Raisonnement probabiliste
Approche bayésienne

Marc Fischer
marc.fischer@emse.fr

September 30, 2025

Exercice 1: Chat dans le grenier ?

Un couple se demande si leur chat Bandit est rentré dans le grenier.

Ils savent que Bandit rentre dans le grenier 3 % du temps.
Il mange les morceaux de poulet qu'il voit dans le grenier avec une probabilité de 0.8.

Aujourd'hui, ils ont trouvé un paquet de morceaux de poulet ouvert dans le grenier (observation O) mais savent aussi qu'il y a d'autres causes que le chat (rongeurs) qui peuvent expliquer cela.

Question 1: Peut-on calculer la probabilité que le chat soit rentré dans le grenier étant donné que le paquet de poulet soit ouvert ?

Exercice 1 (correction)

On cherche à calculer la probabilité que le chat soit monté dans le grenier (C) étant donné que le paquet de poulet a été trouvé ouvert (O) :

$$P(C \mid O) = \frac{P(O \mid C) \cdot P(C)}{P(O \mid C) \cdot P(C) + P(O \mid \neg C) \cdot P(\neg C)}$$

Exercice 1 (correction)

On cherche à calculer la probabilité que le chat soit monté dans le grenier (C) étant donné que le paquet de poulet a été trouvé ouvert (O) :

$$P(C \mid O) = \frac{P(O \mid C) \cdot P(C)}{P(O \mid C) \cdot P(C) + P(O \mid \neg C) \cdot P(\neg C)}$$

Or, on a :

- $P(C) = 0{,}03, \quad P(\neg C) = 0{,}97$
- $P(O \mid C) = 0{,}80$

Mais on ne connaît pas :

$P(O \mid \neg C)$ (probabilité qu'un paquet soit ouvert sans que le chat soit passé)

Exercice 1 (correction)

On cherche à calculer la probabilité que le chat soit monté dans le grenier (C) étant donné que le paquet de poulet a été trouvé ouvert (O) :

$$P(C \mid O) = \frac{P(O \mid C) \cdot P(C)}{P(O \mid C) \cdot P(C) + P(O \mid \neg C) \cdot P(\neg C)}$$

Or, on a :

- $P(C) = 0{,}03, \quad P(\neg C) = 0{,}97$
- $P(O \mid C) = 0{,}80$

Mais on ne connaît pas :

$P(O \mid \neg C)$ (probabilité qu'un paquet soit ouvert sans que le chat soit passé)

Conclusion :

On ne peut pas calculer $P(C \mid O)$ sans connaître $P(O \mid \neg C)$. Une hypothèse ou une information supplémentaire est nécessaire.

Exercice 1

Le couple découvrent que dans leur quartier, les rongeurs rentrent dans les greniers avec une fréquence de 40 %. Si un rongeur est dans un grenier, la probabilité qu'il ignore des morceaux de poulet est de 3 %. Ils font tout d'abord l'hypothèse qu'il n'y a pas de différences entres les maisons avec et sans chats.

Question 2: Quelle est la probabilité que Bandit soit rentré dans le grenier ? On supposera que la présence d'un chat et d'un rongeur dans le grenier la même journée est incompatible.

Exercice 1 (correction)

Pour calculer la probabilité totale $P(O)$, on divise le monde en quatre cas disjoints et exhaustifs :

$$\begin{aligned} P(O) = {} & P(O \mid C \wedge R) \cdot P(C \wedge R) \\ & + P(O \mid C \wedge \neg R) \cdot P(C \wedge \neg R) \\ & + P(O \mid \neg C \wedge R) \cdot P(\neg C \wedge R) \\ & + P(O \mid \neg C \wedge \neg R) \cdot P(\neg C \wedge \neg R) \end{aligned}$$

Ceci est l'application de la formule des probabilités totales.

Exercice 1 (correction)

Hypothèse :
La présence simultanée du chat et du rongeur dans le grenier est exclue :

$$P(C \wedge R) = 0$$

Le premier terme disparaît donc :

$$P(O \mid C \wedge R) \cdot P(C \wedge R) = 0$$

La formule se simplifie alors :

$$\begin{aligned} P(O) = {} & P(O \mid C \wedge \neg R) \cdot P(C \wedge \neg R) \\ & + P(O \mid \neg C \wedge R) \cdot P(\neg C \wedge R) \\ & + P(O \mid \neg C \wedge \neg R) \cdot P(\neg C \wedge \neg R) \end{aligned}$$

Exercice 1 (correction)

