→ transformações 3D

- utiliza-se coordenadas homogêneas (x, y, z, w)

↳ a composição de diversos efeitos é dada pela multiplicação das matrizes deste efeito.

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ → w sempre será 1!

$T_p = (x + t_x,\ y + t_y,\ z + t_z)$

→ Projeções

- As projeções transformam pontos de uma dimensão n em uma dimensão m maior que n.

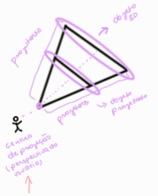
ex: $(x, y, z) \to (x, y)$

- Projeções geométricas planares

↳ projeção em perspectiva: projetores originam-se em um centro de projeção;

↳ projeção paralela: projetores paralelos a uma direção de projeção.

↳ Projeção em Perspectiva



→ o centro de projeção é o ponto $(0, 0, -d)$

porém o valor de '-d' não é negativo na maioria dos casos.

→ as equações para x', y' não são lineares, então são representadas na forma matricial como $w \neq 1$, ou seja, $w = z + d$

$x = x \cdot d$
$y = y \cdot d$
$z = 0$
$w = z + d$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot d \\ y' &= y \cdot d \\ z &= 0 \\ w &= z + d \end{aligned}\right\} \text{fórmula}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z = 0 \\ z + d \end{bmatrix}$$

↳ em coordenadas homogêneas $\frac{x \cdot d}{z+d}$ $\frac{y \cdot d}{z+d}$ 0 1

$$\begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \begin{array}{c} [\,x \quad y \quad z \quad w\,] \\ \begin{bmatrix} x \cdot d + 0 + 0 + 0 \\ 0 + y \cdot d + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + z + w \cdot d \end{bmatrix} \end{array} \left.\begin{aligned} &\to x \cdot d \\ &\to y \cdot d \\ &\to 0 \\ &\to z + d \end{aligned}\right\}$$ Pontos em coordenadas homogêneas

$x' = \frac{x \cdot d}{z + d}$

$y' = \frac{y \cdot d}{z + d}$

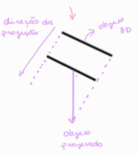
- características

↳ determinada pelo centro de projeção;
↳ similar às câmeras de vídeo e ao olho humano;
↳ imagem parece mais realista;
↳ não preserva ângulos (apenas em faces do objeto paralelas ao plano de projeção);
↳ não preserva escalas;
↳ não permite medidas diretas;
↳ objetos mais distantes parecem menores;
↳ retas paralelas se encontram em um ponto de fuga;
↳ pode haver 1, 2, 3 pontos de fuga.

- anomalias

↳ encurtamento perspectivo: aumentando a distância do objeto ao centro de projeção (objeto parece ser menor);

↳ Projeção em Paralelo



↳ forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

- características

↳ ortográficos (ortogonais): a direção de projeção é a mesma direção da normal ao plano de projeção;

↳ oblíquos: a direção de projeção não é a mesma direção da normal ao plano de projeção, além disso permite a vista de mais de um lado do objeto.

Questão 8 da lista

$$\left.\begin{aligned} &P_0\ (-1, 0, 0) \\ &P_1\ (1, 0, 0) \\ &P_2\ (0, 0, -1) \end{aligned}\right\} \text{base}$$

$P_3\ (0, 2, 0)$] altura

a) fazer desenho

b) projeção em paralelo

$P_0 = (-1,0,0)$ $P_1 = (1,0,0)$
$P_2 = (0,0,-1)$ $P_3 = (0,2,0)$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P_0' = (-1,0,0)$
$P_1' = (1,0,0)$
$P_2' = (0,0,-1)$
$P_3' = (0,2,0)$

b) projeção perspectiva - centro de projeção = $(0, 0, -16)$

$\left[x' = \frac{x \cdot d}{z+d},\ y' = \frac{y \cdot d}{z+d},\ z = 0,\ w = z + d\right]$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cdot d \\ y' &= y \cdot d \\ z &= 0 \\ w &= z + d \end{aligned}\right\} \text{fórmula}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z = 0 \\ z + d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -16 \\ \end{bmatrix}$$

