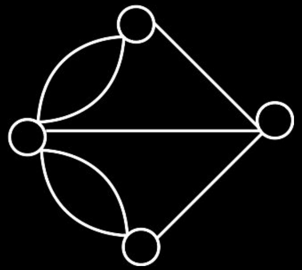
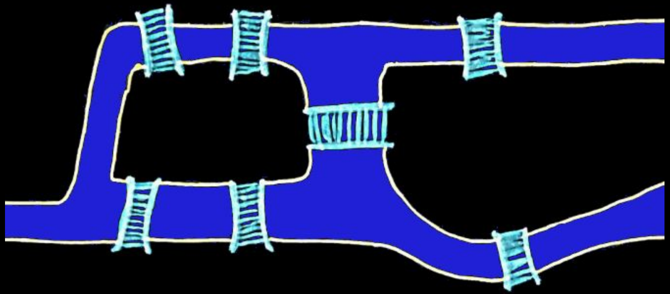


Grafos

Grafos Eulerianos e Hamiltonianos

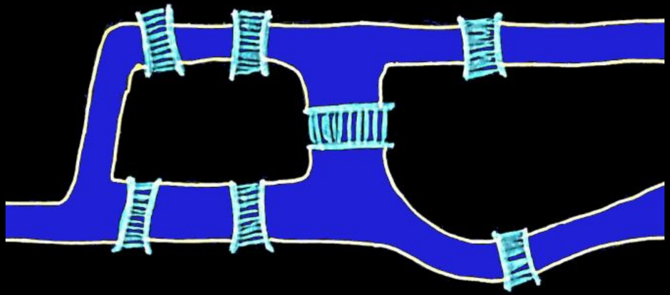
Problema das Pontes

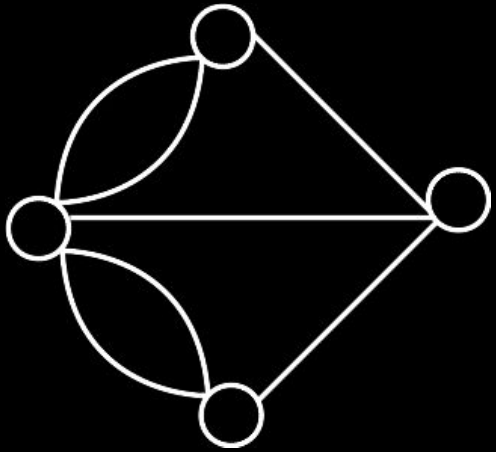
- Surgiu na cidade de Königsberg em 1736
- **É possível fazer um caminho que passe por cada ponte da cidade uma única vez?**



Problema das Pontes

- Leonhard Euler, criou o primeiro grafo, inspirado no problema das pontes
- O problema consiste em achar um ciclo que passa por todas as arestas, sem repetir aresta – **Ciclo Euleriano**





Definições

Ciclo Euleriano

- Caminho simples (sem repetir aresta) que atravessa cada aresta do grafo exatamente uma vez e retorna ao primeiro vértice
- Também chamado de **Circuito Euleriano**

Grafo Euleriano

- Todo grafo que contém algum Ciclo Euleriano

Grafo Euleriano

Condições necessárias e suficientes para um grafo **não-direcionado G** ser Euleriano:

- G é um grafo conectado
- Todo vértice tem grau par

Explicação informal para o grau par

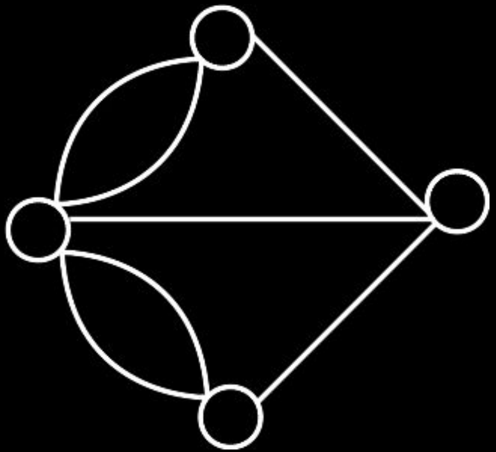
- O ciclo Euleriano, sempre que “entra” em um vértice por uma aresta, tem que “sair” dele por outra, necessitando de duas arestas para cada passagem pelo vértice

