

CARTAS A UNA JOVEN MATEMÁTICA

IAN
STEWART



Lectulandia

Utilizando el formato de «cartas», dirigidas a Meg, una joven de talento que se plantea estudiar matemáticas en la universidad y acaso dedicarse a ellas (a lo largo de esta imaginaria correspondencia vemos que esto es, efectivamente, lo que finalmente sucede), el renombrado investigador y divulgador de la matemática Ian Stewart explica en este fascinante libro lo que a él le hubiese gustado saber cuando era estudiante y luego investigador primerizo. Aborda así cuestiones que van desde las esencialmente filosóficas hasta las más prácticas. Cuestiones como qué es la matemática y por qué merece la pena practicarla y cuidarla; las relaciones entre lógica y demostración; cómo piensan los matemáticos; la relación entre matemática «pura» y «aplicada»; el papel de la belleza, y de la noción de simetría, en el pensamiento matemático; o cómo tratar con las peculiaridades de la comunidad matemática. Y todo tratado con una irresistible mezcla de sabiduría, talento y humor.

«Las matemáticas», se lee en esta obra, «son una de las actividades humanas más vitales, pero también una de las menos apreciadas, y la menos comprendida», y sin embargo el «mundo necesita desesperadamente las matemáticas y la contribución de los matemáticos» para solucionar algunos de los problemas más graves a los que nos enfrentamos, puesto que muchos de ellos dependen de una predicción adecuada de lo que sucederá en el futuro, y únicamente las matemáticas permiten realizar tales predicciones. Por todo esto, *Cartas a una joven matemática* no es solo una obra que dará placer intelectual y estético a sus lectores, sino también un magnífico útil para encarar el futuro.

Ian Stewart

Cartas a una joven matemática

ePub r1.0

Titivillus 19.08.2021

Título original: *Letters to a Young Mathematician*
Ian Stewart, 2006
Traducción: Javier García Sanz

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

Índice de contenido

Cubierta

Cartas a una joven matemática

Prólogo a la edición española

Prefacio

¿Por qué hacer matemáticas?

Cómo estuve a punto de hacerme abogado

La amplitud de las matemáticas

¿No está todo hecho?

Rodeados de matemáticas

Cómo piensan los matemáticos

Cómo aprender matemáticas

El miedo a las demostraciones

¿No pueden los ordenadores resolverlo todo?

Narración matemática

Directo a la yugular

Culebrones

Problemas imposibles

El escalafón de la carrera

¿Puras o aplicadas?

¿De dónde sacas esas ideas disparatadas?

Cómo enseñar matemáticas

La comunidad matemática

Cerdos y camionetas

Placeres y peligros de la colaboración

¿Es Dios un matemático?

Sobre el autor

Notas

*En memoria de
Marjorie Kathleen —«Madge»— Stewart
(4-2-1914 – 17-12-2001)
y de
Arthur Reginald —«Nick»— Stewart
(2-3-1914 – 23-8-2004)
sin quienes yo no hubiese sido nada,
y mucho menos un matemático*



Prólogo a la edición española

Los sistemas universitarios de cada país tienen sus propias características. Hay diferencias importantes entre el sistema británico, y la estructura de su carrera académica, y el sistema estadounidense. El sistema español es diferente de ambos. Sin embargo, las matemáticas son una actividad internacional, y las similitudes entre los sistemas de los diversos países, en cualquier parte del mundo, son mucho más importantes que las diferencias. Las experiencias de Meg —una joven de talento que se plantea estudiar matemáticas en la universidad, hacer investigación para obtener un doctorado y convertirse en una matemática profesional— interesarán a los lectores españoles por las mismas razones por las que interesan a los lectores británicos o estadounidenses. Sus preocupaciones, dudas y éxitos son universales.

Citando me propusieron escribir un libro para la ya extensa serie orientativa de Basic Books comprendí inmediatamente que su potencial iba más allá de la mera orientación. Cartas a una joven matemática podría haberse titulado Cartas a cualquier interesado en matemáticas. Es una visión desde dentro de las matemáticas y de los matemáticos, y explica en qué consiste ser matemático y estudiar las matemáticas al máximo nivel. Algunas partes son serias, otras divertidas... otras, ambas cosas a la vez.

El formato «cartas» es una delicia para un autor. Me permite escribir capítulos cortos sobre muchos temas, cada uno de ellos comprensible en sí mismo, con muy pocas referencias a cualquiera de los otros capítulos. Los lectores pueden introducirse en ellas al azar y encontrar algo que les interese

de forma rápida y fácil. Este formato también me permite escribir sobre cualquier cosa que me interese —y siempre es mejor la escritura si el escritor es un entusiasta de lo que está escribiendo—.

Las matemáticas son mi vida. No son toda mi vida, me apresuro a añadir. Tengo una mujer, dos hijos, dos nietas (por no mencionar a mis «nietas matemáticas», que aparecerán en una de las cartas). Me gusta leer, viajar, pintar, ver deportes por televisión. Pero el núcleo de mi vida profesional son las matemáticas, que, si se entienden, son realmente uno de los temas más fascinantes que haya conocido la humanidad. Su historia se remonta a al menos hace cinco mil años, su impacto en la cultura moderna ha sido enorme, y prácticamente todo lo que experimentamos en nuestra vida diaria está basado en matemáticas que ocurren entre bastidores. Las matemáticas son una de las actividades humanas más vitales, pero también una de las menos apreciadas, y la menos comprendida.

Esto es una lástima. El mundo necesita desesperadamente de las matemáticas y de la contribución de los matemáticos. Nos enfrentamos a problemas enormes y muchos de ellos dependen de una predicción adecuada de lo que sucederá en el futuro. Las matemáticas son uno de los mejores métodos que conocemos para hacer predicciones, porque se basan en implicaciones lógicas. Dado lo que está sucediendo ahora, y aplicando reglas conocidas sobre la forma en que se desarrollan las cosas, ¿qué sucederá la próxima semana, el próximo año, el próximo siglo?

Sobre todo necesitamos formar a muchos matemáticos jóvenes para que lleven la antorcha de la ilustración matemática en el futuro. Aquí es donde interviene Meg. A medida que se despliegan las Cartas a una joven matemática somos testigos de cómo la ciencia se convierte también en la vida de Meg. Compartimos sus preocupaciones y sus éxitos. Si no somos matemáticos profesionales, incluso si no tenemos ningún título, aun así podemos llegar a compartir sus puntos de vista y a entender de qué tratan en realidad las matemáticas. Y por qué son tan vitales para todos en este planeta.

Ésta es al menos mi intención, y es la razón por la que escribí este libro. Espero que usted disfrute leyéndolo. Sé que yo disfruté escribiéndolo.

IAN STEWART
Coventry, junio de 2006

Prefacio

«Es una experiencia melancólica para un matemático profesional encontrarse a sí mismo escribiendo sobre matemáticas». Así empezaba en 1940 el gran matemático inglés Godfrey Harold Hardy, de la Universidad de Cambridge, su clásico *Apología de un matemático*^[1].

Las actitudes cambian. Los matemáticos ya no creen que deban justificarse ante el mundo. Y muchos ya están convencidos de que escribir «sobre» matemáticas es al menos tan valioso como escribir matemáticas, lo que para Hardy significaba matemáticas nuevas, nueva investigación, nuevos teoremas. De hecho, muchos de nosotros creemos que no tiene sentido que los matemáticos inventen nuevos teoremas a menos que lleguen a oídos del gran público. No los detalles, por supuesto, sino el carácter general de la iniciativa. En particular, el hecho de que constantemente se esté creando nueva matemática, y cual es su aplicación.

También el mundo ha cambiado desde los días de Hardy. Para Hardy una jornada típica consistía en un máximo de cuatro horas de intensa reflexión sobre problemas de investigación; el resto del día lo dedicaba a ver jugar al críquet, su gran pasión al margen de las matemáticas, y a leer los periódicos. Seguramente también debió de dedicar algún tiempo a los ocasionales estudiantes de investigación, pero él era reticente a hablar de cuestiones personales. Un día típico para un académico moderno dura diez o doce horas y se compone de obligaciones docentes, búsqueda de financiación para sus investigaciones, realización de la investigación y dosis abundantes de absurda burocracia para encauzarse en algo creativo.

Hardy era un representante típico de cierto tipo de académico inglés. Su listón era alto pero también muy estrecho. Valoraba el campo de estudio que había escogido por su propia elegancia y lógica interna, no por sus aplicaciones. Estaba orgulloso de que ningún aspecto de su trabajo pudiera tener tiñes bélicos, una postura con la que la mayoría de nosotros podemos simpatizar, especialmente si tenemos en cuenta que su libro se publicó en los primeros años de la segunda guerra mundial.

Si resucitase hoy se disgustaría mucho al ver que, por el contrario, su amada teoría de números desempeña un papel esencial en la teoría matemática de la criptografía, con evidentes usos militares. La película *Enigma* da una visión idealizada del periodo en el que empezó a emerger esta relación, en el trabajo decisivo que en tiempo de guerra realizaron los descifradores de códigos en Bletchley Park. Entre ellos destacaba la figura trágica de Alan Turing —matemático puro, matemático aplicado y pionero de la ciencia de los computadores—, quien acabó abocado al suicidio por su homosexualidad, orientación sexual entonces ilícita y considerada vergonzosa. También las costumbres cambian.

La clásica joya de Hardy arroja mucha luz sobre cómo se veían a sí mismos y a su disciplina los matemáticos académicos en 1940. Contiene lecciones importantes para cualquier joven aspirante a matemático, pero algunas de estas están oscurecidas por ciertas actitudes anticuadas presentes en el libro, como la falsa hipótesis de que las matemáticas son estrictamente un dominio masculino. Aun así vale la pena leerlo, tomando las opiniones del autor en su contexto histórico, sin dar por sentado que todas sigan teniendo validez.

Cartas a una joven matemática es un intento de actualizar algunas partes de *Apología de un matemático*, a saber, aquellas que podrían influir en las decisiones de una persona joven que esté considerando la posibilidad de licenciarse en matemáticas y hacer carrera en esta disciplina. Las cartas, dirigidas a «Meg», siguen la carrera profesional de ésta en un orden aproximadamente cronológico, desde el instituto hasta que consigue un puesto fijo en una universidad. Abordan un abanico de temas que van de la toma de decisiones básicas a la forma de pensamiento de los matemáticos profesionales en activo, y la naturaleza de su disciplina. La intención no se limita solo a dar un consejo práctico, sino a ofrecer una visión desde dentro del ámbito matemático y a explicar cómo es realmente la vida de un matemático.

