

# Ejercicios de Grimaldi

Victor Manuel Vasquez Poblete

October 2018

## 1 Capitulo 5

Relaciones y funciones.

1. Si  $\mu = N$ ,  $A = (1, 2, 3, 4)$ ,  $B = (2, 5)$  y  $C = (3, 4, 7)$ , Determine  $AXB$ ;  $BXA$ ;

Respuesta:

$AXB$ :

$((1, 2), (1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 2), (4, 5))$

$BXA$ :

$((2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4))$

2. Con los valores anteriores determine  $(A \cup B)XC$

Respuesta:

$((1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 3), (3, 4), (3, 7), (4, 3), (4, 4), (4, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7))$

3. Determine  $(AXC) \cup (BXC)$  con los valores anteriores.

Respuesta:

$AXC$ :

$((1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 3), (3, 4), (3, 7), (4, 3), (4, 4), (4, 7))$

$BXC$ :

$((2, 3), (2, 4), (2, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7))$

$(AXC) \cup (BXC)$ :

$((1, 3), (1, 4), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 3), (3, 4), (3, 7), (4, 3), (4, 4), (4, 7), (5, 3), (5, 4), (5, 7))$

4. Si  $\mu = (1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A = (1, 2, 3)$  y  $B = (2, 4, 5)$  de ejemplos de tres relaciones no vacías de A en B.

Respuesta:

$AXB$ :

$((1, 2), (1, 4), (1, 5))$

5. Si  $\mu = (1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $A = (1, 2, 3)$  y  $B = (2, 4, 5)$  de ejemplos de tres relaciones binarias no vacías en A.

Respuesta:

$((1, 1), (1, 2), (1, 3))$

6. Sea  $A = (1, 2, 4, 8, 16)$  y  $B = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$  si  $(2 - x, 5), (4, y - 2) \in AXB$ , ¿Se cumple que  $(2 - x, 5) = (4, y - 2)$ ?

Respuesta: Se igualan las coordenadas

$$2 - x = 4 \text{ y } 5 = y - 2$$

$$2 - 4, 5 + 2 = y$$

$$-2 = x, 7 = y; \text{ por lo tanto se cumple para } x = -2 \text{ y } y = 7$$

7. Sea  $A_1 = (0, 1, 2, 3, n)$ ,  $A_2 = (1, 2, 3, 7, 12)$ ,  $A_3 = (0, 1, 2, 4, 8, 16, 32)$  y  $A_4(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$   
 Sea  $R_1 \leq A_1 X A_2 X A_3 X A_4$  donde  $R_1 = (w, x, y, z)$  ¿Cuántos 4-uplas ordenadas o cuaternas hay en una relación?

Respuesta:  $WXYZ = 0$  si y solo si por lo menos uno de los 4 números son 0, entonces se agarra los pares con una coordenada 0, por lo tanto el resultado es de  $196 + 5(4) = 216$

8. Sea  $A_1 = (0, 1, 2, 3, n)$ ,  $A_2 = (1, 2, 3, 7, 12)$ ,  $A_3 = (0, 1, 2, 4, 8, 16, 32)$  y  $A_4(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$   
 Si  $2_2 \subset A_1 X A_2 X A_3 X A_4$  es la relación cuaternaria donde  $(a, b, c, d \in R_2)$  si x solo si  $abcd \prec 0$  ¿Cuánto vale  $R_2$

Respuesta: En este caso es similar al anterior como en el conjunto  $A_4$  existe 3 números negativos entonces sería  $72(4) = 288$

9. Para  $A, B, \mu$  como el ejercicio 5, determine lo  $|AXB|$

Respuesta:  $|A| = 3Y|B| = 3$ , entonces  $|AXB| = 9$

10. Para  $A, B, \mu$  como el ejercicio 5, determine el número de relaciones binarias de A en B.

Respuesta:

El numero de relaciones es de  $2^9 = 512$

## 2 Capítulo 6

Lenguajes: Máquinas de estados finitos.

1.- Sea sumatoria de (a, b, c, d, e)

a) ¿Cuánto vale al cuadrado y al cubo

b) ¿Cuántas cadenas de la sumatoria tienen una longitud de al menos cinco?