Grafo Euleriano

Explicação informal para o grau par

- O ciclo Euleriano, **sempre que "entra" em um vértice por uma aresta, tem que "sair" dele por outra, necessitando de duas arestas para cada passagem pelo vértice**

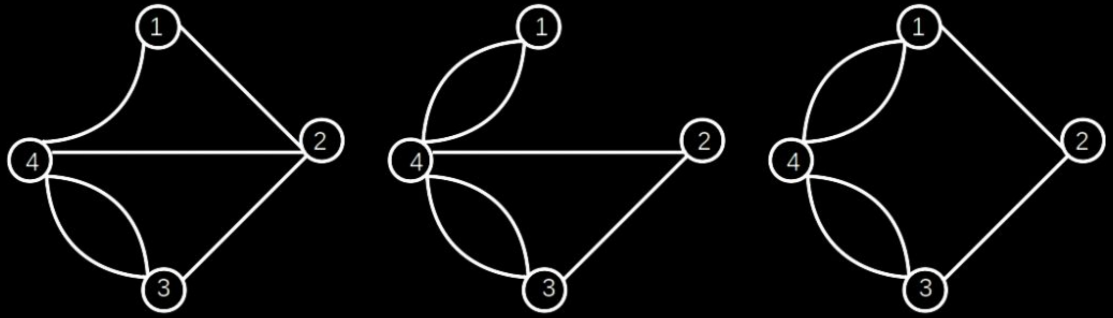
No Problema das Pontes de Königsberg todos os vértices têm grau ímpar Portanto, não tem solução! O grafo não é Euleriano.



Grafo Euleriano

Explicação informal para o grau par

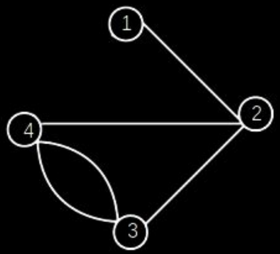
- O ciclo Euleriano, **sempre que "entra" em um vértice por uma aresta, tem que "sair" dele por outra, necessitando de duas arestas para cada passagem pelo vértice**



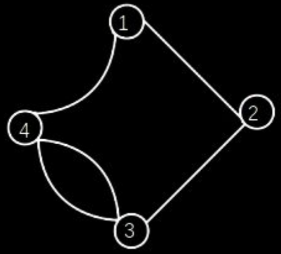
Possuem um número ímpar de arestas

Grafo Euleriano

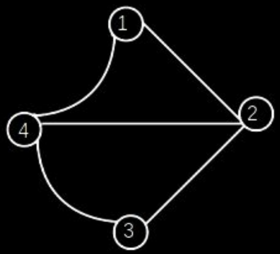
5-A



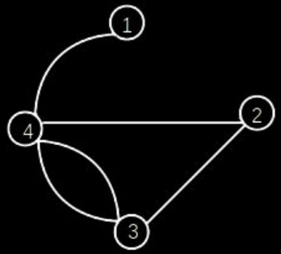
5-B



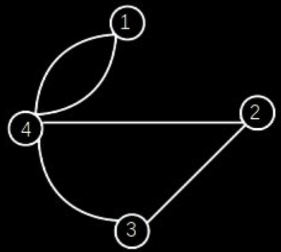
5-C



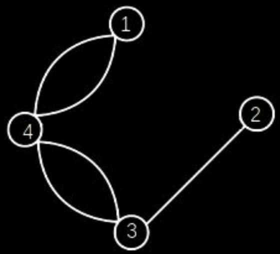
5-D



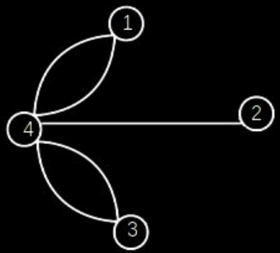
5-E



5-F



5-G



Grafo Euleriano

5-A. Não tem solução, pois todos os vértices possuem um número ímpar de arestas.

