Endimensionell Analys A3

Satser av Victor Winberg

Kapitel 12. Primitiva funktioner

Definition 12.1 (Primitiv funktion, s 279). *En funktion F kallas **primitiv funktion** till f p intervallet I om $F'(x) = f(x)$ fr alla $x \in I$.*

Sats 12.1 (s 280). *Antag att F r en primitiv funktion till f. D kan varje primitiv funktion G till f skrivas p formen $G(x) = F(x) + C$, fr ngon konstant C.*

Sats 12.2 (s 281).

$$\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + C, & \int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C \qquad (= \ln|x| + C), \\
\int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C, \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C, & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C, \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arccos x + C, \\
\int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C, & \int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}} &= \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C.
\end{aligned}$$

Variabelbyte och Partialintegration (s 284 och 286).

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C,$$

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx.$$

Trigonometriska funktioner och rotuttryck (s 297-301).

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Kapitel 13. Integraler

Definition 13.1 (Integral av trappfunktion, s 304). *Fr trappfunktionen* Φ *definierar vi* ***integralen*** *av* Φ *ver intervallet* $[a, b]$ *enligt*

$$\int_a^b \Phi(x)dx = c_1(x_1 - x_0) + \ldots + c_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Sats 13.1 (s 305). *Antag att* Φ *och* Ψ *r trappfunktioner definierade p intervallet* $[a, b]$*. D gller de vanliga integralreglerna samt*

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \int_a^c \Phi(x)dx + \int_c^b \Phi(x)dx \qquad a < c < b.$$

Definition 13.2 (Integrerbarhet, s 306). *Lt funktionen* f *vara definierad och begrnsad p intervallet* $[a, b]$*. Vi sger att* f *r* ***integrerbar*** *p* $[a, b]$ *om det fr varje* $\varepsilon > 0$ *finns trappfunktioner* Φ *och* Ψ*, under respektive ver* f*, sdana att*

$$\int_a^b \Psi(x)dx - \int_a^b \Phi(x)dx < \varepsilon.$$

Definition 13.3 (Integral, s 307). *Antag att funktionen* f *r integrerbar p intervallet* $[a, b]$*.* ***Integralen*** *av* f *ver* $[a, b]$ *definieras som (det entydiga) talet* A *nedan, och betecknas*

$$\int_a^b \Phi(x)dx \leq A \leq \int_a^b \Psi(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx.$$

Sats 13.2 (s 308). *Om funktionen* f *r kontinuerlig p det kompakta intervallet* $[a, b]$ *s r* f *integrerbar p* $[a, b]$*.*

Definition 13.4 (Riemannsumma, s 310). *Med beteckningarna ovan kallas*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi)(x_k - x_{k-1})$$

en ***Riemannsumma*** *till* f *p intervallet* $[a, b]$*.*

Sats 13.3 (s 311). *Antag att f r kontinuerlig p intervallet $[a, b]$, och att*

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi)(x_k - x_{k-1})$$

r Riemannsummor till f p $[a, b]$ (fr olika indelningar). D gller det att

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi)(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b f(x)dx$$

nr indelningarnas finhet gr mot noll.

Sats 13.4 (s 311). *Antag att funktionerna f och g r integrerbara p intervallet $[a, b]$. terigen gller integral- och trappfunktions-reglerna, bl.a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Triangelolikheten (s 313).

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx \qquad (a \leq b).$$

Sats 13.5 (Integralkalkylens medelvrdessats, s 314). *Antag att funktionen f r kontinuerlig p intervallet $[a, b]$. D finns det (minst) en punkt ξ, $a \leq \xi \leq b$, sdan att*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a).$$

Sats 13.6 (Analysens huvudsats, s 315). *Antag att funktionen f r kontinuerlig p (det ppna) intervallet I, och att $a \in I$. Funktionen*

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in I,$$

r d deriverbar med derivatan $S'(x) = f(x)$. Med andra ord, S r en primr funktion till f.

