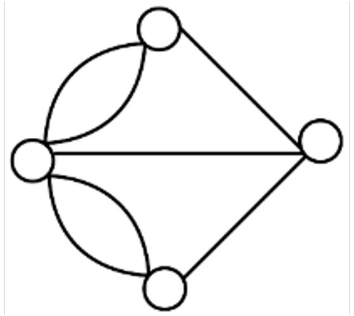


Grafos

Emparelhamento em Grafos Bipartidos

Sumário

Problema do Casamento

- Imagine um grupo de n **mulheres solteiras** e n **homens solteiros** que desejam casar
- Cada pessoa tem afinidade com certo conjunto de pessoas do sexo oposto
- Cada pessoa tem afinidade com uma outra pessoa, pelo menos

Como fazer para unir o maior número possível de casais?

Problema do Casamento

Como fazer para unir o maior número possível de casais?

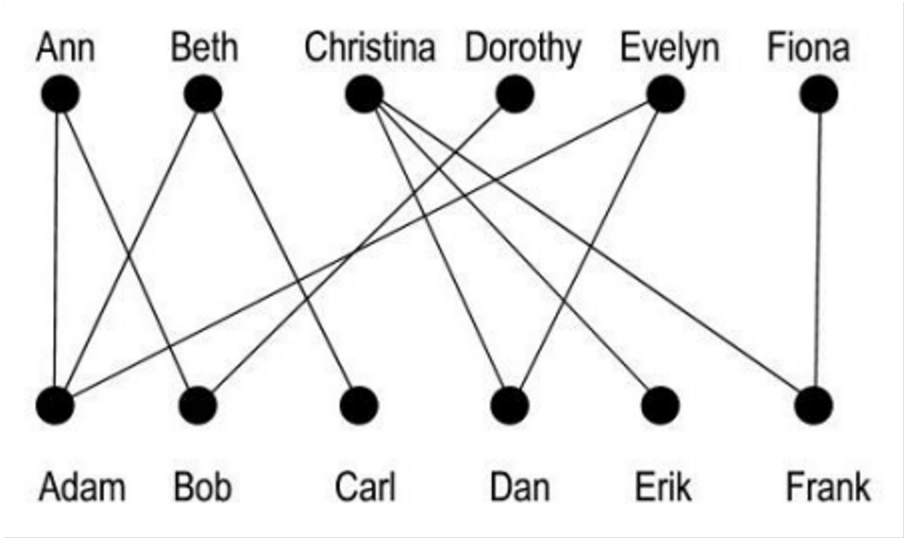
Formulando como problema de grafo

- V: pessoas
- A: afinidade (assumindo simetria)

Esse é um tipo de grafo já visto...

Problema do Casamento

Exemplo de grafo



Grafo Bipartido

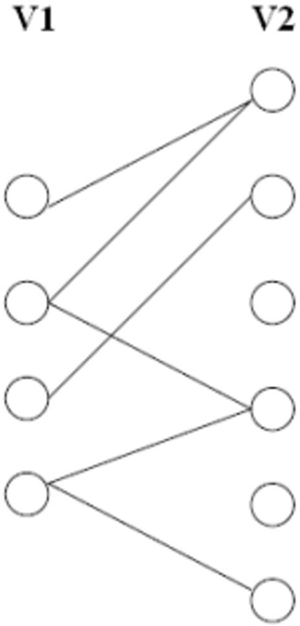
Grafo cujo conjunto de vértices V pode ser "partido" em conjuntos disjuntos V_1 e V_2, de modo que:

- Não há arestas ligando dois vértices do mesmo conjunto
- Ou seja, vértices de V_1 só têm arestas ligando-os a vértices de V_2, e vice-versa

Notação: $G = (V_1 + V_2, A)$

Grafo Bipartido

Exemplo



Emparelhamento

- Formar casais é análogo ao problema de definir um **emparelhamento** em um grafo
- Um emparelhamento M de um grafo é um conjunto de arestas não adjacentes
  - Arestas que não possuem vértices em comum
- Também chamado de “conjunto de arestas independentes”

Emparelhamento Máximo

- O Problema do Casamento, na verdade, é o problema de achar um **Emparelhamento Máximo** em um grafo bipartido
- **Como escolher o maior conjunto de arestas de modo que elas não tenham extremidade comum?**

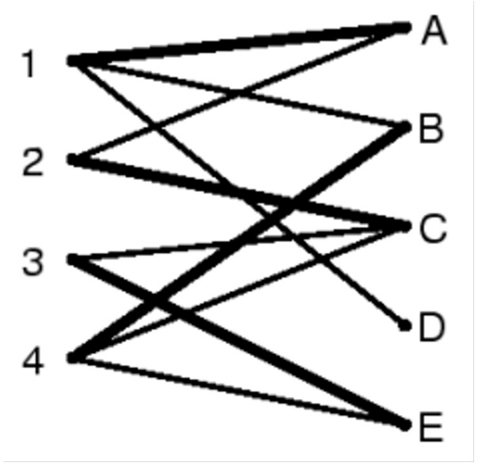
Emparelhamento Perfeito

- Um Emparelhamento Máximo é dito **Perfeito** se todos os vértices forem cobertos por alguma aresta dele
  - No Problema do Casamento, isso equivale a **unir todas as pessoas em casais**
  - Só há chance de existir Emparelhamento Perfeito em grafos com partições de mesmo tamanho