5-B. Não tem solução, pois os vértices 3 e 4 possuem um número ímpar de arestas.

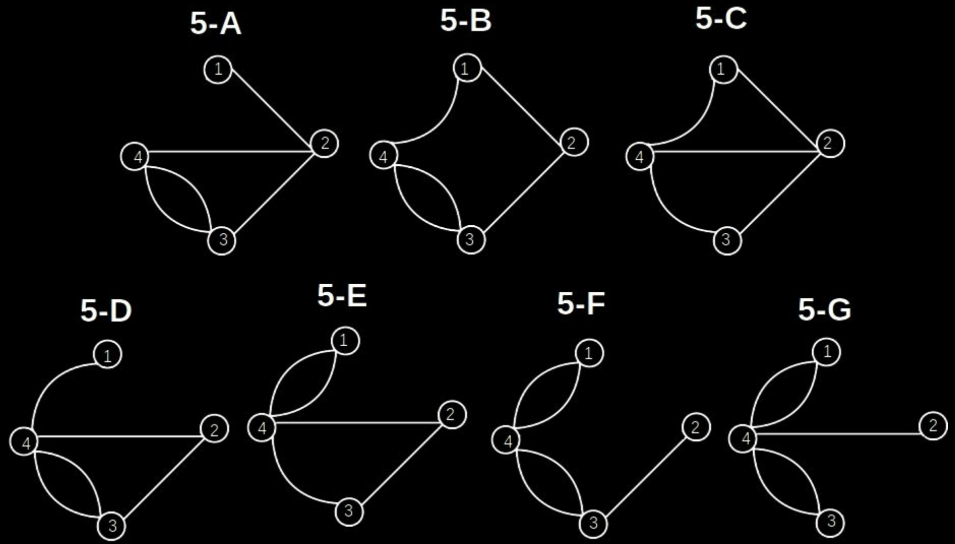
5-C. Não tem solução, pois os vértices 2 e 4 possuem um número ímpar de arestas.

5-D. Não tem solução, pois os vértices 1 e 3 possuem um número ímpar de arestas.

5-E. Tem solução! Comece do vértice 1, vá para o vértice 4, depois para o vértice 3, depois para o vértice 2, depois para o vértice 4, volte para o vértice 1.

5-F. Não tem solução, pois os vértices 2 e 3 possuem um número ímpar de arestas.

5-G. Não tem solução, pois os vértices 2 e 4 possuem um número ímpar de arestas.

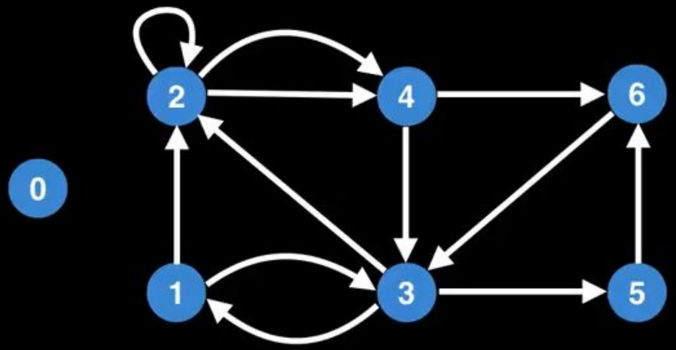


Grafo Direcionado Euleriano

Um grafo direcionado também pode ser Euleriano

Neste caso a condição necessária e suficiente muda para:

