

Sujet de TP n° 2

On utilisera le script R « `scriptTP2.R` » disponible sur Campus.

Partie 1 - Étude d'un AR(2)

Notations.

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + Z_t \\ \phi(z) &= 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = (1 - r_1 z)(1 - r_2 z) \end{aligned}$$

où r_1 et r_2 sont les inverses des racines z_1 et z_2 du polynôme $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$, c'est-à-dire les racines du polynôme $z^2 - \phi_1 z - \phi_2$.

Deux cas : r_1 et r_2 sont des réels $\neq 0$ dans $] -1, +1[$ ou bien $r_1 = re^{i\theta}$ et $r_2 = re^{-i\theta}$ avec $0 < r < 1$.

1. Faire une simulation de taille $n = 200$ d'un AR(2) avec $\mu = 0$, $\sigma_Z = 1$, $r_1 = 0,9$ et $r_2 = 0,9$ et visualiser le chronogramme, l'ACF et la PACF empiriques. Expliquer l'allure de la série ainsi que l'allure des ACF et PACF (sont-elles conformes à des résultats théoriques?) (augmenter n si besoin).
2. Mêmes questions avec $\mu = 0$, $\sigma_Z = 1$, $r_1 = 0,9$ et $r_2 = -0,9$.
3. Mêmes questions avec $\mu = 0$, $\sigma_Z = 1$, $r_1 = 0,1$ et $r_2 = -0,9$.
4. Mêmes questions avec $\mu = 0$, $\sigma_Z = 1$, $r = 0,9$ et $\theta = 90^\circ$, puis $\theta = 60^\circ$, $\theta = 20^\circ$ (augmenter la taille de n pour mieux comprendre la forme des ACF et PACF).
5. Essayer d'autres racines r_1 et r_2 complexes conjuguées à l'intérieur du disque unité.
6. Que se passe-t-il si l'une au moins des racines est sur le cercle unité ? À l'extérieur ?
7. Que peut-on dire des paramètres μ et σ_Z^2 ?

Partie 2 - Identification de modèles

On utilisera les jeux de données `serie1`, `serie2`, `serie3` disponibles sur Campus.

1. Visualiser les ACF et PACF de la première série de données (fichier `serie1.Rdata`). De quel type de processus s'agit-il ? Essayer de donner la forme du polynôme $\phi(z)$ dans la décomposition ARMA de ce processus.
2. Visualiser les ACF et PACF de la deuxième série de données. Conclusion.

On dit que $\{X_t\}$ est un ARIMA(p, d, q) centré si le processus $\{\nabla^d X_t\}$ est un ARMA(p, q) centré, où $\nabla = I - B$ est l'opérateur de différenciation et d l'ordre de différenciation.

Peut-on rendre compte du troisième jeu de données par un modèle de type ARIMA(p, d, q) ? Si oui, lequel ?