Sats 13.7 (Insttningsformeln, s 317). *Antag att f r kontinuerlig p intervallet I, och att F r en primitiv funktion till f. D r*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \textit{fr alla } a \textit{ och } b \textit{ i } I.$$

Sats 13.8 (Variabelbyte, s 319). *Antag att g har kontinuerlig derivata p intervallet $[a, b]$, och att f r kontinuerlig p ett intervall som innehller $g(x)$ fr alla $x \in [a, b]$. D gller det att*

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt, \qquad \textit{dr } \alpha = g(a) \textit{ och } \beta = g(b)$$

Sats 13.9 (Partialintegration, s 319). *Antag att F r en primitiv funktion till f, och att f och g' r kontinuerliga p intervallet $[a, b]$. D gller*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Definition 13.5 (Integral ver obegrnsat intervall, s 321). *Antag att funktionen f r definierad p intervallet $[a, \infty[$, och integrerbar p $[a, X]$ fr varje $X > a$. Om grnsvrdet*

$$\lim_{X \to \infty} \int_a^X f(x)dx = A$$

existerar (ndligt) s sger vi att den ***generaliserade integralen***

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \textit{r } \textbf{\textit{konvergent}} \textit{ med vrdet } A.$$

Definition 13.6 (Integral med obegrnsad integrand, s 323). *Antag att funktionen f r definierad p intervallet $]a, b]$, och integrerbar p $[c, b]$ fr varje c, $a < c < b$. Om grnsvrdet*

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)dx = A$$

existerar (ndligt) s sger vi att den generaliserade integralen r ***konvergent*** *med vrdet A.*

Sats 13.10 (s 326). *Antag att funktionerna f och g r definierade p intervallet $[a, \infty[$, och att $0 \leq f(x) \leq g(x)$ d $x \geq a$. Antag vidare att f och g r integrerbara p $[a, X]$ fr varje $X > a$. D gller:*

$$\begin{array}{llll} (1) & \displaystyle\int_a^\infty g(x)dx \quad \textit{konvergent} & \Rightarrow & \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx \quad \textit{konvergent,} \\ (2) & \displaystyle\int_a^\infty f(x)dx \quad \textit{divergent} & \Rightarrow & \displaystyle\int_a^\infty g(x)dx \quad \textit{divergent,} \end{array}$$

Sats 13.11 (s 326).

$$\begin{array}{llll} (1) & \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx \quad \textit{konvergent} & \Leftrightarrow & \alpha > 1, \\ (2) & \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx \quad \textit{konvergent} & \Leftrightarrow & \alpha < 1, \end{array}$$

Sats 13.12 (s 328). *Antag att funktionerna f och g r definierade och positiva p intervallet $[a, \infty[$. Antag vidare att f och g r integrerbara p $[a, X]$ fr varje $X > a$. Om*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$$

(A ndligt) s r de generaliserade integralerna

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \textit{och} \quad \int_a^\infty g(x)dx$$

antingen bda konvergenta eller bda divergenta.

Sats 13.13 (s 329). *Om integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ r absolutkonvergent s r den ocks konvergent*

Sats 13.14 (Cauchys integralkriterium, s 332). *Antag att funktionen f(x) r positiv och avtagande fr $x \geq 1$, samt integrerbar p $[1, X]$ fr varje $X > 1$. D r serien och den generaliserade integralen*

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \quad \textit{respektive} \quad \sum_1^\infty f(x)dx$$

antingen bda konvergenta eller bda divergenta.

Kapitel 14. Anvndning av integraler

Volym (s 339). *Antag att vi fr kroppen K, fr varje snitt vinkelrtt mot ngon tnkt x-axel, kan vi uttrycka tvrsnittsarean A(x) som en funktion av x fr vi volymen*

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Rotationskropp (s 340-341). *En slags kropp som skrivformeln fungerar fr r den* ***rotationskropp*** *som avgrnsas d en funktionskurva y=f(x),*
$a \leq x \leq b$ *roterar kring* ***x-axeln****. Varje snitt bestr d av en cirkelskiva med radie y=f(x), d gller*

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

om vi i stllet lter y=f(x) rotera kring ***y-axeln*** *har vi den inre omkretsen* $2\pi x$ *med hjden y=f(x) och fr*

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx$$

Massa (s 342). *En kropp K med volym V och* ***konstant*** *densitet ρ har massan*

$$m = \rho \cdot V \qquad \Leftrightarrow \qquad m = \int_K dm = \int_K \rho \cdot dV.$$

Tyngdpunkt (s 343). *Antag att tv punktmassor* m_1 *och* m_2 *r placerade i punkterna* x_1 *respektive* x_2 *p en stng. Vi sker den punkt* x_T *som r i (moment)jmvikt. Denna punkt kallas systemets* ***tyngdpunkt*** *eller* ***masscentrum****. Massorna* m_1 *och* m_2 *ger* ***vridmoment*** *(kraft·hvarm)*

$$m_1 g \cdot (x_1 - x_T) \quad \textit{resp.} \quad m_2 g \cdot (x_2 - x_T) \quad \textit{rknat } \textbf{\textit{medurs}}.$$

