Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

Estructuras Discretas

Grupo:05

Integración de un programa de cómputo para probabilidad discreta y probabilidad condicional.

Profesor:Ing. Orlando Zaldívar Zamorategui

Alumnos:

Castañeda Gonzalez Michelle Ariana

Chavez Sánchez Fernanda

Gonzalez Trejo Octavio

Pineda Pérez Daniel Antonio

Vergara Reyes Gilberto

Semestre 2026-1

Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería

Estructuras Discretas
Tutorial.Equipo 6

Objetivo

Desarrollaremos e integraremos un programa de cómputo que modele, calcule, simule y visualice problemas de probabilidad discreta y probabilidad condicional, entregando resultados concretos, verificables y bien documentados para su uso en la asignatura de Estructuras Discretas.

Esto se editara al final, una vez este terminado todo

Introducción

La probabilidad constituye una de las bases fundamentales en la toma de decisiones y en la modelación de fenómenos inciertos dentro de la ciencia y la ingeniería. En el contexto de la asignatura Estructuras Discretas, su estudio permite comprender el comportamiento de sistemas finitos y eventos contables mediante modelos matemáticos exactos. Dentro de este marco, el desarrollo de un programa de cómputo para la resolución y simulación de problemas de probabilidad discreta y probabilidad condicional representa una herramienta didáctica y analítica de gran valor, ya que combina la teoría con la experimentación digital.

Este proyecto busca integrar la programación con los fundamentos matemáticos de la probabilidad, permitiendo automatizar el cálculo de distribuciones discretas, así como el análisis de eventos dependientes e independientes a través del teorema de Bayes y la probabilidad condicional. Se pretende que los estudiantes puedan comparar los resultados teóricos con los experimentales, fortaleciendo así la intuición estadística y el pensamiento lógico.

La implementación del software no solo facilita la comprensión de conceptos abstractos, sino también fomenta habilidades de programación estructurada, validación numérica y comunicación técnica. De esta manera, el trabajo se enmarca en una estrategia integral que une la matemática discreta, la estadística y la computación, respondiendo a la necesidad de crear herramientas accesibles, interactivas y reproducibles para el aprendizaje y la aplicación de la probabilidad en problemas reales.

Introducción a la probabilidad

El término probabilidad se refiere al estudio del azar y la incertidumbre en cualquier situación en la cual varios posibles sucesos pueden ocurrir; la disciplina de la probabilidad proporciona métodos de cuantificar las oportunidades y probabilidades asociadas con varios sucesos. El lenguaje de probabilidad se utiliza constantemente de manera informal tanto en el contexto escrito como en el hablado.(Devore,2016,p.64)

Resulta fascinante que esta rama del conocimiento, tan crucial en el mundo moderno, haya nacido de motivaciones de querer tener ventaja estratégica para obtener retribuciones económicas como los juegos de azar y las apuestas. Sus raíces se remontan a unos 300 años, cuando la curiosidad y el deseo de obtener una ventaja impulsó a intelectuales de la época a formalizar los patrones de la suerte. La pregunta central era: ¿existe un patrón que permita ganar con más frecuencia o, al menos, determinar la estrategia óptima para minimizar las pérdidas en situaciones de riesgo?

Esta necesidad de resolver problemas concretos que surgían de los jugadores de azar y sus ambiciones, llevando a matemáticos como Pierre de Fermat y Blaise Pascal en el siglo XVII a establecer los cimientos de la teoría moderna de la probabilidad. Comenzando así, un método para optimizar las apuestas se transformó en una teoría matemática robusta con aplicaciones que van mucho más allá del casino.

El lenguaje de la probabilidad como ya lo dice el autor Devore no se limita a las aulas o a los textos técnicos; se emplea constantemente de manera informal en el contexto escrito y hablado, influyendo en la manera en la que nos expresamos, como “Chance y si voy”, “Es probable que no me vaya bien en el examen”, “probablemente llueva hoy”, etc.

Sin embargo, su verdadera potencia reside en su aplicación formal. Hoy en día, la probabilidad es una herramienta indispensable en campos tan diversos como:

Ciencia de datos y aprendizaje automático, para predecir tendencias y clasificar información.

Finanzas y seguros, para evaluar riesgos de inversión y fijar primas como lo que hacen los actuarios.

Física cuántica, para describir el comportamiento de las partículas subatómicas.

Estadística, siendo su fundamento esencial la inferencia, la cual permiite extraer conclusiones sobre una población a partir de una muestra.

En resumen, la probabilidad nos ofrece una lógica de la incertidumbre, permitiéndonos tomar decisiones informadas en un mundo inherentemente aleatorio, con múltiples aplicaciones, que siempre ha formado parte de la vida, y como humanos, naturalmente hemos aplicado de manera arcaica, pero la probabilidad, establece esas incertidumbres y problemas en una teoría matemática formal. No se trata sólo de predecir el futuro, sino de entender la estructura del azar y actuar racionalmente frente a él.

Definición y conceptos básicos

La probabilidad puede definirse como el cálculo matemático que establece todas las posibilidades que existen de que ocurra un fenómeno bajo determinadas circunstancias de azar. Es una medida numérica que está acotada entre 0 y 1, donde 0 representa que un evento es imposible (no puede ocurrir bajo ninguna circunstancia), y 1 indica que un evento es seguro (ocurrirá con certeza).

Matemáticamente, la probabilidad la vamos a expresar como P(A) qué se entiende como la probabilidad de que pase el evento A. Ya veremos a qué nos referimos con el evento.

En este momento, debemos comprender que la probabilidad de un evento siempre va a tener un rango entre 0 y 1, no pueden existir probabilidades menores a 0, ni mayores a 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

La probabilidad de que un evento sea igual a 0 significa que dicho evento nunca ocurrirá, mientras que, la probabilidad de que un evento sea igual a 1, significa que, con certeza y con exactitud, un evento ocurrirá pero, ¿Qué es esto de "evento"? y ¿Por qué la probabilidad debe estar forzosamente entre 0 y 1?

Espacios muestrales y eventos

> Un experimento es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre. Aunque la palabra experimento en general sugiere una situación de prueba cuidadosamente controlada en un laboratorio, se le utiliza aquí en un sentido mucho más amplio.(Devore,2016,p.65)

Como comenta el autor de probabilidad y estadística para ingenieros y ciencias, el experimento es el proceso en el cuál ocurre una acción, dicha acción resulta de interés cuando queremos aproximarnos a su actuar, y por qué sucede de esa forma, para eliminar la incertidumbre, es decir, las imprecisiones, y la aleatoriedad, lo cual es imposible, pero podemos acercarnos en ciertos casos a modelos matemáticos probabilísticos para estudiar y entender el comportamiento de dichas acciones.

Este concepto es fundamental porque el experimento es el proceso o acción sobre el cual deseamos aplicar el análisis probabilístico. Cada ejecución o realización de este proceso genera un resultado, y es el conjunto de todos los posibles resultados lo que resulta de interés.

La característica definitoria de un experimento probabilístico es que, a pesar de que el proceso se realice bajo las mismas condiciones (o similares), el resultado particular que se obtiene en cada ocasión no se puede predecir con certeza.

El interés radica en cuantificar por qué y cómo suceden los resultados de cierta manera, permitiéndonos aproximarnos a su comportamiento a largo plazo. Al estudiar la probabilidad de cada resultado, podemos hacer inferencias y tomar decisiones informadas sobre el proceso.

Así pues, muchos autores le otorgan una definición a el espacio muestral, como:

> El espacio muestral de un experimento denotado por S, es el conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.(Devore,2016,p.65)
>
> Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estadístico se le llama espacio muestral y se representa con el símbolo S.(Álvarez, 2019, p. 36)
>
> El conjunto de todos los eventos sencillos se denomina espacio muestral, S.(Mendenhall, Beaver y Pinnock, 2017, p. 153)

Como podemos ver, los autores convergen y llegan al mismo punto, un espacio muestral es el conjunto de todos los experimentos, a dicho conjunto se le tiene guardada la letra reservada S mayúscula.

Ahora, ¿Qué es un evento?

> Un evento es un subconjunto de un espacio muestral.(Álvarez, 2019, p. 29)

> llamaremos evento a cualquier subconjunto del espacio muestral y denotaremos a los eventos por las primeras letras del alfabeto en mayúsculas: A, B, C, etc.(Rincón, 2013, p. 7)

> Un evento es cualquier recopilación (subconjunto) de resultados contenidos en el espacio muestral S. Un evento es simple si consiste en exactamente un resultado y compuesto si consiste en más de un resultado.(Devore,2016,p.66)

Según las definiciones de estos autores y para que quede más claro. Un evento es un conjunto o una colección específica de resultados de un experimento probabilístico. Es, esencialmente, la declaración de lo que nos interesa que ocurra.

Veamos un ejemplo:

Considérese un experimento en el cual cada uno de tres vehículos que toman una salida de una autopista particular giran a la izquierda (L) o la derecha (R) al final de la rampa de salida. Los ocho posibles resultados que constituyen el espacio muestral son LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL y RRR. Así pues existen ocho eventos simples, entre los cuales están E1 {LLL} y E5 {LRR}. Algunos eventos compuestos incluyen A {RLL, LRL, LLR} el evento en que exactamente uno de los tres vehículos gire a la derecha. B {LLL, RLL, LRL, LLR} el evento en que cuando mucho uno de los vehículos gire a la derecha. C {LLL, RRR} el evento en que los tres vehículos giren en la misma dirección. Suponga que cuando se realiza el experimento, el resultado es LLL. Entonces ha ocurrido el evento simple E1 y por lo tanto también comprende los eventos B y C (pero no A).