Respuesta: (a) sumatoria= (a, b, c, d, e) son 5 letras, entonces  $(5)^2 = 25$ ;  
 $(5)^3 = 125$

(b) De  $i = 0$  hasta 5 es la sumatoria es 3906

2.- Para la sumatoria de (w, x, y, z) determine el número de cadenas de la sumatoria de longitud cinco (a) que comienzan con w; (b) con precisamente dos w; (c) sin w; (d) con un numero par de w.

Respuesta: Consideremos que la sumatoria contiene 4 terminos:

(a)  $4^4$

(b)  $C(5, 2)(3^3)$

(c)  $3^5$

(d)  $3^5 + C(5, 2)(3^3) + C(5, 4)(3)$

3.- Si x pertenece a la sumatoria de longitudes y  $x^3 = 36$ , ¿Cuánto vale el valor absoluto de x?

Respuesta:  $x = 12$

4.- Sea la sumatoria (B, x, y, z) donde B denota un espacio en blanco, de modo que xB es diferente a x, BB es diferente de B y xBy es diferente a xy, pero  $x(\lambda)y = xy$ . Calcule lo siguiente:

a)  $\lambda$

b)  $\lambda\lambda$

c) B

d) BB

- e)  $B^3$
- f)  $xBB_y$
- g)  $B\lambda$
- h)  $\lambda^{10}$ .

Respuesta:

- a) 0
- b) 0
- c) 1
- d) 2
- e) 3
- f) 4
- g) 1
- h) 0

5.- Sea  $\text{sumatoria} = v, w, x, y, z$  y  $A = U^6 n = 1 \text{ sumatoria}^n$ . ¿Cuántas cadenas de A tienen a xy como prefijo propio?

Respuesta : De  $i = 1$  hasta 4 es la  $\text{sumatoria}5^i$

6.- Sea  $\text{sumatoria}$  un alfabeto. Sea  $x_i \in \text{sumatoria}$  para  $1 \leq i \leq 100$  (donde  $x_i$  es diferente que  $x_j$ , para cualquier  $1 \leq j \leq 100$ ). ¿Cuántas subcadenas no vacías existen para la cadena  $s = x_1x_2...x_{100}$ ?

Respuesta: Hay 100 subcadenas de longitud 1, 99 subcadenas de longitud 2, 1 subcadena de longitud 100, así que tenemos  $100 + 99 + ... + 1 =$  De  $i=1$  hasta 100  $\text{sumatoria}$  de  $i = (100)(101)/2 = 5050$  subcadenas no vacías en total

7.- Para el alfabeto  $\text{sumatoria} = (0,1)$ , sean A, B, C  $\subseteq \text{sumatoria}$  los siguientes lenguajes: A = (0, 1, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111),

B = ( $w \in \text{sumatoria} \mid 2 \leq w$ )

C = ( $w \in \text{sumatoria} \mid 2 \geq w$ ) Determine los siguientes subconjuntos(lenguajes) de  $\text{sumatoria}$

- a)  $A \cap B$
- b)  $A - B$
- c)  $A \triangle B$
- d)  $A \cap C$
- e)  $B \cap C$
- f)  $B \cup C$

Respuesta: a) (00,111,000,111,0000,1111)

b) (0,1)

c)  $\text{sumatoria}^* - (\lambda, 00, 11, 000, 111, 0000, 1111)$

d) (0,1,00,11)

e)  $\text{sumatoria}^*$

f)  $\text{sumatoria}^* - (0,1,00,11) = (\lambda, 01, 10) \cup (w \geq 3)$

8. Sea A = (10,11), B(00,1) lenguajes para el alfabeto  $\text{sumatoria} = (0,1)$  determine lo siguiente: a) AB

- b) BA
- c)  $A^3$
- d)  $B^2$

Respuesta: a) AB = (1000,101,1100,111)

b) BA = (0010,0011,110,111)

c)  $A^3 = (101010, 101011, 101110, 111010, 101111, 111011, 111110, 111111)$

d)  $B^2 = (0000, 001, 100, 11)$

9.- Con la máquina de estados finitos determine la salida para cada una de las siguientes entradas  $x \in E$ , así como el último estado interno en el proceso de transición. (Suponga que siempre partimos del estado  $S_0$ .)

a)  $X=1010101$  b)  $x=1001001$  c)  $x=101001000$

Respuesta= a) 0010101 b) 0000000 c) 0010000000

10.- Para la máquina de estados finitos del ejemplo 6.18 una cadena de entrada  $x$  produce la cadena de salida 00101, si partimos del estado  $S_0$  Determine  $x$ .

