

# Ejercicios de Grimaldi

VICTOR MANUEL VASQUEZ POBLETE

September 2018

## 1 Capítulo 1

Principios fundamentales del conteo.

1.- durante las campañas locales, 8 candidatos republicanos y 5 demócratas son nominados para presidentes de la junta escolar. que principio de conteo se usa en (a)? y ¿en (b)?

Respuesta: Para (a) regla de suma y para (b) regla del producto

2.- a) El consejo directivo de una empresa farmacéutica tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para probar una nueva lista de ejecutivos (elegido entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero puede presentar un consejo a los accionistas para su aprobación?

Respuesta: Como busca diferentes formas de escoger la lista podemos pensar que de los 10 miembros se elige uno y quedan 9, luego eligen a otro y queda 8 y escogen al último y quedan 7 podemos expresarlo como  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$  ó pensemos una permutación  $P(10/4) = 5040$

b) 3 miembros del consejo de directores ( de la parte a) son médicos. ¿Cuántas listas de la parte(a) tiene I) Un médico nominado para la presidencia? Respuesta: como al menos 1 médico está nominado tomemos en cuenta a los 3 y usando que de 3 posibles resulta uno entonces de los 10 se resta 1 que ya sería el presidente entonces la expresión resulta  $3 \times 9 \times 8 \times 7 = 1512$  II) Exactamente un médico en la lista? Respuesta: Al menos un médico está dentro, entonces la expresión resulta  $4 \times [3 \times 7 \times 6 \times 5] = 2520$  III) Al menos un médico en la lista?

Respuesta: Como tenemos 3 médicos y al menos uno está podemos descartar 3 personas de las 10, lo cual buscamos la permutación de  $P(7/4)=840$  que sería la probabilidad de los restantes sin ser médicos, por lo que a la probabilidad donde puede ser nombrado, restemos donde no lo es:  $5040-840= 4200$

3.- Un anuncio de hamburguesas indica que un cliente puede ordenar su hamburguesa con alguno, con ninguno de los siguientes ingredientes o con todos los ingredientes: -catsup, mostaza, mayonesa, lechuga, tomate, cebolla, pepinillos, queso, o champiñones. ¿Cuántas ofertas diferentes se pueden servir?

Respuesta = como tenemos 3 opciones y 9 ingredientes, planteamos que se trata de una permutación para saber las combinaciones de los ingredientes con los casos, por lo tanto,  $P(9/3)=504$  posibles

4.- Durante el día se envían 12 programas por un sub procesamiento por lotes de cuántas formas se pueden ordenar el procesamiento de estos programas si no existen restricciones.

Respuesta: Como no hay restricciones podemos considerar de los 12 programas una permutación de ella misma o un factorial para saber las posibles combinaciones, por lo tanto,  $12! = 4790001600$  posibles ordenamientos del proceso

5.- Evalúe cada uno de los siguientes casos: P(7,2) b)P(8,4) c)P(10,7)

Respuesta : a) 42 b) 604800 c) 1320

6.- Pamela tiene 15 libros distintos, ¿De cuántas formas puede colocar sus libros en 2 repisas, de modo que haya al menos un libro en cada repisa?

Respuesta= de los 15 libros tenemos 2 repisas, por lo que descartamos que haya una misma cantidad de libros en las dos repisas, lo que nos da una permutación de  $P(15/2)=210$  maneras de ordenar

7.- De cuántas formas es posible ordenar los símbolos a,b,c,d,e,e,e,e, de forma que ninguna se quede junta a la otra sin repetir los casos.

Respuesta: Podemos apoyarnos separando e e e e e por lo tanto solo se necesitaría saber las posibles combinaciones de las demás letras, así que:  $4!=24$

8. Que nombre de estado implica más disposiciones de letras de su nombre Pennsylvania o massachusetts.

Respuesta:

$p=12!/(3!)(2!)=39\ 916\ 800$  posibilidades  $m=13!/(4!)(2!)(2!)=64\ 864\ 800$  posibilidades

9.-Evalúe cada uno de los siguientes casos: a)C(10,4) b)(12/7) c)C(14,12) d)(15/10)

Respuesta: Se trata de combinaciones, así que: 210 b)792 c)91 d)3003

10.-¿De cuántas formas se puede formar un equipo de baloncesto de 5 personas con 12 posibles jugadores? ¿Cuántas incluyen al jugador más fuerte y al más débil?