Les termes restants peuvent être simplifiés à l'aide de la règle du produit et des hypothèses :

- Comme $C \Rightarrow \neg R$, on a : $P(C \wedge \neg R) = P(C)$
- Comme $R \Rightarrow \neg C$, on a : $P(\neg C \wedge R) = P(R)$

On obtient alors la formule finale :

$$P(O) = P(O \mid C) \cdot P(C) + P(O \mid R) \cdot P(R) + P(O \mid \neg C \wedge \neg R) \cdot P(\neg C \wedge \neg R)$$

Exercice 1 (correction)

On insère maintenant les valeurs :

- $P(C) = 0{,}03$
- $P(R) = 0{,}40$
- $P(\neg C \wedge \neg R) = 1 - P(C) - P(R) = 0{,}57$ **car événements incompatibles**
- $P(O \mid C) = 0{,}80$
- $P(O \mid R) = 0{,}97$ (puisque 3 % des rongeurs ignorent le paquet)
- $P(O \mid \neg C \wedge \neg R) = 0$

Exercice 1 (correction)

On insère maintenant les valeurs :

- $P(C) = 0{,}03$
- $P(R) = 0{,}40$
- $P(\neg C \wedge \neg R) = 1 - P(C) - P(R) = 0{,}57$ **car événements incompatibles**
- $P(O \mid C) = 0{,}80$
- $P(O \mid R) = 0{,}97$ (puisque 3 % des rongeurs ignorent le paquet)
- $P(O \mid \neg C \wedge \neg R) = 0$

Donc :

$$P(O) = 0{,}80 \cdot 0{,}03 + 0{,}97 \cdot 0{,}40 + 0 \cdot 0{,}57 = 0{,}024 + 0{,}388 = 0{,}412$$

Exercice 1 (correction)

Enfin :

$$P(C \mid O) = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}03}{0{,}412} = \frac{0{,}024}{0{,}412} \approx \boxed{0{,}0583}$$

Exercice 1 (correction)

Enfin :

$$P(C \mid O) = \frac{0{,}80 \cdot 0{,}03}{0{,}412} = \frac{0{,}024}{0{,}412} \approx \boxed{0{,}0583}$$

Interprétation : Même si le chat est une cause possible, la probabilité qu'il soit responsable est faible. La cause la plus probable est la présence d'un rongeur.

Exercice 1: Chat dans le grenier ?

Le couple se rend compte que la probabilité qu'un rongeur puisse exister dans un logement avec un chat est seulement de 10 %.
Ils apprennent par ailleurs que des rongeurs se trouvent dans 80% des maisons sans chats!!!
La présence du chat dans la maison mais pas dans le grenier n'influence pas la tendance du rongeur **se trouvant déjà dans la maison** à se rendre dans le grenier et à manger du poulet s'il s'y trouve.
20 % des maisons ont un chat dans ce quartier.
Ces nouvelles informations ont-t-elles un impact sur la probabilité que Bandit soit monté dans le grenier ?

Considérez ces nouveaux événements !

- C : Il y a un chat dans le logement (donné, donc $P(C) = 1$)
- C^G : Le chat est monté dans le grenier
- R : Il y a un rongeur dans le logement
- R^G : Le rongeur est monté dans le grenier
- O : Le paquet de poulet a été mangé (Observation)

On cherche $p(C^G | O \wedge C)$. **Question 3:** Donnez toutes les probabilités (totales et conditionelles) numériques dont vous disposez !

Exercice 1 (correction)

Voici toutes les probabilités connues à ce stade :

- $P(C) = 0{,}20$ (20 % des maisons ont un chat)
- $P(R \mid C) = 0{,}10$ (présence d'un rongeur dans la maison s'il y a un chat)
- $P(R \mid \neg C) = 0{,}80$ (présence d'un rongeur dans la maison s'il n'y a pas de chat)
- $P(R^G) = 0{,}40$ (rongeur dans le grenier, indépendamment du chat)
- $P(C^G \mid C) = 0{,}03$ (le chat monte dans le grenier dans 3 % des cas)
- $P(O \mid C^G) = 0{,}80$ (le chat mange les morceaux de poulet dans 80 % des cas)
- $P(O \mid R^G) = 0{,}97$ (le rongeur mange les morceaux de poulet dans 97 % des cas)
- $P(O \mid \neg C^G \wedge \neg R^G) = 0{,}00$ (aucune autre cause possible)
- $P(R^G \mid C^G) = P(C^G \mid R^G) = 0$ (impossibilité de coexistence dans le grenier)

Faits logiques :

- $C^G \Rightarrow C$ (si le chat est dans le grenier, il est dans la maison)
- $R^G \Rightarrow R$ (si le rongeur est dans le grenier, il est dans la maison)

Exercice 1

La présence du chat dans la maison mais pas dans le grenier n'influence pas la tendance du rongeur **se trouvant déjà dans la maison** à se rendre dans le grenier et à manger du poulet s'il s'y trouve. Que le chat soit présent dans le grenier ou dans un autre partie de la maison n'a aucun impact sur la présence du rongeur dans une partie de la maison autre que le grenier.