Ahora sí , veamos, ¿Por qué la probabilidad debe estar forzosamente entre 0 y 1?

La probabilidad es una medida de la verosimilitud o la frecuencia relativa con la que se espera que ocurra un evento. Estos límites son esenciales para que la probabilidad sea una medida coherente:

El valor de 0 representa la imposibilidad de que un evento ocurra. Un evento con probabilidad 0 es un evento imposible. No existe ninguna posibilidad de que los resultados que componen este evento se realicen. Como la probabilidad mide la *proporción* de resultados favorables respecto al total, esa proporción nunca puede ser negativa. No puedes tener un número negativo de resultados que te interesen.

Ejemplo: La probabilidad de que un dado de seis caras arroje un resultado de 7 es P(7) = 0.

El valor de 1 representa la certeza de que un evento ocurra. Un evento con probabilidad 1 es un evento seguro. Incluye *todos* los posibles resultados del experimento. Si un evento incluye el 100% de los resultados posibles, su proporción respecto al total es = 1.

Ejemplo: La probabilidad de que un dado de seis caras arroje un resultado entre 1 y 6 es:

Evento A: Probabilidad de que al arrojar un dado, salga un número entre el 1 y el 6.

$P(A) = 1$

Tipos de eventos:

Evento Simple (o Elemental): Un evento que consta de un solo resultado del espacio muestral ej.{5}.

Evento Imposible ($\emptyset$): El evento que nunca ocurre. Es el conjunto vacío (ej. "Obtener un 7" al lanzar un dado).

Evento Seguro (Ω): El evento que siempre ocurre. Es el espacio muestral mismo (ej. "Obtener un número entre 1 y 6").

Operaciones con eventos

Dado que los eventos son conjuntos, podemos usar operaciones de la Teoría de Conjuntos para combinarlos:

Operación	Símbolo	Definición probabilística
Unión	$A \cup B$	El evento que ocurre si A ocurre o B ocurre (o ambos).
Intersección	$A \cap B$	El evento que ocurre si A y B ocurren simultáneamente.
Complemento	$A^c, A' \, o \, \overline{A}$	El evento que ocurre si A no ocurre. Es el conjunto de todos los resultados en Ω que no están en A.
Eventos mutuamente excluyentes	$A \cap B = 0$	Dos eventos que no pueden ocurrir al mismo tiempo (su intersección es el evento imposible).

La unión de dos eventos A y B, que se denota con el símbolo A ∪ B, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B, o a ambos. Ejemplo:Sea A = {a, b, c} y B = {b, c, d, e}; entonces, A ∪ B = {a, b, c, d, e}. Álvarez, 2019, p. 62)

La intersección de dos eventos A y B, que se denota con el símbolo A ∩ B, es el evento que contiene todos los elementos que son comunes a A y a B.

Ejemplo: Sea E el evento de que una persona seleccionada al azar en un salón de clases sea estudiante de ingeniería, y sea F el evento de que la persona sea mujer. Entonces E ∩ F es el evento de todas las estudiantes mujeres de ingeniería en el salón de clases.(Álvarez, 2019, p. 61)

El complemento de un evento A respecto de S es el subconjunto de todos los elementos de S que no están en A. Denotamos el complemento de A mediante el símbolo A^c.

Ejemplo: Sea R el evento de que se seleccione una carta roja de una baraja ordinaria de 52 cartas, y sea S toda la baraja. Entonces R^c es el evento de que la carta seleccionada de la baraja no sea una roja sino una negra.(Álvarez, 2019, p. 61)

Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si A ∩ B = ϕ; es decir, si A y B no tienen elementos en común.

Ejemplo:Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si A ∩ B = ϕ; es decir, si A y B no tienen elementos en común.(Álvarez, 2019, p. 62)

La operación de dichos eventos las podemos representar con los llamados diagramas de Venn

Diagramas de Venn

a)Diagrama de Venn de los eventos A y B

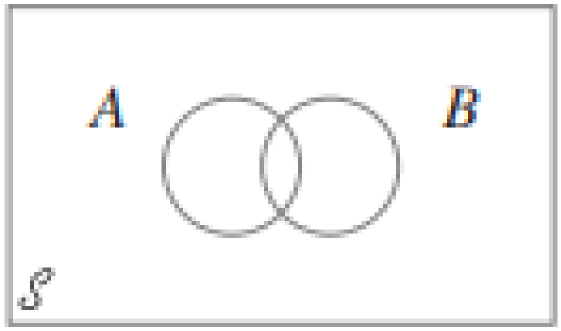


Figura 1. Diagrama de Venn (Devore, 2016, p. 68)

b)La región sombreada es $A \cap B$

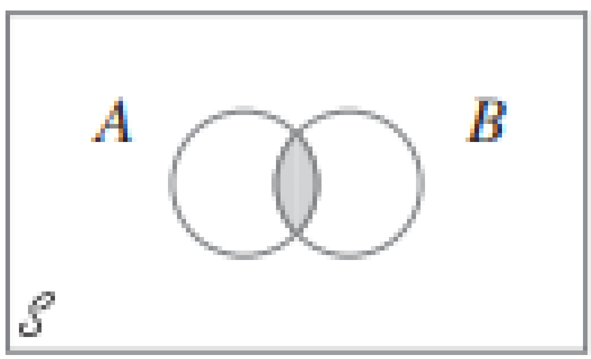


Figura 2. Diagrama de Venn, intersección(Devore, 2016, p. 68)

c)La región sombreada es $A \cup B$

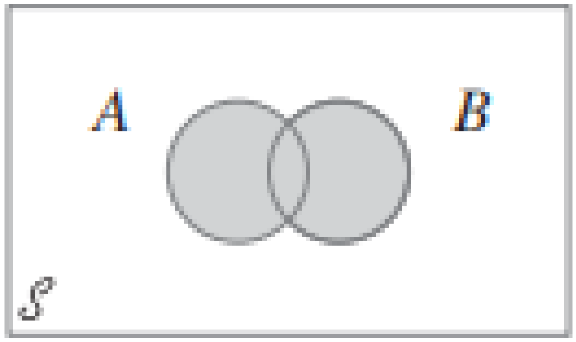


Figura 3. Diagrama de Venn, unión(Devore, 2016, p. 68)

d)La región sombreada es A', A^{C} o $\overline{A}$

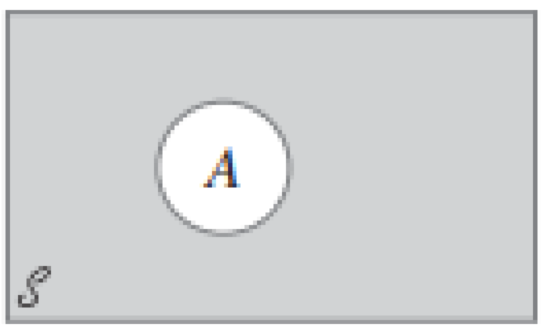


Figura 4. Diagrama de Venn, complemento(Devore, 2016, p. 68)

e)Eventos mutuamente excluyentes

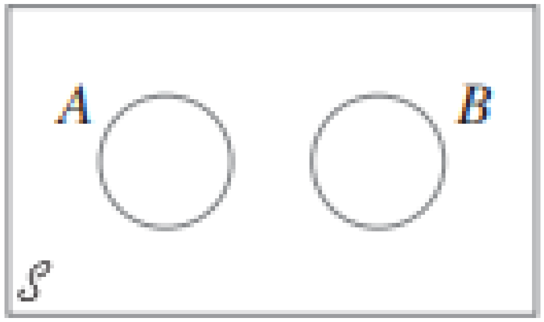


Figura 5. Diagrama de Venn, excluyentes(Devore, 2016, p. 68)

Ejemplo de las operaciones de eventos en un diagrama de Venn:

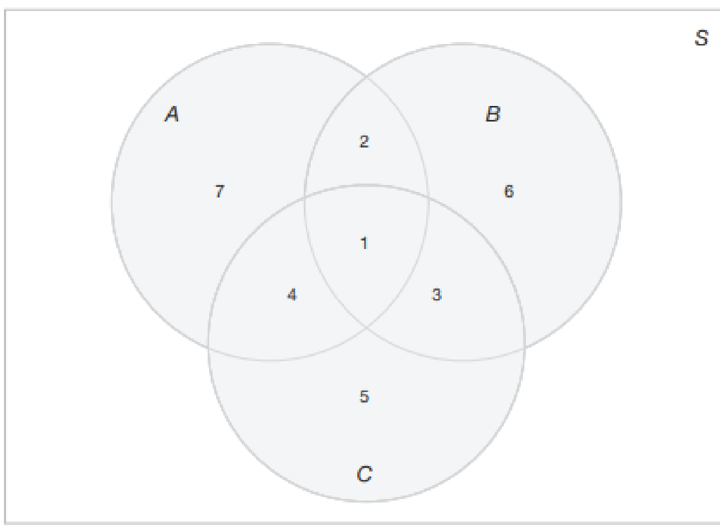


Figura 6. Diagrama de Venn, ejemplo(Álvarez, 2019, p. 63)

$A \cup C = 1, 2, 3, 4, 5 \; y \; 7$

$B' \cap A = 4 \; y \; 7$

$A \cap B \cap C = 1$

$(A \cup B) \cap C' = 2, 6 \; y \; 7$

Principio fundamental del conteo

El principio fundamental del conteo o regla de la multiplicación se basa en lo siguiente:

Si una operación se puede llevar a cabo en n1 formas, y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en n2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de n1 n2 formas.

ejemplo:

¿Cuántos puntos muestrales hay en el espacio muestral cuando se lanza un par de dados una vez? Solución: El primer dado puede caer en cualquiera de n1 = 6 maneras. Para cada una de esas 6 maneras el segundo dado también puede caer en n2 = 6 formas. Por lo tanto, el par de dados puede caer en n1 n2 = (6)(6) = 36 formas posibles.