Respuesta: Usaremos una combinación de tal modo que cada equipo sea diferente,  $12C5 = 792$ , Ahora para el mas fuerte y débil los sacamos de la cantidad de jugadores y posibles personas del equipo quedando,  $10C3 = 120$

## 2 Capítulo 2

1.-Sea  $p(x)$ ,  $q(x)$  las siguientes proposiciones abiertas:  $p(x)$ :  $x$  es impar si el universo consta de todos los enteros  $x$ . ¿cuales son los valores de verdad de las siguientes proposiciones?  $p(1)$   $q(1)$

Respuesta: a)  $P(3) \vee (Q(3) \vee \neg R(3))$  -¿  $3 \neq 3$ , es verdadero porque pide que sea igual o identico

b)  $P(3) \wedge (Q(3) \vee R(3))$  -¿  $3 \neq 3$ , es verdadera puesto que  $3=3$

2.-Determine si cada una de las sentencias es una declaración

a)en 2003 George w.Bush fue el presidente de E

b) $x+3$  es un entero positivo

c)15 es un número par

d)que hora es?

Respuesta: (a),(c),(d) son declaraciones, (b) no lo es porque es una pregunta

3.- sean  $m$  y  $n$  2 enteros positivos, demuestre que si  $m, n$  son cuadrados perfectos, entonces el producto  $mn$  es también un cuadrado perfecto

Respuesta: Supongamos que  $m$  y  $n$  son cuadrados perfectos, escribimos  $m = a^2$  y  $n = b^2$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos.  $mn = a^2 b^2 = (ab)^2 = ((ab)b)b = ((ab)a)b = (ab)^2$ , entonces  $mn$  es un cuadrado perfecto.

4.- sean  $p, q, r$  las proposiciones para un triángulo  $abc$  particular;  $p$ : el triángulo  $abc$  es isósceles;  $q$ : el triángulo  $abc$  es equilátero;  $r$ : el triángulo  $abc$  es equiangular. traduzca las siguientes frases a español

- a)  $q \rightarrow p$
- b)  $p \rightarrow q$
- c)  $p \rightarrow r$
- d)  $r \rightarrow p$
- e)  $q \rightarrow r$

Respuesta:

a) si el triángulo  $abc$  es equilátero, entonces es isósceles

b) si el triángulo  $ABC$  no es isósceles entonces no es equilátero

5.- Demostrar que, para cualquier par de enteros  $x$  e  $y$ , el producto  $xy$  es par si y sólo si  $x$  es par o  $y$  es par.

Respuesta: Supongamos que  $x$  es par, es decir,  $x = 2n$ , para algún entero  $n$ . Entonces  $xy = 2ny$ , por lo tanto,  $xy$  es par

6.- Si  $a$  y  $b$  son números racionales, entonces  $a + b$  es un número racional. Demostrar

Respuesta: Se pueden escribir de la forma  $a = p/q$  y  $b = r/s$ , con  $q$  y  $s \neq 0$  ( $p, q, r$  y  $s \in \mathbb{Z}$ ). Ahora realizando la suma tenemos,  $p/q + r/s = ps + qr / qs$ . Por lo tanto  $ps + qr / qs = u/v$  es un número racional.

7.- Demuestre que es verdadero o que es falso: existen enteros positivos  $m, n$  son cuadrados perfectos, entonces  $m + n$  es un cuadrado perfecto

Respuesta: Esto en general no es verdad, pues  $m = 4$  y  $n = 1$  entonces no es un cuadrado perfecto

8.- Sea  $p(x)$  la proposición abierta de " $x^2 = 2x$ " donde el universo comprende todos los enteros. determine si cada una de las proposiciones son verdaderas o falsas a)  $p(0)$  b)  $p(1)$  c)  $p(2)$  d)  $p(-2)$

Respuesta: a)  $x = 0$ , verdadero b)  $x = 1$ , verdadero c)  $x = 2$ , verdadero d)  $x = -2$ , falso

9.- Demostrar que  $\sqrt{2}$  es irracional.

