Endimensionell Analys A2

Satser av Victor Winberg

Kapitel 9. Gränsvärden

Definition 9.1 (Gränsvärde då x $\to \infty$, s 165). *Vi säger att $f(x)$ har **gränsvärdet** A då $x \to \infty$, och skriver*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

om[1] *det för varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal ω_ε sådant att*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{för alla } x \in D_f \text{ sådana att } x > \omega_\varepsilon.$$

Alternativt skriver vi: $f(x) \to A$ då $x \to \infty$.

[1]Vi kräver dessutom att f är definierad för godtyckligt stora tal, dvs. att det för varje tal λ alltid finns ett $x \in D_f$ sådant att $x > \lambda$.

Definition 9.2 (Oegentligt gränsvärde då x $\to \infty$, s 167). *Vi säger att $f(x)$ har det **oegentliga gränsvärdet** ∞ då $x \to \infty$, och skriver*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

om[1] *det för varje K finns ett tal ω_K sådant att*

$$f(x) > K \qquad \textit{för alla } x \in D_f \textit{ sådana att } x > \omega_K.$$

Alternativt skriver vi: $f(x) \to \infty$ då $x \to \infty$.

[1]Vi kräver dessutom att f är definierad för godtyckligt stora tal.

Sats 9.1 (s 170). *Antag att f och g är funktioner sådana att*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \textit{och} \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = B$$

för några reella tal A och B. Då gäller att

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = A + B, \lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = AB, \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad B \neq 0.$$

Sats 9.2 (s 174). *Antag att f och g är funktioner sådana att*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \quad \textit{och} \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

(Vi tillåter här även $A = \pm\infty$.) Då följer det att $\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = A$.

Sats 9.3 (s 175). *Låt $\alpha > 0$ och $a > 1$. Vi har då följande gränsvärden:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty, \qquad \textit{eller ekvivalent}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \infty, \qquad \textit{eller ekvivalent}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$

Sats 9.4 (s 178). *Antag att funktionerna f och g uppfyller $f(x) \geq g(x)$ för alla $x \in D_f$. Då gäller det att*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Följdsats 9.1 (s 180). *Antag att f är en funktion sådan att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$, och att funktionen g är begränsad. Då följer att*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0.$$

Sats 9.6 (s 181). *Varje växande uppåt begränsad funktion f(x) har ett (ändligt) gränsvärde då $x \to \infty$*

Definition 9.3 (Talet e, s 181).

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Definition 9.4 (Gränsvärde då $x \to a$, s 183). *Vi säger att f(x) har gränsvärdet A då $x \to a$, och skriver*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

om[1] det för varje $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\epsilon > 0$ sådant att

$$|f(x) - A| < \epsilon \quad \textit{för alla } x \in D_f \textit{ sådana att } 0 < |x - a| < \delta_\epsilon.$$

Alternativt skriver vi: $f(x) \to A$ då $x \to a$.

[1] Vi kräver dessutom att f är definierad i någon punkt i varje punkterad omgivning av a, dvs. att det för varje $\gamma > 0$ finns ett $x \in D_f$ sådant att $0 < |x - a| < \gamma$.

Definition 9.5 (Oegentligt gränsvärde då $x \to a$, s 184). *Vi säger att f(x) har det oegentliga gränsvärdet ∞ då $x \to a$, och skriver*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

om[1] *det för varje tal K finns ett tal $\delta_K > 0$ sådant att*

$$f(x) > K \qquad \text{för alla } x \in D_f \text{ sådana att } 0 < |x - a| < \delta_K$$

Alternativt skriver vi: $f(x) \to \infty$ då $x \to a$.

[1]Vi kräver dessutom att f är definierad i någon punkt i varje punkterad omgivning av a.

