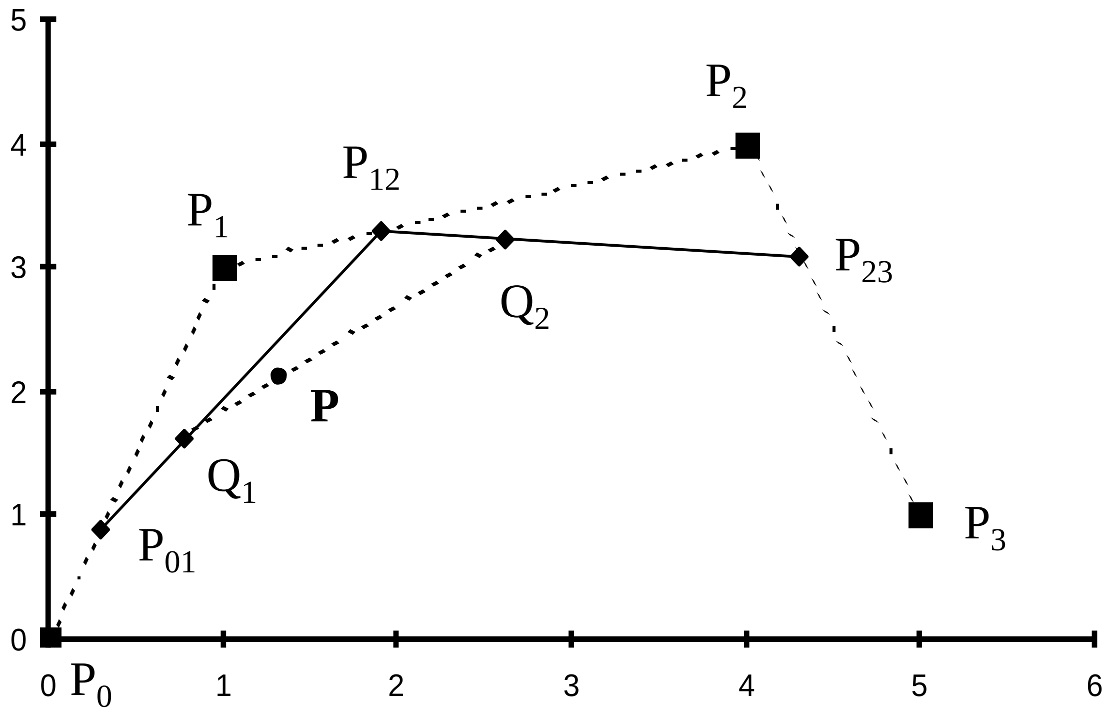
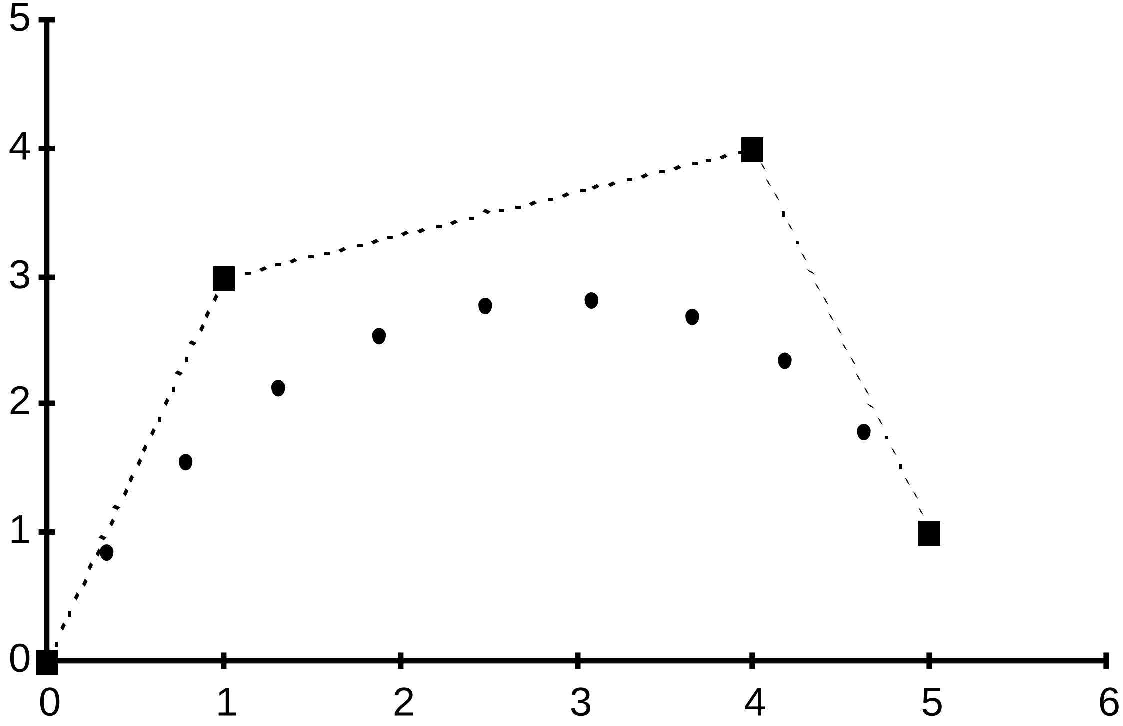
CURVAS DE BÉZIER