Question 4: Donnez toutes les formules reliant les différentes probabilités (conditionelles) en considérant ces hypothèses !

Exercice 1 (correction)

Certains liens viennent directement de la logique des événements :

$$R^G \;\Rightarrow\; R$$

$$\Rightarrow P(R^G) \leq P(R), \qquad P(R^G \mid R) = \frac{P(R^G)}{P(R)}.$$

De même, pour toute condition X :

$$P(R^G \mid \neg R, X) = 0.$$

Exercice 1 (correction)

Hypothèse clé : la présence du chat (dans la maison mais pas au grenier) n'influence pas le comportement du rongeur **déjà présent**.

Conséquences :

$$P(R^G \mid R, \neg C^G, C) = P(R^G \mid R),$$

$$P(O \mid R^G, \neg C^G, C) = P(O \mid R^G).$$

Autre indépendance : la position du chat n'influence pas la probabilité globale d'avoir un rongeur (hors grenier) :

$$P(R \mid \neg C^G, C) = P(R \mid C^G, C) = P(R \mid C).$$

Exercice 1

Question 5: Déterminez maintenant $P(O \mid \neg C^G, C)$ en fonction de $P(O \mid R^G)$, $P(R^G \mid R)$ et de $P(R \mid C)$.

Formule importante : probabilité totale conditionnelle
Soient trois événements X, Y, Z. On a d'abord la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(X \mid Y, Z) = \frac{P(X \wedge Y \mid Z)}{P(Y \mid Z)}.$$

Ensuite, la **probabilité totale conditionnelle** s'écrit comme suit :

$$P(X \mid Y) = P(X \mid Y, Z) \cdot P(Z \mid Y) + P(X \mid Y, \neg Z) \cdot P(\neg Z \mid Y),$$

où $\neg Z$ désigne le complément de l'événement Z.
Cette formule est utile lorsque l'on veut calculer $P(X \mid Y)$ en prenant en compte toutes les possibilités concernant Z.

Exercice 1 (correction corrigée)

On cherche $P(O \mid \neg C^G, C)$.

On commence par appliquer la **loi des probabilités totales sur** R^G (rongeur dans le grenier) :

$$\begin{aligned} P(O \mid \neg C^G, C) = {} & P(O \mid R^G, \neg C^G, C)\ P(R^G \mid \neg C^G, C) \\ & + P(O \mid \neg R^G, \neg C^G, C)\ P(\neg R^G \mid \neg C^G, C). \end{aligned}$$

Hypothèse : si aucun rongeur n'est dans le grenier, le paquet ne peut pas être mangé :

$$P(O \mid \neg R^G, \neg C^G, C) = 0$$

Donc :

$$P(O \mid \neg C^G, C) = P(O \mid R^G, \neg C^G, C)\ P(R^G \mid \neg C^G, C)$$

Exercice 1 (correction corrigée)

On décompose maintenant $P(R^G \mid \neg C^G, C)$ avec la **loi des probabilités totales sur** R (rongeur dans la maison) :

$$
\begin{aligned}
P(R^G \mid \neg C^G, C) = {} & P(R^G \mid R, \neg C^G, C)\, P(R \mid \neg C^G, C) \\
& + P(R^G \mid \neg R, \neg C^G, C)\, P(\neg R \mid \neg C^G, C)
\end{aligned}
$$

Comme $R^G \Rightarrow R$, le deuxième terme est nul.