Sats 9.7 (s 185). *Låt a, A och B vara reella tal. Antag f och g funktioner*

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \qquad \textit{och} \qquad \lim_{x \to A} f(x) = B.$$

och att $g(x) \neq A$ för alla $x \in D_f$ i någon punkterad omgivning av a, ger

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = B.$$

Definition 9.6 (Ensidigt gränsvärde då $x \to a$, s 186). *Vi säger att f(x) har* ***högergränsvärdet*** *A då $x \to a$, och skriver*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A,$$

om[1] *det för varje tal $\epsilon > 0$ finns ett tal $\delta_\epsilon > 0$ sådant att*

$$|f(x) - A| < \epsilon \qquad \text{för alla } x \in D_f \text{ sådana att } a < x < a + \delta_\epsilon.$$

Alternativt skriver vi: $f(x) \to A$ då $x \to a^+$.

[1]Vi kräver dessutom att funktionen är definierad i varje punkterad högeromgivning av a, dvs. att det för varje $\gamma > 0$ finns ett $x \in D_f$ sådant att $a < x < a + \gamma$.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ existerar} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ och } \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ existerar och är lika.}$$

Definition 9.7 (Kontinuitet, s 189). *Låt funktionen f vara definierad i punkten a. Om*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

så säger vi att f är ***kontinuerlig*** *i a.*

Sats 9.8 (Satsen om mellanliggande värden, s 190). *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a, b]$, och att $f(a) \neq f(b)$. Då antar f varje värde mellan f(a) och f(b) (minst) en gång i detta intervall.*

Sats 9.9 (s 191). *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det kompakta intervallet $[a, b]$. Då antar f ett största och minsta värde i detta intervall.*

Sats 9.10 (s 192). *Om f och g är kontinuerliga så är även*

$$f+g, \qquad f\cdot g, \qquad \frac{f}{g}, \qquad \text{och} \qquad f\circ g \qquad \text{kontinuerliga.}$$

Sats 9.11 (s 192). *Antag att funktionen f, deriverad på intervallet $\boldsymbol{I}$, är injektiv och kontinuerlig. Då följer det att inversen f^{-1}) är kontinuerlig.*

Sats 9.12 (s 193). *Polynomfunktioner, rationella funktioner, potensfunktioner, exponential- och logaritmfunktioner, de trigonometriska funktionerna och deras inverser samt de hyperboliska funktionerna är samtliga kontinuerliga.*

Sats 9.13 (Standardgränsvärden, s 194).

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^\alpha}=\infty && (\alpha>0, a>1)\\
&\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\log_a x}=\infty && (\alpha>0, a>1)\\
&\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e, && \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\\
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln 1+x}{x}=1, && \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\\
&\lim_{x\to\pm 0}x^\alpha\ln x=0 && (\alpha>0).
\end{aligned}$$

(Användbara omskrivningar, s 200).

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}.$$

$$\lim_{x\to a}f(x)=A, \qquad \lim_{x\to a}g(x)=B \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B.$$

(Geometriska serier, s 203).

$\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ är konvergent med summan $\dfrac{1}{1-x}$ precis då $-1<x<1$.

Kapitel 10. Derivator

Definition 10.1 (Derivata, s 206). *Antag att f är definierad i en omgivning av punkten a. Om gränsvärdet*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

*existerar (ändligt) så säger vi att f är **deriverbar** i a. Själva gränsvärdet kallas **derivatan** av f i punkten a, och betecknas $f'(a)$.*

Definition 10.2 (Ensidig derivata, s 208). *Antag att f är definierad i en högeromgivning av punkten a. **Högerderivatan** av f i a definieras som högergränsvärdet*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

under förutsättning att detta existerar (ändligt).