$P_1 = (1,0,0)$

$x'_0 = \frac{-1(-16)}{0-16} = \frac{16}{16} = 1$ $\qquad$ $x'_1 = \frac{1\cdot(-16)}{0-16} = \frac{-16}{16} = -1$

$y'_0 = \frac{0(-16)}{0-16} = \emptyset$ $\qquad$ $y'_1 = \frac{0(-16)}{0-16} = \emptyset$

$P'_0 = (1,0,0)$ $\qquad$ $P'_1 = (-1,0,0)$

$P'_0 = (1,0,0)$
$P'_1 = (-1,0,0)$
$P'_2 = (0,0,-1)$
$P'_3 = (0,-2,0)$
perspectiva!

$P_2 = (0,0,-1)$ $\qquad$ $P_3 = (0,2,0)$

$x'_2 = \frac{0\cdot(-16)}{0-16} = \emptyset$ $\qquad$ $x'_3 = \frac{0(-16)}{0-16} = \emptyset$

$y'_2 = \frac{0\cdot(-16)}{0-16} = \emptyset$ $\qquad$ $y'_3 = \frac{2(-16)}{0-16} = \frac{-32}{-16} = -2$

$P'_3 = (0,-2,0)$

$P'_2 = (0,0,-1)$

→ Curva de Bézier

↳ Algumas propriedades da curva de Bézier são:

- A curva de Bézier é uma curva polinomial expressa como interpolação linear entre alguns pontos representativos, chamados "pontos de controle";
- É uma curva utilizada em diversas aplicações gráficas como o Illustrator, Freehand, etc, e em formatos de imagem vetorial como o SVG;
- Esse tipo de curva também pode originar 'Superfícies de Bézier', bastante utilizadas em modelagem tridimensional, animações, design de produtos, etc.

↳ Curva de Bézier Quadrática

P_0, P_1, P_2

- utiliza-se a equação quadrática quando se tem 3 pontos.

$$P_K = (1-t)^2\cdot p_0 + 2t(1-t)\cdot p_1 + p_2\cdot t^2$$

Ex. 5 questão da lista 02

$P_0 = (0,0,3)$
$P_1 = (0,4,0)$
$P_2 = (2,0,0)$

$P_0 = 0 \mid P_1 = 0 \mid P_2 = 2$

$x(t) = \cancel{(1-t)^2}\cdot 0 + 2t\cancel{(1-t)}\cdot 0 + 2\cdot t^2$

$x(t) = 2t^2$

$y(t) = \cancel{(1-t)^2}\cdot 0 + 2t\cdot(1-t)\cdot 4 + \cancel{0\cdot t^2}$

$y(t) = 8t(1-t)$

$y(t) = 8t - 8t^2$

$z(t) = (1-t)^2\cdot 3 + 2t\cdot\cancel{(1-t)\cdot 0} + \cancel{0\cdot t^2}$

$z(t) = 3\cdot(1-t)^2$

$z(t) = 3\cdot(1^2 - 2t + t^2) = 3(1-2t+t^2)$

$z(t) = 3 - 6t + 3t^2$

$x(t) = 2t^2$
$y(t) = 8t - 8t^2$
$z(t) = 3 - 6t + 3t^2$

- $t = 0$

→ $x(t) = 2t^2 = 2\cdot 0^2 = 0$
→ $y(t) = 8t - 8t^2 = 8\cdot 0 - 8\cdot 0^2 = 0$
→ $z(t) = 3 - 6t + 3t^2 = 3 - \cancel{6\cdot 0} + \cancel{3\cdot 0^2} = 3$

- $t = 0{,}5$

→ $x(t) = 2t^2 = 2\cdot 0{,}5^2 = 2\cdot 0{,}25 = 0{,}5$
→ $y(t) = 8t - 8t^2 = 8\cdot 0{,}5 - 8\cdot 0{,}25 = 4 - 2 = 2$
→ $z(t) = 3 - 6t + 3t^2 = 3 - 6\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}2 = 3 - 3 + 0{,}75 = 0{,}75$