El principio fundamental del conteo de forma estándar es:

Si una operación se puede ejecutar en n1 formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación en n2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en n1 n2 ...nk formas.

Permutaciones

El término permutación, significa cambio o intercambio, y en el ámbito de las matemáticas, específicamente en la Combinatoria, se refiere a un concepto fundamental: la disposición o el orden de los elementos de un conjunto finito. Una permutación es, por lo tanto, cada una de las posibles ordenaciones que se pueden establecer con todos o parte de los elementos de dicho conjunto.

> O según Álvarez:Una permutación es un arreglo de todo o parte de un conjunto de objetos.(Álvarez, 2019, p. 47)

Lo que caracteriza a las permutaciones es el **orden** en el que se colocan los elementos, en este caso sí importa el orden de acomodo.

Para ilustrarlo, si consideramos un conjunto de tres dígitos {1, 2, 3}, las posibles permutaciones de estos tres elementos son seis ordenaciones distintas:

123, 132, 213, 231, 312, 321

Cada uno de estos números es una permutación diferente porque la **posición relativa** de los dígitos genera un resultado único. Si el orden no fuera relevante, todas estas disposiciones se consideran simplemente como el mismo conjunto de elementos.

El número total de permutaciones posibles para un conjunto de n elementos se calcula mediante la función factorial n!:

$P_n = n!$=n(n-1)xn(n-2)xn(n-3)x…x1

Cuando se busca ordenar una porción de un conjunto, es decir, seleccionar r elementos de un total de n elementos, la fórmula para las permutaciones se ajusta a:

$$nPr = \frac{n!}{(n-2)!}$$

Esta fórmula es esencial para determinar el tamaño de un **espacio muestral** en situaciones donde la jerarquía, secuencia o posición (como la elección de un presidente, vicepresidente y secretario de un comité) son factores determinantes.

Combinaciones

Las combinaciones son lo contrario a las permutaciones, ya que, en las combinaciones no importa el orden de acomodo, es decir, una combinación es una forma de agrupar elementos, sin importarnos jerarquías, secuencias, posiciones, etc.

Debido a que cada agrupación de r elementos se puede ordenar de r! maneras diferentes, la fórmula de la combinación se deriva de la fórmula de la permutación, dividiendo por el número de formas en que los r elementos seleccionados pueden ordenarse entre sí.

La fórmula para calcular las combinaciones de n elementos tomados de r en r es:

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Donde n es el número total de elementos, y r es el número de elementos seleccionados para formar el grupo o subconjunto. Esta fórmula asegura que, al contar las agrupaciones, se eliminen los conteos duplicados que provienen de las diferentes secuencias u órdenes de los mismos elementos.

> Ejemplo:Una tarjeta de circuito impreso se puede comprar de entre cinco proveedores. ¿En cuántas formas se pueden escoger tres proveedores de entre los cinco?Solución Como es sólo importante cuáles tres se han escogido, no el orden de selección, el número de formas es $5C3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{(5)(4)}{2(1)} = 10$ formas de escoger proveedores. (Mendenhall,2017,p.141)

Axiomas de probabilidad

Los axiomas de Kolmogorov

Para cualquier evento A, $P(A^c) = 1 - P(A)$

Para $P(\varnothing) = 0$

Si $A \subseteq B,\ entonces\ P(A) \leq P(B)$

Si $A \subseteq B,\ entonces\ P(B - A) = P(B) - P(A)$

Para cualquier $A,\ 0 \leq P(A) \leq 1$

Para cualesquiera eventos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(Rincón, 2007,p.18)

Probabilidad en espacios discretos

Concepto	Definición	Notación
Espacio muestral	El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. Debe ser contable (finito o infinito contable).	S={e_1,e_2,e_3,e_4,e_5...}

Resultado simple	Un elemento individual, e_1, dentro del espacio muestral S.	$e_1 \in S$
Evento	Cualquier subconjunto de S. Una colección de uno o más resultados simples.	$E \subset S$
Función de probabilidad	Una función que asigna un valor real a cada evento E, cumpliendo los axiomas.	P(E)

Probabilidad Discreta

Variables aleatorias discretas

Las variables aleatorias discretas son aquellas funciones que asignan valores numéricos a los pruebas o experimentos aleatorios, destacando que los posibles valores se podrán enumerar, distinguiendo uno de otro, en pocas palabras ese conjunto de valores será finito o infinito numerable.

Algunos ejemplos simples que nos permiten comprender esto aún más:

Número de vehículos que pasan por un semáforo específico, en un tiempo de un minuto. (Podemos contar cada uno de los carros).

Llamadas telefónicas que recibes en un lunes. (Podemos enumerar cuántas llamadas tuvimos).

En un partido de fútbol, el número de goles que anota tu equipo favorito (Podemos contar con los dedos de nuestras manos el número de goles que anotó un equipo).

Función de probabilidad de una variable discreta

La función de probabilidad de una variable discreta (función de masa de probabilidad), es aquella que asigna una probabilidad para cada valor que pueda tomar la variable aleatoria discreta.

Podríamos decir que la función de masa de probabilidad nos dice que tan probable es que la variable tome un valor dentro del conjunto de resultados posibles.

Ejemplos:

Lanzamiento de una moneda, X sería la variable aleatoria que representa que cara de la moneda cae (0=sol y 1=águila). $P(X = 0) = 0.5\ y\ P(X = 1) = 0.5$

Lanzamiento de un dado, siendo X el número que cae viendo hacia arriba del dado. $P(X = x) = 1/6$

Número de goles de tu equipo favorito, siendo X el número de goles. $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$…

Propiedades de la función de probabilidad

El conjunto de pares ordenados (x, f (x)) es una función de probabilidad, una función de masa de probabilidad o una distribución de probabilidad de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado x posible,

1. $f(x) \geq 0$
2. $\Sigma f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

(Walpole, Myers, Myers, 2012, p. 106)

Para que la función de probabilidad sea válida para una variable aleatoria discreta, se deben cumplir los puntos vistos anteriormente.

1. Las probabilidades no pueden ser negativas.
2. La suma de todas las probabilidades debe de ser igual a 1.
3. Expresión de la probabilidad de un valor específico.

Distribuciones discretas importantes

Para el análisis de las variables aleatorias discretas se utilizan distintos modelos probabilísticos, estos modelos se han desarrollado para describir cada comportamiento de los distintos experimentos que son aleatorios. A estos modelos se les llaman distribuciones de probabilidad discretas, y son esenciales para poder cuantificar la probabilidad de que un evento tenga un número específico de resultados enteros.

Cada distribución está dirigida a un fenómeno con ciertas características, ya sea la ocurrencia de un éxito o de un fracaso, número de veces que ocurre un evento, conteo de resultados de un número específico de vueltas, etc.

A continuación veremos las distribuciones discretas que son muy relevantes en la probabilidad.

Bernoulli:

La distribución de Bernoulli se encarga de describir aquellos experimentos aleatorios en los que solamente existen dos resultados: éxito(1) o fracaso (0), en pocas palabras, la distribución de Bernoulli describe situaciones donde un evento ocurre o no ocurre.

$P(X = x) = p^{x}(1 - p)^{1-x} \qquad para\, x = 0,\, 1$

Esta distribución es de las más importantes, pues es la base de de distribuciones como la binomial y la geométrica.

Ejemplos de la distribución de Bernoulli:

Lanzar una moneda (sol o águila)

Encender un foco y verificar si prende o no

Verificar si un producto fabricado es defectuoso o no defectuoso

Verificar si una persona votó o no votó en una elección

Si un estudiante aprueba o no su examen

Distribución Binomial

La distribución Binomial se utiliza cuando se lleva a cabo un mismo experimento repetidas veces, y en cada uno de los intentos solo hay como posibles resultados: éxito o fracaso, teniendo la característica de que en cada repetición o intento, se mantiene la misma probabilidad para cada uno de ellos.

$P(X = x) = (n,\ x)p^{x}(1 - p)^{n-x}$ para $x = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n$

donde (n, x) indica cuántas distintas maneras hay de obtener x éxitos dentro de n intentos.

Ejemplos:

Cantidad de focos que no vienen defectuosos en un lote de 100 piezas

Número de veces que cae sol en una moneda después de lanzarla 5 veces

Número de veces que cae un número impar en un dado

Distribución Hipergeométrica

Cuando tomamos una muestra de una población, pero esta es sin reemplazo (los elementos no se regresan al conjunto), utilizamos la distribución hipergeométrica.

La distribución hipergeométrica nos da la probabilidad de obtener una cantidad específica de éxitos o de fracasos en una muestra que pertenece a un grupo, en el cual se sabe la cantidad exacta de éxitos, así como de fracasos.

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

K= número total de éxitos en la población

x= número de éxitos de la muestra

N= tamaño total de la población

n= tamaño de la muestra

Ejemplos:

Ver cuántas pilas defectuosas salen al tomar 10 pilas de un lote de 40 pilas sabiendo que hay 4 pilas que están defectuosas.

