Lista 0 - MAT-236 - Determinantes e matrizes

Preliminares:

(I) Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

costumamos designá-la por $A = (a_{ij})$, com $1 \leq i, j \leq 3$.

$M_3(\mathbb{R})$ designa o conjunto das matrizes 3×3 de números reais, e possui estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar, definidas respectivamente por

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \\ \\ \lambda. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$$

De modo geral, para todo número naturam n, designamos por $M_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $n \times n$.

(II) Considere uma matriz 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Definimos o determinante de A como $detA = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$.

Exemplo: $det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 3.4 - 2.(-1) = 14$

(III) Para definir determinante de matriz 3×3, vamos usar o método de Laplace, que é um método indutivo.

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Pelo método de Laplace, desenvolvendo pela primeira linha,o determinante de A pode ser calculado por

$$a_{11}.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ao invés de considerar a primeira linha, podemos tomar a segunda ou a terceira linha (ou mesmo qualquer coluna) para calcular o determinante da matriz.

A vantagem do método de Laplace é que ele pode ser aplicado a qualquer matriz $n \times n$, ao contrário da regra de Sarrus.

Exemplo: $det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$

$$= 3.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & + \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0.(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 4.(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-92) + (-1).48 + 0 + (-4).(-14) = -268$$

(IV) Algumas propriedades do determinante:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n, vamos designar por $L_1, L_2, \ldots, L_n$ as linhas de A.

Assim, podemos escrever, $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$

(1) Se a matriz A possui uma linga nula então $detA = 0$.
(Se $L_i = 0$, para algum $1 \leq i \leq n$ então $detA = 0$.)

(2) Se trocamos duas linhas de lugar entre si, o determinante da matriz muda de sinal.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

Em particular se $detA = 0$ e trocamos duas linhas de lugar entre si, ele continuará sendo igual a zero.

(3) Se a matriz A possui duas linhas tais que uma seja mútipla da outra então $detA = 0$.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i = \lambda L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = 0$$

(4) Se uma linha de A é trocada por soma dela com mútiplo de outra linha, o determinante de A não se altera.

$$\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j + \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$$

(5) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se que $\begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \lambda L_i \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix} = \lambda . \begin{vmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{vmatrix}$

Exercícios

(1) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2717-1 & & \end{bmatrix}$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Vamos designar $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Então $A = \begin{bmatrix} B & | & D \\ -- & & -- \\ 0 & | & C \end{bmatrix}$

(i) Calcule $detA$, $detB$, $detC$, $detD$.

(ii) Verifique que $(detA = (detB)(detC)$.