Como resultado, muchas de las cuestiones discutidas también serán interesantes para un público más amplio, para aquel al que se dirigía Hardy: a cualquiera que esté interesado en las matemáticas y su relación con la sociedad. ¿Que son las matemáticas? ¿Para que sirven? ¿Cómo podemos aprenderlas? ¿Cómo podemos enseñarlas? ¿Es una actividad solitaria o puede hacerse en grupo? ¿Cómo funciona la mente matemática? ¿Y adónde se dirige todo?

Nunca hubiera pensado en escribir *Cartas a una joven matemática* si no hubiera sido por Basic Books y la maravillosa colección a la que pertenece este libro. El libro se benefició del consejo de mi editor, Bill Frucht, que se aseguró de que yo limitara mis divagaciones al tema en cuestión y las hiciera accesibles. El lector a quien está especialmente dirigido es el «joven matemático» del título, o sus padres, parientes, amigos... pero el libro debería atraer a quienquiera que este interesado en cómo hacerse, y ser, matemático, incluso aunque no se tengan tales ambiciones.

IAN STEWART

Coventry, septiembre de 2005

1

¿Por qué hacer matemáticas?

Querida Meg:

C omo probablemente esperabas, me alegré mucho al enterarme de que estabas pensando en estudiar matemáticas, en parte porque eso quiere decir que las semanas que pasaste leyendo y releiendo *A Wrinkle in Time* hace algunos veranos, y todas las horas que dediqué a explicarte *tesseracts* y dimensiones superiores, no fueron en balde.^[2] En lugar de responder a tus preguntas en el orden que las planteabas, déjame abordar primero la más práctica: ¿hay alguien, aparte de mí, que realmente se gane la vida con las matemáticas?

La respuesta es diferente de lo que piensa la mayoría de la gente. Hace algunos años en la universidad donde trabajo se realizó una encuesta entre los alumnos y se descubrió que, de entre todas las titulaciones, la que llevaba a obtener unos ingresos medios más altos era... matemáticas. Es verdad que la encuesta se hizo antes de que se abriera la nueva facultad de medicina, pero en cualquier caso echa por tierra un mito: que un matemático no puede conseguir un trabajo bien remunerado.

Lo cierto es que encontramos matemáticos todos los días y en todas partes, pero apenas nos damos cuenta. Antiguos alumnos míos han gestionado cervecerías, fundado sus propias compañías electrónicas, diseñado automóviles, creado *software* informáticos o comerciado con futuros en el mercado de valores. Sencillamente no se nos ocurre pensar que nuestro gestor bancario pueda ser licenciado en matemáticas, o que las personas que

inventan o fabrican reproductores de DVD y MP3 emplean a muchos matemáticos, o que la tecnología que transmite esas sorprendentes imágenes de las lunas de Júpiter se basa fundamentalmente en las matemáticas. Sabemos que nuestro médico es licenciado en medicina, y que nuestro abogado lo es en derecho, porque éstas son profesiones específicas y bien definidas que requieren formación igualmente específica. Pero no vemos chapas metálicas en los portales de los edificios en los que se anuncie que dentro hay un licenciado en matemáticas que, a cambio de unos buenos honorarios, le resolverá cualquier problema matemático para el que necesite ayuda.

Nuestra sociedad consume muchas matemáticas, pero todo sucede entre bastidores. La razón es simple: ahí es donde funcionan. Cuando uno conduce un automóvil no quiere tener que preocuparse por todas las cosas complicadas que hacen que funcione; lo que quiere es subir al coche y salir de viaje. Por supuesto, ayuda a ser mejor conductor el que uno conozca los fundamentos de la mecánica del automóvil, pero eso no es esencial. Lo mismo pasa con las matemáticas. Uno quiere que el sistema de navegación de su automóvil le dé las direcciones sin tener que hacer los cálculos matemáticos. Uno quiere que su teléfono funcione sin que tenga que entender el procesamiento de la señal y los códigos de corrección de errores.

Sin embargo, algunos de nosotros tenemos que saber cómo se hacen los cálculos matemáticos, o ninguna de estas maravillas podría funcionar. Estaría bien que los demás fueran conscientes de lo mucho que nos valemos de las matemáticas en nuestra vida cotidiana; el problema de poner a las matemáticas tan lejos entre bastidores es que mucha gente no sabe que están allí.

A veces pienso que la mejor manera de cambiar la actitud de la gente hacia las matemáticas sería pegar una etiqueta roja que rezara «Matemáticas en el interior» en cualquier cosa que necesita de las matemáticas. Habría una etiqueta en cada ordenador, por supuesto, y supongo que si tomásemos la idea literalmente deberíamos pegar una en cada profesor de matemáticas. Pero también deberíamos colocar una pegatina matemática roja en cada billete de avión, teléfono, automóvil, semáforo, vegetal...

¿Vegetal?

Sí. Ya pasó el tiempo en que los granjeros plantaban simplemente lo que habían plantado sus padres, y los padres de éstos antes. Prácticamente cualquier planta que uno puede comprar es resultado de un largo y complicado programa de cultivo comercial. Todo el tema del «diseño

experimental», en el sentido matemático, fue inventado a principios del siglo xx para facilitar una manera sistemática de evaluar nuevos tipos de plantas, por no mencionar los métodos más recientes de modificación genética.

Espera. ¿Esto no es biología?

Biología, por supuesto. Pero también matemáticas. La genética fue una de las primeras partes de la biología en hacerse matemática. El Proyecto Genoma Humano tuvo éxito gracias al gran y hábil trabajo realizado por los biólogos, pero un aspecto vital de todo el proyecto fue el desarrollo de potentes métodos matemáticos para analizar los resultados experimentales y reconstruir secuencias genéticas precisas a partir de datos muy fragmentarios.

Así que los vegetales llevan su pegatina roja. Casi todo lo que existe lleva una pegatina roja.

¿Vas al cine? ¿Te gustan los efectos especiales? ¿*La guerra de las galaxias*, *El señor de los anillos*? Matemáticas. El primer largometraje animado por ordenador, *Toy Story*, dio lugar a la publicación de unos veinte artículos de investigación en matemáticas. «Animación gráfica por ordenador» no es simplemente ordenadores que hacen imágenes; son los métodos matemáticos que logran que estas imágenes parezcan realistas. Para hacerlo se necesita la geometría tridimensional, las matemáticas de la luz, el «intercalado» para interpolar una serie fluida de imágenes entre un comienzo y un final, y mucho más. La «interpolación» es una idea matemática. Los ordenadores son ingeniería hábil, pero ellos no hacen nada útil sin un montón de matemáticas ingeniosas. Pegatina roja.

Y luego, por supuesto, está Internet. Si algo utiliza las matemáticas, es Internet. El principal motor de búsqueda actual, Google, se basó en un método matemático para encontrar las páginas web que es más probable que contengan la información requerida por un usuario. Se basa en álgebra matricial, teoría de probabilidades y la combinatoria de redes.

Pero las matemáticas para Internet son mucho más fundamentales que eso. La red telefónica se basa en las matemáticas. No es como en las viejas épocas en que los operadores en centralitas conectaban las llamadas enchufando con la mano literalmente las líneas telefónicas. Hoy dichas líneas tienen que llevar millones de mensajes a la vez. Somos tantos, todos esperando hablar con nuestros amigos o enviar faxes o acceder a Internet, que tenemos que compartir las líneas telefónicas, los cables transoceánicos y los repetidores en satélites, o la red no podría soportar todo ese tráfico. Así que cada conversación se divide en miles y miles de fragmentos cortos, y solo un fragmento de cada cien se transmite realmente. En el otro extremo, los

noventa y nueve fragmentos que faltan se recomponen llenando los huecos tan suavemente como sea posible (funciona porque las muestras, aunque cortas, son muy frecuentes, de modo que los sonidos que uno produce cuando habla cambian mucho más lentamente que el intervalo entre muestras). ¡Ah!, y toda la señal está codificada de modo que los errores de transmisión no solo pueden ser detectados sino que pueden ser corregidos en el extremo receptor.

Los modernos sistemas de comunicación simplemente no funcionarían sin una enorme cantidad de matemáticas. Teoría de codificación, análisis de Fourier, procesamiento de señal...

En cualquier caso, tú entras en Internet para conseguir un billete de avión, reservas tu vuelo y apareces en el aeropuerto, subes al avión, y allá vas. El avión vuela porque los ingenieros que lo diseñaron utilizaron las matemáticas del flujo de fluidos, la aerodinámica, para asegurar que se elevaría. Navega utilizando un sistema de posicionamiento global (GPS), un sistema de satélites cuyas señales, analizadas matemáticamente, pueden decirte dónde estás con mi margen de error de un metro. Los vuelos tienen que estar programados de modo que cada avión se halle en el lugar correcto cuando se necesita que esté cerca, en lugar de estar en algún lugar al otro lado del globo, y eso, de nuevo, requiere otras áreas de las matemáticas.

Y eso es lo que pasa, querida Meg. Tú me preguntabas si todos los matemáticos están encerrados en universidades, o si algunos trabajan en estrecho contacto con la vida real. Toda tu vida se balancea como una pequeña barca en un enorme océano de matemáticas.

Pero apenas se nota. Ocultar las matemáticas hace que nos sintamos cómodos, pero las devalúa. Es una pena. Hace que la gente piense que no son útiles, que no importan, que son solo juegos intelectuales sin ninguna aplicación verdadera. Y por eso me hubiera gustado ver esas pegatinas rojas. De hecho, la mejor razón para no ponerlas es que la mayor parte de nuestro planeta estaría cubierto de ellas.

Tu tercera pregunta era la más importante, y también la más triste. Me preguntabas si tendrías que abandonar tu sentido de la belleza para estudiar matemáticas, si todo se convertiría para ti en ecuaciones, leyes y fórmulas. Puedes estar segura, Meg, de que no te reprocho que preguntes eso, pues por desgracia es una idea muy común, pero no podría ser más errónea. Lo cierto es exactamente lo contrario.

Esto es lo que las matemáticas hacen por mí: me hacen consciente del mundo en el que habito de una forma completamente nueva. Abren mis ojos a

las leyes y pautas de la naturaleza. Me proporcionan una experiencia de belleza totalmente nueva.

Cuando veo un arco iris, por ejemplo, no solo veo un arco multicolor y brillante que cruza el cielo. No solo veo el efecto de las gotas de lluvia sobre la luz del sol, cuya luz blanca se descompone en sus colores constituyentes. Los arco iris siguen pareciéndome bellos y sugerentes, pero aprecio que hay más en un arco iris que la mera refracción de la luz. Los colores son, por decirlo así, una pista roja (y azul y verde)^[3]. Lo que requiere explicación es la forma y el brillo. ¿Por qué el arco iris es un arco circular? ¿Por que es tan brillante la luz del arco iris?