Sacar 8 canicas de una bolsa que contiene 10 canicas moradas y 20 canicas naranjas, y ver cuántas canicas fueron moradas

Agarrar 7 sandwiches de una bolsa que contiene 20 sandwiches, sabiendo que hay 4 que vienen sin mayonesa, ver cuantos sandwiches sin mayonesa nos tocan

Distribución Geométrica

La distribución geométrica describe cual es la probabilidad de que el primer éxito se dé en el número x de intentos, esto en una serie de ensayos Bernoulli que son independientes.

$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p \qquad para\, x = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

En esta distribución cada intento solo tiene dos opciones como resultado, ya sea éxito o sea fracaso, y la probabilidad de éxito se mantendrá igual para cada uno de los intentos, a pesar de esto cada intento es independiente.

Ejemplos:

Cuantos intentos se necesitan para que salga el número 3 en un dado

Ver en que intento sale águila en una moneda que se lanza

Cuántos boletos de lotería se compran hasta que se obtenga el premio

Distribución Poisson

A diferencia de la distribución geométrica, esta se diferencia por el hecho de que la distribución de Poisson se centra en el número de veces que ocurre cierto evento en un intervalo de espacio, un área, tiempo que están definidos; todos estos eventos deben de ocurrir de manera independiente uno del otro, de manera aleatoria, y siempre se mantendrá constante la tasa promedio de ocurrencia.

$P(X = x) = e^{-\lambda}(\lambda^{x})/x!$

λ= promedio de eventos en el intervalo dado

x= número de eventos específicos que se analizarán

Ejemplos:

Número de robos en la ciudad al día

Número de llamadas que recibe alguien en 3 horas

Número de enfermos que recibe un hospital en una hora

Probabilidad condicional

La probabilidad condicional constituye uno de los conceptos centrales dentro de la teoría de la probabilidad, ya que permite evaluar la posibilidad de que ocurra un evento tomando en cuenta la información de que otro evento ya ha sucedido. En otras palabras, representa una forma de actualizar nuestro conocimiento sobre un suceso a partir de nueva evidencia.

Matemáticamente, la probabilidad condicional de un evento A dado que ocurre otro evento B (con $P(B)>0$):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donde $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ambos eventos ocurran simultáneamente. Esta relación indica que el valor de $P(A|B)$ dependerá directamente de la medida en que A y B se superponen dentro del espacio muestral.

El concepto de probabilidad condicional permite analizar eventos dependientes, es decir, aquellos cuya ocurrencia altera la probabilidad del otro. Por ejemplo, en experimentos discretos como la extracción de cartas o bolas de una urna sin reemplazo, conocer que un evento ocurrió modifica el conjunto posible de resultados futuros. En contraste, cuando dos eventos son independientes, el hecho de que ocurra uno no afecta al otro, cumpliéndose la relación:

$P(A \cap B)=P(A)*P(B)$

En el contexto de este proyecto, la implementación computacional de la probabilidad condicional permite automatizar cálculos y representar visualmente las relaciones entre eventos mediante árboles de probabilidad y tablas de contingencia. Estas representaciones facilitan la interpretación de escenarios complejos, en los cuales múltiples sucesos interactúan o dependen entre sí. El enfoque condicional posibilita además validar empíricamente la consistencia de los resultados teóricos, fortaleciendo la comprensión de la dependencia estadística entre variables discretas.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Propiedades y Aplicaciones

Antes de definir las propiedades de la probabilidad condicional y la probabilidad discreta, necesitamos definir los siguientes axiomas de la Probabilidad, esto para un espacio muestral S, la probabilidad de cada evento:

1. La probabilidad de A o P(A) es un número no negativo $P(A) \geq 0$
2. La probabilidad del espacio muestral S es la unidad $P(S)=1$

3. A y B son eventos que se excluyen mutuamente en S, entonces la probabilidad de la unión de los eventos es igual a la suma de sus probabilidades
   P(AUB) = P(A) + P(B)

Para cumplir y entender los anteriores axiomas de la probabilidad definiremos los Teoremas fundamentales de los Axiomas

1. P(∅)=0 (La probabilidad del conjunto vacío es igual a 0)

2. P(Ā)=1-P(A)
   (La probabilidad del complemento de A es igual a 1-P(A)

3. P(AUBUC) (Condiciones Múltiples)
   =
   P(A) + P(B) + P(C) - P(AUB) - P(A∩C) - P(B∩C) + P(A∩B∩C)

4. Si A⊂B entonces P(A)≤P(B)
(Si el evento A está contenido dentro del evento B, entonces la probabilidad de A es menor o igual que la probabilidad de B)

Propiedades de la Probabilidad Condicional

1. Teorema de la Multiplicación:

El teorema de la Multiplicación de Probabilidades establece la relación fundamental entre la probabilidad conjunta de dos o más eventos y sus probabilidades condicionadas. En términos formales, el teorema señala que la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos eventos A y B es igual al producto de la probabilidad de uno de ellos por la probabilidad condicional del otro, dado que el primero ha ocurrido.

Formaliza la idea de que la probabilidad de que ocurran dos sucesos depende no solo de la probabilidad de cada uno, sino también de la influencia que uno ejerce sobre el otro

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ donde $P(A \cap B) = P(A|B)\ P(B)$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donde $P(A \cap B) = P(B|A)\ P(A)$

2. Independencia

   La independencia de eventos significa que la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento no tiene influencia en la ocurrencia o no ocurrencia, que haya intersección no significa que sean dependientes, esto se comprueba obteniendo las probabilidades de dichos eventos

   $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\ P(B)}{P(B)} = P(A)$

   $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\ P(B)}{P(A)} = P(B)$

Teorema de Bayes y su interpretación

El teorema de Bayes es fundamental en áreas como la inteligencia artificial, el diagnóstico médico, la ingeniería de confiabilidad y la inferencia estadística, ya que brinda un marco formal para la revisión de creencias frente a la aparición de datos o pruebas adicionales.

Este teorema nos permite actualizar información o una probabilidad inicial llamada a priori esto cuando se recibe nueva información.

Un dato curioso es que durante la Segunda Guerra Mundial, Alan Turing aplicó principios bayesianos para descifrar los códigos nazis en la máquina Enigma, lo que cambió el curso del conflicto. Hoy, el pensamiento bayesiano no se limita a las matemáticas: se ha convertido en una filosofía de razonamiento, una forma de pensar en términos de evidencia y actualización continua del conocimiento. En otras palabras, Bayes nos enseña que ninguna certeza es absoluta

En las estructuras discretas la probabilidad bayesiana actúa sobre espacios definidos por combinaciones, secuencias y grafos, donde cada evento tiene una identidad concreta dentro de un conjunto finito. Lo interesante es que Bayes no solo sirve para calcular, sino para inferir: permite determinar qué tan razonable es una hipótesis o un estado del sistema sabiendo que otro evento ocurrió.

La forma en la que expresamos el teorema de bayes, es la siguiente:

> Sean los eventos B1, B2,....,Bk una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que P(Bi) es distinta a 0 para:

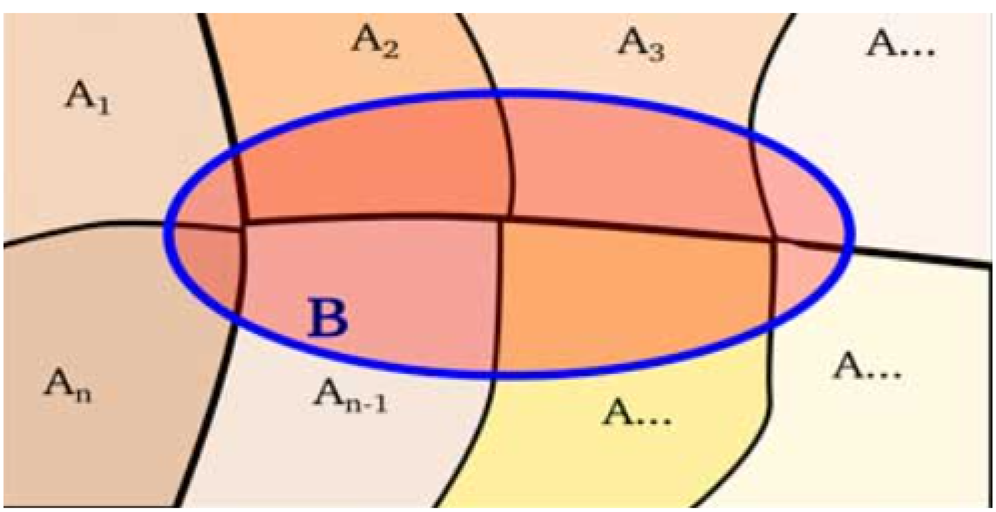
$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)\, P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)\, P(B_j)}.$$

Teorema de la Probabilidad Total

El Teorema de la Probabilidad Total constituye uno de los fundamentos más relevantes del análisis probabilístico y de la teoría de la inferencia estadística. Desde un punto de vista formal, establece que la probabilidad de ocurrencia de un evento puede expresarse como la suma ponderada de sus probabilidades condicionadas respecto a una partición del espacio muestra

El Teorema de la Probabilidad Total garantiza la coherencia del razonamiento probabilístico, asegura que toda estimación o inferencia realizada sobre un evento se sustenta en la totalidad de sus posibles causas o contextos. De este modo, permite construir modelos predictivos consistentes, realizar inferencias bayesianas y establecer vínculos entre datos observables y variables ocultas.

