(z;1)\}$

$B = \{(x;1),(y;1),(z;1)\}$

$\boxed{|A| = 2.5}$

Calcular a soma dos máximos:

Elemento	$\mu A(x)$	$\mu B(x)$	$\mu A - \mu B$	$max(0, \mu A - \mu B)$
V	0.4	0	0.4	0.4
W	0.2	0	0.2	0.2
X	0.5	1	-0.5	0
Y	0.4	1	-0.6	0
Z	1	1	0	0

$\sum max(0, \mu A - \mu B) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

$V(A,B) = \frac{1}{2,5}(2,5 - 0,6) = \frac{1}{2.5} \cdot 1,9 = 0.76$

Cálculo de $V(C,D)$

sabemos:

$|C| = \sum \frac{x}{x+1} = 7,49$

$|D| = \sum 1 - \frac{x}{10} = 5.5$

agora, vamos aplicar a fórmula para $V(C,D)$:

$$V(C,D) = \frac{1}{|C|}\left(|C| - \sum_{x=0}^{10} max\{0, \mu C(x) - \mu D(x)\}\right)$$

tabela com valores:

x	$\mu c = \frac{x}{x+1}$	$\mu D = 1 - \frac{x}{10}$	$\mu c - \mu D$	$\max(0, \mu c - \mu D)$
0	0	1	-1	0
1	0.5	0.9	-0.4	0
2	0.666	0.8	-0.134	0
3	0.75	0.7	0.05	0.05
4	0.8	0.6	0.2	0.2
5	0.833	0.5	0.333	0.333
6	0.857	0.4	0.457	0.457
7	0.875	0.3	0.575	0.575
8	0.888	0.2	0.688	0.688
9	0.9	0.1	0.8	0.8
10	0.909	0	0.909	0.909

soma dos máximos:

$$0.05 + 0.2 + 0.333 + 0.457 + 0.575 + 0.688 + 0.8 + 0.909 = 4{,}012$$

$$V(C,D) = \frac{1}{7{,}49}(7{,}49 - 4{,}012) = \frac{3{,}478}{7{,}49} \simeq 0.4644$$

$$V(A,B) = 0{,}76$$

$$V(C,D) \simeq 0{,}4644$$

5- Extensão de Zadeh da função $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$A = \{(-1; 0.5), (0; 1), (1; 0.5), (2; 0.3)\}$

$B = \{(2; 0.5), (3; 1), (4; 0.5), (5; 0{,}3)\}$

$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

$\hat{f}(A, B) =$ extensão de zadeh

Dado $f(x_1, x_2)$, a extensão fuzzy $\hat{f}(A, B)$ é:

$$\hat{f}(A,B)(z) = \sup_{x_1 + x_2 = z} \min(\mu A(x_1), \mu B(x_2))$$

z	valores de min(μA, μB)	$\hat{f}(A,B)(z)$
1	0.5	0.5
2	0.5, 0.5	0.5
3	0.5, 1, 0.5	1
4	0.3, 0.5, 0.5, 0.3	0.5
5	0.3, 0.3, 0.5	0.5
6	0.3, 0.3	0.3
7	0.3	0.3

$\hat{f}(A,B) = \{(1; 0.5), (2; 0.5), (3; 1), (4; 0.5), (5; 0.5), (6; 0.3), (7; 0.3)\}$