Hypothèse clé (indépendance) : le fait que le chat ne soit pas dans le grenier n'influence pas le comportement du rongeur déjà présent :

$$
P(R^G \mid R, \neg C^G, C) = P(R^G \mid R), \qquad P(R \mid \neg C^G, C) = P(R \mid C)
$$

Donc :

$$
\boxed{P(R^G \mid \neg C^G, C) = P(R^G \mid R)\, P(R \mid C)}
$$

Exercice 1 (correction corrigée)

On combine maintenant toutes les étapes :

$$\begin{aligned} P(O \mid \neg C^G, C) &= P(O \mid R^G, \neg C^G, C)\ P(R^G \mid \neg C^G, C) \\ &= P(O \mid R^G)\ \left[P(R^G \mid R)\ P(R \mid C)\right] \end{aligned}$$

Remarque importante : Si on veut l'appliquer dans la loi des probabilités totales pour C^G vs $\neg C^G$, il faut **multiplier par** $P(\neg C^G \mid C)$:

$$P(O \mid C) = P(O \mid C^G)P(C^G \mid C) + P(O \mid \neg C^G, C)P(\neg C^G \mid C)$$

$$\boxed{P(O \mid \neg C^G, C) = P(O \mid R^G)\ P(R^G \mid R)\ P(R \mid C)}$$

Exercice 1

Question 6: Exprimez maintenant $p(C^G|O \wedge C)$ en fonction des autres probabilités et donnez sa valeur numérique.

Exercice 1 (correction corrigée)

Nous cherchons :

$$P(C^G \mid O, C).$$

Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(C^G \mid O, C) = \frac{P(C^G \wedge O \wedge C)}{P(O \wedge C)}.$$

Comme $C^G \Rightarrow C$, on simplifie :

$$P(C^G \mid O, C) = \frac{P(C^G \wedge O)}{P(O \wedge C)}.$$

Exercice 1 (correction corrigée)

Rappel de la règle du produit pour le numérateur :

$$P(C^G \wedge O) = P(O \mid C^G)\, P(C^G)$$

et pour $P(C^G)$:

$$P(C^G) = P(C^G \mid C)\, P(C).$$

Substitution des valeurs données :

$$P(C^G) = 0.03 \cdot 0.20 = 0.0060, \qquad P(C^G \wedge O) = 0.80 \cdot 0.0060 = 0.0048.$$

Exercice 1 (correction corrigée)

Pour le dénominateur $P(O \wedge C) = P(O \mid C)\, P(C)$:

$$P(O \mid C) = P(O \mid C^G, C)P(C^G \mid C) + P(O \mid \neg C^G, C)P(\neg C^G \mid C).$$

Avec la correction importante : on ne doit pas oublier $P(\neg C^G \mid C)$ pour le second terme.

Exercice 1 (correction corrigée)

On a déjà calculé :

$$P(O \mid \neg C^G, C) = P(O \mid R^G)\, P(R^G \mid R)\, P(R \mid C).$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(O \mid C) &= P(O \mid C^G)P(C^G \mid C) + P(O \mid \neg C^G, C)P(\neg C^G \mid C) \\ &= P(O \mid C^G)P(C^G \mid C) + P(O \mid R^G)P(R^G \mid R)P(R \mid C)P(\neg C^G \mid C) \end{aligned}$$

Exercice 1 (correction corrigée)

Substitution numérique :

$$\begin{aligned} P(O \mid C^G) &= 0.80, & P(C^G \mid C) &= 0.03, \\ P(O \mid R^G) &= 0.97, & P(R^G \mid R) &= 0.6061, \\ P(R \mid C) &= 0.10, & P(\neg C^G \mid C) &= 1 - 0.03 = 0.97. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} P(O \mid C) &\approx 0.80 \cdot 0.03 + 0.97 \cdot 0.6061 \cdot 0.10 \cdot 0.97 \\ &\approx 0.024 + 0.05705 \\ &\approx 0.08105 \end{aligned}$$

Exercice 1 (correction corrigée)

Numérateur rappelé :

$$P(C^G \wedge O) = 0.0048$$

Donc :

$$P(C^G \mid O, C) = \frac{0.0048}{0.08105 \cdot 0.20/0.20?}$$

Rappel : $P(O \wedge C) = P(O \mid C)\, P(C)$ et $P(C) = 0.20$, donc :

$$P(O \wedge C) = 0.08105 \cdot 0.20 \approx 0.01621$$

$$\boxed{P(C^G \mid O, C) \approx \frac{0.0048}{0.01621} \approx 0.2963}$$

Interprétation : environ 29.6% de chances que le chat soit monté dans le grenier sachant qu'il est dans la maison et que le paquet de poulet est ouvert.

Exercice 2: Bruit nocturne suspect

Contexte : Fatima vit dans une cité universitaire relativement calme. Une nuit, elle entend un bruit avec un niveau sonore mesuré A **d'environ 60 décibels**. Elle se demande s'il y a eu un cambriolage dans le bâtiment.