Respuesta:  $x=10101$

### 3 Capítulo 7

Relaciones: La segunda vuelta.

1.- Si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , dé un ejemplo de una relación  $\mathcal{R}$  sobre  $A$  que sea

a) reflexiva y simétrica, pero no transitiva

b) reflexiva y transitiva, pero no simétrica

c) simétrica y transitiva, pero no reflexiva

Respuesta:

(a)  $[(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2)]$

(b)  $[(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2)]$

(c)  $[(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)]$

2.- Para la relación (b) del ejemplo anterior determine cinco valores de  $x$  para los cuales  $(x \in \mathcal{R})$ .

Respuesta: -9, -2, 5, 12, 19

3.- Para la relación  $\mathcal{R}$  del ejemplo 1 inciso (c) determine:

a) Tres elementos  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{R}$  tales que  $1 \leq i \leq 3$

b) Encuentre tres términos  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{R}$  tales que  $1 \leq i \leq 3$

Respuesta:

(a) Dejar  $f_1, f_2, f_3 \in F$  con  $f_1(n) = n + 1$ ,  $f_2(n) = 5n$ , y  $f_3(n) = 4n + 1/n$

(b) Dejar  $g_1, g_2, g_3 \in F$  con  $g_1(n) = 3$ ,  $g_2(n) = 1/n$ , y  $g_3(n) = \sin(n)$

4.- Si  $A = \{w, y, x, z\}$ , determine el número de relaciones sobre  $A$  que son (a) reflexivas; (b) simétricas; (c) reflexivas y simétricas; (d) reflexivas y contienen a  $(x, y)$

Respuesta:

a)  $2^{12}$

b)  $(2^4)(2^6) = 2^{10}$

c)  $2^6$

d)  $2^{11}$

5.- Sea  $n \in \mathbb{Z}$  con  $n > 1$  y sea  $A_n$  el conjunto de los divisores enteros positivos de  $n$ . Defina la relación  $\mathcal{R}$  sobre  $A$  como  $x \mathcal{R} y$  si  $x$  divide (exactamente) a  $y$ . Determine la cantidad de pares ordenados que hay en la relación de  $\mathcal{R}$  cuando  $n$  es (a) 10; (b) 20; (c) 40; (d) 200; (e) 210.

Respuesta : C significa combinacion

(a)  $C(3,2) \cdot C(3,2) = 9$

- (b)  $C(4,2)*C(3,2) = 18$
- (c)  $C(5,2)*C(3,2) = 30$
- (d)  $C(5,2)*C(4,2) = 60$
- (e)  $C(3,2)^4 = 81$

6.- Sea A un conjunto tal que  $|A| = n$  y sea  $\mathfrak{R}$  una relacion sobre A antisimétrica. ¿Cuál es el máximo valor de  $|\mathfrak{R}|$  ? ¿Cuántas relaciones antisimétricas pueden tener ese tamaño?

Respuesta: El numero de antisimétricas relacionadas que puede tener son de tamaño  $2^{(n^2-n)/2}$

7.- Sea A un conjunto tal que  $|A| = n$  y sea  $\mathfrak{R}$  una relacion de equivalencia sobre A tal que  $|\mathfrak{R}| = r$  ¿Por qué r-n siempre es par?