El siguiente teorema denominado teorema probabilidad total o regla de eliminación permite hallar la probabilidad de un evento A cuando el espacio muestral S sea dividido en varios eventos B1,B2,… hasta Bk.



Sean los eventos B1, B2,....,Bk una partición exhaustiva y mutuamente excluyente del espacio muestral S, de tal forma que P(B1) es distinta a 0 para i= 1, 2, 3,..., k, entonces para cualquier evento A en S

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)\, P(B_i).$$

Aplicaciones en el Mundo y la Ingeniería

1. Pronóstico del tiempo: Se informa que hay solo un 30% de probabilidad de fuertes lluvias en cualquier día;P(Lluvia|Nublado). con un 70% de estimación.

2. Diagnóstico médico: Ciertas pruebas médicas indican una probabilidad del 80% de presencia de enfermedad; la probabilidad condicional se puede usar para estimar esta probabilidad P(Enfermedad|Prueba Positiva).

3. Análisis del mercado de valores: Suponiendo que la acción A tiene un 60% de probabilidad de incrementar su valor, cuando los inversores observan altos índices de crecimiento económico esto se puede ver como P(A|Alto Crecimiento).

4.Seguros: Una aseguradora calcula la probabilidad de que un conductor tenga un accidente dado que tiene menos de 25 años. P(Accidente | Edad < 25)

5.Tecnología: La probabilidad de que un usuario haga clic en un anuncio dado que ya interactuó con productos similares. P(Clic| Interacción), esto lo podemos ver con algoritmos como Youtube, TikTok, Amazon, etc.

6. Ingeniería Industrial: En una fábrica, se detecta una pieza defectuosa y se quiere saber la probabilidad de que provenga de la máquina A. P(Máquina A | Defecto), este cálculo nos permite dirigir el mantenimiento o calibración hacia el equipo más problemático.

7.Ingeniería Eléctrica: La probabilidad de que un circuito se queme dado que hubo una sobrecarga de voltaje. P(Falla | Sobrecarga) nos permite tener cierta confiabilidad eléctrica, se emplea para diseñar protecciones automáticas o definir el mantenimiento predictivo de sistemas.

8. Ingeniería en Sistemas: Probabilidad de que un sistema haya sido vulnerado dado que se detectó tráfico inusual en la red P(Ataque | Anomalía). Los sistemas de ciberseguridad aplican modelos bayesianos y aprendizaje automático para evaluar amenazas en tiempo real.

9.Ingeniería Química: La probabilidad de una reacción fuera de control dado que falló el sistema de enfriamiento. P(Reacción peligrosa | Fallo de enfriamiento). En plantas químicas, este análisis permite predecir y prevenir accidentes en procesos exotérmicos.

10. Teoría de Grafos: En una red de comunicación, se quiere saber la probabilidad de que un paquete llegue al nodo destino dado que pasó por el nodo intermedio B. P(Llegada | Pasa por B). En enrutamiento y optimización de redes, se modelan probabilidades de transmisión condicionales basadas en nodos alcanzables.

Formularios.

Concepto	Fórmula	Notas
Axioma 1 (no negativa)	$P\,(A)\ \geq\ 0$	Para todo evento A
Axiomas 2 (espacio muestral)	$P\,(S)\ =\ 1$	S es el espacio muestral
Axiomas 3 (aditividad)	$s\ A, B\ excluyentes\colon\ P\,(A\ \cup\ B)\ =\ P(A)\ +\ P(B)$	$Si\ A\ \cap\ B\ =\ \phi$
Conjunto vacío	$P\,(\phi)\ =\ 0$	Evento

		imposible
Complemento	$P\ (A^{C}) = 1 - P(A)$	A^{c}: complemento de A
Triple unión	$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$	Condiciones múltiples
Inclusión de eventos	$Si\ A \subset B\ entonces\ P(A) \leq P(B)$	

Tabla 1. Axiomas y teoremas básicos de probabilidad

Concepto	Fórmula	Notas
Principio fundamental del conteo	Formas totales $=n_1 n_2 \dots n_k$	k operaciones sucesivas con n_i opciones cada una
Factorial	$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$	Número de permutaciones de n elementos distintos
Permutaciones de n elementos	$P_n = n!$	Ordena todos los elementos
Permutaciones de n elementos tomados de r en r	$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	Importa el orden

Combinaciones de n elementos tomados de $r\ en\ r$	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	No importa el orden

Tabla 2. Conteo, permutaciones y combinaciones

Distribución	Fórmula de la PMF	Parámetro/comentarios
Bernoulli	$P(X = 1 = p,\ P(X = 0) = 1 - P$	Un solo ensayo: éxito/fracaso
Binomial	$P(X = x) = \binom{n}{x}p^{x}(1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, ..., n$	n ensayos Bernoulli independientes con prob. de éxito p
Hipergeométrica	$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	Población finita N,K éxitos; muestra n sin reemplazo
Geométrica	$P(X = x = (1 - p)^{x-1}p,\ x = 1, 2...$	Número de intento en que ocurre el primer éxito
Poisson	$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, ...$	Cuenta de eventos en un intervalo, con tasa media λ

Tabla 3. Distribuciones de probabilidad discreta

Concepto	Fórmula	Notas
Probabilidad condicional	$P(A\|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)>0$	Probabilidad de A sabiendo que ocurrió B
Teorema de multiplicación (2 eventos)	$P(A \cap B)P(A\|B)P(B) = P(B\|A)P(A)$	Probabilidad conjunta usando condicionales
Independencia	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	Equivalente a $P(A\|B) = P(A)$ y $P(B\|A) = P(B)$
Teorema de la probabilidad total	$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A\|B_i)P(Bi)$	{Bi} partición exhaustiva y mutuamente

		excluyente de S
Teorema de bayes	$P(Bi\|A) = \frac{P(A\|Bi)P(Bi)}{\Sigma_{j=1}^{k} P(A\|Bj)P(Bj)}$	Actualiza la probabilidad "causa" Bi dado el efecto A

Tabla 4. Probabilidad condicional, independencia y Bayes

Cuestionario 25 preguntas probabilidad discreta:

1. **¿Qué es la probabilidad según Devore?**
   - ☐ La probabilidad es una rama de la aritmética que estudia los números enteros y sus propiedades para resolver ecuaciones aleatorias.
   - ☐ La probabilidad se define como la capacidad de predecir con certeza los resultados de cualquier experimento mediante el uso de fórmulas exactas.
   - ☑ La probabilidad es el estudio del azar y la incertidumbre, usada para cuantificar la posibilidad de que ocurra un evento. (Devore, 2016, p. 64)
   - ☐ La probabilidad es una medida subjetiva basada únicamente en la intuición o la opinión personal sobre si un evento ocurrirá o no.
2. ***¿Cuál es el rango numérico que puede tomar una probabilidad?***
   - ☑ La probabilidad siempre está entre 0 y 1; 0 representa un evento imposible y 1 un evento seguro. (Álvarez, 2019, p. 29)
   - ☐ La probabilidad puede tomar cualquier valor mayor que 1 cuando el evento es muy probable.
   - ☐ El rango de la probabilidad se encuentra entre −1 y 1, dependiendo de si el evento es favorable o desfavorable.
   - ☐ La probabilidad sólo puede tomar valores enteros, ya que representa el número de veces que ocurre un evento.
3. ***¿Qué se entiende por experimento en probabilidad?***(Devore, 2016, p. 65)

- ☐ Un experimento en probabilidad es una prueba de laboratorio que siempre produce el mismo resultado sin variación.
- ☐ Se entiende por experimento cualquier suceso planeado en el que se conoce de antemano el resultado con total certeza.
- ☐ Es el procedimiento mediante el cual se demuestra una teoría matemática sin considerar el azar ni la variabilidad.
- ☑ Es cualquier acción o proceso cuyo resultado está sujeto a la incertidumbre.

4. ***¿Qué es el espacio muestral?*** (Mendenhall, Beaver y Pinnock, 2017, p. 153)
   - ☐ El espacio muestral es el conjunto de eventos que ya ocurrieron en un experimento pasado.
   - ☑ Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
   - ☐ Se define como el número total de veces que se repite un experimento para confirmar un resultado.
   - ☐ *El espacio muestral corresponde únicamente al resultado más probable de un experimento aleatorio.*
5. ***¿Qué es un evento?*** (Álvarez, 2019, p. 29)
   - ☐ Un evento es el resultado exacto y único que se obtiene cada vez que se realiza un experimento.
   - ☐ Un evento es el conjunto completo de todos los resultados posibles en un experimento aleatorio.
   - ☑ Es un subconjunto del espacio muestral que contiene uno o más resultados posibles.
   - ☐ Se define como la probabilidad numérica que determina si un suceso ocurrirá o no.
6. ***¿Qué es un evento simple?*** (Devore, 2016, p. 66)
   - ☑ Es aquel que consta de un solo resultado posible del espacio muestral.

- ☐ Un evento simple es aquel que contiene todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- ☐ Es un suceso compuesto por varios resultados simultáneos dentro del espacio muestral.
- ☐ Se denomina evento simple a cualquier suceso que no forma parte del espacio muestral.

