Prérequis Analyse factorielle

Projections orthogonales et théorème spectral

1 Produit scalaire

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire entre x et y est défini par

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^* y.$$

x^* étant la tranposé de x

2 Famille orthonormée et matrice orthogonale

Soit $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^k$. Cette famille est dite orthonormée si

$$(v_i|v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si $P = (v_1| \cdots |v_k) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ est la matrice colonne associée aux vecteurs $v_1, \ldots, v_k$, alors

$$P^T P = I_k.$$

En particulier, si $k = n$, la famille est une base et P est une matrice de passage.

3 Projection sur un axe

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul. $D = Vect(v)$ est alors une droite. La projection $p_D(x)$ de x sur D est définie par

$$\boxed{p_D(x) = (x|v)v}$$

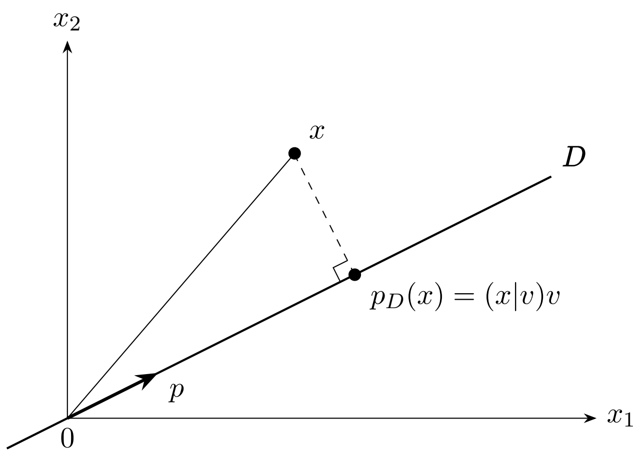

FIGURE 1 – Projection orthogonale d'un vecteur x sur une droite $D = Vect(v)$.

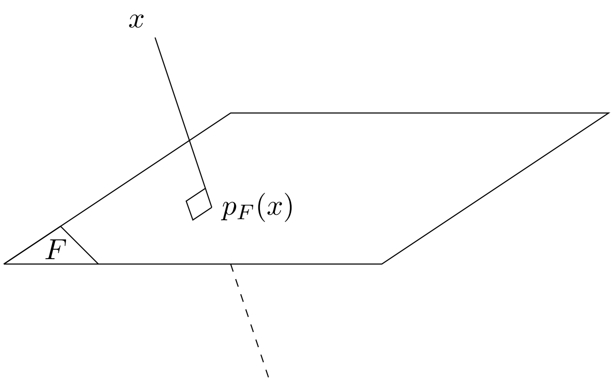

FIGURE 2 – Projection orthogonal sur un sous-espace F

4 Projection sur un sous-espace vectoriel F

Si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, la projection $p_F(x)$ de x sur $F = Vect(v_1, \ldots, v_k)$ est définie par

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x|v_i)v_i}$$

De plus, on a

$$\boxed{p_F(x) = \underset{y \in F}{\operatorname{argmin}} ||y - x||}$$

5 Matrices symétriques réelles

Une matrice réelle symétrique C est diagonalisable dans une base orthonormée et possède des valeurs propres réelles. Il existe une matrice orthogonale P (telle que $P^T P = I$) et une matrice diagonale D telles que :

$$\boxed{C = PDP^T}$$

Une matrice diagonale dilate ou contracte l'espace dans la direction des vecteurs propres. Si la valeur propre associée est supérieure à 1, elle dilate l'espace dans la direction du vecteur propre ; de même, si la valeur propre est inférieure à 1, l'espace est contracté dans cette direction.
De même, pour un ensemble de points, elle le disperse ou le rapproche de l'origine, toujours selon les directions de la base propre.