1 质点运动学

1.1 极坐标系

$\vec{\boldsymbol{v}} = v_r\vec{\boldsymbol{e}}_r + v_\theta\vec{\boldsymbol{e}}_\theta, v_r = \dot{r}, v_\theta = r\dot{\theta}$. $\vec{\boldsymbol{a}} = a_r\vec{\boldsymbol{e}}_r + a_\theta\vec{\boldsymbol{e}}_\theta, a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$.

1.2 自然坐标系

$\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{s}\vec{\boldsymbol{e}}_\tau, \vec{\boldsymbol{a}} = a_\tau\vec{\boldsymbol{e}}_\tau + a_n\vec{\boldsymbol{e}}_n, a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}, a_n = v^2\kappa$.

$\kappa = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{v}}|}{v^3} = |\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\times\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}|(|\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}|)^{-3}, \rho = \kappa^{-1}$.

2 牛顿动力学

非惯性系

$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}' + \vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_0 + 2\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{v}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}') + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}}\times\vec{\boldsymbol{r}}' + \vec{\boldsymbol{a}}'$.

$\vec{\boldsymbol{F}}_i = -m\vec{\boldsymbol{a}}_0, \vec{\boldsymbol{F}}_{cor} = -2m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{v}}', \vec{\boldsymbol{F}}_c = -m\vec{\boldsymbol{\omega}}\times(\vec{\boldsymbol{\omega}}\times\vec{\boldsymbol{r}}')$.

3 守恒律

3.1 动量定理

对于质点 $\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$, 对于质点系 $\vec{\boldsymbol{F}}_{ex} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{P}}}{\mathrm{d}t}$, $\vec{\boldsymbol{F}}_{ex} = \sum\vec{\boldsymbol{F}}_i$ 是系统的总外力, $\vec{\boldsymbol{P}} = \sum\vec{\boldsymbol{p}}_i$ 是质点系的总动量. 非惯性系中需要考虑惯性力的冲量, 且虚拟力应当按外力处理.

3.1.1 质心

$\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{\sum m_i\vec{\boldsymbol{r}}_i}{\sum m_i}, M_c = \sum m_i, \vec{\boldsymbol{P}} = M_c\dot{\vec{\boldsymbol{r}}}_c, \vec{\boldsymbol{F}}_{ex} = M_c\vec{\boldsymbol{a}}_c$.

以质心为参考点可以得到质心参考系 (是平动参考系). 在质心系中动量为零.

3.1.2 变质量

$m\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} + (\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{u}})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{F}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}$ 是主体的速度, $\vec{\boldsymbol{u}}$ 是即将进入主体部分的速度, $\vec{\boldsymbol{F}}$ 是系统受到的合外力.

3.2 功能原理和机械能守恒

柯尼希定理: 体系动能等于质心动能和体系相对质心的动能之和, $E_k = \frac{1}{2}m\vec{\boldsymbol{v}}_c^2 + \sum\frac{1}{2}m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i'^2$, 不论质心系是惯性系还是非惯性系都成立.

在质心系中不需要考虑惯性力所作的功.

3.3 角动量定理

$\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{p}}$, $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{F}}$, $\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{M}}$.

质点系对于定点的角动量 $\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{L}}_c + \vec{\boldsymbol{L}}', \vec{\boldsymbol{L}}_c = \vec{\boldsymbol{r}}_c\times m\vec{\boldsymbol{v}}_c, \vec{\boldsymbol{L}}' = \sum m_i\vec{\boldsymbol{r}}_i'\times\vec{\boldsymbol{v}}_i'$. 体系的角动量等于质心的角动量与体系相对于质心的角动量之和 (类似于柯尼希定理).

质心系角动量定理: $\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{M}}_{ex}'$, $\vec{\boldsymbol{M}}_{ex}'$ 是外力对质心的力矩之和. 非惯性系中应当考虑虚拟力的力矩才可以使得角动量定理成立, 但质心系中虚拟力力矩为 0.

3.4 两体问题

折合质量 $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$, 以其中一个质点为参考系 (S 系, 非惯性), 有 $\vec{\boldsymbol{F}} = \mu\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}, E_{kc} = \frac{1}{2}\mu\vec{\boldsymbol{v}}^2, \vec{\boldsymbol{L}}' = \mu\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{v}}$.

