Solution des exercices sur les Vecteurs Gaussiens

Septembre 2025

Exercice 1 - Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = X^2$.

1. Montrer que $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner trois arguments différents pour prouver que (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien.
4. Que vaut $\text{Cor}(X,Y)$?
5. Conclusion sur le lien entre indépendance et non corrélation linéaire ?

Solution -

1. Comme $\mathbb{E}(X) = 0$, $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0$ en utilisant le fait que X est symétrique (le calcul d'intégrale par la formule de transfert donne 0 par imparité).
2. Clairement, les variables X et Y ne sont pas indépendantes (il y a même une dépendance "totale" mais non linéaire). Pour s'en convaincre, remarquer par exemple que $\mathbb{P}(Y \leq 1 | X > 1) = 0 \neq \mathbb{P}(Y \leq 1)$.
3. **Premier argument** : la loi de Y n'est pas une loi normale (c'est une variable **positive** de loi du khi-deux à 1 degré de liberté), donc (X,Y) ne peut pas être un vecteur gaussien (car les lois marginales d'un VG sont gaussiennes).
   Deuxième argument : les variables X et Y sont non corrélées mais non indépendantes, donc (X,Y) ne peut pas être un vecteur gaussien car "non corrélation implique indépendance" pour un VG.
   Dernier argument : le vecteur (X,Y) "vit" dans un espace courbe de $\mathbb{R}^2$ (parabole). Or, un vecteur gaussien "vit" dans un sous-espace affine avec r degrés de liberté si r est le rang de la matrice de covariance.
4. $\text{Cor}(X,Y) = 0$ puisque $\text{Cov}(X,Y) = 0$.
5. On a donc un exemple très simple de variables non (linéairement) corrélées (coefficient de Pearson nul) tout en étant très fortement liées (non indépendantes). Donc, pas de réciproque à "indépendance implique non corrélation" (à moins d'avoir un VG).

Exercice 2 - Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne μ et de covariance Γ.

1. Rappeler pourquoi la matrice Γ est une matrice symétrique positive.

2. On reprend les mêmes notations et conventions qu'en cours pour la diagonalisation en base orthonormée de Γ : $\Gamma = U\Lambda U^T$. Soit la décomposition

$$X = \mu + Y_1 u_1 + \ \dots \ + Y_d u_d,$$

avec $Y = U^T(X-\mu)$ sous forme condensée. Montrer que les nouvelles variables $Y_1, \ \dots \ , Y_d$ sont (centrées) et non linéairement corrélées : $\mathrm{Cov}(Y_k, \ Y_l) = 0$ si $k \neq l$. Montrer également que $\mathrm{Var}(Y_j) = \lambda_j$.

Solution -

1. On a vu en cours le fait que $u^T \Gamma u = \mathrm{Var}(u^T X) \geq 0$ pour tout vecteur u, donc la matrice Γ est bien une matrice symétrique positive.
2. On calcule la covariance de $Y = U^T(X-\mu)$, ce qui donne matriciellement :

$$\Gamma_Y = U^T \Gamma_X U^{TT} = U^T U \Lambda U^T U = \Lambda,$$

et donc $\mathrm{Cov}(Y_k, \ Y_l) = 0$ si $k \neq l$ ainsi que $\mathrm{Var}(Y_j) = \lambda_j$.

Exercice 3 - Soit X un vecteur gaussien en dimension 2 de moyenne nulle et de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$.

1. Obtenir la digonalisation en base orthonormée de la matrice Γ.
2. Décrire les ellipses de concentration du vecteur X dans le cas $0 < \rho < 1$. L'orientation dans le plan du grand axe de ces ellipses dépend-elle de la valeur de ρ ? Même question pour l'excentricité.
3. Décrire de même les ellipses de concentration dans le cas $-1 < \rho < 0$.
4. Que peut-on dire dans le cas $\rho = 0$?
5. Comment se comporte la densité du vecteur gaussien X lorsque $\rho \to +1$ ou lorsque $\rho \to -1$?
6. Discuter enfin les deux cas extrêmes $\rho = +1$ et $\rho = -1$.

