

Школа лингвистики, 2019-20 уч. год**Линейная алгебра и математический анализ****Производная сложной функции (08.10.2019)***Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, А. М. Изосимов, Д. А. Филимонов, Р. Я. Будылин*

Некоторые задачи основаны на книге James Stewart, Calculus Early Transcendentals, 6e

Задача 1. Найти производные следующих функций:

(a) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x};$

(f) $f(x) = e^{-x};$

(b) $f(x) = \log_2 x + \arcsin x - 2\operatorname{arctg} x$

(g) $f(t) = \frac{2t}{4+t^2};$

(c) $f(x) = (x-1)^2;$

(h) $f(x) = \operatorname{tg}(x) + \operatorname{ctg}(x);$

(d) $f(x) = (x^3 + 2x)e^x;$

(i) $f(x) = \sin(2x);$

(e) $f(x) = \frac{e^x}{1+x};$

(j) $f(x) = \sin(x + \alpha);$

Задача 2. Представьте функцию в виде $y = f(g(x))$ (т.е. укажите функции $z = g(x)$ и $y = f(z)$), затем найдите производную с помощью правила дифференцирования сложной функции.

(a) $y = (3x + 1)^{2019};$

(d) $y = \sqrt{x \sin x};$

(g) $y = e^{\sqrt{x}};$

(b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2019};$

(e) $y = (x^4 + 3x^2 - 2)^5;$

(h) $y = \arcsin(\sin x);$

(c) $y = \sqrt{4 + 3x};$

(f) $y = 10^{x^2};$

(i) $y = \ln x^2.$

Задача 3. Вычислите производные следующих функций.

(a) $y = x \ln x - x;$

(d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$

(b) $y = \sin^2 x + \cos^2 x;$

(e) $y = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a};$

(c) $y = -\ln \cos x;$

(f) $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}.$

Задача 4. Согласно закону Пиотровского-Альтмана, в немецком языке замещение окончания формы глагола второго лица единственного числа $\{-t\}$ на $\{-st\}$ подчиняется следующему закону:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

где $p(t)$ — доля глаголов имеющих во втором лице окончание $\{-st\}$ в момент времени t , константы a и k положительны.

(a) Найти $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$. Пояснить, что означает полученный ответ.

(b) Найти скорость распространения нового окончания.

Задача 5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ в точке $(0; 1)$.

1 Дополнительные задачи

Задача 6. Найти производные следующих функций:

(a) $f(x) = x^x$;

(b) $f(x) = (2x + 1)^{3x-2}$;

(c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;

(d) $f(x) = x^{x^x}$;

Задача 7. Чему равен 0^0 ? Найдите предел $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$