Fiche d'exercices
sur les Vecteurs Gaussiens

Septembre 2025

Exercice 1 - Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $Y = X^2$.

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner trois arguments différents pour prouver que (X,Y) n'est pas un vecteur gaussien.
4. Que vaut $\mathrm{Cor}(X,Y)$?
5. Conclusion sur le lien entre indépendance et non corrélation linéaire ?

Exercice 2 - Soit X un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$ de moyenne μ et de covariance Γ.

1. Rappeler pourquoi la matrice Γ est une matrice symétrique positive.
2. On reprend les mêmes notations et conventions qu'en cours pour la diagonalisation en base orthonormée de Γ : $\Gamma = U\Lambda U^T$. Soit la décomposition

$$X = \mu + Y_1 u_1 + \ \dots \ + Y_d u_d,$$

   avec $Y = U^T(X-\mu)$ sous forme condensée. Montrer que les nouvelles variables $Y_1, \ \dots \ , Y_d$ sont (centrées) et non linéairement corrélées : $\mathrm{Cov}(Y_k,\ Y_l) = 0$ si $k \neq l$. Montrer également que $\mathrm{Var}(Y_j) = \lambda_j$.

Exercice 3 - Soit X un vecteur gaussien en dimension 2 de moyenne nulle et de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

On suppose $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$.

1. Obtenir la digonalisation en base orthonormée de la matrice Γ.
2. Décrire les ellipses de concentration du vecteur X dans le cas $0 < \rho < 1$. L'orientation dans le plan du grand axe de ces ellipses dépend-elle de la valeur de ρ ? Même question pour l'excentricité.
3. Décrire de même les ellipses de concentration dans le cas $-1 < \rho < 0$.
4. Que peut-on dire dans le cas $\rho = 0$?
5. Comment se comporte la densité du vecteur gaussien X lorsque $\rho \to +1$ ou lorsque $\rho \to -1$?

6. Discuter enfin les deux cas extrêmes $\rho = +1$ et $\rho = -1$.

Exercice 4 (un exemple de vecteur gaussien bidimensionnel) -

1. A quelle condition un vecteur aléatoire gaussien $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ admet-il une densité de probabilité ?
2. On supposera dans toute la suite de l'exercice que Z est gaussien de densité de forme suivante :

$$(x, y) \to f(x, y) = k \times \exp(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}y^2),$$

   où k est une constante de normalisation. Déterminer la moyenne μ et covariance Γ du vecteur Z.
3. Vérifier que le coefficient de corrélation linéaire $\rho = \mathrm{Cor}(X, Y)$ est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. Déterminer la valeur de k.
5. Expliciter les lois marginales, c'est-à-dire les lois de X et Y.
6. Montrer que les variables $Y - X$ et X sont indépendantes (**indication** : calculer Cov(X,Y))

Exercice 5 - Soient X et Y i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Que peut-on dire du vecteur aléatoire $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$?
2. Par propriété du vecteur Z, donner la loi du vecteur aléatoire

$$\begin{pmatrix} \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   En déduire la loi de la somme $X + Y$.
3. Déduire du résultat précédent que la somme quelconque de variables indépendantes de lois normales est encore de loi normale.

Exercice 6 - Soit X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ indépendante de X telle que

$$\mathbb{P}(\epsilon = +1) = \mathbb{P}(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. On pose $Y = \epsilon \times X$. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que Cov(X,Y) = 0.
3. Le vecteur aléatoire $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est-il un vecteur gaussien ?
4. Conclusion de cet exercice.