7. ***¿Qué es un evento compuesto?*** (Devore, 2016, p. 66)
   - ☐ Un evento compuesto es aquel que no pertenece al espacio muestral ni tiene relación con los resultados posibles.
   - ☐ Se denomina evento compuesto al suceso que tiene únicamente un resultado posible dentro del experimento.
   - ☐ Es el evento que ocurre cuando todos los resultados del experimento son imposibles de observar.
   - ☑ Es aquel que consta de más de un resultado dentro del espacio muestral.
8. ***¿Qué significa un evento seguro?*** (Álvarez, 2019, p. 29)
   - ☐ Un evento seguro es aquel que nunca ocurre, sin importar las condiciones del experimento.
   - ☑ Es aquel que ocurre con certeza; incluye todos los resultados posibles del experimento.
   - ☐ Se considera evento seguro al que tiene probabilidad igual a cero, ya que es completamente imposible.
   - ☐ Un evento seguro es aquel que depende del azar y puede o no suceder según las circunstancias.
9. **Si lanzas un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un número par?** Devore, J. (2016 p, 65)
   - ☑ El espacio muestral tiene 6 posibles resultados: {1,2,3,4,5,6}. Los pares son {2,4,6}, así que $P = 3/6 = 0.5$

- ☐ El dado tiene 6 caras y los números pares son {1, 3, 5}, por lo tanto, la probabilidad es $P = 3$
- ☐ Como los dados tienen números del 1 al 6, y solo el número 6 es par, la probabilidad es $P = 1/6$
- ☐ Los números pares son {2, 4, 6}, pero como el dado puede caer en cualquier cara dos veces, la probabilidad es $P = 6/6 = 1$

10. **Si tomas una carta al azar de una baraja de 52, ¿qué probabilidad hay de que sea un corazón?** Álvarez, M. (2019)
    - ☐ En una baraja de 52 cartas hay 10 corazones, por lo tanto, $P = \frac{10}{52} = 0.$ 19
    - ☐ Si cada carta tiene el mismo valor de probabilidad y hay 4 palos, la posibilidad de sacar un corazón es $P = \frac{1}{52} = 0.019$
    - ☐ Dado que los corazones son la mitad de la baraja, P=$P = \frac{26}{52} = 0.5$
    - ☑ Hay 13 corazones en una baraja de 52. $P = 13/52 = 0.25$
11. **De seis focos, dos están defectuosos. Si escoges uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que funcione bien?** Álvarez, M. (2019).
    - ☐ Si hay 2 focos defectuosos, la probabilidad de que funcione bien es $P = 2/6 = 0.333$
    - ☑ Hay 4 focos buenos de 6. $P = 4/6 = 0.6667$
    - ☐ Como solo uno de los focos está en buen estado, $P = 1/6 = 0.1617$
    - ☐ Todos los focos tienen la misma probabilidad de estar defectuosos, por lo tanto,$P = 6$
12. **Si lanzas una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que salgan exactamente dos caras?**Álvarez, M. (2019)
    - ☑ $P = C(3, 2)(0.5)^3 = 3(0.125) = 0.375$
    - ☐ $P = C(3, 2)(0.5)^2$= 3(0.25)=0.75

- ☐ $P = C(3, 1)(0.5)^3$=3(0.125)=0.25
- ☐ $P = C(3, 3)(0.5)^3$=1(0.125)=0.125

13. En una urna hay 5 bolas rojas y 3 azules. Si eliges al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea roja?Álvarez, M. (2019).

- ☐ $P = 3/8 = 0.375$, porque solo tres de las ocho bolas son rojas.
- ☐ $P = 1/8 = 0.125$, considerando que solo una bola puede ser elegida como roja.
- ☐ $P = 8/8 = 1$ ya que todas las bolas tienen el mismo color.
- ☑ $P = 5/8 = 0.625$

14. Si la probabilidad de un evento es 0.3, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra?

- ☑ $P(A^c)$=1−0.3=0.7. (2013 p.18)
- ☐ $P(A^c)$ = 1 - 0.7 = 0.3, porque el evento complementario siempre tiene la misma probabilidad que el evento original.
- ☐ $P(A^c)$ = 0.3, ya que se duplica la probabilidad cuando el evento no ocurre.
- ☐ $P(A^c)$=0.3+0.3=0.9, porque se suman las probabilidades del evento y su complemento.

15. Al lanzar dos dados, ¿qué probabilidad hay de obtener una suma de 7?

- ☐ Hay 12 combinaciones posibles que suman 7
- ☐ Solo una combinación produce una suma de 7, así que $P = 1/36 = 0.0278$
- ☑ Hay 6 combinaciones posibles que suman 7. $P = 6/36 = 1/6 = 0.16671$ Devore, J. (2016).
- ☐ Todas las combinaciones posibles suman 7

16. **Si defines $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$ al lanzar un dado, ¿qué probabilidad hay de que ocurra A o B?** Devore, J. (2016)
    - ☐ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = P(6/6) = 1.$
    - ☑ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$= $P = (5/6) = 0.8333$
    - ☐ $A \cup B = \{1, 2\} = P(2/6) = 0.3333.$
    - ☐ $A \cup B = \{4\} = P(1/6) = 0.1617.$
17. **Si lanzas tres monedas, ¿cuántos resultados distintos puedes obtener?** Spiegel, M. R. (2014).
    - ☐ $3^2 = 9$
    - ☐ $2^2 = 4$
    - ☐ $2^4 = 16$
    - ☑ $2^3 = 8$
18. **¿Cuántas formas hay de ordenar las letras A, B, C y D?** Mendenhall, W., Beaver, R., & Pinnock, C. (2017 p.141).
    - ☐ A,B,C,D!=24
    - ☐ 4
    - ☑ 4!=24
    - ☐ 25
19. **¿Cuántas palabras distintas (permutaciones) se pueden formar con las letras A, B, C, D, E (todas usadas)?**
    - ☑ $5! = 120$
    - ☐ $6! = 720$
    - ☐ 5
    - ☐ 25
20. **¿Cuál es la media (valor esperado) de una distribución de Bernoulli con p=0.3?**

- ☐ Para Bernoulli, E[X]=1−pE[X] = 1 - p. Entonces E[X]=0.7
- ☐ E[X]=0.09.
- ☐ En una distribución de Bernoulli, E[X]=1
- ☑ Para Bernoulli, E[X]=p. Entonces E[X]=0.3

21. Calcula la varianza de una Binomial con n=10 y p=0.4

- ☐ $varianza = np = 10 * 0.4 = 4$
- ☑ $varianza = np(1 - p) = 10 * 0.4 * 0.6 = 2.4$
- ☐ $varianza = n(1 - p) = 10 * 0.6 = 6$
- ☐ $varianza = np(1 + p) = 10 * 0.4 * 1.4 = 5.6$

22. En una Poisson con $\lambda = 3$ ¿Cual es $P(X = 2)$?

- ☐ $P(2) = e^{-3} \cdot 3^{3}/3! = 2.1406$
- ☐ $P(2) = e^{-2} \cdot 2^{3}/2! = 0.2707$
- ☐ $P(2) = e^{-3} \cdot 3^{2}/3! = 0.0747$
- ☑ $P(2) = e^{-3} \cdot 3^{2}/2! = 0.22404$

23. En una distribución binomial con n=5n=5 y p=0.2p=0.2, ¿probabilidad de exactamente 1 éxito?(Woodroofe, Cap. 6: Distribución binomial)

- ☐ 0.10
- ☐ 0.20
- ☑ 0.4096
- ☐ 0.50

24. Si X~Geometrica(p=0.4)¿probabilidad de que el primer éxito ocurra en el segundo intento?(Devore, 2016, Distribución geométrica)

- ☐ 0.16
- ☑ 0.24
- ☐ 0.30
- ☐ 0.50

25. Si en promedio ocurren 5 llamadas por minuto, ¿probabilidad de que ocurran exactamente 3?(Woodroofe, Cap. 9, Distribución de Poisson)

- ☐ 0.10
- ☐ 0.15
- ☑ 0.14
- ☐ 0.25

Cuestionario 25 preguntas probabilidad condicional:

1. ¿Qué es la probabilidad condicional?
   - ☐ Es la probabilidad de que ocurra un evento sin importar otro.
   - ☑ Es la probabilidad de que ocurra un evento A, dado que ya ocurrió B.
   - ☐ Es la suma de dos probabilidades independientes.
   - ☐ Es la diferencia entre dos probabilidades complementarias.
2. ¿Cuál es la fórmula matemática básica de la probabilidad condicional?
   - ☐ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   - ☑ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
   - ☐ $P(A|B) = P(A) \cdot P(B)$
   - ☐ $P(A|B) = 1 - P(A \cap B)$
3. ¿Qué expresa la fórmula $P(AB) = P(A|B)P(B)$?
   - ☐ El teorema de Bayes.
   - ☐ La regla del complemento.
   - ☑ El teorema de multiplicación de probabilidades.
   - ☐ La ley de probabilidad total.
4. ¿Cuál es la versión simétrica del teorema de multiplicación?
   - ☑ $P(AB) = P(B|A)P(B)$