Solution -

1. On a vu en cours que

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = U\Lambda U^T,$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \ ; \ \lambda_1 = \sigma^2(1+\rho) \geq \lambda_2 = \sigma^2(1-\rho) \text{ dans le cas } \rho \geq 0,$$

et

$$\Gamma = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} = U\Lambda U^T,$$

avec :

$$U = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \ ; \ \lambda_1 = \sigma^2(1-\rho) \geq \lambda_2 = \sigma^2(1+\rho) \text{ dans le cas } \rho \leq 0.$$

2. Dans le cas $0 < \rho < 1$, les ellipses de concentration du vecteur X sont de grand axe dirigé par le vecteur unitaire $u_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ (correspondant à la première bissectrice d'équation $x_2 = x_1$) et de petit axe dirigé selon la seconde bissectrice $x_2 = -x_1$. L'orientation dans le plan du grand axe de ces ellipses ne dépend donc pas du tout de ρ (attention, dans le cas particulier $\sigma_1 = \sigma_2$). Par contre, l'excentricité en dépend clairement puisque le demi grand axe est de longueur $a = c \times \sqrt{\lambda_1} = c \times \sigma\sqrt{1+\rho}$ et le demi petit axe de longueur $b = c \times \sqrt{\lambda_2} = c \times \sigma\sqrt{1-\rho}$ où c est une constante > 0 (ces ellipses sont d'équation $\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} = c^2$ dans le repère formé par les vecteurs propres de Γ). On remarque que l'excentricité $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ est la même pour toutes les ellipses.
3. Description analogue lorsque $-1 < \rho < 0$ avec le demi grand axe dirigé cette fois selon la seconde bissectrice (cf. corrélation négative).
4. Dans le cas $\rho = 0$ (cas d'indépendance), on a des cercles...
5. Lorsque $\rho \to +1$, il est facile de voir avec l'expression de la densité conjointe dans le repère des vecteurs propres que cette densité tend vers $+\infty$ pour tout point de la première bissectrice et vers 0 en dehors (c'est clair également vu la forme des ellipses). C'est l'analogue bidimensionnel du fameux pic de Dirac au point μ en dimension 1 lorsque la variance σ^2 tend vers 0. Phénomène analogue lorsque $\rho \to -1$ sur la seconde bissectrice.
6. Dans le cas $\rho = +1$, $X_2 = X_1$ et le vecteur gaussien (X_1, X_2) est sur la première bissectrice. Lorsque $\rho = -1$, $X_2 = -X_1$ et le vecteur (X_1, X_2) est sur la seconde bissectrice.

Exercice 4 (un exemple de vecteur gaussien bidimensionnel) -

1. A quelle condition un vecteur aléatoire gaussien $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ admet-il une densité de probabilité ?
2. On supposera dans toute la suite de l'exercice que Z est gaussien de densité de forme suivante :

$$(x, y) \to f(x, y) = k \times \exp(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2),$$

   où k est une constante de normalisation. Déterminer la moyenne μ et covariance Γ du vecteur Z.
3. Vérifier que le coefficient de corrélation linéaire $\rho = \mathrm{Cor}(X, Y)$ est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Déterminer la valeur de k.
5. Expliciter les lois marginales, c'est-à-dire les lois de X et Y.
6. Montrer que les variables $Y - X$ et X sont indépendantes (**indication** : calculer Cov(X,Y-X))

Solution -

1. Il faut que la matrice de covariance soit inversible (CNS).

2. On a $-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}y^2=-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2)$. Ecrivons donc que la forme quadratique $\frac{3}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2$ est de la forme
$$(x-\mu_X \quad y-\mu_y)\Gamma^{-1}(x-\mu_X \quad y-\mu_y).$$
   On en déduit que $\mu_X=\mu_Y=0$ et
$$\Gamma^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$
   D'où,
$$\Gamma=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$
3. Ainsi $\mathrm{Var}(X)=1,\ \mathrm{Var}(Y)=3$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)=1)$, ce qui donne
$$\rho=\mathrm{Cor}(X,Y)=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
4. $k=\sqrt{2\pi}^2\times\det(\Gamma)=2\pi\sqrt{2}$.
5. $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ et $Y\sim\mathcal{N}(0,3)$.
6. Par bilinéarité de la fonction covariance,
$$\text{Cov(X,Y-X)}=\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(X,X)=1-1=0.$$
   Le vecteur $((X,Y-X)$ est un vecteur gaussien comme transformation linéaire d'un VG, ses composantes sont non corrélées donc indépendantes.