Supongamos que  $\sqrt{2}$  es racional, por lo tanto  $\sqrt{2} = m/n$  donde  $m$  y  $n$  son números enteros, con  $n \neq 0$ .

10.- En cuántas maneras posibles las letras de UNUSUAL pueden ser arregladas

Respuesta:  $7! / 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! = 840$  maneras posibles

### 3 Capítulo 3

1.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? a) 1,2,3 b) 3,2,1,3 c) 3,1,2,3  
c) 1,2,2,3

Respuesta: Todos corresponden al mismo conjunto, puesto que aunque se repitan algunos números, no salen del rango de números.

2.- Sea  $A = \{1, 1, 2\}$ . ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?  
a)  $1 \in A$  b)  $1 \in A$  c)  $1 \in A$  d)  $1 \in A$  e)  $2 \in A$  f)  $2 \in A$  g)  $2 \in A$  h)  $2 \in A$

Respuesta: Todas las opciones son verdaderas excepto la (f) porque no hay elementos que pertenecen al conjunto A, solo esta 1

3.- Para  $A = \{1, 2, 2\}$ , ¿cuáles de las ocho proposiciones del ejercicio 2 son verdaderas?  
Respuesta: Todas las opciones son verdaderas excepto la (b) y (d), porque ahora ya no tiene 1 el conjunto de A

4.- ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? a)  $0 \in \emptyset$  b)  $0 \in \emptyset$  c)  $0 \in \emptyset$  d)  $0 \in \emptyset$  e)  $0 \in \emptyset$  f)  $0 \in \emptyset$

Respuesta: Todas son verdaderas excepto la (a) y (b) porque en todas las demás usan referencia al conjunto con 0, y en el caso de (c) el símbolo dice que todos los elementos de 0 es elemento de 0

5.- Consideremos los siguientes seis subconjuntos de  $\mathbb{Z}$   $A = 2m + 1 - m\mathbb{Z}$ ;  $B = 2n + 3 - n\mathbb{Z}$ ;  $C = 2p - 3 - p\mathbb{Z}$ ;  $D = 3r + 1 - r\mathbb{Z}$ ;  $E = 3s + 2 - s\mathbb{Z}$ ;  $F = 3t - 2 - t\mathbb{Z}$  ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas? a)  $A = B$  b)  $A = C$  c)  $B = C$  d)  $D = E$  e)  $D = F$  f)  $E = F$

Respuesta: Las verdaderas son: (a), (b), (c), (e), y las falsas son (d), (f)

6.- Dé un ejemplo de tres conjuntos W, X, Y tales que  $W \subseteq X$  y  $X \subseteq Y$  pero  $W \not\subseteq Y$ . Tenemos el Universo

Respuesta: Expresar los conjuntos como:  $W = \{1\}$ ,  $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{X, 3\}$ , así W pertenece a X, y X pertenece a Y pero W no está dentro de Y directamente.

7.- Para los conjuntos A, B, C  $\cup$ , demuestre la verdad o falsedad de lo siguiente: Si  $A \subseteq B$ ,  $B \subseteq C$ , entonces  $A \subseteq C$ .

Respuesta: Falsedad, expresemos  $A = \{1\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  y  $C = \{1, 3\}$

8.- Para  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  sean  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$  y  $D = \{2, 4, 6, 8\}$ . Determine lo siguiente: a)  $(A \cup B) \cap C$  b)  $A \cup (B \cap C)$  c)  $C \cup D$  d)  $C \cap D$  e)  $(A \cup B) - C$  f)  $A \cup (B - C)$  g)  $(B - C) - D$  h)  $B - (C - D)$  i)  $(A \cup B) - (C \cap D)$

Respuesta: a)  $\{1, 2, 3, 5\}$  b) el subconjunto A c)  $U - \{2\}$  todos menos el 2 d)  $U - \{2\}$  todos menos el 2 e)  $\{4, 8\}$  f)  $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$  g)  $\emptyset$  h)  $\{2, 4, 8\}$  i)  $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

9.- Si  $A = [0, 3]$ ,  $B = [2, 7]$  y  $U = \mathbb{R}$ , determine lo siguiente: a)  $A \cap B$  b)  $A \cup B$  c)  $A$  complemento d)  $A$  diferencia simétrica B e)  $A - B$  f)  $B - A$

Respuesta: a)  $[2, 3]$  b)  $[0, 7]$  c)  $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$  d)  $[0, 2) \cup (3, 7]$  e)  $[0, 2]$  f)  $(3, 7]$

10.- En una estantería hay ocho libros diferentes, tres de física y cinco de ingeniería eléctrica, colocados aleatoriamente. Encuentre la probabilidad de que queden juntos los tres libros de física.