Quizá no hayas pensado en estas cosas. Sabes que un arco iris aparece cuando la luz del sol es refractada por minúsculas gotas de agua; la luz de cada color es desviada a un ángulo ligeramente diferente y, tras rebotar en la superficie interior de la gota, llega al ojo del observador desde una dirección distinta. Pero si eso es todo lo que hay en un arco iris, ¿por qué los miles de millones de rayos de diferentes colores procedentes de miles de millones de gotas no se solapan simplemente y se promedian?

La respuesta está en la geometría del arco. Cuando la luz rebota dentro de una gota de agua, la forma esférica de la gota hace que la luz salga fuertemente concentrada en una dirección especial. Cada gota emite de hecho un cono de luz brillante o, más bien, cada color de la luz forma su propio cono, y el ángulo del cono es ligeramente diferente para cada color. Cuando miramos un arco iris, nuestros ojos solo detectan los conos que proceden de gotas de lluvia que están alineadas en direcciones concretas, y para cada color dichas direcciones forman un círculo en el cielo. Así que vemos muchos círculos concéntricos, uno por cada color.

El arco iris que ves tú y el arco iris que veo yo están creados por gotas de lluvia diferentes. Nuestros ojos están en lugares diferentes, de modo que detectan conos diferentes, producidos por gotas diferentes.

Los arco iris son personales.

Algunas personas piensan que este tipo de comprensión «deteriora» la experiencia emocional. Creo que esto es una tontería. Manifiesta una complacencia estética muy limitada. La gente que hace estas afirmaciones suele presumir de que son personas poéticas, abiertos a las maravillas del mundo, pero de hecho sufren de una grave carencia de curiosidad: se niegan a creer que el mundo es más maravilloso que sus limitadas imaginaciones. La naturaleza es siempre más profunda, más rica y más interesante de lo que uno piensa, y las matemáticas proporcionan una forma muy poderosa de

apreciarlo. La capacidad para comprender es una de las diferencias más importantes entre los seres humanos y los demás animales, y deberíamos valorarla. Muchos animales se emocionan, pero solo los humanos piensan racionalmente. Yo diría que mi comprensión de la geometría del arco iris añade una nueva dimensión a su belleza. No resta nada de la experiencia emocional.

El arco iris es tan solo un ejemplo. También miro a los animales de forma diferente porque soy consciente de las pautas matemáticas que subyacen en sus movimientos. Cuando miro un cristal soy consciente de las bellezas de su red atómica tanto como del encanto de sus colores. Veo matemáticas en las ondas y dunas de arena, en la salida y la puesta de sol, en las gotas de lluvia que salpican en un charco, incluso en los pájaros posados en los cables telefónicos. Y soy consciente —difusamente, como si mirase por encima de un océano brumoso— de la infinitud de cosas que no sabemos acerca de esas maravillas cotidianas.

Luego está la belleza interna de las matemáticas, que no debería ser subestimada. Las matemáticas hechas «por su propio valor» pueden ser exquisitamente bellas y elegantes. No las «sumas» que todos hacemos en la escuela, que por separado son básicamente feas e informes, aunque los principios generales que las rigen tienen su propia belleza. Son las ideas, las generalidades, los repentinos destellos de intuición, la comprensión de que tratar de trisecar un ángulo con regla y compás es como tratar de demostrar que 3 es un número par, o que tiene perfecto sentido que no puedas construir un polígono regular de siete lados pero puedas construir uno de diecisiete lados, o que no haya manera de deshacer un nudo en el extremo de un cordel, o por qué algunos infinitos son mayores que otros mientras que algunos que deberían ser mayores son en realidad iguales, o que el *único* cuadrado (aparte de 1, si te pones quisquillosa) que es suma de cuadrados consecutivos, $1 + 4 + 9 + \dots$ es el número 4900.

Tú, Meg, tienes capacidad para convertirte en una matemática consumada. Tienes una mente lógica y también curiosa. No te convencen los razonamientos vagos; quieres ver los detalles y comprobarlos por ti misma. No solo quieres saber cómo hacer que las cosas funcionen, quieres saber por qué funcionan. Y tu carta me da esperanzas de que llegarás a ver las matemáticas como yo las veo, como algo fascinante y bello, una manera de ver el mundo sin parangón.

Tuyo,
Ian

2

Cómo estuve a punto de hacerme abogado

Querida Meg:

Me preguntas cómo me interesé por las matemáticas. Como suele pasar, fue una combinación de talento (no vale la pena ser modesto), aliento y un accidente afortunado o, mejor dicho, salir recuperado de un accidente desgraciado.

Desde el principio se me dieron bien las matemáticas, pero cuando tenía siete años estuve muy cerca de abandonarlas de por vida. Nos pusieron un examen de matemáticas: se suponía que teníamos que restar los números, pero yo hice lo mismo que habíamos hecho la semana anterior, y los sumé. Así que me pusieron un cero y me colocaron en el último grupo de la clase. Puesto que los otros niños que había en ese grupo no eran buenos en matemáticas, no hacíamos nada interesante. No había nada que me animase a esforzarme y me aburría.

Me salvaron dos cosas: un hueso roto y mi madre.

Uno de los niños me tiró al suelo mientras jugábamos en el patio y me rompí la clavícula. Durante cinco semanas no asistí a la escuela, así que mi madre decidió hacer buen uso del tiempo. Pidió prestado el libro de aritmética en la escuela e hicimos un trabajo de recuperación. Yo no podía escribir porque llevaba la mano derecha en cabestrillo, así que le dictaba los números y ella los escribía en el cuaderno de ejercicios.

Mi madre tenía bastantes reparos respecto al sistema escolar. Su educación se había visto casi completamente frustrada por las decisiones erróneas de un inspector de enseñanza bien intencionado pero poco imaginativo. Ella lo captaba todo al vuelo, y por ello pasaba rápidamente de un curso a otro, de modo que cuando tenía ocho años estaba en una clase para niños de diez. Un día llegó el inspector de enseñanza, miró a la clase y preguntó a la niña pequeña e inteligente que estaba respondiendo a todas las preguntas: «¿Cuántos años tienes, cariño?». Cuando oyó «Ocho», informó al director de la escuela de que la niña brillante debía permanecer en la misma clase durante tres años seguidos, hasta que los demás niños de su edad la alcanzasen. No estaba tratando de guardarse las espaldas desde el punto de vista académico; le preocupaba que ella no se adaptara socialmente. Pero repetir las mismas lecciones tres años seguidos acabó con el interés de mi madre en la escuela; solo aprendía a holgazanear.

Tiempo después entendió lo que había sucedido, pero para entonces era demasiado tarde. Quería ser profesora de inglés, pero suspendió el examen de química. En aquella época, en Reino Unido, suspender tan solo una asignatura, incluso una que fuera completamente irrelevante para la materia que uno quería enseñar, significaba que no podría formarse como profesor.

Mi madre estaba decidida a que nada parecido me su cediera. Ella sabía que yo era inteligente; me había enseñado a leer cuando yo tenía tres años. Después de que hubiéramos hecho 400 problemas de matemáticas y yo hubiera resuelto correctamente 396, llevó el cuaderno de ejercicios a la escuela, se lo mostró al jefe de estudios y pidió que me pasaran al primer grupo de la clase de matemáticas.

Cuando mi clavícula se soldó y volví a la escuela, iba diez semanas por delante del resto de la clase de matemáticas. Nos habíamos pasado un poco. Afortunadamente no sufrí demasiado mientras la clase me alcanzaba.

El mío no era un mal profesor. De hecho, era un hombre muy amable, pero carecía de imaginación para darse cuenta de que me había puesto en el grupo equivocado y que su error iba a perjudicar mi educación. Yo había sacado un cero en el examen por falta de atención, no porque no comprendiera la materia. Si me hubiera dicho simplemente que leyera las preguntas con cuidado, lo habría hecho bien.

Tuve suerte, entonces, gracias fundamentalmente al buen hacer de mi madre y su disposición a apoyarme. Pero también estoy en deuda con mi compañero de clase por llevarme al hospital. Él lo había hecho sin ninguna

intención —todos nos estábamos empujando—, pero salvo mi carrera matemática.

Después de aquello he tenido varios profesores de matemáticas realmente brillantes. Pero, para ser sinceros, de éstos hay pocos. Hubo uno llamado W. E. B. Beck (al que nosotros llamábamos «araña»)^[4] cuyo examen de matemáticas de los viernes era una costumbre añeja. No eran exámenes fáciles. Se calificaban de cero a veinte puntos, y a medida que pasaban las semanas iban sumándose las notas que sacaba cada niño. Los que eran buenos en matemáticas se desesperaban por lograr ser los primeros al cabo del año; los otros simplemente se desesperaban. No estoy seguro de que fuera un método educativo aceptable —de hecho estoy seguro de que no lo era— pero el elemento competitivo me benefició a mí y a unos pocos colegas.

Una de las reglas de Beck era que si faltabas a un examen, incluso si estabas enfermo, sacabas un cero. No había excusa. De modo que aquellos de nosotros que queríamos ganar la competición necesitábamos que contase cada punto. Sabíamos que nos hacía falta un colchón, pues uno no estaba seguro a menos que fuera por delante con más de veinte puntos. Así que no se podía perder ningún punto por cometer errores estúpidos. Uno leía cada pregunta, asegurándose de que había hecho lo que se pedía, lo comprobaba todo y luego lo volvía a comprobar.

Más tarde, cuando tenía dieciséis años, tuve un profesor de matemáticas llamado Gordon Radford. Normalmente se consideraba afortunado si en su clase contaba con un muchacho que realmente tuviese talento para las matemáticas, pero en mi clase éramos seis. De modo que pasaba todos sus ratos libres enseñándonos matemáticas extra fuera del temario. Durante las clases ordinarias de matemáticas nos decía que nos sentáramos al fondo e hiciéramos nuestra tarea para casa; no solo de matemáticas, sino *cualquier tarea*. Y a callar. Esas lecciones no eran para nosotros; teníamos que dar al resto de la clase una oportunidad.

El señor Radford me abrió los ojos a lo que eran real mente las matemáticas: variadas, creativas, llenas de novedad y originalidad. E hizo por mí algo más importante.

En aquella época había un examen público de ingreso en la universidad llamado beca del Estado que ofrecía financiación para ir a estudiar. Aunque era necesario tener una plaza, una beca del Estado suponía una gran ventaja. Aquel era el último curso en que se ofrecía la beca del Estado, pero dos amigos y yo teníamos un año menos de lo que se requería para presentarse al examen. El señor Radford tuvo que convencer al director para que nos

admitiese en el examen un año antes de lo previsto, algo que el director nunca hacía.