3.5 碰撞

恢复系数 $e = \frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}$, $v_1 = \frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}u_1 + \frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}u_2, v_2 = \frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}u_1 + \frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}u_2, \Delta E_k = \frac{1}{2}\mu(e^2-1)(u_1-u_2)^2$.

在质心系里, 两个质点弹性碰撞后, 速度都只改变方向, 不改变大小. $\vec{\boldsymbol{u}}_1', \vec{\boldsymbol{u}}_2'$ 在同一条直线上, $\vec{\boldsymbol{v}}_1', \vec{\boldsymbol{v}}_2'$ 也在一条直线上. 若 m_2 静止, $\vec{\boldsymbol{v}}_c = \frac{m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1}{m_1+m_2}, \vec{\boldsymbol{u}}_1' = \frac{m_2\vec{\boldsymbol{u}}_1}{m_1+m_2}, \vec{\boldsymbol{u}}_2' = -\frac{m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1}{m_1+m_2}$, 考察 m_1 偏转角就是考察 $\vec{\boldsymbol{v}}_c$ 和 $\vec{\boldsymbol{v}}_c + \vec{\boldsymbol{v}}_1'$ 的夹角, 可以画圆来解决.

3.6 天体运动

$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E, V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$: 在有心力场的运动, 利用有效势能可以转化为一维的能量守恒.

比奈方程 $h^2u^2(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u) = -fm^{-1}, r = u^{-1}, L = mh$.

轨道方程 $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}, p = \frac{L^2}{GMm^2}, \varepsilon = (1 + \frac{2EL^2}{m^3G^2M^2})^{\frac{1}{2}}$. 直角系下 $a = \frac{p}{|1-\varepsilon^2|} = \frac{GMm}{2|E|}, b = p(\left|1-\varepsilon^2\right|)^{-\frac{1}{2}} = L(2m\,|E|)^{-\frac{1}{2}}$.

LRL 矢量 (两个物体平方反比有心力相互作用运动时守恒) $\vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{L}} - k\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$, 有心力是万有引力时 $k = GMm$.

κ(扫面速度) $= \frac{L}{2m}$.

$\frac{T^2}{r_a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$.

$E = -\frac{GMm}{2a}$, 这里 a 是半长轴.

4 刚体

刚体内力的总力矩为 0; 力偶矩 (合力为 0 的一些力产生的总力矩) 与参考点无关; 均匀引力场中地面上一般物体各部位重力力矩之和, 可等效为物体重心的重力力矩; 质心系下惯性力的总力矩为 0; 对称球外引力相对球心力矩之和为零; 对称球各部位所受外引力相对任一参考点 Q 的力矩之和, 等于球体质量集中于球心处所受外引力相对 Q 点的力矩.

转动惯量 $J = \int R^2\mathrm{d}m = mk^2$, k 称为回转半径.

几种典型形状刚体的转动惯量:

1. 细棒. 中心: $I = \frac{1}{12}ml^2$.
2. 细棒. 端点: $I = \frac{1}{3}ml^2$.
3. 球. 直径: $I = \frac{2}{5}mR^2$.
4. 球壳. 直径: $I = \frac{2}{3}mR^2$.
5. 圆环. 轴线: $I = mR^2$.
6. 圆柱. 轴线: $I = \frac{1}{2}mR^2$.
7. 矩形薄板. 中心垂直: $I = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$.
8. 矩形薄板. 中心水平 (轴过边长为 a 的边的中点): $I = \frac{1}{12}ma^2$.

平行轴定理: 设刚体绕通过质心转轴的转动惯量为 J_c, 将轴朝任何方向平行移动一个距离 d, 则绕此轴的转动惯量 J_D 为 $J_D = J_c + md^2$.

正交轴定理 (适用于二维平面刚体): 如果已知一块薄板绕位于板上两相互垂直的轴 (设为 x 轴和 y 轴) 的转动惯量为 J_x 和 J_y, 则薄板绕 z 轴的转动惯量为 $J_z = J_x + J_y$.

