Raisonnement probabiliste
Approche bayésienne

Marc Fischer
marc.fischer@emse.fr

September 4, 2025

Exercice 1: Chat dans le grenier ?

Un couple se demande si leur chat Bandit est rentré dans le grenier.

Ils savent que Bandit rentre dans le grenier 3 % du temps.
Il mange les morceaux de poulet qu'il voit dans le grenier avec une probabilité de 0.8.

Aujourd'hui, ils ont trouvé un paquet de morceaux de poulet ouvert dans le grenier (observation O) mais savent aussi qu'il y a d'autres causes que le chat (rongeurs) qui peuvent expliquer cela.

Question 1: Peut-on calculer la probabilité que le chat soit rentré dans le grenier étant donné que le paquet de poulet soit ouvert ?

Exercice 1

Le couple découvrent que dans leur quartier, les rongeurs rentrent dans les greniers avec une fréquence de 40 %. Si un rongeur est dans un grenier, la probabilité qu'il ignore des morceaux de poulet est de 3 %. Ils font tout d'abord l'hypothèse qu'il n'y a pas de différences entres les maisons avec et sans chats.

Question 2: Quelle est la probabilité que Bandit soit rentré dans le grenier ? On supposera que la présence d'un chat et d'un rongeur dans le grenier la même journée est incompatible.

Exercice 1: Chat dans le grenier ?

Le couple se rend compte que la probabilité qu'un rongeur puisse exister dans un logement avec un chat est seulement de 10 %.
Ils apprennent par ailleurs que des rongeurs se trouvent dans 80% des maisons sans chats!!!
La présence du chat dans la maison mais pas dans le grenier n'influence pas la tendance du rongeur **se trouvant déjà dans la maison** à se rendre dans le grenier et à manger du poulet s'il s'y trouve.
20 % des maisons ont un chat dans ce quartier.
Ces nouvelles informations ont-t-elles un impact sur la probabilité que Bandit soit monté dans le grenier ?

Considérez ces nouveaux événements !

- C : Il y a un chat dans le logement (donné, donc $P(C) = 1$)
- C^G : Le chat est monté dans le grenier
- R : Il y a un rongeur dans le logement
- R^G : Le rongeur est monté dans le grenier
- O : Le paquet de poulet a été mangé (Observation)

On cherche $p(C^G|O \wedge C)$. **Question 3:** Donnez toutes les probabilités (totales et conditionelles) numériques dont vous disposez !

Exercice 1

La présence du chat dans la maison mais pas dans le grenier n'influence pas la tendance du rongeur **se trouvant déjà dans la maison** à se rendre dans le grenier et à manger du poulet s'il s'y trouve. Que le chat soit présent dans le grenier ou dans un autre partie de la maison n'a aucun impact sur la présence du rongeur dans une partie de la maison autre que le grenier.

Question 4: Donnez toutes les formules reliant les différentes probabilités (conditionelles) en considérant ces hypothèses !

Exercice 1

Question 5: Déterminez maintenant $P(O \mid \neg C^G, C)$ en fonction de $P(O \mid R^G)$, $P(R^G \mid R)$ et de $P(R \mid C)$.

Formule importante : probabilité totale conditionnelle
Soient trois événements X, Y, Z. On a d'abord la définition de la probabilité conditionnelle :

$$P(X \mid Y, Z) = \frac{P(X \wedge Y \mid Z)}{P(Y \mid Z)}.$$

Ensuite, la **probabilité totale conditionnelle** s'écrit comme suit :

$$P(X \mid Y) = P(X \mid Y, Z) \cdot P(Z \mid Y) + P(X \mid Y, \neg Z) \cdot P(\neg Z \mid Y),$$

où $\neg Z$ désigne le complément de l'événement Z.
Cette formule est utile lorsque l'on veut calculer $P(X \mid Y)$ en prenant en compte toutes les possibilités concernant Z.

Exercice 1

Question 6: Exprimez maintenant $p(C^G|O \wedge C)$ en fonction des autres probabilités et donnez sa valeur numérique.

Exercice 2: Bruit nocturne suspect

Contexte : Fatima vit dans une cité universitaire relativement calme. Une nuit, elle entend un bruit avec un niveau sonore mesuré A **d'environ 60 décibels**. Elle se demande s'il y a eu un cambriolage dans le bâtiment.

Modèle probabiliste :

- Hypothèse 1 : Cambriolage C, avec une probabilité a priori de $P(C) = 0{,}05$
- Hypothèse 2 : Aucun cambriolage $\neg C$, avec $P(\neg C) = 0{,}95$
- Si cambriolage : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 75, \sigma^2 = 10^2)$
- Sinon : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 8^2)$

Question 1: Sachant que Fatima a entendu un bruit entre $[59{,}5; 60{,}5]$ dB, quelle est la probabilité **totale** d'observer ce niveau sonore ?

Exercice 2: Bruit nocturne suspect

Contexte : Fatima vit dans une cité universitaire relativement calme. Une nuit, elle entend un bruit avec un niveau sonore mesuré A **d'environ 60 décibels**. Elle se demande s'il y a eu un cambriolage dans le bâtiment.

Modèle probabiliste :

- Hypothèse 1 : Cambriolage C, avec une probabilité a priori de $P(C) = 0{,}05$
- Hypothèse 2 : Aucun cambriolage $\neg C$, avec $P(\neg C) = 0{,}95$
- Si cambriolage : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 75, \sigma^2 = 10^2)$
- Sinon : $A \sim \mathcal{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 8^2)$

Question 1: Sachant que Fatima a entendu un bruit entre $[59{,}5; 60{,}5]$ dB, quelle est la probabilité **totale** d'observer ce niveau sonore ?
Indice (RStudio) :

- Pour une loi normale : `pnorm(q, mean, sd)` donne $P(X \leq q)$

Exercice 2

Question 2: Sachant que Fatima a entendu un bruit de niveau $A \in [59{,}5 ; 60{,}5]$ dB, quelle est la probabilité qu'un cambriolage ait eu lieu ?

Exercice 2

Question 2: Sachant que Fatima a entendu un bruit de niveau $A \in [59{,}5; 60{,}5]$ dB, quelle est la probabilité qu'un cambriolage ait eu lieu ?
Rappel : Tous les éléments nécessaires ont été calculés dans la question précédente.

Exercice 2

Question 3: Supposons que Fatima soit dans un nouvel environnement qu'elle connaisse mal, si bien qu'elle est seulement capable de penser que $p(Cambriolage) \in [0.01; 0.30]$. Comment évaluer maintenant $P(C|A \in [59{,}5; 60{,}5])$?
Pour simplifier, on posera $A = \{A \in [59{,}5; 60{,}5]\}$.