Fr jmviktspunkten x_T *gller drfr*

$$m_1 g \cdot (x_1 - x_T) + m_2 g \cdot (x_2 - x_T) = 0 \Leftrightarrow x_T(m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2.$$

Om $m = m_1 + m_2$ *fr vi sledes*

$$x_T = \frac{1}{m}(x_1 m_1 + x_2 m_2).$$

fortstter p nsta sida...

Antag en kropp K med ***kontinuerlig massfrdelning****, och vi sker tyngdpunktens koordinat x_T i x-led. Ett element med massa dm, placerat i punkten x, ger: $dm\, g \cdot (x - x_T)$. Summering ver kroppen K ger nu*

$$\int_K (x - x_T) g\, dm = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_T \int_K dm = \int_K x dm$$

Eftersom $m = \int_K dm$ r kroppens totala massa fr vi slutligen

$$x_T = \frac{1}{m} \int_K x dm.$$

Kurvlngd (s 347). *Lngden av hela kurvan ges av att summera alla* ***bgelementen*** ($\Delta s \approx \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$)

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Om vi anstter $x(t) = t$ och $y(t) = f(t)$ fr vi lngden av funktionskurva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Fr en kurva p formen $r(\theta)$ har vi parametriseringen

$$\begin{aligned} x(\theta) &= r(\theta)\cos\theta, \quad x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ y(\theta) &= r(\theta)\sin\theta, \quad y'(\theta) = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta, \end{aligned}$$

som fr $x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = r(\theta)^2 + r'(\theta)^2$ har lngden

$$L = \int_a^b \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

Area av rotationsyta (s 350). *Med bgelementet ds ges ytan av en "remsa" till $2\pi f(x)$ och vidare ges $dA \approx 2\pi f(x) ds$, drmed* ***rotationsarea***

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) ds \cdot dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Kapitel 15. Differentialekvationer

Allmn linjr ekvation av frsta ordningen (s 357).

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x),$$

dr a, b och h r (givna) funktioner. Dessa lses genom den ***integrerande faktorn*** *som ges ur ekvationen*

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{h(x)}{a(x)}, \quad a(x) \not\equiv 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y' + p(x)y = q(x)$$

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow \textit{homogen lsning}, \qquad q(x) \neq 0 \Leftrightarrow \textit{inhomogen lsning.}$$

Vi bestmmer frst primitiv funktion P(x) till p(x) och bildar funktionen $e^{P(x)}$, detta r vr integrerande faktor.

Separabla ekvationer (s 365). *Differentialekvationer som kan skrivas p formen*

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x).$$

fr ngra funktioner g och h kallas ***separabla****, som lses genom anvndning av kedjeregeln (baklnges).*

Linjra ekvationer (s 369). *En* ***linjr ekvation av andra ordningen*** *ser ut p fljande stt*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

(I det allmnna fallet finns ven en funktion framfr y", men genom ledvis derivering ges formel ovan)

Sats 15.1 (s 372). *Antag att y_p r en lsning till ekvationen*

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = h(x).$$

D ges samtliga lsningar till ekvationen ovan av

$$y = y_h + y_p,$$

dr y_h betecknar alla *lsningar till motsvarande homogena ekvation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.*

Sats 15.2 (s 373). *Antag den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ till*

$$y'' + ay' + by = 0,$$

har rtterna r_1 och r_2. D ges den allmnna lsningen till ekvationen av

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \qquad \textit{om } r_1 \neq r_2,$$
$$y(x) = (Ax + B)e^{r_1 x} \qquad \textit{om } r_1 = r_2,$$

Sats 15.3 (s 375) *har rtterna $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$). D ges den allmnna lsningen till ekvationen av*

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x),$$

dr A och B r godtyckliga konstanter.

Ekvationer av hgre ordning (s 388). *Fr linjra ekvationer av hgre ordning, dvs. ekvationer p formen*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = h(x), \qquad n \geq 3.$$

gller motsvarande teori som fr ekvationer av ordning tv. Med andra ord frst bestmma alla lsningar y_h till den homogena ekvationen, drefter en partikulrlsning y_p, fr att till sista addera dessa.

The end.

☺