Modèle probabiliste :

- Hypothèse 1 : Cambriolage C, avec une probabilité a priori $P(C) = 0.05$
- Hypothèse 2 : Aucun cambriolage $\neg C$, avec $P(\neg C) = 0.95$
- Si cambriolage : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 75, \sigma^2 = 10^2)$
- Sinon : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 8^2)$

Question 1 : Sachant que Fatima a entendu un bruit entre $[59.5; 60.5]$ dB, quelle est la probabilité **totale** d'observer ce niveau sonore ?

Exercice 2: Bruit nocturne suspect

Contexte : Fatima vit dans une cité universitaire relativement calme. Une nuit, elle entend un bruit avec un niveau sonore mesuré A **d'environ 60 décibels**. Elle se demande s'il y a eu un cambriolage dans le bâtiment.

Modèle probabiliste :

- Hypothèse 1 : Cambriolage C, avec une probabilité a priori $P(C) = 0.05$
- Hypothèse 2 : Aucun cambriolage $\neg C$, avec $P(\neg C) = 0.95$
- Si cambriolage : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 75, \sigma^2 = 10^2)$
- Sinon : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 8^2)$

Question 1 : Sachant que Fatima a entendu un bruit entre $[59.5; 60.5]$ dB, quelle est la probabilité **totale** d'observer ce niveau sonore ?
Indice (RStudio) :

- Pour une loi normale : `pnorm(q, mean, sd)` donne $P(X \leq q)$

Exercice 2 (correction Question 1)

On veut calculer la probabilité totale :

$$P(59.5 < A < 60.5) = P(C) \cdot P(59.5 < A < 60.5 \mid C) + P(\neg C) \cdot P(59.5 < A < 60.5 \mid \neg C)$$

Calculs avec R :

$$\begin{aligned} P(59.5 < A < 60.5 \mid C) &= \texttt{pnorm(60.5, 75, 10) - pnorm(59.5, 75, 10)} \\ &\approx 0.012959 \\ P(59.5 < A < 60.5 \mid \neg C) &= \texttt{pnorm(60.5, 40, 8) - pnorm(59.5, 40, 8)} \\ &\approx 0.002199 \end{aligned}$$

Exercice 2 (correction Question 1)

On veut calculer la probabilité totale :

$$\begin{aligned} P(59.5 < A < 60.5) = {} & P(C) \cdot P(59.5 < A < 60.5 \mid C) \\ & + P(\neg C) \cdot P(59.5 < A < 60.5 \mid \neg C) \end{aligned}$$

Calculs avec R :

$$\begin{aligned} P(59.5 < A < 60.5 \mid C) &= \texttt{pnorm(60.5, 75, 10) - pnorm(59.5, 75, 10)} \\ &\approx 0.012959 \\ P(59.5 < A < 60.5 \mid \neg C) &= \texttt{pnorm(60.5, 40, 8) - pnorm(59.5, 40, 8)} \\ &\approx 0.002199 \end{aligned}$$

Résultat final :

$$P(59.5 < A < 60.5) = 0.05 \cdot 0.012959 + 0.95 \cdot 0.002199 \approx \boxed{0.002737}$$

Exercice 2

Question 2 : Sachant que Fatima a entendu un bruit de niveau $A \in [59.5; 60.5]$ dB, quelle est la probabilité qu'un cambriolage ait eu lieu ?

Exercice 2

Question 2 : Sachant que Fatima a entendu un bruit de niveau $A \in [59.5; 60.5]$ dB, quelle est la probabilité qu'un cambriolage ait eu lieu ?
Rappel : Tous les éléments nécessaires ont été calculés dans la question précédente.

Exercice 2 (correction Question 2)

On applique Bayes :

$$P(C \mid A \in [59.5; 60.5]) = \frac{P(59.5 < A < 60.5 \mid C) \cdot P(C)}{P(59.5 < A < 60.5)}$$

Exercice 2 (correction Question 2)

On applique Bayes :

$$P(C \mid A \in [59.5; 60.5]) = \frac{P(59.5 < A < 60.5 \mid C) \cdot P(C)}{P(59.5 < A < 60.5)}$$

$$= \frac{0.012959 \cdot 0.05}{0.002737} \approx \boxed{0.236769}$$

Exercice 2 (correction Question 2)

On applique Bayes :

$$P(C \mid A \in [59.5; 60.5]) = \frac{P(59.5 < A < 60.5 \mid C) \cdot P(C)}{P(59.5 < A < 60.5)}$$

$$= \frac{0.012959 \cdot 0.05}{0.002737} \approx \boxed{0.236769}$$

Conclusion : Même si le bruit était relativement fort, la probabilité d'un cambriolage reste faible mais significative, car la fréquence des cambriolages dans cet environnement est faible et qu'il n'est pas très inhabituel d'entendre un bruit de cette amplitude en l'absence de cambriolage.