Una mañana, cuando mis dos amigos y yo llegamos a la escuela, el señor Radford nos dijo que nos sumásemos a la clase que iba un curso por delante de nosotros para pasar un «examen previo» a la beca del listado en matemáticas. Era una prueba. Los chicos mayores habían cursado un año más de matemáticas y habían estado practicando durante semanas; a nosotros nos avisaron con cinco minutos de antelación. Yo quedé el primero, y mis amigos fueron segundo y tercero.

Así que el director no tuvo otra elección que dejar que nos presentáramos al examen. Después de todo, él estaba permitiendo que se presentasen los chicos mayores, y nosotros habíamos demostrado que estábamos mejor preparados que ellos.

A los tres se nos concedieron becas del Estado.

En aquel momento, el señor Radford entró en contacto con David Epstein, que había sido alumno suyo algunos años antes y se había hecho matemático en la Universidad de Cambridge, que junto con Oxford era la primera universidad de Reino Unido, especialmente reputada por sus matemáticas.

«¿Qué debo hacer con este muchacho?», preguntó Gordon.

«Envíanoslo», dijo David.

Y así fui a estudiar matemáticas a Cambridge, el hogar de Isaac Newton, Bertrand Russell y Ludwig Wittgenstein (junto con muchas luminarias menores), y nunca miré atrás.

En algunas carreras parece que se aglutine gente que fácilmente podría haber preferido hacer alguna otra cosa. Hay personas que dicen que practican el derecho como trabajo, pero que en realidad son novelistas o dramaturgos o trombonistas de *jazz*. Otras personas no pueden asentarse en algo, o ven sus carreras en términos más prácticos, y acaban dedicándose a la gestión de recursos humanos o a las ventas comerciales. Eso no quiere decir que estas personas no estén dedicadas o satisfechas con lo que hacen, pero pocas de ellas consideran su trabajo como una vocación.

Nadie llega sin querer a ser matemático. Por el contrario, es un empeño en el que incluso las personas con talento pueden quedar apartadas. Si yo no me hubiese roto la clavícula, si el señor Radford no hubiera fomentado una fuerte competencia entre sus alumnos, si no hubiera habido un grupo inusualmente grande de buenos estudiantes para que el señor Radford los promocionase —y si él no lo hubiera hecho de forma tan agresiva— en lugar de escribirte hoy podría estar explicándole a tus padres cómo pagar menos impuestos. Y quizá

nadie, y mucho menos yo, sospecharía que las cosas podrían haber sido diferentes.

En resumen, Meg, no debes esperar que tus profesores te miren y simplemente *descubran*, de pronto, lo prometedora que eres. No debes esperar que detecten infaliblemente tu talento y sepan dónde podría llevarte. Algunos lo harán, y les estarás agradecida para el resto de tu vida. Pero otros, lamentablemente, no pueden hacerlo, o no les importa mucho, o están atrapados en sus propias preocupaciones y resentimientos. Además, los que se admiren de tus dones no son los mismos que aquellos de quienes finalmente aprenderás más. Los mejores profesores harán de vez en cuando, quizá más que de vez en cuando, que te sientas un poco estúpida.

3

La amplitud de las matemáticas

Querida Meg:

No es difícil adivinar, en tu pregunta, una sensación de —no lo sé— aburrimiento anticipado, o quizá cierta preocupación por lo que has dejado atrás. Todo es ahora razonablemente interesante, pero como tú dices, «¿Es esto todo lo que hay?». Estás leyendo a Shakespeare, a Dickens y a T. S. Eliot en las clases de inglés, y puedes suponer razonablemente que, aunque ellos son por supuesto una muestra minúscula de la gran literatura universal, en la literatura inglesa no existe un nivel mayor que el que te ha sido revelado. Así que naturalmente preguntas, por analogía, si las matemáticas que estás aprendiendo en el instituto *son* las matemáticas. ¿Hay algo en los niveles superiores aparte de números más grandes y cálculos más difíciles?

Lo que has visto hasta ahora no es realmente lo más importante.

Los matemáticos no pasan la mayor parte del tiempo haciendo cálculos numéricos, incluso aunque los cálculos sean a veces esenciales para avanzar. No se dedican a machacar fórmulas simbólicas, aunque las fórmulas pueden ser indispensables. Las matemáticas escolares que te están enseñando son principalmente algunos trucos básicos del oficio y la forma de usarlos en contextos muy simples. Si estuviésemos hablando de carpintería, es como aprender a utilizar un martillo para clavar un clavo, o a serrar una pieza de madera. Nunca verás un torno o una taladradora eléctrica ni aprenderás, a construir una silla, ni mucho menos a diseñar y construir un mueble.

No es que un martillo y una sierra no sean útiles. No puedes hacer una silla si no sabes cómo cortar la madera con el tamaño correcto. Pero no deberías suponer que puesto que eso es todo lo que has hecho en la escuela, eso es todo lo que hacen los carpinteros.

Una gran parte de lo que ahora se llama «matemáticas» en la escuela es en realidad aritmética: diversas notaciones para los números, y métodos para sumar, restar, multiplicar y dividir. Cuando te hagas mayor te mostrarán otras herramientas: álgebra elemental, trigonometría, geometría analítica, quizás algo de cálculo infinitesimal. Si tu temario se «modernizó» en los años sesenta y setenta del siglo pasado, quizá veas matrices dos-por-dos y mínimas nociones de teoría de grupos. «Moderno» es una extraña palabra para utilizarla aquí: significa que tiene entre cien y doscientos años, frente a las matemáticas de más de doscientos años de antigüedad que constituían el grueso del temario más antiguo.

Por desgracia, es casi imposible llegar a los aspectos más interesantes de la disciplina si no sabes cómo hacer sumas y hacerlas bien, cómo resolver ecuaciones básicas o qué es una elipse. Los niveles más altos de cada actividad humana exigen una sólida comprensión de los niveles básicos; piensa en el tenis o en tocar el violín. Resulta que las matemáticas requieren un montón de conocimientos y técnicas básicas.

En la universidad te encontrarás con un concepto mucho más amplio de las matemáticas. Además de los números familiares, están los números complejos, donde -1 tiene una raíz cuadrada. Aparecerán cosas mucho más importantes que los números, tales como las funciones: reglas que asignan a cualquier número escogido otro número específico. «Cuadrado», «coseno», «raíz cúbica», todas éstas son funciones. No tendrás que resolver simplemente ecuaciones con dos incógnitas; entenderás las soluciones de ecuaciones simultáneas con cualquier número de incógnitas, si dichas soluciones existen, ya que a veces no lo hacen. (Trata de resolver $x + y = 1$, $2x + 2y = 3$.) Quizás aprendas cómo resolvían los grandes matemáticos del Renacimiento ecuaciones cúbicas y cuárticas (que incluyen cubos y cuartas potencias de la incógnita), no solo ecuaciones de segundo grado. Si es así, probablemente descubrirás por qué dichos métodos fallan para las ecuaciones quinticas (quintas potencias). Verás por qué esto se hace casi obvio si uno pasa por alto los valores numéricos de las soluciones de las ecuaciones y en su lugar piensa en sus simetrías, y por qué es más importante comprender las simetrías de las ecuaciones que ser capaces de resolverlas.

Descubrirás como formalizar el concepto de simetría en términos abstractos, que es lo que hace la teoría de grupos. Descubrirás que la geometría de Euclides no es la única posible, y pasarás a la topología, donde círculos y triángulos se hacen indistinguibles. Tu intuición será puesta a prueba por las bandas de Möbius, que son superficies con una sola cara, y por los fractales, que son formas tan complejas que tienen un número fraccionario de dimensiones. Aprenderás métodos para resolver ecuaciones diferenciales, y con el tiempo te darás cuenta de que la mayoría de ellas no pueden ser resueltas por dichos métodos; entonces aprenderás cómo a pesar de todo pueden entenderse y utilizarse, incluso cuando no se pueden escribir sus soluciones. Descubrirás por qué todo número puede descomponerse de forma unívoca en factores primos, te sentirás intrigada ante la aparente carencia de pautas en los números primos pese a sus regularidades estadísticas, y desconcertada por problemas abiertos como la hipótesis de Riemann^[5]. Encontrarás diferentes tamaños de infinito, descubrirás las razones reales por las que π es importante, y demostrarás que los nudos existen. Más tarde comprenderás cuán abstracta se ha vuelto tu disciplina, cuánto se ha alejado de los simples números, y entonces los números captarán de nuevo tu atención, reapareciendo como ideas clave.

Aprenderás por qué las peonzas cabecean y en qué afecta eso a las eras glaciares; comprenderás la demostración de Newton de que las órbitas de los planetas son elípticas, y descubrirás por qué no son *perfectamente* elípticas, lo que abre la caja de Pandora de la dinámica caótica. Tus ojos se abrirán al enorme abanico de usos de las matemáticas, desde la estadística de la reproducción de las plantas a la dinámica orbital de las sondas espaciales, desde Google al GPS, desde las ondas oceánicas a la estabilidad de los puentes, desde las gráficas en *El señor de los anillos* a las antenas de los teléfonos móviles.

Llegarás a darte cuenta de que mucho de nuestro mundo sería imposible sin las matemáticas.

Y cuando examines esta gloriosa diversidad, te preguntarás qué es lo que une todo eso: ¿por qué todas esas ideas tan dispares se llaman matemáticas? Habrás pasado de preguntar «¿Es esto todo lo que hay?», a estar ligeramente sorprendida de que pueda haber tanto. Para entonces, de la misma forma en que puedes reconocer una silla pero no puedes definirla de una manera que no admita excepciones, te percatarás de que puedes reconocer las matemáticas cuando las ves, pero sigues sin poder definirlas.

Y así debería ser. Las definiciones fijan las cosas, limitan las perspectivas de creatividad y diversidad. Una definición, implícitamente, intenta reducir todas las posibles variantes de un concepto a una sucinta y única expresión. Las matemáticas, como todo lo que está en desarrollo, tienen siempre la capacidad de sorprender.

Las escuelas —no solo la tuya, Meg, sino las de todo el mundo— están tan preocupadas por enseñar a sumar que apenas preparan a los alumnos para responder (o incluso plantear) la pregunta mucho más difícil e interesante: ¿qué son las matemáticas? E incluso si las definiciones son demasiado limitadoras, aún podemos tratar de captar la esencia de nuestra disciplina utilizando algo en lo que el cerebro humano es inusualmente bueno: la metáfora. Nuestros cerebros no son como los ordenadores, que trabajan sistemática y lógicamente. Son máquinas de metáforas, que saltan a conclusiones creativas y posteriormente las apuntalan con argumentos lógicos. Así, cuando te digo que una de mis «definiciones» favoritas de las matemáticas es la de Lynn Arthur Steen «La ciencia de la forma significativa», puedes pensar que he hurgado en la cuestión, hablando metafóricamente.