Robson Lins
UNICAP ICAM-TECH
Computação Gráfica

Algoritmo de Castejau's



Algoritmo de Castejau’s



Curvas de Bézier

- O processo inicia com L+1 pontos de controle: p_0, p_1, p_2, …, p_L

- No primeiro laço, gera-se um novo conjunto de L pontos, usando as fórmulas seguintes:

$$p_k^{(1)} = (1-t) \cdot p_k + t \cdot p_{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, L-1$$

$$0 \leq t \leq 1$$

Curvas de Bézier

- Para fazer o segundo laço, repetem-se as fórmulas sobre os pontos $p_k^{(1)}$ para chegar aos pontos $p_k^{(2)}$

$$p_k^{(2)} = (1-t) \cdot p_k^{(1)} + t \cdot p_{k+1}^{(1)}$$

$$= (1-t) \cdot \left[(1-t) \cdot p_k + t \cdot p_{k+1} \right] + t \cdot \left[(1-t) \cdot p_{k+1} + t \cdot p_{k+2} \right]$$

$$= (1-t)^2 \cdot p_k + 2t(1-t) \cdot p_{k+1} + t^2 \cdot p_{k+2}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,L-2,$$

Curvas de Bézier

- Note que podemos escrever a equação anterior na forma

$$p_k^{(2)} = B_0^{(2)} \cdot p_k + B_1^{(2)} \cdot p_{k+1} + B_2^{(2)} \cdot p_{k+2}$$

em que

$$B_0^{(2)} = (1 - t)^2, \quad B_1^{(2)} = 2t(1-t), \quad B_2^{(2)} = t^2$$

Curvas de Bézier

- Repetindo esse processo L-1 vezes, temos que um ponto qualquer sobre a curva é expresso por

$$p^{(L)} = \mathbf{p} = \sum_{k=0}^{L} B_k^{(L)} \cdot p_k$$

em que

$$B_k^{(L)} = \frac{L!}{k!\,(L-k)!}(1-t)^{L-k} t^k \,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots L,$$

Curvas de Bézier

- Quando L for pequeno, pode-se usar o triângulo de Pascal para obter as funções $B_k^{(L)}$

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
L=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
L=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
L=2: & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
L=3: & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
L=4: & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
L=5: & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
L=6: & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Curvas de Bézier

- Exercício

  Encontre a fórmula da curva de Bézier para os quatro pontos de controle (0,0), (1,3), (4,4) e (5,1), e então use esta fórmula para calcular as coordenadas (x,y) do ponto P correspondente a $t=0.3$