定轴转动: $\omega = \dot{\phi}, \alpha = \dot{\omega}, M_z = J_z\alpha, L_z = J_z\omega, E_k = \frac{1}{2}J_z\omega^2$.
平面平行运动: $\vec{\boldsymbol{F}}_{ex} = m\vec{\boldsymbol{a}}_c, M_z' = J_{cz}\dot{\omega}, E_k = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J_{cz}\omega^2$, 纯滚动条件 $v_c = R\omega, a_c = R\alpha$. 定点转动: $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{\Omega}}\times\vec{\boldsymbol{L}}$, $\vec{\boldsymbol{\Omega}}$ 是进动角速度.

5 流体

流线方程 $\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z}$(积分时把 t 看做变量), 迹线方程 $\frac{\mathrm{d}x}{u_x} = \frac{\mathrm{d}y}{u_y} = \frac{\mathrm{d}z}{u_z} = \mathrm{d}t$(积分时把 t 看做常量). 定常流时流线和迹线重合.

定常流的连续性方程 (质量守恒): $\rho\vec{\boldsymbol{v}}_1\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \mathrm{const}$.

定常流的伯努利方程 (能量守恒): $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho U + p = \mathrm{const}$, 其中 U 是势能, 如果液体所受的体积力是重力有 $\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \mathrm{const}$.

泊肃叶公式 (适用于不可压缩, 不具有加速度, 层流稳定且长于管径的牛顿流体): $Q = \frac{\pi(p_1-p_2)R^4}{8l\eta}$.

雷诺数: $Re = \rho vr\eta^{-1}$.

斯托克斯公式 (小球受到流体的阻力): $f = 6\pi\eta rv$.

6 振动和波

6.1 振动

6.1.1 简谐振动

简谐振动 $m\ddot{x} = -kx, \ddot{x} + \omega_0^2x = 0, \omega = (\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}, x = A\cos(\omega_0t + \varphi), E = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2, \overline{E_k} = \frac{E}{2}, \overline{E_p} = \frac{E}{2}$.

一维保守力在稳定平衡位置附近一定是准弹性力, 可以定义势能 $V(x)$, 有 $k = \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$.

同方向同频率简谐振动的合成 $x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, $A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1))^{\frac{1}{2}}, \varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$.

同方向不同频率简谐振动的合成, 振幅的变化频率 $\nu = \Delta\nu$, 称为拍频.

6.1.2 阻尼振动

阻尼振动 $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}, \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$, γ 称为阻力系数, β 称为阻尼系数.

过阻尼 $(\beta > \omega_0)$: $x(t) = \exp(-\beta t)(A_1\exp((\beta^2 - \omega_0^2t)^{\frac{1}{2}}) + A_2\exp(-(\beta^2 - \omega_0^2t)^{\frac{1}{2}}))$. 欠阻尼 $(\beta < \omega_0)$: $x(t) = A_0\exp(-\beta t)\cos(\omega_ft + \varphi), \omega_f = (\omega_0^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$, $E \approx E_0e^{-2\beta t}$. 临界阻尼 $(\beta = \omega_0)$: $x(t) = \exp(-\beta t)(A_1 + A_2t)$, 这种情况是最快回到平衡位置的.

6.1.3 受迫振动

受迫振动 (简谐强迫力)$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos\omega t, \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = f_0\cos\omega t$. 在小阻尼的情况 $x = A_0\exp(-\beta t)\cos(\omega_ft + \varphi_0) + B\cos(\omega t - \varphi)$, $\tan\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}, B = f_0((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2)^{-\frac{1}{2}}$.

稳态解分析: $\omega \ll \omega_0$, $B_0 := B \approx f_0\omega_0^{-2} = \frac{F_0}{k}, \tan\varphi \approx 0^+, x = \frac{F_0}{k}\cos\omega t$; $\omega \gg \omega_0$, $B_\infty := B \approx \frac{f_0}{\omega^2} \approx 0, \tan\varphi \approx 0^-, x = -\frac{f_0}{\omega^2}\cos\omega t$; $\omega = \omega_0$, $B_r := B = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}, \tan\varphi = \infty, x = \frac{f_0}{2\beta\omega}\sin\omega t$, 这种情况叫做能量共振, 此时驱动力功率最大, 速度也是最大的; $\omega = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{\frac{1}{2}}$, 此时振幅最大, 称为振幅共振.