- ☐ $P(AB) = P(B|Å)P(A)$
- ☐ $P(AB) = P(A|B)P(A)$
- ☐ $P(AB) = P(A|B) + P(B|A)$

5. ¿Qué establece la Ley de la Probabilidad Total (LPT)?
   - ☐ Que la suma de todas las probabilidades posibles es infinita.
   - ☑ Que la probabilidad de un evento se obtiene como suma ponderada de probabilidades condicionales respecto a una partición del espacio muestral.
   - ☐ Que todos los eventos son mutuamente excluyentes.
   - ☐ Que la probabilidad total siempre es 1.
6. ¿Para qué sirve el Teorema de Bayes?
   - ☐ Para calcular la probabilidad de la unión de dos eventos.
   - ☑ Para invertir una probabilidad condicional y actualizarla con nueva información.
   - ☐ Para estimar la media de una distribución.
   - ☐ Para calcular probabilidades sin datos previos.
7. En un lote de 100 piezas, 10 son defectuosas. Si tomas una sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que salga defectuosa?
   - ☐ P=0.01
   - ☐ P=0.
   - ☑ P=0.10
   - ☐ P=0.90
8. Un examen médico tiene una tasa de acierto del 95% y un 5% de falsos positivos. Si la enfermedad afecta al 1% de la población, ¿qué probabilidad hay de estar enfermo si la prueba sale positiva?
   - ☐ 0.01 (1%)
   - ☑ 0.16 (16%)

- ☐ 0.05 (5%)
- ☐ 0.84 (84%)

9. Si lanzas tres monedas y sabes que la primera fue cruz, ¿qué probabilidad hay de que salga al menos una cara en las otras dos?
   - ☐ 0.25
   - ☐ 0.50
   - ☑ 0.75
   - ☐ 1.00
10. Una prueba detecta una enfermedad con sensibilidad 95% y especificidad 98%. La prevalencia es 0.1%. Si una persona da positivo, ¿qué probabilidad tiene realmente de estar enferma?
    - ☐ 0.001 (0.1%)
    - ☑ 0.045 (4.5%)
    - ☐ 0.20 (20%)
    - ☐ 0.95 (95%)
11. Dos turnos producen las piezas: T1 (40%, 1% defectos) y T2 (60%, 3% defectos). Si una pieza es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga del turno T2?
    - ☐ 0.22 (22%)
    - ☐ 0.50 (50%)
    - ☑ 0.82 (81.82%)
    - ☐ 0.18 (18%)
12. En una fábrica, la máquina M produce 40% de la producción con 1% defecto; N produce 60% con 4% defecto. Si una pieza es defectuosa, ¿qué probabilidad proviene de N?
    - ☐ 0.14 (14%)
    - ☐ 0.50 (50%)

- ☑ 0.86 (85.71%)
- ☐ 0.99 (99%)

13. Se eligen 3 alumnos al azar. La probabilidad de aprobar dado que estudian es 0.9 y si no estudian 0.4. Si el 70% estudian, ¿cuál es la probabilidad de aprobar?
    - ☐ 0.45
    - ☐ 0.60
    - ☑ 0.75
    - ☐ 0.90
14. Si dos eventos son independientes y $P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.5$.¿Qué probabilidad tienen de ocurrir ambos?
    - ☐ 0.25
    - ☑ 0.20
    - ☐ 0.10
    - ☐ 0.50
15. En una población, el 10% tiene una enfermedad.
    Un test detecta correctamente el 90% de los enfermos y da falso positivo en 5% de los sanos. Si una persona da positivo, ¿probabilidad de estar enfermo?
    - ☑ 0.67 (67%)
    - ☐ b) 0.50
    - ☐ c) 0.33
    - ☐ d) 0.90
16. Un estudio indica que el 25% de las personas practica deporte.
    De los deportistas, 80% son saludables; de los no deportistas, 60%.
    Si una persona es saludable, ¿qué probabilidad de que practique deporte?
    - ☐ 0.25
    - ☐ 0.33

- ☑ 0.31 (31%)
- ☐ 0.50

17. El 1% de los correos electrónicos son spam.
    Un filtro detecta correctamente 98% del spam y marca 3% de los normales como spam.
    Si un correo fue marcado como spam, ¿probabilidad de que realmente lo sea?
    - ☑ 0.25 (25%)
    - ☐ 0.50
    - ☐ 0.70
    - ☐ 0.90
18. Si $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(A \cap B) = 0.2$ ¿los eventos A y B son independientes?
    - ☑ Sí, porque $P(A)P(B) = P(A \cap B)$
    - ☐ No, porque son mutuamente excluyentes
    - ☐ No, porque 0.4 ≠ 0.5
    - ☐ No se puede determinar
19. En una empresa, 10% de los empleados son ingenieros y 90% no lo son.
    El 80% de los ingenieros sabe inglés, y solo el 10% de los no ingenieros lo sabe.
    Si una persona sabe inglés, ¿probabilidad de que sea ingeniero?
    - ☐ 0.10
    - ☐ 0.30
    - ☑ 0.47 (47%)
    - ☐ 0.80
20. El 60% de los empleados son mujeres.
    El 10% de las mujeres y el 5% de los hombres están de vacaciones.
    Si se elige a alguien de vacaciones, ¿probabilidad de que sea mujer?

- ☐ 0.30
- ☑ 0.67 (67%)
- ☐ 0.50
- ☐ 0.90

21. Un examen consta de 10 preguntas.
    La probabilidad de acertar cada una es 0.8.
    Si sabes que acertó al menos 1, ¿probabilidad de que haya acertado exactamente 2?
    - ☐ 0.20
    - ☑ 0.30 (30%)
    - ☐ 0.40
    - ☐ 0.10
22. Si $P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.3\ y\ P(A|B) = 00.4$, ¿cuál es $P(A \cap B)$?
    - ☐ 0.10
    - ☑ 0.12
    - ☐ 0.20
    - ☐ 0.40
23. La probabilidad de que un alumno llegue tarde es 0.25.
    Si llueve, la probabilidad de llegar tarde sube a 0.6; si no llueve, es 0.2.
    Si hoy llegó tarde, ¿cuál es la probabilidad de que haya llovido, sabiendo que llueve 30% de los días?
    - ☐ 0.30
    - ☑ 0.46 (46%)
    - ☐ 0.20
    - ☐ 0.60
24. Una alarma suena 99% de las veces que hay fuego y 1% sin fuego.
    Si la probabilidad de incendio es 2%, ¿P(fuego | suena)?

- ☐ 0.10
- ☐ 0.50
- ☑ 0.67 (67%)
- ☐ 0.90

25. Dos fábricas, A y B, producen el 30% y 70% de los tornillos, con tasas de defectos de 1% y 4%, respectivamente.
    Si un tornillo es defectuoso, ¿probabilidad de que provenga de la fábrica B?
    - ☐ 0.40
    - ☐ 0.60
    - ☑ 0.74 (74%)
    - ☐ 0.85

10 EJEMPLOS

Probabilidad Condicional

EJEMPLO 1.

LIBRO: Woodroofe, M. (s.f.). Probabilidad con aplicaciones. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Departamento de Estadística, Matemática y Cómputo p. 75, 76.

1.¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker seleccionada aleatoriamente contenga exactamente 3 ases (evento A), dado que contiene al menos 2 ases (evento B)? Recuerda: La baraja completa tiene 52 cartas donde se reparten 5 a cada jugador

Solución 1

Puesto que A implica a B, tenemos $AB = A$

Solución 2

$$P(AB) = \binom{4}{3}\binom{48}{2} \Big/ \binom{52}{5}$$

Solución 3

El evento B ocurre si la mano contiene 2, 3, o 4 ases

Solución 4

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$$

Solución 5

$$P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$$

Solución 6

$$= \binom{4}{3}\binom{48}{2} \Big/ \left[\binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + \binom{4}{4}\binom{48}{1}\right]$$

Solución 7

$$= 0.0416$$

Teorema de Bayes

EJEMPLO 2

LIBRO: Gutiérrez Peña, E. (2018). *Estadística bayesiana: Teoría y conceptos básicos* de Estadística, Universidad Autónoma Chapingo. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS), Universidad Nacional Autónoma de México, p.19

1. Se desarrolla una nueva prueba para detectar el VIH con una sensitividad de 95% y una especificidad del 98%. En una población con una prevalencia de VIH de 1/1000. ¿Cual es la probabilidad de que una persona cuya prueba resulte positiva realmente tenga el VIH?

Solución 1

Sean
A = "la persona tiene VIH" y A^c = "la persona *no* tiene VIH"
B = "la prueba resulta positiva"

- Sensitividad de 95 % significa que $\Pr(B|A) = 0.95$
- Especificidad de 98 % significa que $\Pr(B^c|A^c) = 0.98$

Solución 2

Queremos calcular $\Pr(A|B)$. El Teorema de Bayes nos dice que

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\ \Pr(A)}{\Pr(B|A)\ \Pr(A) + \Pr(B|A^c)\ \Pr(A^c)}.$$

Solución 3

$$\Pr(A|B) = \frac{0.95 \times 0.001}{(0.95 \times 0.001) + (0.02 \times 0.999)} = 0.045$$

¡Más del 95 % de las personas cuya prueba resulta positiva en realidad no tienen el VIH!

Bernoulli distribución binomial

EJEMPLO 3

LIBRO: Villaseñor, D. (2022). *Ejercicios de probabilidad y estadística para ingenierías*. Ediciones CEP, p.168.

1. Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3%.
   a) El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?
   b) Suponga que el detallista recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente tres cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso de entre los 20 seleccionados y probados?