Exercice 2

Question 3 : Supposons que Fatima soit dans un nouvel environnement qu'elle connaisse mal, si bien qu'elle pense seulement que $P(C) \in [0.01; 0.30]$.
Comment évaluer maintenant $P(C \mid A \in [59.5; 60.5])$?
On pose $A = \{A \in [59.5; 60.5]\}$ pour simplifier.

Exercice 2 (correction Question 3)

On veut estimer l'intervalle de probabilité de :

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}$$

avec :

- $P(A \mid C) \approx 0.012959$
- $P(A \mid \neg C) \approx 0.002199$
- $P(C) \in [0.01; 0.30]$
- $P(\neg C) = 1 - P(C)$

Exercice 2 (correction Question 3)

On veut estimer l'intervalle de probabilité de :

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}$$

avec :

- $P(A \mid C) \approx 0.012959$
- $P(A \mid \neg C) \approx 0.002199$
- $P(C) \in [0.01; 0.30]$
- $P(\neg C) = 1 - P(C)$

On utilise :

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + (1 - P(C)) \cdot P(A \mid \neg C)$$

Exercice 2 (correction Question 3)

On veut estimer l'intervalle de probabilité de :

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}$$

avec :

- $P(A \mid C) \approx 0.012959$
- $P(A \mid \neg C) \approx 0.002199$
- $P(C) \in [0.01; 0.30]$
- $P(\neg C) = 1 - P(C)$

On utilise :

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + (1 - P(C)) \cdot P(A \mid \neg C)$$

Cas 1 : $P(C) = 0.01$

$$P(A) = 0.01 \cdot 0.012959 + 0.99 \cdot 0.002199 \approx 0.002737$$

$$P(C \mid A) = \frac{0.012959 \cdot 0.01}{0.002737} \approx \boxed{0.0474}$$

Exercice 2 (correction Question 3)

On veut estimer l'intervalle de probabilité de :

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}$$

avec :

- $P(A \mid C) \approx 0.012959$
- $P(A \mid \neg C) \approx 0.002199$
- $P(C) \in [0.01; 0.30]$
- $P(\neg C) = 1 - P(C)$

On utilise :

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + (1 - P(C)) \cdot P(A \mid \neg C)$$

Cas 1 : $P(C) = 0.01$

$$P(A) = 0.01 \cdot 0.012959 + 0.99 \cdot 0.002199 \approx 0.002737$$

$$P(C \mid A) = \frac{0.012959 \cdot 0.01}{0.002737} \approx \boxed{0.0474}$$

Cas 2 : $P(C) = 0.30$

$$P(A) = 0.30 \cdot 0.012959 + 0.70 \cdot 0.002199 \approx 0.005889$$

$$P(C \mid A) = \frac{0.012959 \cdot 0.30}{0.005889} \approx \boxed{0.660}$$

Exercice 2 (correction Question 3)

On veut estimer l'intervalle de probabilité de :

$$P(C \mid A) = \frac{P(A \mid C) \cdot P(C)}{P(A)}$$

avec :

- $P(A \mid C) \approx 0.012959$
- $P(A \mid \neg C) \approx 0.002199$
- $P(C) \in [0.01; 0.30]$
- $P(\neg C) = 1 - P(C)$

On utilise :

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + (1 - P(C)) \cdot P(A \mid \neg C)$$

Cas 1 : $P(C) = 0.01$

$$P(A) = 0.01 \cdot 0.012959 + 0.99 \cdot 0.002199 \approx 0.002737$$

$$P(C \mid A) = \frac{0.012959 \cdot 0.01}{0.002737} \approx \boxed{0.0474}$$

Cas 2 : $P(C) = 0.30$

$$P(A) = 0.30 \cdot 0.012959 + 0.70 \cdot 0.002199 \approx 0.005889$$

$$P(C \mid A) = \frac{0.012959 \cdot 0.30}{0.005889} \approx \boxed{0.660}$$

Conclusion :

$$P(C \mid A) \in \boxed{[0.0474; 0.660]}$$