Respuesta:

Cuenta los elementos en  $\mathfrak{R}$  de la forma  $(a,b)$ ,  $a \neq b$ . Como  $\mathfrak{R}$  es simétrica, r-n es par

8. Una relacion  $\mathfrak{R}$  sobre un conjunto A es irreflexiva si para todo  $a \in A$ ,  $(a,a)$  no pertenece a  $\mathfrak{R}$ .

a) De un ejemplo de una relacion  $\mathfrak{R}$  sobre Z tal que  $\mathfrak{R}$  sea irreflexiva y transitiva pero no simétrica.

Respuesta: a)  $x\mathfrak{R}y$  si y solo si  $x < y$

9.- Para  $A = [1, 2, 3, 4]$ , sean R y F las relaciones sobre A definidas como  $R = (1,2), (1,3), (2,4), (4,4)$  y  $F = (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4)$ . Determine  $R^*F$ ,  $F^*R$ ,  $R^2$ ,  $R^3$ ,  $F^2$  y  $F^3$

Respuesta:

$R \circ S = (1,6), (1,4)$ ;  $S \circ R = (1,2), (1,3), (1,4), (2,4)$ ;  $R^2 = R^3 = [(1,4), (2,4), (4,4)]$ ;  $S^2 = S^3 = [(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)]$

10.- Si R es una relación reflexiva sobre un conjunto A, demuestre que  $R^2$  también es reflexiva sobre A.

Respuesta:  $xER \text{ reflexiva. } - > (x,x)ER. (x,x)ER, (x,x)ER - > (x,x)ER \circ R = R^2$

## 4 Capitulo 8

El principio de inclusión y exclusión.

1. Determine el numero de positivos  $n, 1 \leq n \leq 2000$ , tales que

- a) No son divisibles entre 2,3,5
- b) No son divisibles entre 2,3,5 ni 7
- c) No son divisibles entre 2,3,5, pero si son divisibles entre 7

Respuesta (a):

$$N(c1) = [2000/2] = 100$$

$$N(c2) = [2000/3] = 666$$

$$N(c3) = [2000/5] = 400$$

$$N(c4) = [2000/7] = 285$$

$$N(c1, c2) = [2000/6] = 333$$

$$N(c2, c3) = [2000/15] = 133$$

$$N(c1, c3) = [2000/10] = 200$$

$$N(c1, c2, c3) = [2000/30] = 66$$

$$N(c1, c2, c3) = 200 - [1000 + 666 + 400] + [333 + 200 + 133] - 66$$

$$N(c1, c2, c3) = 534$$

Respuesta (b):

$$N(c1, c4) = [2000/14] = 142$$

$$N(c3, c4) = [2000/35] = 57$$

$$N(c2, c4) = [2000/21] = 95$$

$$N(c1, c2, c4) = [2000/42] = 47$$

$$N(c2, c3, c4) = [2000/105] = 19$$

$$N(c1, c2, c3, c4) = 2000 - [1000 + 600 + 400 + 271] + [333 + 200 + 133 + 142 + 57 + 95] - [66 + 47 + 19] + 9 = 586$$

Respuesta (c):

$$N(c4) = 1715$$

2. ¿De cuantas formas se puede colocar todas las letras de la palabra information de tal manera que ningún par de letras consecutiva aparezca más de una vez? [Aquí queremos contar disposiciones como iinnnoofmrta y fortmainon, pero no inforinmota(donde "n" aparece dos veces) o nortfnioami(donde "no" aparece dos veces)]

Respuesta:

$$N(c1) = 9!$$

$$N(c2) = 9!$$

$$N(c1, c2) = 7!$$

$$N(c1, c2) = 11! - [9! + 9!] + 7!$$

3. Encuentre el número de enteros positivos  $x$  tales que  $x \leq 9999999$  y la suma de los dígitos de  $x$  sea igual a 31

Respuesta:

Como la suma debe de dar 31, entonces nuestro primera condición es  $(37/31)$ , de esto cabe que son 4 números que suman 37, entonces los siguientes 3 condiciones queda que  $s2 = (7/1)(27/21)$ ,  $s3 = (7/2)(17/11) = (7/3)(7/1)$ , por lo tanto el resultado seria el siguiente

$$N(c1, c2, c3) = s1 - s2 - s3 - s4 = (37/31) - (7/1)(27/21) + (7/2)(17/11) - (7/3)(7/3)$$

4. En su tienda de flores, Margarita desea colocar 15 plantas diferentes en cinco anaqueles del escaparate, ¿De cuántas formas puede colocarlas de tal manera que cada anaquel tenga al menos una planta, pero más de cuatro?