(Tangent och normal, s 211).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$
$$y - f(a) = \frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Sats 10.1 (s 212). *Om funktionen f är deriverbar i en punkt a så är f också kontinuerlig i punkten a.*

Sats 10.2 (s 213). *Antag att funktionerna f och g är deriverbara i punkten x. Då är även $f + g, f \cdot g$ och f/g deriverbara i x, med*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{(om } g(x) \neq 0\text{)}.$$

Sats 10.3 (Kedjeregeln, s 215). *Antag att funktionen g är deriverbara i punkten x, och att f är deriverbar i punkten $y = g(x)$. Då är den sammansatta funktionen $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ deriverbar i punkten x med*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Sats 10.4 (Derivata av invers, s 217). *Antag att funktionen f är injektiv med invers f^{-1}. Om f är deriverbar i punkten x, med $f'(x) \neq 0$, så är f^{-1} deriverbar i punkten y=f(x) med derivatan*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

Sats 10.5 (Standardderivator, s 219).

$$\begin{aligned}
&De^x = e^x, && D\ln x = \frac{1}{x}, \\
&Da^x = a^x \ln a, && a > 0 \text{ konstant}, \\
&D\log_a x = \frac{1}{x\ln a} && a > 0, a \neq 1 \text{ konstant}, \\
&Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, && \alpha \text{ konstant}, \\
&D\sin x = \cos x, && D\cos x = -\sin x, \\
&D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, && D\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \\
&D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, && D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
&D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, && D \text{ arccot } x = -\frac{1}{1+x^2}, \\
&D\ln|x| = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Definition 10.3 (s 227). *En punkt $a \in D_f$ kallas en **lokal maximipunkt** till funktionen f, och vi säger att f har ett **lokalt maximum** i a, om*

$$f(a) \geq f(x) \qquad \text{för alla } x \in D_f \text{ nära a.}$$

*På motsvarande sätt definieras en **lokal minimipunkt** och ett **lokalt minimum** genom att i stället använda att $f(a) \leq f(x)$.*

Sats 10.6 (s 227). *Antag att a är en lokal extrempunkt till f, och att a är en inre punkt i definitionsmängden. Då följer det att om f är deriverbar i a så är f'(a)=0.*

Sats 10.7 (Medelvärdessatsen, s 230). *Antag att funktionen f är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och deriverbar på det öppna intervallet $]a, b[$. Då finns det (minst) en punkt $\xi, a < \xi < b$, sådana att*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sats 10.8 (s 232). *Antag att f är deriverbar på intervallet I. Då gäller:*

(1) $f'(x) = 0$ för alla $x \in I$ $\Rightarrow$ *f är konstant på I,*

(2) $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I$ $\Rightarrow$ *f är växande på I,*

(3) $f'(x) \leq 0$ för alla $x \in I$ $\Rightarrow$ *f är avtagande på I,*

(4) $f'(x) > 0$ för alla $x \in I$ $\Rightarrow$ *f är strängt växande på I,*

(5) $f'(x) < 0$ för alla $x \in I$ $\Rightarrow$ *f är strängt avtagande på I.*

Följdsats 10.1 (s 233). *Antag att funktionerna f och g är deriverbara på intervallet I, och att $f'(x) = g'(x)$ för alla $x \in I$. Då skiljer f och g sig år endast med en konstant C, dvs.*

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{för alla } x \in I.$$

L'Hôpitals regel (s 236). *Antag att funktionerna f och g är deriverbara på det öppna intervallet I utom möjligen punkten $a \in I$, följer*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad g'(x) \neq 0.$$

Sats 10.9 (Leibniz' formel, s 239). *Antag att funktionerna f och g är n gånger deriverbara. Då är även deras produkt fg deriverbar n gånger, med*

$$(fg)^{(n)} = \tbinom{n}{0} f^{(n)} g^{(0)} + \tbinom{n}{1} f^{(n-1)} g^{(1)} + \ldots + \tbinom{n}{n-1} f^{(1)} g^{(n-1)} + \tbinom{n}{n} f^{(0)} g^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Definition 10.4 (Konvex, konkav, s 240). *En funktion f kallas* ***strängt konvex*** *på ett intervall I, för alla $x_1, x_2 \in I$, gäller att linjestycket mellan punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ ligger över funktionskurvan $y = f(x)$. Om dessa linjestycken ligger under kurvan så är f* ***strängt konkav****.*