Lo que me gusta de la metáfora de Steen es que capta algunos aspectos esenciales. Por encima de todo, es abierta; no intenta concretar qué tipo de forma debería considerarse significativa, o qué se supone que significan «forma» o «significativa». También me gusta la palabra «ciencia», porque las matemáticas comparten con las ciencias mucho más que con las artes. Tiene la misma dependencia de la verificación estricta, salvo que en la ciencia esto se hace mediante experimentos, mientras que en las matemáticas se utilizan demostraciones. Opera igualmente dentro de ligaduras estrechamente especificadas: uno no puede simplemente establecerlas sobre la marcha. Aquí me alejo de los posmodernos, que afirman que todo (excepto, al parecer, el posmodernismo) es meramente una convención social. La ciencia, nos dicen, solo consiste en opiniones que son mantenidas por muchos científicos. A veces es así —la creencia dominante de que el recuento del esperma humano está bajando^[6] es probablemente un ejemplo—, pero en general no lo es. No hay duda de que la ciencia tiene un lado social, pero también tiene el control de realidad del experimento. Incluso los posmodernos deben entrar en una habitación siempre por la puerta, y no por la pared.

Hay un libro famoso titulado *¿Qué son las matemáticas?* escrito por Richard Courant y Herbert Robbins. Como sucede con la mayoría de los libros cuyos títulos son preguntas, la pregunta nunca acaba de responderse del todo. Pero aun así los autores dicen cosas muy sabias. En el prólogo se lee:

«Las matemáticas como expresión de la mente humana reflejan la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética». Prosiguen: «Todo desarrollo matemático tiene sus raíces en requisitos más o menos prácticos. Pero una vez iniciado bajo la presión de aplicaciones necesarias, inevitablemente gana impulso por sí mismo y trasciende los confines de la utilidad inmediata». Y terminan de esta forma: «Afortunadamente, las mentes creativas olvidan las creencias filosóficas dogmáticas cuando la adhesión a ellas impediría un logro constructivo. Para eruditos y profanos por igual, no es la filosofía, sino la propia experiencia activa en matemáticas, la única que puede responder a la pregunta: ¿qué son las matemáticas?». O, como suele decir mi amigo David Tall: «Las matemáticas no son un deporte para espectadores».

Algunos matemáticos están más interesados que otros en la filosofía de su disciplina, y entre los destacados filósofos de las matemáticas actuales sobresale Reuben Hersh. Él observó que Courant y Robbins respondían a su pregunta «*mostrando* qué son las matemáticas, no *diciendo* qué son». Después de devorar el libro con asombro y deleite, aún seguía preguntándome, «Pero ¿qué son las matemáticas realmente?». De modo que Hersh escribió mi libro con ese título, donde daba lo que él decía que era una respuesta poco convencional.

Tradicionalmente ha habido dos escuelas fundamentales de filosofía matemática: platonismo y formalismo. Los platónicos creen que los objetos matemáticos existen de algún modo (ligeramente místico). Están «ahí fuera» en algún reino abstracto. Ese reino no es imaginario, sin embargo, porque la imaginación es una característica humana. Es *real*, en un sentido no físico. El círculo del matemático, con su circunferencia infinitamente delgada y un radio que permanece constante con infinitas cifras decimales, no puede tomar forma física. Si lo dibujas en la arena, como hacía Arquímedes, su contorno es demasiado grueso y su radio demasiado variable. Tu dibujo es solo una aproximación al círculo matemático platónico. Grábalo en una tableta de platino con una aguja con punta de diamante: siguen apareciendo las mismas dificultades.

¿En qué sentido entonces *existe* un círculo matemático? Y si no lo hace, ¿cómo puede ser de utilidad? Los platónicos nos dicen que el círculo matemático es un ideal, no realizado en este mundo pero que en cualquier caso tiene una realidad que es independiente de las mentes humanas.

Para los formalistas estas ideas resultan confusas y sin significado. El primer formalista importante fue David Hilbert, que intentó colocar el

conjunto de las matemáticas sobre una firme base lógica tratándolo efectivamente como un juego sin significado que se juega con símbolos. Un enunciado como $2 + 2 = 4$ no era, desde este punto de vista, algo interpretable en términos de, digamos, poner dos ovejas en un redil con otras dos y tener así cuatro ovejas. Era el resultado de un juego jugado con los símbolos 2,4, +, y =. Pero el juego debe jugarse de acuerdo con una lista explícita de reglas absolutamente rígidas.

Filosóficamente, el formalismo murió cuando Kurt Gödel demostró, para irritación inicial de Hilbert, que ninguna teoría formal puede abarcar la totalidad de la aritmética y ser lógicamente consistente. Siempre habrá enunciados matemáticos que permanecen fuera del juego de Hilbert: no son ni demostrables ni refutables. Cualquier enunciado semejante puede añadirse a los axiomas de la aritmética sin crear ninguna incongruencia. La negación de un enunciado semejante tiene la misma característica. Así que podemos estimar que semejante enunciado es verdadero, o podemos estimarlo falso, y el juego de Hilbert puede jugarse en ambos casos. En particular, la idea de que la aritmética es tan básica y natural que tiene que ser única es errónea.

La mayoría de los matemáticos en activo han pasado por alto esto, igual que no han tenido en cuenta el aparente misticismo de la idea platónica, probablemente porque las preguntas interesantes en matemáticas son aquellas que pueden ser demostradas o refutadas. Cuando estás haciendo matemáticas, *parece* que lo que estás haciendo es real. Uno casi puede coger las cosas y darles la vuelta, apretarlas y acariciarlas, y fragmentarlas. Por otra parte, a menudo avanzas olvidando lo que todo eso significa y centrándote solamente en cómo bailan los signos. De modo que la filosofía activa de la mayoría de los matemáticos es un híbrido entre platonismo-formalismo básicamente neutro.

Eso está bien si todo lo que quieres es *hacer* matemáticas. Como dice Hersh: «Las matemáticas vienen primero, y luego se filosofa sobre ellas, y no al revés». Pero si, como Hersh, sigues preguntándote si podría haber una manera mejor de describir esa filosofía activa, vuelves a la misma pregunta básica de qué son las matemáticas.

La respuesta de Hersh es lo que él llama la filosofía humanista. Las matemáticas son «una actividad humana, un fenómeno social, parte de la cultura humana, desarrollada históricamente e inteligible solo en un contexto social». Eso es una descripción, no una definición, pues no especifica el contenido de dicha actividad. La descripción puede sonar algo posmoderna, pero se hace más comprensible que el posmodernismo por la convicción de

Hersh de que las convenciones sociales que gobiernan las actividades de las mentes humanas están sometidas a estrictas ligaduras no sociales, a saber, que todo debe encajar lógicamente. Incluso si los matemáticos se reunieran y acordaran que π es igual a 3, no lo sería. Nada tendría sentido.

Un círculo matemático, entonces, es algo más que una ficción compartida. Es un concepto dotado de características muy específicas; «existe» en el sentido de que las mentes humanas pueden deducir otras propiedades a partir de dichas características, con la salvedad crucial de que si dos mentes investigan la misma pregunta, no pueden, mediante un razonamiento correcto, llegar a respuestas contradictorias.

Por eso es por lo que parece que las matemáticas estén «ahí fuera». Encontrar la respuesta a una pregunta abierta se parece a un descubrimiento, no a una invención. Las matemáticas son un producto de las mentes humanas pero no pueden someterse a la voluntad humana. Explorarlas es como explorar un nuevo sendero en el terreno; quizá no sabes qué hay en la siguiente curva del río, pero no tienes que escoger. Solo puedes esperar y descubrirlo. Pero el terreno matemático no existe hasta que uno lo explora.

Cuando dos miembros de la facultad de humanidades se ponen a discutir quizá les parezca imposible llegar a una solución. Cuando discuten dos matemáticos —y lo hacen, a menudo de un modo muy apasionado y agresivo— de repente uno se detiene y dice: «Lo siento, tienes toda la razón, ahora veo mi error». Y se irán y comerán juntos, como grandes amigos.

Estoy bastante de acuerdo con Hersh. Si crees que la descripción humanista de las matemáticas es un poco confusa, que ese tipo de «construcción social compartida» es una extravagancia, Hersh ofrece algunos ejemplos que podrían hacerte cambiar de opinión. Uno es el dinero. Todo el mundo se basa en el dinero, pero ¿qué es? No es un trozo de papel o moneda de metal, que podrían ser impresos o acuñados de nuevo, o llevados a un banco y destruidos. No son números en un ordenador: si el ordenador explotara, aún seguirías siendo titular de tu dinero. El dinero es una construcción social compartida. Tiene valor porque todos estamos de acuerdo en que tenga valor.

De nuevo, hay ligaduras fuertes. Si le dices a tu agente bancario que tu cuenta contiene más de lo que dice su ordenador, él no responde: «No pasa nada, es solo una construcción social; aquí hay diez millones de dólares extra. Disfrútalos».

Es tentador pensar que incluso si consideramos las matemáticas como una construcción social compartida, tienen un tipo de inevitabilidad lógica, de

modo que cualquier mente inteligente llegaría a las *mismas* matemáticas. Cuando las naves espaciales *Pioneer* y *Voyager* fueron enviadas al espacio llevaban mensajes codificados de la humanidad dirigidos a cualquier especie extraterrestre que algún día pudiera encontrarlos. El *Pioneer* llevaba una placa con un diagrama del átomo de hidrógeno, un mapa de los púlsares vecinos para mostrar dónde está localizado nuestro sol, dibujos lineales de un hombre y una mujer desnudos de pie delante de un boceto de la nave espacial, para fijar la escala, y una imagen esquemática del sistema solar para mostrar en qué planeta habitamos. Las dos naves *Voyager* llevaban registros con sonidos, música e imágenes científicas.

¿Sería capaz un receptor alienígena de descifrar estos mensajes? Una imagen como o-o, dos círculos unidos por una línea, ¿sería *realmente* para ellos parecida al átomo de hidrógeno? ¿Qué pasa si su versión de la teoría atómica se basara en funciones de onda cuánticas en lugar de en imágenes primitivas de «partículas», que incluso nuestros físicos nos dicen que son completamente inexactas? ¿Entenderían los alienígenas los dibujos lineales, dado que seres humanos pertenecientes a tribus que nunca han visto nada así son incapaces de entenderlos? ¿Considerarían importantes los pulsares?