Exercice 5 - Soient X et Y i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Que peut-on dire du vecteur aléatoire $Z=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$?
2. Par propriété du vecteur Z, donner la loi du vecteur aléatoire
$$\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$
   En déduire la loi de la somme $X+Y$ ainsi que la différence $Y-X$.
3. En s'inspirant du résultat précédent, montrer que la somme quelconque de variables indépendantes de lois normales est encore de loi normale.

Solution -

1. $Z\sim\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_2)$ est un bruit blanc gaussien standard de dimension 2.
2. Soit $U=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}$. C'est une isométrie $U^TU=\mathrm{I}_2$ puisque qu'il s'agit de la rotation d'angle $\pi/4$ et ses 2 vecteurs colonnes forment une nouvelle base orthonormée. Le vecteur U^TZ des coordonnées de Z dans cette base est encore de loi $\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_2)$ et c'est précisément le vecteur aléatoire
$$\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$
   On en déduit que sa composante $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est $\mathcal{N}(0,1)$ et donc que la somme $X+Y$ est $\mathcal{N}(0,2)$. De même pour $-X+Y$.

3. Soient $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ indépendantes. Ecrivons que

$$X + Y = \mu_X + \sigma_X Z_1 + \mu_Y + \sigma_Y Z_2,$$

en introduisant les variables centrées réduites Z_1 et Z_2. Ainsi

$$X + Y = \mu_X + +\mu_Y + \sigma \times (\cos(\theta) Z_1 + \sin(\theta) Z_2),$$

en posant $\sigma = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$, $\cos(\theta) = \frac{\sigma_X}{\sigma}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sigma_Y}{\sigma}$ où θ est un angle entre 0 et $\pi/2$. En adaptant ce qui précède avec la rotation d'angle θ, la variable $\cos(\theta)Z_1 + \sin(\theta)Z_2$ est $\mathcal{N}(0,1)$ et donc $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$. Il suffit ensuite de raisonner par induction pour une somme quelconque.

Exercice 6 - Soit X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et ϵ indépendante de X telle que

$$\mathbb{P}(\epsilon = +1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. On pose $Y = \epsilon \times X$. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que Cov(X,Y) = 0.
3. Le vecteur aléatoire $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est-il un vecteur gaussien ?
4. Conclusion de cet exercice.

Solution -

1. On a

$$\mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \mathbb{P}(Y \in [a,b]) \text{ et } \epsilon = +1) + \mathbb{P}(Y \in [a,b]) \text{ et } \epsilon = -1),$$

soit

$$\mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) \text{ et } \epsilon = +1) + \mathbb{P}(-X \in [a,b]) \text{ et } \epsilon = -1).$$

Par indépendance de X et ϵ, on a donc

$$\mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X \in [a,b]) + \mathbb{P}(-X \in [a,b])$$

et, par symétrie de la loi de X, $\mathbb{P}(Y \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b])$. Donc, Y est de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ que X.

2. On a Cov(X,Y) $= \mathbb{E}(XY) - 0 = \mathbb{E}(\epsilon X^2) = \mathbb{E}(\epsilon) \times \ \mathbb{E}(X^2)$ par indépendance. Or $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$, donc

$$\text{Cov(X,Y)} = 0.$$

3. En supposant le vecteur Z gaussien, il serait de loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{I}_2)$ vu ce qui précède. Ce n'est clairement pas le cas puisque $X + Y = 0$ ou $-X + Y = 0$ avec la même probabilité 1/2 (le vecteur Z est sur la réunion des première et seconde bissectrices).
4. Pour qu'un vecteur soit gaussien, il ne suffit pas que ses composantes soient gaussiennes (remarquer qu'ici les composantes ne sont bien sûr par indépendantes, cf. quizz).