Respuesta:

Como se quiere pasar de cuatro, nuestra máximo de condicionales es 3, por lo tanto el procedimiento seria el siguiente

$(5/0)(14/0) - (5/4)(10/6) + (5/1)(6/2)$  donde  $(s/n)$  es el numero de anaqueles y los  $(14/10)$ ,  $(10/6)$ ,  $(6/2)$  es el restante de platas a colocar, por lo tanto se multiplica con el factorial de 15.

$$(15!)[(14/10)(5/0) - (5/1)(10/6) - (5/2)(6/2)]$$

5. Encuentre el número de permutaciones de a,b,c.....,x,y,z, de modo que no aparezcan los patrones spin, game, path o net.

Respuesta:

El numero total de letras en el abecedario es de 26, entonces el procedimiento es el siguiente.

$$26! - [3(23!) + 24!] + (20! + 21!)$$

6. Si se tiran ocho dados distintos, ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan seis números distintos?

Respuesta:

Son 8 tiros y 6 distintos. Esto se plantea de la siguiente manera.

$$[(6/0)6^8 - (6/1)5^8 + (6/2)4^8 + (6/3)3^8 + (6/2)2^8 - (6/1)1^8 + (6/0)0^8]/6^8$$

7. Para la situación de los ejemplos 8.6 y 8.7. calcule E, para  $0 \leq 1 \leq 5$  y muestra que  $\sum E = N = 151$

Resultado:

$$\text{Para } F0 = 768; E1 = 205; E2 = 40; E3 = 10; E4 = 0; E5 = 1$$

$$\text{Entonces } \sum Ei = 768 + 205 + 40 + 10 + 0 + 1 = 1024 = N$$

8. ¿De cuántas formas podemos colocar, las letras de correspondientes de modo que (a) no haya un par de letras idénticas consecutivas? (b) haya exactamente dos pares de letra idénticas consecutivas? (c) haya menos tres pares de letras idénticas consecutivas?

Respuesta(a):

$$(5/0)[14!/2(2!)^5] - (5/1)[13!/(2!)^4] + (5/2)[12!/(2!)^3] - (5/3)[11!/(2!)^2] + (5/4)[10!/2!] - (5/5)[9!]$$

Respuesta(b):

$$E2 = (5/2)[12!/(2!)^3] - (3/1)(5/3)[11!/(2!)^2] + (4/4)(5/4)[10!/2!] - (5/3)(5/5) * [9!]$$

Respuesta(c):

$$L3 = (5/3)[11!/(2!)^2] - (3/2)(5/4)[10!/2!] + (4/2)(5/5)[9!]$$

9. a) ¿De cuántas formas se puede distribuir diez premios distintos entre cuatro estudiantes de modo que exactamente dos estudiantes no reciban ninguno? b) ¿De cuántas formas puede hacerse esto de modo que al menos dos estudiantes no reciban premio?

Resultado(a):

$$E2 = (2/0)[10!/(2!)^2] + (2/1)[9!/(2!)^1] + (2/2)[8!/(2!)^0] = 6132$$

Resultado(b):

$$E2 = (2/0)[10!/(2!)^2] - (2/1)[9!/(2!)^1] + (2/2)[8!/(2!)^0] = 6136$$

10. ¿De cuantas formas se pueden colocar los enteros 1,2,3,...,10 en una linea de modo que ningún entero par quede en su posición natural?

Esto se restringe a 5 formas, ya que un entero n se puede recorrer a  $n + 1$  y sucesivamente, y partiendo de 1, entonces  $n + 1 = 2$ , por lo tanto son pares,  $[10/2] = 5$ , por lo tanto lo siguiente es determinar cuantas formas se colocan.

$$(5/0)10! - (5/1)9! + (5/2)8! - (5/3)7! + (5/4)6! - (5/5)5!$$