Solución 1

a) Denota con X el número de dispositivos defectuosos de los 20. Entonces X sigue una distribución b(x; 20, 0.03). Por consiguiente

Solución 2

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) = 1 - b(0; 20, 0.03) \\ &= 1 - (0.03)^0 (1 - 0.03)^{20-0} = 0.4562. \end{aligned}$$

Solución 3

b) En este caso cada cargamento puede o no contener al menos un artículo defectuoso. Por lo tanto, el hecho de probar el resultado de cada cargamento puede considerarse como un experimento de Bernoulli con p = 0.4562 del inciso a). Si suponemos la independencia de un cargamento a otro, y si se denotamos con Y el número de cargamentos que contienen al menos un artículo defectuoso, Y sigue otra distribución binomial b(y; 10, 0.4562). Por lo tanto:

Solución 4

$$P(Y=3)=\binom{10}{3}0.4562^3(1-0.4562)^7=0.1602.$$

Independencia

EJEMPLO 4

LIBRO: Devore, J. (2016). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 7ª edición. Cengage Learning.p.78

Se sabe que 30% de las lavadoras de cierta compañía requieren servicio mientras se encuentran dentro de garantía, en tanto que sólo 10% de sus secadoras necesitan dicho servicio. Si alguien adquiere tanto una lavadora como una secadora fabricadas por esta compañía, ¿cuál es la probabilidad de que ambas máquinas requieran servicio de garantía?

Solución 1

Suponiendo que las dos máquinas funcionan independientemente una de otra.

Sea A el evento en que la lavadora necesita servicio mientras se encuentra dentro de garantía y defina B de forma análoga para la secadora. Entonces $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.10$.

Solución 2

$$P(A \cap B)$$

Solución 3

$$P(A) \cdot P(B) = (0.30)(0.10) = 0.03$$

Solución 4

Es fácil demostrar que A y B son independientes si y sólo si A y B son independientes, A y B son independientes y A y B son independientes. Por lo tanto, en el ejemplo la probabilidad de que ninguna máquina necesite servicio es:

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = (0.70)(0.90) = 0.63$$

Ejemplo 5
LIBRO: García, J., & Pérez, M. (2018). *Probabilidad y estadística discreta*. Editorial Paraninfo.

En un taller se produce la pieza de recambio para cierto producto. En dicho taller hay tres máquinas, y que producen el y , respectivamente, del total de las piezas producidas en él. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del y . Seleccionamos una pieza al azar; calcula:
a) Probabilidad de que sea defectuosa.
b)Tomamos, al azar, una pieza y resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de haber sido producida por la máquina .
c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

Solución 1

a) $p(Def) = p(A) \cdot p(Def/A) + p(B) \cdot p(Def/B) + p(C) \cdot p(Def/C) =$
$= 0,45 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,038$

Solución 2

b)
$$p(B/Def) = \frac{p(B) \cdot p(Def/B)}{p(Def)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}04}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05} = 0,3158$$

Solución 3

c)
$$p(A/Def) = \frac{p(A) \cdot p(Def/A)}{p(Def)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}03}{0{,}45 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}25 \cdot 0{,}05} = 0,3553$$

Bernoulli distribución binomial

EJEMPLO 6

LIBRO: Spiegel, M. R. (2014). *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill, p.204.

1. Si el 20% de los tornillos que se fabrican con una máquina están defectuosos, determinar la probabilidad de que de 4 tornillos elegidos al azar: a) 1 tornillo esté defectuoso, b) 0 tornillos estén defectuosos y c) cuando mucho 2 tornillos estén defectuosos.

Solución: La probabilidad de que un tornillo esté defectuoso es p = 0.2 y la probabilidad de que no esté defectuoso es q = 1 − p = 0.8.

a) $$\Pr\{1 \text{ de } 4 \text{ tornillos esté defectuoso}\} = \binom{4}{1}(0.2)^1(0.8)^3 = 0.4096$$

b) $\Pr\{0 \text{ tornillos estén defectuosos}\} = \binom{4}{0}(0.2)^0(0.8)^4 = 0.4096$

c) $\Pr\{2 \text{ tornillos estén defectuosos}\} = \binom{4}{2}(0.2)^2(0.8)^2 = 0.1536$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\Pr\{\text{cuando mucho 2 tornillos estén defectuosos}\} &= \Pr\{0 \text{ tornillos estén defectuosos}\} + \Pr\{1 \text{ tornillo esté defectuoso}\} \\ &\quad + \Pr\{2 \text{ tornillos estén defectuosos}\} \\ &= 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728\end{aligned}$$

Conjuntos

EJEMPLO 7

LIBRO: Borras, H. “Apuntes de Probabilidad y Estadística”. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1985. p.45

Sea el evento A un evento cualquiera de S y A’ el complemento de A, entonces:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Demuestra el complemento

Solución 1

$$P(S) = 1$$

Solución 2

$$(A \cup A') = S$$

Solución 3

$$P(A \cup A') = P(S)$$

Solución 4

$$P(A) + P(A') = 1$$

Solución 5

$$\therefore \quad P(A') = 1 - P(A)$$

Permutaciones

EJEMPLO 8

LIBRO: Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2019). *Introducción a la probabilidad y estadística* (13.ª ed.; J. H. Romo Muñoz, Trad.; A. E. García Hernández, Rev. téc.). Cengage Learning.p. 140.

Tres billetes de lotería se sacan de entre un total de 50. Si los billetes se han de distribuir a cada uno de tres empleados en el orden en que son sacados, el orden será importante. ¿Cuántos eventos simples están asociados con el experimento?

Solución 1

$$P_{3}^{50}$$

Solución 2

$$\frac{50!}{47!}$$

Solución 3

$$50(49)(48) = 117600$$

Teorema de Probabilidad Total

EJEMPLO 9

LIBRO: Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (9.ª ed.; L. E. Pineda Ayala, Trad.; R. Hernández Ramírez & L. M. Medina Herrera, Revs. téc.). Pearson Educación.p.66

Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?

Solución 1

N1 , N2 y B1 representan, respectivamente, la extracción de una bola negra de la bolsa 1, una bola negra de la bolsa 2 y una bola blanca de la bolsa 1. Nos interesa la unión de los eventos mutuamente excluyentes N1 ∩ N2 y B1 ∩ N2

Solución 2

$$P[(N_1 \cap N_2) \text{ o } (B_1 \cap N_2)]$$

Solución 3

$$P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap N_2)$$

Solución 4

$$P(N_1)P(N_2|N_1) + P(B_1)P(N_2|B_1)$$

Solución 5

$$\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{38}{63}.$$

Eventos Mutuamente Excluyentes

EJEMPLO 10

LIBRO: Mallma Perez, I. J., Salazar Vázquez, L. P., & Mallma Perez, E. E. (2019). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (1.ª ed.). Editor Israel Mallma.p.50

Si las probabilidades de que una persona que compra un automóvil nuevo elija el color verde, blanco, rojo o azul son, respectivamente, 0.09, 0.15, 0.21 y 0.23. ¿Cuál es la probabilidad de que un comprador dado adquiera un automóvil nuevo que tenga uno de esos colores? Sean V, B,R y A los eventos de que un comprador seleccione, respectivamente, un automóvil verde, blanco, rojo o azul. Como estos eventos son mutuamente excluyentes

Solución 1

$$P(V \cup B \cup R \cup A)$$

Solución 2

$$P(V) + P(B) + P(R) + P(A)$$

Solución 3

$$0.09 + 0.15 + 0.21 + 0.23$$

Solución 4

$$= \quad 0.68$$

Bibliografía

- Álvarez, M. (2019). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Editorial Universidad Nacional Autónoma de México.
- Devore, J. (2016). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. 7ª edición. Cengage Learning.
- García, J., & Pérez, M. (2018). *Probabilidad y estadística discreta*. Editorial Paraninfo.
- López, R. (2020). *Introducción a la probabilidad y estadística*. Editorial Reverte.
- Mendenhall, W., Beaver, R., & Pinnock, C. (2017). *Probabilidad y estadística aplicada*. Thompson.
- Rincón, L. (2013). *Curso elemental de probabilidad y estadística*. UNAM.
- Spiegel, M. R. (2014). *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill.
- Villaseñor, D. (2022). *Ejercicios de probabilidad y estadística para ingenierías*. Ediciones CEP.
- Zamorano, M. (2017). *Probabilidad y estadística básica*. Editorial Universidad de México.
- Ross, K. (2022, 15 junio). 7.2 Properties of conditional probability | An Introduction to Probability and Simulation
- Elicer, R. y Carrasco, E. (2016). Probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29 (pp. 157-165). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.
- Díaz Ulloa, R. (2016). Probabilidad condicional
- Elicer Coopman, R. J., & Carrasco Henríquez, E. A. (s.f.). La probabilidad condicional como herramienta para la toma de decisiones. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, capítulo 1: Análisis del discurso matemático escolar. Universidad Austral de Chile y Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile).
- Woodroofe, M. (s.f.). Probabilidad con aplicaciones. Universidad Autónoma Chapingo, División de Ciencias Forestales, Departamento de Estadística, Matemática y Cómputo
- Borras, H. “Apuntes de Probabilidad y Estadística”. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1985.

- Mendenhall, W., Beaver, R. J., & Beaver, B. M. (2019). *Introducción a la probabilidad y estadística* (13.ª ed.; J. H. Romo Muñoz, Trad.; A. E. García Hernández, Rev. téc.). Cengage Learning.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (9.ª ed.; L. E. Pineda Ayala, Trad.; R. Hernández Ramírez & L. M. Medina Herrera, Revs. téc.). Pearson Educación.
- Mallma Perez, I. J., Salazar Vázquez, L. P., & Mallma Perez, E. E. (2019). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias* (1.ª ed.). Editor Israel Mallma.