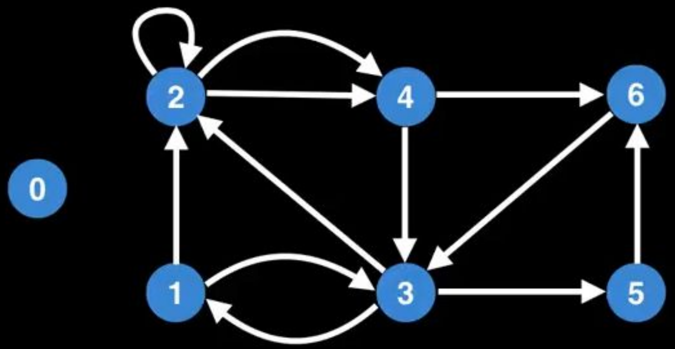
- G é um grafo **fortemente conectado**
- Cada vértice tem seu grau de entrada igual ao grau de saída



Grafo Direcionado Euleriano

Algoritmo de Fleury

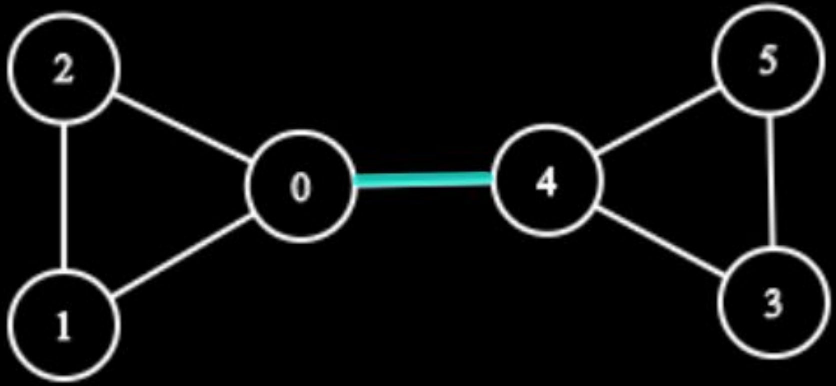
- Escolha um vértice inicial
- Enquanto tiver aresta não marcada
  - Pegue o último vértice do caminho
  - Escolha uma aresta que não desconecte o grafo (ou seja, que não isole vértice nenhum)
    - Se não for possível, escolha uma que desconecte
  - Adicione a aresta ao caminho
  - Remova (marque) a aresta



Grafo Direcionado Euleriano

Algoritmo de Fleury

- Escolha um vértice inicial
- Enquanto tiver aresta não marcada
  - Pegue o último vértice do caminho
  - Escolha uma aresta que não desconecte o grafo (ou seja, que não isole vértice nenhum)
    - Se não for possível, escolha uma que desconecte
  - Adicione a aresta ao caminho
  - Remova (marque) a aresta



Grafo Euleriano

Problema Relacionado

- Um problema relacionado ao problema de achar um ciclo Euleriano é o chamado Problema do Carteiro Chinês (Entrega de Correspondência)
- Coleta de lixo doméstico

<u>Problema de Inspeção de Rotas</u>

Grafo Euleriano

Problema do Carteiro Chinês

- Um carteiro têm que visitar um conjunto de ruas, atravessando-as completamente
- Ele precisa passar ao menos uma vez por cada rua (mas pode passar mais de uma vez por algumas)
- De que maneira o carteiro pode minimizar a distância percorrida?

Grafo Euleriano

Problema do Carteiro Chinês

- Grafo valorado representando ruas (arestas) e cruzamentos (vértices)
  - O valor é o comprimento da rua
- O ideal seria que o carteiro passasse apenas uma vez por cada rua, se o grafo for Euleriano
- Se o grafo não for Euleriano, o algoritmo deve reduzir o custo de repetição de ruas

Grafo Euleriano

Problema do Carteiro Chinês

- Este problema pode ser reduzido ao problema de achar um ciclo Euleriano
- Para isso é preciso adaptar o grafo, para torná-lo Euleriano
- O algoritmo cria arestas “virtuais” que, representam caminhos entre os vértices
- Criar arestas “virtuais” entre vértices de grau ímpar, deixando todos com graus pares
    - O peso da aresta será o custo do caminho de custo mínimo
- Depois, executa um algoritmo para achar um ciclo Euleriano no novo grafo

Grafo Euleriano

Problema do Carteiro Chinês