En muchas discusiones sobre estas cuestiones, uno acaba oyendo el argumento de que incluso si no captaran nada más, cualquier alienígena inteligente sería capaz de comprender pautas matemáticas simples, y el resto puede construirse a partir de ello. La hipótesis implícita es que las matemáticas son de algún modo universales. Los alienígenas contarían uno, dos, tres... igual que lo hacemos nosotros. Seguramente verían la pauta implicada en día gramas como * ** *** ****.

Yo no estoy tan seguro. He estado leyendo *Diamond Dogs*, de Alastair Reynolds, una novela sobre una construcción alienígena, una torre extraña y terrorífica, a través de cuyas habitaciones uno va avanzando resolviendo enigmas. Si das la respuesta errónea, mueres, de malicia horrible. La historia de Reynolds tiene mucha fuerza, pero hay una hipótesis subyacente según la cual los alienígenas plantearían enigmas matemáticos semejantes a los que plantearía un humano. De hecho, las matemáticas alienígenas son demasiado próximas a las humanas; incluyen la topología y un área de la física matemática conocida como teoría de Kaluza-Klein. Eso es tan probable como que llegues al quinto planeta de Próxima Centauri y encuentres un Walmart. Sé que las limitaciones narrativas exigen que las matemáticas *parezcan* matemáticas para el lector, pero incluso así, para mí eso no funciona.

Creo que las matemáticas humanas están mucho más ligadas de lo que imaginamos a nuestra fisiología concreta, nuestras experiencias y nuestras preferencias psicológicas. Son locales, no universales. Los puntos y líneas de la geometría pueden parecer la base natural para una teoría de las formas, pero son también los rasgos a partir de los que nuestro sistema visual disecciona el mundo. Para un sistema visual alienígena podrían ser primarias la luz y la sombra, o el movimiento y el reposo, o la frecuencia de vibración. Un cerebro alienígena podría encontrar que el olfato, o la vergüenza, pero no la forma, son fundamentales para su percepción del mundo. Y aunque los números específicos como 1, 2, 3 a nosotros nos parecen universales, tienen origen en nuestra tendencia a reunir cosas similares, como ovejas, y considerarlas como una propiedad: ¿han robado una de *mis* ovejas? La aritmética parece originarse en dos cosas: la sucesión de las estaciones y el comercio. Pero ¿qué pasa con las criaturas aeriformes del distante Poseidón, un hipotético gigante de gas como Júpiter cuyo mundo es un flujo continuo de vientos turbulentos, y que no tienen ninguna idea de la propiedad individual? Antes de que ellos pudieran contar hasta tres, cualquier cosa que estuvieran contando se habría desvanecido en la brisa de amoníaco. Sin embargo, ellos comprenderían mucho mejor que nosotros las matemáticas del flujo de fluidos turbulento.

Creo que sigue siendo verosímil que allí donde las matemáticas de los seres aeriformes y las nuestras entran en contacto, ambas serán lógicamente coherentes entre sí. Podrían ser regiones lejanas del mismo paisaje. Pero incluso eso podría depender del tipo de lógica que se utiliza.

La creencia de que hay solo *unas* matemáticas —las nuestras— es una creencia platónica. Es posible que «las» formas ideales estén «ahí fuera», pero también que «ahí fuera» pudiera comprender más de un reino abstracto, y que las formas ideales no tengan por qué ser únicas. El humanismo de Hersh se convierte en aeriformismo poseidoniano: las matemáticas de los alienígenas serían una construcción social compartida por *su* sociedad... si tuvieran una sociedad. Si no la tuvieran —si no se comunicaran—, ¿podrían poseer siquiera una concepción de las matemáticas? De la misma forma que no podemos imaginar unas matemáticas que no estén basadas en los números para contar, no podemos imaginar una especie «inteligente» cuyos miembros no se comuniquen entre sí. Pero el hecho de que no podamos imaginar algo no es una prueba de que no exista.

Pero me estoy desviando del tema. ¿Qué son las matemáticas? Desesperados, algunos han propuesto la siguiente definición: «Las

matemáticas es lo que hacen los matemáticos». ¿Y qué son los matemáticos? «Gente que hace matemáticas». Este argumento es casi platónico en su perfecta circularidad. Pero déjame plantear una pregunta similar. ¿Qué es un hombre de negocios? ¿Alguien que hace negocios? No. Es alguien que «ve oportunidades» para hacer negocios cuando otros podrían pasarlas por alto.

Un matemático es alguien que ve oportunidades para hacer matemáticas.

Estoy completamente seguro de que esto es cierto, y precisa una diferencia importante entre los matemáticos y el resto de personas. ¿Qué son las matemáticas? Son una construcción social compartida creada por personas que son conscientes de ciertas ocasiones; a esas personas las llamamos matemáticos. La lógica sigue siendo ligeramente circular, pero los matemáticos siempre pueden reconocer a un colega. Descubrir qué hace ese colega será un aspecto más de nuestra construcción social compartida.

Bienvenida al club.

4

¿No está todo hecho?

Querida Meg:

En tu última carta me preguntabas hasta qué punto las matemáticas de la universidad pueden ir más allá de las que ya has estudiado en la escuela. Nadie quiere pasar tres o cuatro años repasando las mismas ideas, incluso aunque se esté profundizando en ellas. Ahora, mirando hacia delante, también tienes razón en preocuparte por el margen que existe para crear nuevas matemáticas. Si otros ya han explorado un territorio tan vasto, ¿cómo puedes encontrar tu camino hasta la frontera? ¿Queda siquiera alguna frontera?

Para empezar, mi tarea es simple. Puedo tranquilizarte sobre ambos puntos. En todo caso, lo que debería preocuparte es todo lo contrario: que la gente este creando demasiadas matemáticas nuevas, y que el margen para una nueva investigación es tan gigantesco que sera difícil decidir donde o en qué dirección proceder. Las matemáticas no son una forma robótica de sustituir el pensamiento por rituales rígidos. Es la actividad más creativa del planeta.

Estas afirmaciones serán nuevas para mucha gente, incluidos posiblemente algunos de tus profesores. Siempre me sorprende que haya tantas personas que parecen creer que las matemáticas se limitan a lo que se les enseñó en la escuela, y que básicamente «todo está hecho». Más sorprendente aún es la suposición de que puesto que «todas las respuestas están al final del libro» no hay margen para la creatividad y no quedan preguntas por responder. ¿Por qué hay tantas personas que piensan que su libro de texto de la escuela contiene todas las preguntas posibles?

Esta falta de imaginación equivaldría a una deplorable ignorancia si no fuera por dos factores que juntos necesitan una larga explicación.

El primero es que muchos estudiantes llegan rápidamente a aborrecer las matemáticas en su paso por el sistema escolar. Las encuentran rígidas, aburridas, repetitivas y, lo peor de todo, difíciles. Las respuestas son correctas o erróneas, y ninguna ingeniosa disputa verbal con el profesor puede convertir una respuesta errónea en una correcta. Las matemáticas son una disciplina que no perdona. Habiendo desarrollado esta actitud negativa, de lo último que quiere oír hablar el alumno es de que hay matemáticas que van más allá del abrumador contenido de sus libros. La mayoría de la gente quiere que todas las respuestas estén al final del libro, porque de lo contrario no pueden buscarlas.

Dame Kathleen Ollerenshaw, una de las más distinguidas matemáticas y educadoras de Gran Bretaña, que sigue haciendo investigación a los noventa años, señala exactamente esto mismo en su autobiografía *To Talk of Many Things*. (Léelo, Meg; es estimulante, y muy sabio). «Cuando en la adolescencia le dije a una amiga que yo iba a investigar en matemáticas, su respuesta fue: “¿Por qué hacer eso? Ya tenemos bastantes matemáticas con las que tratar, no queremos más”».

Las hipótesis que hay tras esta respuesta merecen un examen, pero me contentaré con señalar una. ¿Por qué la amiga de Kathleen supone que las matemáticas recién inventadas aparecerán automáticamente en los textos escolares? De nuevo nos hallamos ante la misma creencia: que las matemáticas que te enseñan en la escuela es todo el universo de las matemáticas. Pero nadie piensa eso de la física, la química o la biología, o incluso del francés o la economía. Todos sabemos que lo que nos enseñan en la escuela es solo una minúscula parte de lo que se conoce actualmente.

A veces me gustaría que las escuelas volvieran a utilizar palabras como «aritmética» para describir el contenido de los cursos de «matemáticas». Llamarlas «matemáticas» devalúa el pensamiento matemático; es un poco como utilizar la palabra «componer» para describir los ejercicios rutinarios que se proponen en las escuelas de música. Sin embargo, no tengo poder para cambiar el nombre, y de hecho, si el nombre se cambiara el principal efecto sería *que disminuiría* el reconocimiento público de las matemáticas. Muchas personas solo son conscientes de que su vida y las matemáticas se cruzan en la escuela.

Como escribí en mi primera carta, esto no quiere decir que las matemáticas no sean importantes en nuestra vida diaria. Pero la profunda

influencia de nuestra disciplina sobre la existencia humana tiene lugar entre bastidores y por ello pasa inadvertida.

Una segunda razón por la que pocos estudiantes llegan a darse cuenta de que hay matemáticas fuera de los libros de texto es que nadie se lo dice.

No culpo a los profesores. Las matemáticas son realmente muy importantes, pero puesto que son genuinamente difíciles, casi todos los profesores están ocupados asegurándose de que los alumnos aprenden a resolver ciertos tipos de problemas y obtienen las respuestas correctas. No hay tiempo para contarles la historia de la disciplina, sus conexiones con nuestra cultura y nuestra sociedad, la gran cantidad de nuevas matemáticas que se crea cada año, o las cuestiones no resueltas, grandes y pequeñas, que colman el paisaje matemático.

Meg, el *Directorio universal de matemáticos* contiene cincuenta y cinco mil nombres y direcciones. Estas personas no están de brazos cruzados. Enseñan, y la mayoría de ellas realizan investigaciones. La revista *Mathematical Reviews* aparece doce veces al año, y los números del año 2004 sumaban en total 10 586 páginas. Pero en esta revista no se publican artículos de investigación, sino breves *resúmenes* de artículos de investigación. Cada página resume, en promedio, unos cinco artículos, de modo que los resúmenes de ese año suponían unos cincuenta mil artículos reales. El tamaño medio de un artículo es quizá de veinte páginas, ¡aproximadamente un millón de páginas de nuevas matemáticas cada año!

La amiga de Kathleen se hubiera quedado horrorizada.