- $t = 1$

→ $x(t) = 2t^2 = 2\cdot 1^2 = 2$
→ $y(t) = 8t - 8t^2 = 8\cdot 1 - 8\cdot 1^2 = 0$
→ $z(t) = 3 - 6t + 3t^2 = 3 - 6\cdot 1 + 3\cdot 1^2 = 3 - 6 + 3 = 0$

↳ Curva de Bézier Cúbica

P_0, P_1, P_2, P_3

- utiliza-se a equação cúbica quando se tem 4 pontos.

$$P_K = (1-t)^3\cdot p_0 + 3t\cdot(1-t)^2\cdot p_1 + 3t^2\cdot(1-t)\cdot p_2 + t^3\cdot p_3$$

Ex. questão 01 da lista

$P_0 = (0,2)$
$P_1 = (1,-2)$
$P_2 = (3,0)$
$P_3 = (4,3)$

a) encontrar as equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$

$P_0 = 0 \mid P_1 = 1 \mid P_2 = 3 \mid P_3 = 4$

$x(t) = (1-t)^3\cdot p_0 + 3t\cdot(1-t)^2\cdot p_1 + 3t^2\cdot(1-t)\cdot p_2 + t^3\cdot 4$

$x(t) = \cancel{(1-t)^3}\cdot 0 + 3t\cdot(1-t)^2\cdot 1 + 3t^2\cdot(1-t)\cdot 3 + t^3\cdot 4$

$x(t) = \overbrace{3t\cdot(1-t)^2}^{\text{simplificação}}\cdot 1 + 3t^2\cdot(1-t)\cdot 3\cdot t^3 + 4$

$x(t) = 3t\cdot(1-2t+t^2) + 9t^2(1-t) + 4t^3$

$x(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3 + 9t^2 - 9t^3 + 4t^3$

$x(t) = 3t + 3t^2 - 2t^3$

$(1-t)^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot t + t^2$
$1 - 2t + t^2$

$$\boxed{\begin{aligned} &\to (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &\to (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}}$$

$(1-t)^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot t + 3\cdot 1\cdot t^2 - t^3$
$1 - 3t + 3t^2 - t^3$

$y(t) = (1-t)^3\cdot p_0 + 3t\cdot(1-t)^2\cdot p_1 + 3t^2\cdot(1-t)\cdot p_2 + t^3\cdot p_3$

$y(t) = (1-t)^3\cdot 2 + 3t\cdot(1-t)^2\cdot(-2) + 3t^2\cdot\cancel{(1-t)\cdot 0} + t^3\cdot 3$

$y(t) = 2(1-t)^3 - 6t(1-t)^2 + 3t^3$

→ regra da potência de binômio acima

$y(t) = 2(1 - 3t + 3t^2 - t^3) - 6t(1 - 2t + t^2) + 3t^3$

$y(t) = 2 - 6t + 6t^2 - 2t^3 - 6t - 12t^2 + 6t^3 + 3t^3$

$y(t) = 2 - 12t + 18t^2 - 5t^3$

8) $P_0 = (-1,0,0)$
$P_1 = (1,0,0)$
$P_2 = (0,0,-1)$
] Base do triângulo

$P_3 = (0,2,0)$] altura

a)

c) projeção em perspectiva

$(0,0,-16)$ $\quad d = 16$ È SEMPRE +!

$$P_0 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16+0+0+0 \\ 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 \\ 0+0+0+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot d \\ y \cdot d \\ z = 0 \\ z + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 + 0 + (-1) + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$z \neq 0$

$$\begin{cases} w = z + d \\ w = (-1) + 16 \\ w = 15 \end{cases}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 32 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$P_0' = (-1, 0)$

$$x_{p0} = \frac{x \cdot d}{z + d} = \frac{(-1) \cdot 16}{0 + 16} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$y_{p0} = \frac{y \cdot d}{z + d} = \frac{0 \cdot 16}{0 + 16} = \frac{0}{16} = \emptyset$$