Emparelhamento Perfeito

Exemplo

- No grafo ao lado, o emparelhamento máximo está destacado
- Ele inclui as arestas: $\{1,A\}$, $\{2,C\}$, $\{3,E\}$ e $\{4,B\}$
- Ele **não** é um **emparelhamento perfeito** porque não usou o vértice D



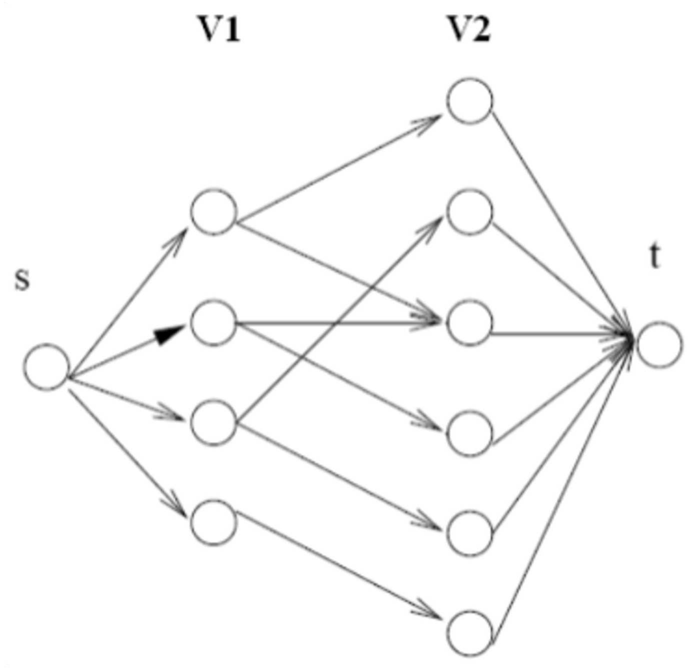
Algoritmo

- Podem ser usados algoritmos de **Fluxo em Redes** para o problema de achar um Emparelhamento Máximo
- **Para isso, o grafo precisa ser adaptado...**

Algoritmo

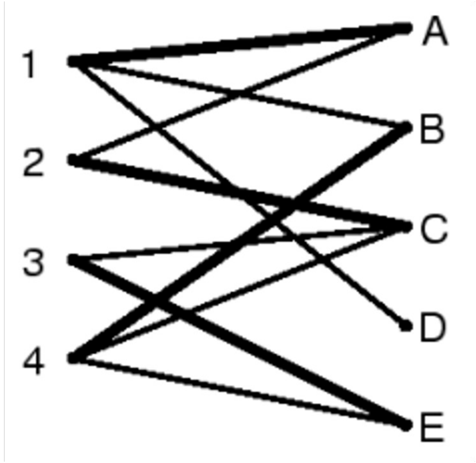
O grafo bipartido $G(V1+V2\ ,E)$ é adaptado assim:

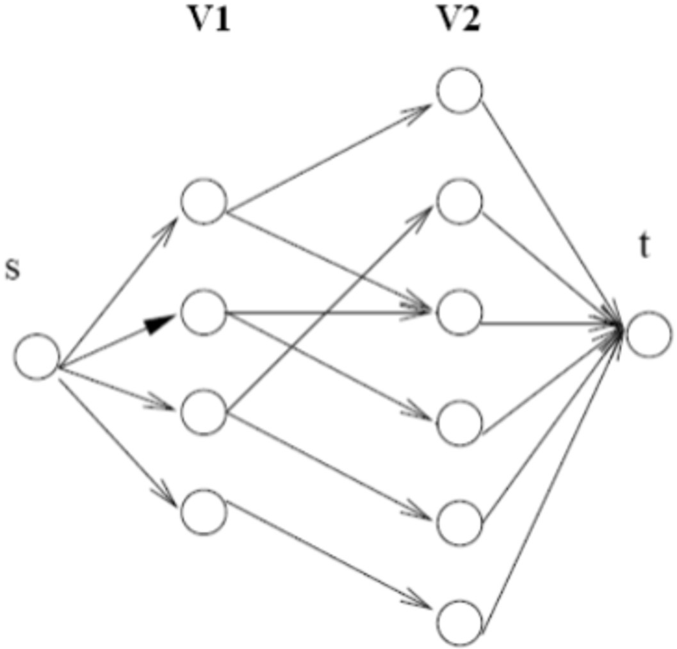
1. As arestas passam a ser direcionadas, seguindo de um vértice de V_1 para outro de V_2 , e passam a ter um peso 1
2. Cria-se um vértice fonte s, do qual sairão arestas de peso 1 para cada vértice de V_1
3. Cria-se um vértice sumidouro t, para o qual chegarão arestas de peso 1 vindas de cada vértice de V_2



Algoritmo

Um grafo bipartido, adaptado:





Algoritmo

Observe que, com o grafo dessa forma, o **fluxo máximo** entre s e t necessariamente será aquele que usar mais arestas do grafo original