Muchos profesores son conscientes de esto, pero tienen una buena razón para no hablar mucho de ello. Si a sus alumnos ya les cuesta recordar cómo se resuelven las ecuaciones de segundo grado, el profesor prudente se guardará mucho de explicar las ecuaciones de tercer grado, que son aún más difíciles. Cuando en clase se trata de encontrar soluciones a ecuaciones simultáneas que poseen soluciones, sería desmoralizador y confuso informar a los estudiantes de que muchos conjuntos de ecuaciones simultáneas no tienen ninguna solución, y que otros tienen infinitas soluciones. Se impone un proceso de autocensura. Para evitar dañar la confianza de los alumnos, los textos no plantean preguntas que los métodos que se están enseñando no pueden responder. De este modo, y es una lástima, los estudiantes llegan a la conclusión de que toda pregunta matemática tiene una respuesta.

Eso no es verdad.

Nuestra enseñanza de las matemáticas se mueve en torno a un conflicto fundamental. Correcta o equivocadamente, a los alumnos se les exige que

dominen una serie de conceptos y técnicas matemáticos, y todo lo que pudiera desviarlos de este fin se considera innecesario. Poner las matemáticas en su contexto cultural, explicar lo que han hecho por la humanidad, contar su desarrollo histórico, o señalar la riqueza de problemas no resueltos o incluso la existencia de temas que no figuran en los textos escolares, deja menos tiempo para preparar el examen. Así que la mayoría de estas cosas no se discuten. Algunos profesores —el señor Radford era un ejemplo— encuentran tiempo para abordar estas cuestiones en cualquier caso. Ellen y Robert Kaplan, un matrimonio norteamericano que practica una alentadora aproximación a la educación matemática, han puesto en marcha una serie de «círculos matemáticos» donde se anima a los niños a pensar en las matemáticas en una atmósfera que no podría ser más diferente de la de un aula.

El éxito de su iniciativa prueba que necesitamos dedicar más tiempo del temario a tales actividades. Pero puesto que las matemáticas ya ocupan una parte sustancial del tiempo de enseñanza, las personas que enseñan otras disciplinas podrían poner objeciones. De modo que el conflicto sigue sin resolver.

Déjame explicar ahora algo maravilloso: cuantas más matemáticas aprendas, más oportunidades encontrarás para plantear nuevas preguntas. A medida que crece nuestro conocimiento de las matemáticas, también lo hacen las oportunidades de nuevos descubrimientos. Quizás esto suena inverosímil, pero es una consecuencia natural de la forma en que las nuevas ideas matemáticas se basan en las más viejas.

Cuando se estudia cualquier disciplina, el ritmo al que se puede asimilar nuevo material tiende a acelerarse cuanto más se sabe. Uno ha aprendido las reglas del juego, se ha hecho un buen jugador, de modo que es más fácil aprender el siguiente nivel. Al menos debería serlo, excepto que en los niveles superiores uno mismo se plantea listones más altos. Las matemáticas son así. Quizás en un grado extremo, construyen nuevos conceptos sobre los viejos. Si las matemáticas fueran un edificio, parecerían una pirámide invertida. Construida sobre una estrecha base, la estructura ascendería hasta las nubes, siendo cada piso mayor que el anterior.

Cuanto más alto se hace el edificio, mayor espacio hay para construir más.

Quizás ésta es una descripción demasiado simple. Habría pequeñas protuberancias que sobresaldrían por todas partes, retorciéndose y girando; ornamentos como minaretes y cúpulas y gárgolas; escaleras y pasadizos

secretos que conectaran inesperadamente habitaciones lejanas; trampolines suspendidos sobre vacíos de vértigo. Pero la pirámide invertida dominaría.

Todas las disciplinas son así en cierta medida, pero sus pirámides no se ensanchan con tanta rapidez, y a veces se levantan nuevos edificios al lado de los ya existentes. Estas disciplinas se parecen a ciudades, y si a uno no le gusta el edificio en el que está, siempre puede ir a otro y empezar de nuevo.

Las matemáticas son *un todo*, y no hay opción a cambiarse de casa.

Puesto que las matemáticas de la escuela están fuertemente sesgadas hacia los números, muchas personas creen que las matemáticas solo comprenden números, que la investigación matemática debe consistir en inventar nuevos números. Y por supuesto no los hay, ¿no es verdad? Si los hubiera, alguien ya los habría inventado. Pero esta creencia es un fallo de la imaginación, incluso cuando se trata de números.

La mayor parte del trabajo escolar con números es aritmético. Sumar 473 y 982. Dividir 16 por 4. Mucha notación: fracciones como $7/5$, decimales como 1,4; decimales periódicos como 0,333..., o números más espectaculares como π , cuyas cifras decimales se prolongan indefinidamente sin ninguna pauta repetitiva.

¿Cómo sabemos eso de π ? No por escribir todas las cifras, ni por escribir montones de ellas sin observar ninguna repetición. Lo sabemos por haberlo demostrado, indirectamente. La primera de estas demostraciones fue publicada en 1770 por Johann Lambert, y no se basa en la geometría sino en el cálculo infinitesimal. Ocupa aproximadamente una página y es básicamente un cálculo. El truco no está en el cálculo, sino en entender qué cálculo hay que hacer.

Algunos temas más ingeniosos aparecen también en el nivel escolar, tales como los números primos, que no pueden obtenerse multiplicando dos números (enteros) más pequeños. Pero casi todo lo que se enseña a los estudiantes se reduce a pulsar los botones de una calculadora de bolsillo.

Los pisos más elevados de la pirámide invertida matemática no se parecen a esto en absoluto. Soportan conceptos, ideas y procesos. Abordan cuestiones muy diferentes de «sumar estos dos números», cuestiones tales como: «¿Por qué no se repiten las cifras de π ?». Los pisos que tratan con números llegan rápidamente a cuestiones extraordinariamente difíciles, que a veces parecen engañosamente simples.

Por ejemplo, sabrás que un triángulo con lados de 3, 4 y 5 unidades de largo tiene un ángulo recto; supuestamente los antiguos egipcios utilizaban una cuerda dividida por nudos en dichas longitudes para medir el lugar donde

se iban a construir pirámides. Soy escéptico sobre el uso práctico del triángulo 3-4-5, porque la cuerda puede estirarse y dudo de que las medidas puedan realizarse con la precisión requerida, pero los egipcios probablemente conocían las propiedades del triángulo. Ciertamente los antiguos babilonios lo hacían.

El teorema de Pitágoras —uno de los pocos teoremas mencionados en la escuela que lleva el nombre de su (tradicional) descubridor— nos dice que la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos es igual al cuadrado del lado más largo: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Hay infinitos de estos «triángulos pitagóricos», y los antiguos matemáticos griegos ya sabían cómo encontrarlos todos. Pierre de Fermat, un abogado francés del siglo *XVII* aficionado a las matemáticas, planteó el tipo de pregunta imaginativa (no *muy* imaginativa; uno no tiene que ir mucho más allá de lo que ya se sabe para encontrar lagunas en el conocimiento humano) que da lugar a matemáticas nuevas. Sabemos que la suma de dos cuadrados puede dar un cuadrado, pero ¿puede hacerse lo mismo con cubos? ¿Pueden sumarse dos cubos para dar un cubo? ¿O sumarse dos potencias cuartas para dar una potencia cuarta? Fermat no pudo dar con ninguna solución. Encontró una demostración elegante de que no puede hacerse con potencias cuartas. En su ejemplar de un antiguo texto griego sobre teoría de números, escribió que tenía una demostración de que no puede hacerse en general —que no hay soluciones enteras a la ecuación $x^n + y^n = z^n$, donde n es mayor que 2—, pero «este margen es demasiado pequeño para contenerla».

Dejemos aparte la cuestión de la utilidad de tales matemáticas; las aplicaciones también son importantes, pero ahora estamos hablando de creatividad e imaginación. Ten una actitud demasiado «práctica» y ahogarás la verdadera creatividad, para perjuicio de todos. El último teorema de Fermat, como acabó conociéndose el problema, resultó ser muy profundo y muy difícil. Es poco probable que la demostración de Fermat, si existía, fuera correcta. Si lo era, nadie más la ha concebido, ni siquiera ahora, cuando sabemos que Fermat tenía razón. Generaciones de matemáticos abordaron el problema y no llegaron a nada. Algunos simplificaron las cosas; demostraron que no podía hacerse con potencias quintas, digamos, o potencias séptimas. El teorema solo fue demostrado en 1994, al cabo de trescientos cincuenta años, por Andrew Wiles. Su demostración se publicó al año siguiente. Probablemente recuerdes un documental que se emitió por televisión.

Los métodos de Wiles eran revolucionarios y demasiado difíciles incluso en un nivel de licenciatura o de doctorado. Su demostración era muy

ingeniosa y muy bella e incorporaba resultados e ideas de docenas de otros expertos. Una gran hazaña.

El programa de televisión era muy emocionante. Muchos espectadores rompieron a llorar.

La demostración del último teorema de Fermat va por encima del temario de licenciatura. Es demasiado avanzada para los cursos que seguirás. Pero por supuesto te impartirán cursos más elementales sobre la teoría de números, que demuestran teoremas como «todo número entero positivo es una suma de cuatro cuadrados como máximo». Quizás elijas teoría de números algebraica, donde verás como los grandes matemáticos del pasado recortaron fragmentos del último teorema de Fermat, y entenderás cómo toda el álgebra abstracta emerge de ese proceso. Éste es un mundo nuevo que pasa casi totalmente inadvertido para la gran mayoría de las personas.

Casi todos hacemos uso de la teoría de números todos los días, aunque solo sea porque constituye la base de los códigos de seguridad de Internet y de los métodos de compresión de datos utilizados en la televisión por cable y por satélite. No hace falta conocer la teoría de números para ver la televisión (de lo contrario, los índices de audiencia de muchos programas bajarían), pero si nadie supiera de teoría de números los delincuentes se harían con nuestras cuentas bancarias y no pasaríamos de tres canales. Así que el área general de las matemáticas en la que repercute el último teorema de Fermat es indudablemente útil.

Es poco probable, sin embargo, que el propio teorema sea de mucha utilidad. Muy pocos problemas prácticos se basan en sumar dos potencias elevadas para obtener otra potencia semejante. (Aunque me han dicho que al menos un problema en física depende de ello). Los nuevos métodos de Wiles, por el contrario, han abierto nuevas conexiones importantes entre áreas de nuestra disciplina hasta ahora separadas. Seguramente estos métodos resultarán importantes un día, muy probablemente en física fundamental, que hoy es la mayor consumidora de conceptos y técnicas matemáticas profundos y abstractos.