Respuesta:  $3/8 = 37.5\%$

## 4 Capitulo 4

1.- Sean  $a, b$  y  $c$  tres números enteros tales que  $a \mid bc$ , ¿es cierto que  $a \mid b$  o que  $a \mid c$ ? ¿Y si  $a$  es primo?

Respuesta: Supongamos que  $(a)$  es cualquier entero, la respuesta sería que no. Pero Basta tomar  $a = 6, b = 10$  y  $c = 15$ . Se tiene que  $6 \mid 150$  pero  $6$  no es un divisor de  $10$  ni de  $15$ . Si  $a$  es primo, si se verifica

2.- Dados los intervalos:  $A = [x, R]; 10 \leq x \leq 1, B = [x, R]; 1/2 \leq x \leq 3$  y  $C = R(1,$

2) Determina:

- a)  $A \cap B$
- b)  $A \cup B$
- c)  $A \cap C$
- d)  $(A \cap C) \cap B$
- e)  $A \cap B \cap C$  y
- f)  $A \cap B \cap C$ .

Respuesta:

- a)  $A \cap B = [10, 3]$
- b)  $A \cup B = (1/2, 1)$
- c)  $A \cap C = C$  ya que  $A \subset C$
- d)  $(A \cap C) \cap B = A \cap B = [10, 3]$
- e)  $A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = C \cap B = R$
- f)  $A \cap B \cap C = A \cap C \cap B = A \cap B = (1/2, 1)$ .

3.- Para cada uno de los pares siguientes  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ , determine  $\text{mcd}(a, b)$  y expréselo como una combinación lineal de  $a, b$ .

- a) 231, 1820
- b) 1369, 2597
- c) 2689, 4001

Respuesta: a)  $1820 = 7(231) + 203$   $231 = 1(203) + 28$   $203 = 7(28) + 7$   $28 = 7(4)$ , entonces  $\text{gcd}(1820, 231) = 7$   $7 = 203 - 7(28) = 203 - 7[231 - 203] = (-7)(231) + 8(203)$

b)  $\text{gcd}(1369, 2597) = 1 = 2597(534) + 1369(-1013)$

c)  $\text{gcd}(2689, 4001) = 1 = 4001(-1117) + 2689(1662)$

4.- Demuestra que, para todo  $n$  natural,  $3 \mid 7^{\text{pow}(n)} - 4^{\text{pow}(n)}$

Respuesta:

$n = 1$

$7^{\text{pow}(1)} - 4^{\text{pow}(1)} = 3$

dado que  $(P(n) \mid P(n+1))$

suponemos que:  $7^{\text{pow}(n)} - 4^{\text{pow}(n)} = 3 \cdot q$ ; entonces

$7^{\text{pow}(n+1)} - 4^{\text{pow}(n+1)} = 7n \cdot 7^{\text{pow}(n)} - 4 \cdot 4^{\text{pow}(n)} = 7^{\text{pow}(n)}(4+3) - 4 \cdot 4^{\text{pow}(n)} = 4(7n + 3) - 4 \cdot 4^{\text{pow}(n)} = 4(7n + 3 - 4^{\text{pow}(n)})$

que es un múltiplo de 3.

5.- Dados los siguientes números, indica cual es el menor de los conjuntos de números (entre  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ ) que lo contiene:  $3, 2, \sqrt{4}, 10/2, 8/9, 142, 0.454, 5, 8, \dots$

Respuesta: Tenemos que  $3 \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{N}, \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{N} (o \sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Z}), 12 = 5 \in \mathbb{Z}, 8/9 \in \mathbb{Q},$

$$142 \text{ Q}, 0454 \text{ Q}, 5 \text{ R}, 38 = 2 \text{ Z y R}.$$