品质因数 $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$. $Q = 2\pi\frac{E(t)}{E(t+T)}$(欠阻尼); $Q = \frac{B_r}{B_0}$; $Q = S$, 其中 S 指共振峰锐度.

6.2 机械波

平面简谐波 $y = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$, 向 x 轴正方向以 $u = \frac{\omega}{k}$ 的速度传播.

一维线性波动方程 $\frac{\partial^2y}{\partial t^2} - u^2\frac{\partial^2y}{\partial x^2} = 0$.

弹性棒中, 纵波的波速 $u = (\frac{E}{\rho})^{\frac{1}{2}}$, 横波的波速 $u = (\frac{G}{\rho})^{\frac{1}{2}}$, 其中 E 是弹性模量 (杨氏模量), G 是切变模量. 柔软绳中的横波波速为 $u = (\frac{T}{\lambda})^{\frac{1}{2}}$, 其中 λ 是线密度. 将空气视为理想气体, 振动视为绝热过程, 声速 $u = (\frac{\gamma p_0}{\rho_0})^{\frac{1}{2}}$, 其中 γ 是 $pV^\gamma = \mathrm{const}$.

相速度 $u_p = \frac{\omega}{k}$, 群速度 $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$, 瑞利群速公式 $u_p = \lambda\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}\lambda}$.

波的能量 $\Delta E_p = \Delta E_k = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$ 对于单一质元来说, 能量不守恒, 因为波携带能量传播. 能量密度 $\varepsilon = \frac{\Delta E_p + \Delta E_k}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t - \frac{x}{u})$, 一个周期内的平均能量密度 $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$. 能流密度 $i = \varepsilon u, \vec{\boldsymbol{i}} = \varepsilon\vec{\boldsymbol{u}}$. 波的强度 $\vec{\boldsymbol{I}} = \bar{\vec{\boldsymbol{i}}} = \bar{\varepsilon}\vec{\boldsymbol{u}}$, 对于简谐波 $\vec{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\vec{\boldsymbol{u}}$.

相干条件: 频率相同, 振动方向相同, 相位差恒定. 驻波振幅为 0 的位置称为波节, 振幅最大的位置称为波腹, 波节的左右两侧相位相反, 称为半波损失. 行波的传播过程中如果遇到端点会发生反射, 如果是固定端点则会发生半波损失.

多普勒效应: $f_R = f_S\frac{u+v_R}{u-v_S}$, 两个 v 都是以相互靠近为正.

7 狭义相对论

$\beta = \frac{v}{c}, \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$.

尺缩钟慢 $l = l_0\gamma^{-1}, \Delta t = \gamma\Delta\tau$. l_0 和 $\Delta\tau$ 是在相对尺子和钟静止的参考系中观察到的, 称为本征长度和本征时间间隔.

坐标变换 $\begin{cases} ct = \gamma ct' + \beta\gamma x' \\ x = \beta\gamma ct' + \gamma x' \end{cases}, \begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' = -\beta\gamma ct + \gamma x \end{cases}$.

多普勒效应 $f = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\phi}f_0$.

速度变换 $\begin{cases} u_x' = \frac{u_x - v}{1 - vu_xc^{-2}} \\ u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - vu_xc^{-2})} \\ u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - vu_xc^{-2})} \end{cases}, \begin{cases} u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'c^{-2}} \\ u_y = \frac{u_y'}{\gamma(1 + vu_x'c^{-2})} \\ u_z = \frac{u_z'}{\gamma(1 + vu_x'c^{-2})} \end{cases}$.

相对论能动量 $(c = 1)$ $\begin{cases} m = \gamma m_0 \\ E = m = \gamma m_0 \\ p = \beta m = \beta\gamma m_0 = \beta E \\ E^2 = p^2 + m_0^2 \end{cases}$.

$\begin{cases} p_x' = -\beta\gamma Ec^{-1} + \gamma p_x \\ E'c^{-1} = \gamma Ec^{-1} - \beta\gamma p_x \end{cases}$.

(p_x, p_y, p_z, Ec^{-1}) 和 (x, y, z, ct) 的变换公式形式是一样的.

时空间隔 $(\Delta S)^2 = c^2\Delta t^2 - r^2$ 和静质量 m_0 是两个洛伦兹不变量.