Curvas de Bézier

- Solução
  - No exemplo L=3, então

(k = 0)	$B_0^{(3)} = 1 \bullet (1 - t)^3\, t^0 = (1 - t)^3$
(k = 1)	$B_1^{(3)} = 3 \bullet (1 - t)^2\, t^1 = 3t(1 - t)^2$
(k = 2)	$B_2^{(3)} = 3 \bullet (1 - t)^1\, t^2 = 3t^2\, (1 - t)^1$
(k = 3)	$B_3^{(3)} = 1 \bullet (1 - t)^0\, t^3 = t^3$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{p} = (1 - t)^3\, \mathbf{p}_0 + 3t(1 - t)^2\, \mathbf{p}_1 + 3t^2\, (1 - t)\, \mathbf{p}_2 + t^3\, \mathbf{p}_3$$

Curvas de Bézier

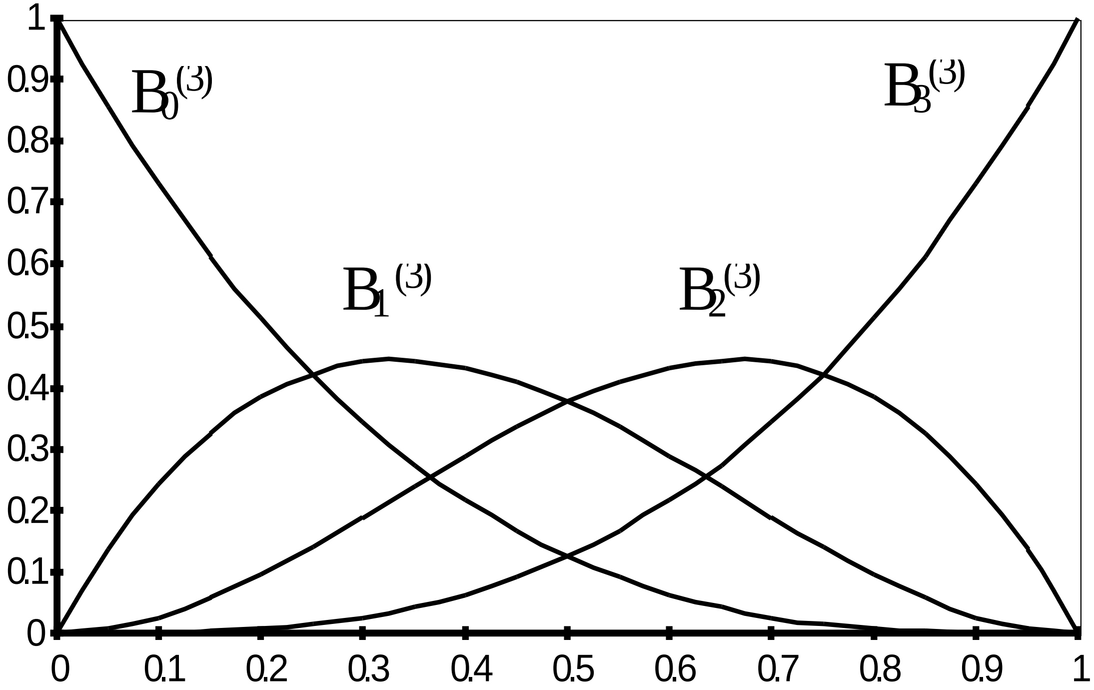
- Solução

$x = (1 - 0.3)^3 \bullet x_0 + 3(0.3)(1 - 0.3)^2 \bullet x_1 + 3(0.3^2)(1 - 0.3) \bullet x_2 +$
$0.3^3 x_3$
$= (1 - 0.3)^3 \bullet 0 + 3(0.3)(1 - 0.3)^2 \bullet 1 + 3(0.3^2)(1 - 0.3) \bullet 4 + 0.3^3$
5
$= 1.332$