Sats 10.10 (s 241). *Antag att funktionen f är två gånger deriverbar på intervallet I, och att $f''(x) \geq 0$ för alla $x \in I$. Då följer det att f är konvex på I. Om $f''(x) \leq 0$ för alla $x \in I$ så är f konkav.*

Asymptoter (s 247). $f(x) = kx + m$,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{och} \qquad m = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Kapitel 11. Maclaurin- och Taylorutveckling

Definition 11.1 (Maclaurinpolynom, s 258). *Låt f vara en funktion som är (minst) n gånger deriverbar i en omgivning av punkten 0. Polynomet*

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

*kallas **Macluarinpolynomet** av **ordning** n till f.*

Sats 11.1 (Maclaurins formel, s 259). *Antag att funktionen f har kontinuerliga derivator (minst) till och med ordning $n+1$ i en omgivning av punkten 0. Då gäller det, för alla x i denna omgivning, att*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

där

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

för något ξ mellan 0 och x.

Sats 11.2 (Entydighet av Maclaurinutveckling, s 264). *Antag att funktionen f har kontinuerliga derivator (minst) till och med ordning $n+1$ i en omgivning av punkten 0. Antag vidare att*

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + x^{n+1}B(x),$$

där $B(x)$ är begränsad nära $x = 0$. Då är detta en Maclaurinutveckling av f, dvs. $q_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$ är Maclaurinpolynomet av ordning n.

Sats 11.4 (Taylors formel, s 275). *Antag att funktionen f har kontinuerliga derivator (minst) till och med ordning $n+1$ i en omgivning av punkten a. Då gäller det, för alla x i denna omgivning, att*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x),$$

där

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

för något β mellan a och x.

Sats 11.3 (s 266).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x),$$

$$(1+a)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^{n+1}B(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x),$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x).$$

(s 272).

$$\begin{array}{rcll}
e^x & = & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots, & x \in \mathbb{R}, \\
\ln(1+x) & = & \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots, & -1 < x < 1 \\
(1+x)^\alpha & = & \sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{a}{k}x^k, & -1 < x < 1 \\
\sin x & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, & x \in \mathbb{R} \\
\cos x & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}, & x \in \mathbb{R} \\
\arctan x & = & \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, & -1 \le x \le 1.
\end{array}$$

Kapitel 6. Komplexa tal

Definition 6.1 (Komplexa talsystemet, s 84). *Det **komplexa talsystemet** består av alla tal på formen*

$$a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

tillsammans med räkneoperationerna

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i,\\ (a+bi)\cdot(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i,\end{aligned}$$

Mängden av komplexa tal betecknas $\mathbb{C}$.

Definition 6.2 (Kvot av komplexa tal, s 89). *För komplexa tal u och w, där $w \neq 0$, definieras **kvoten** u/w enligt*

$$\frac{u}{w} = \frac{u\overline{w}}{|w|^2}.$$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Sats 6.1 (de Moivres formel, s 95). *För positiva (+negativa) heltal n gäller*

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

eller ekvivalent, $\quad (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$

Sats 6.2 (Algebrans fundamentalsats, s 102). *Varje icke-konstant polynom med komplexa koefficienter har minst ett komplext nollställe.*

Sats 6.3 (s 102). *Ett polynom p(z) av grad $n \geq 1$ har precis n stycken nollställen (räknat med multiplicitet). Vidare kan p(z) faktoriseras*

$$p(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(z-\alpha_n),$$

där a_n är koefficienten framför z^n, och $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ är nollställena.

Sats 6.4 (s 103). *Antag att polynomet p(z) har reella koefficienter, och att α är ett nollställe till p(z). Då är även konjugatet $\overline{\alpha}$ ett nollställe till p(z).*

Sats 6.5 (s 104). *Varje (icke-konstant) polynom med reella koefficienter kan skrivas som en produkt av reella polynom av grad 1 och 2.*

LYCKA TILL! #SWEG

$\ddot\smile$