$y = (1 - 0.3)^3 \bullet y_0 + 3(0.3)(1 - 0.3)^2 \bullet y_1 + 3(0.3^2)(1 - 0.3) \bullet y_2 +$
$0.3^3 y_3$
$= (1 - 0.3)^3 \bullet 0 + 3(0.3)(1 - 0.3)^2 \bullet 3 + 3(0.3^2)(1 - 0.3) \bullet 4 + 0.3^3$
1
$= 2.106$

Curvas de Bézier: a base de funções

- A figura abaixo ilustra a base de Bézier para caso L = 3



Curvas de Bézier: Forma Matricial

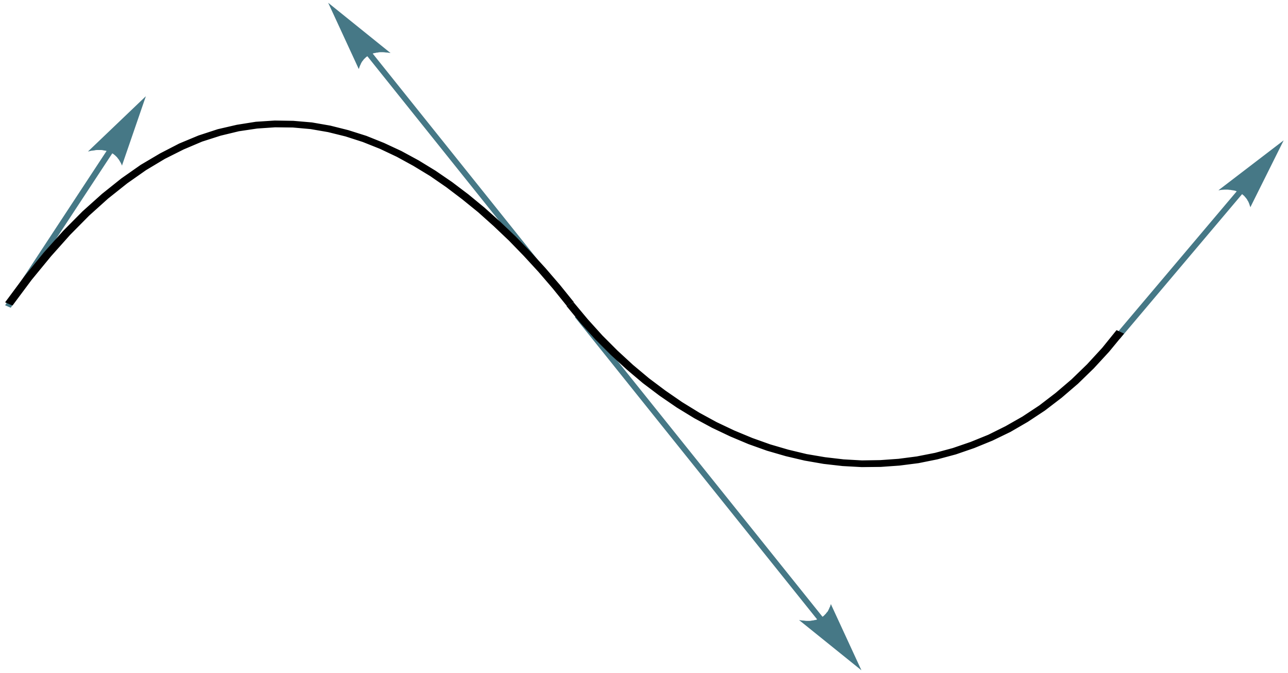
- A curva de Bézier pode ser escrita na forma p = B·P. Para L=3, tem-se

$$\mathbf{p}=\mathbf{B}\bullet\mathbf{P}=\begin{bmatrix} B_0^{(3)} & B_1^{(3)} & B_2^{(3)} & B_3^{(3)} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

em que,

$$\begin{bmatrix} B_0^{(3)} & B_1^{(3)} & B_2^{(3)} & B_3^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Curvas de Bézier: edição gráfica



Curvas de Bézier: edição gráfica