Cuestiones como el último teorema de Fermat no son importantes porque necesitemos saber la respuesta. A la postre, probablemente no importe que el teorema se demostrara como correcto y no falso. Son importantes porque nuestros esfuerzos por encontrar la respuesta revelan lagunas importantes en nuestra comprensión de las matemáticas. Lo que cuenta no es la respuesta misma sino saber cómo obtenerla. Solo puede figurar al final del libro cuando alguien ha descubierto cuál es.

Cuanto más lejos llevamos las fronteras de las matemáticas, más grande se hace la propia frontera. No hay ningún peligro de que nos quedemos sin nuevos problemas que resolver.

5

Rodeados de matemáticas

Querida Meg:

No me sorprende que estés «a la vez excitada y un poco intimidada», como tú dices, por el inminente acceso a la universidad. Déjame alabar tu buena intuición en ambas cosas. La competencia será más dura, el paso más rápido, el trabajo más difícil y el contenido mucho más interesante. Estarás encantada con tus profesores (con algunos de ellos) y con las ideas que te llevan a descubrir, y aterrorizada de que tantos de tus compañeros parezcan estar por delante de ti. Durante los seis primeros meses te preguntarás por qué la escuela te permitió entrar en la universidad. (Después de eso te preguntarás cómo entraron algunos de los demás).

Me pedías que te dijese algo que te inspirase. Nada técnico, solo algo para tener en cuenta cuando las cosas se pongan difíciles.

Muy bien.

Como muchos matemáticos, extraigo mi inspiración de la naturaleza. Quizá la naturaleza no parezca muy matemática; uno no ve sumas escritas en los árboles. Pero la matemática no trata realmente de sumas. Trata de pautas y por qué se dan. Las pautas de la naturaleza son a la vez bellas e inagotables.

Estoy en Houston, Texas, en una estancia de investigación, y me hallo rodeado de matemáticas.

Houston es una ciudad enorme, muy extensa. Plana como una torta. Antes era una ciénaga, y cuando hay una tormenta fuerte trata de volver a su condición natural. Cerca del complejo de apartamentos donde nos

hospedamos siempre que venimos de visita mi mujer y yo hay un canal con orillas de hormigón que desagua buena parte de la escorrentía de la lluvia. No siempre desagua lo suficiente; hace algunos años la carretera próxima estaba diez metros bajo el agua, y la planta baja del complejo de apartamentos estaba inundada. Pero sirve. Se llama Braes Bayou, y hay caminos a ambos lados. A Avril y a mí nos gusta dar paseos por el canal pantano; las orillas de hormigón no son precisamente bonitas, pero lo son más que las calles y aparcamientos que las rodean, y hay mucha vida salvaje: bagres en el río, montones de pájaros.

Cuando paseo por Braes Bayou, rodeado de vida salvaje, me doy cuenta de que también estoy rodeado de matemáticas.

Por ejemplo...

Hay caminos que cruzan el canal a intervalos regulares, por donde también cruzan las líneas telefónicas, en las que se posan los pájaros. Visto a distancia parecen partituras musicales, manchas pequeñas en filas de líneas horizontales. Parece que hay lugares especiales donde les gusta posarse. No tengo muy claro por qué, pero hay una cosa que destaca: si una bandada de pájaros se posa en un cable, los pájaros terminan por estar *uniformemente espaciados*.

Ésta es una pauta matemática, y pienso que hay una explicación matemática. No creo que los pájaros «sepan» que deberían espaciarse uniformemente. Pero cada pájaro tiene su propio «espacio personal», y si otro pájaro se acerca demasiado, el primero se moverá silenciosamente por el cable para dejar un poco más de sitio, a menos que otro pájaro se le acerque desde el otro lado.

Cuando hay solo unos pocos pájaros, terminan por estar aleatoriamente espaciados. Pero cuando hay muchos, se acercan mucho. A medida que cada uno se desplaza para sentirse más cómodo, la «presión de población» los iguala. Los pájaros en el límite de las regiones más densas se ven empujados hacia regiones menos densamente pobladas. Y puesto que todos los pájaros son de la misma especie (normalmente palomas) todos tienen una idea muy parecida de cuál debería ser su espacio personal. De modo que se espacian de manera uniforme.

No de forma *exactamente* uniforme, por supuesto. Eso sería un ideal platónico. Como tal, nos ayuda a entender una realidad más complicada.

Tú podrías tratar matemáticamente este problema si quisieras. Elabora algunas reglas simples sobre cómo se mueven los pájaros cuando los vecinos se acercan demasiado, colócalos al azar, utiliza las reglas y observa cómo

evoluciona el espaciado. Pero hay una analogía con un sistema físico común, para el que las matemáticas ya están hechas, y la analogía le dice lo que puedes esperar.

Es un *cristal de pájaros*.

El mismo proceso que hace que los pájaros se espacien regularmente hace que los átomos en un objeto sólido se alineen para formar un retículo repetitivo. Los átomos también tienen un «espacio personal»: se repelen unos a otros si están demasiado juntos. En un sólido, los átomos están obligados a compactarse estrechamente, pero cuando ajustan sus espacios personales se disponen en una elegante red cristalina.

La red de pájaros es unidimensional, puesto que están en un cable. Una red unidimensional consiste en puntos igualmente espaciados. Cuando hay solo unos pocos pájaros, dispuestos al azar y no sometidos a presión de población, no es un cristal, es un gas.

Esto no es solo una vaga analogía. El mismo proceso matemático que crea un cristal regular de sal o de calcita crea también mi «cristal de pájaros».

Y éstas no son las únicas matemáticas que puedes hallar en Braes Bayou.

Muchas personas sacan a pasear a sus perros por los caminos. Si observas a un perro andando, enseguida te das cuenta de que su movimiento es muy rítmico. No cuando se para a oler un árbol o a otro perro; solo es rítmico cuando el perro se mueve despreocupadamente sin pensar en nada. Al mover la cola, al sacar la lengua, al plantar las palas en el suelo en una danza perruna descuidada.

¿Qué hacen las patas?

Cuando el perro anda, hay una pauta característica. Pata *trasera* izquierda, *delantera* izquierda; *trasera* derecha, *delantera* derecha. Las pisadas están igualmente espaciadas en el tiempo, como notas musicales, cuatro golpes por compás.

Si el perro se acelera, su paso cambia al trote. Ahora pares diagonales de patas —trasera izquierda y delantera derecha, luego las otras dos— pisan el suelo a la vez, en una pauta alternante de dos golpes por compás. Si dos personas andan una por detrás de la otra, con el paso exactamente cambiado, y las pones dentro de un disfraz de vaca, la vaca estaría trotando.

El perro es las matemáticas encarnadas. La disciplina de la que es un ejemplo inconsciente se conoce como análisis del paso; tiene importantes aplicaciones en medicina: los seres humanos suelen tener problemas para mover las piernas adecuadamente, especialmente en la infancia o en la vejez, y un análisis de cómo se mueven puede revelar la naturaleza del problema y

quizás ayude a solucionarlo. En robótica se da otra aplicación: los robots con piernas pueden moverse en terrenos a los que no se adaptan los robots con ruedas, como el interior de una central nuclear, un campo de maniobras militares o la superficie de Marte. Si podemos entender suficientemente bien la locomoción con piernas, podemos diseñar robots fiables para dismantelar las centrales viejas, localizar granadas y minas que no hayan explotado y explorar planetas lejanos. Actualmente seguimos utilizando ruedas para los vehículos marcianos porque ese diseño es fiable, pero los vehículos tienen limitaciones en sus desplazamientos. Ahora no estamos dismantelando centrales nucleares. Pero el ejército de Estados Unidos utiliza robots para algunas tareas en campos de maniobras.

Si aprendemos a reinventar la pierna, todo eso cambiará.

Las garcetas, erguidas sobre las aguas poco profundas con su característica postura alerta, sus largos picos y los músculos tensos, están pescando bagres. Juntos constituyen un sistema ecológico en miniatura, un sistema predador-presa. La relación de la ecología con las matemáticas se remonta a Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci^[7], que trató un modelo bastante simple del crecimiento de conejos en 1202, en su *Liber Abaci*. Para ser justos, el libro trata realmente del sistema de numeración indo-arábigo, el precursor de la notación decimal actual, y el modelo de los conejos es allí básicamente un ejercicio de aritmética. La mayoría del resto de los ejercicios son transacciones monetarias; era un libro muy práctico.

Modelos ecológicos más serios aparecieron en los años veinte del siglo pasado, cuando el matemático italiano Vito Volterra estaba tratando de entender un curioso efecto que había sido observado por los pescadores del Adriático. Durante la primera guerra mundial, cuando la pesca era reducida, el número de peces no parecía aumentar, pero sí lo hacía la población de tiburones y rayas.

Volterra se preguntó por qué una reducción en la pesca beneficiaba a los predadores más que a la presa. Para explicarlo imaginó un modelo matemático basado en los tamaños de las poblaciones de tiburones y peces, y de cómo cada uno afecta al otro. Descubrió que en lugar de asentarse en valores estacionarios, las poblaciones sufrían ciclos repetitivos: grandes poblaciones se hacían más pequeñas pero luego aumentaban, una y otra vez. La población de tiburones alcanzaba un máximo algún tiempo después de que lo hiciera la población de peces.

No hacen falta los números para entender por qué. Con un número moderado de tiburones, los peces pueden reproducirse con más velocidad que

con la que son comidos, de modo que su población crece. Esto proporciona más alimento para los tiburones, de modo que su población también empieza a aumentar; pero ellos se reproducen más lentamente, de modo que hay un retraso. Cuando los tiburones aumentan en número comen más peces y, finalmente, hay tantos tiburones que la población de peces empieza a disminuir. Ahora los peces no pueden mantener a tantos tiburones, de modo que el número de tiburones también decrece, de nuevo con un retraso. Con la población de tiburones reducida, los peces pueden aumentar una vez más... y así sucesivamente.

Las matemáticas hacen esta historia cristalina (dentro de las hipótesis incorporadas en el modelo) y también nos dejan calcular cómo se comportan los tamaños promedio de las poblaciones en un ciclo completo, algo que el razonamiento verbal no puede manejar. Los cálculos de Volterra mostraron que un nivel reducido de pesca disminuye el número medio de peces durante un ciclo pero aumenta el número medio de tiburones. Que es precisamente lo que sucedió durante la primera guerra mundial.

Todos los ejemplos de los que te he hablado no implican ni mucho menos matemáticas «avanzadas». Pero las matemáticas sencillas también pueden ser ilustrativas. Recuerdo una de las muchas historias que cuentan los matemáticos una vez que todos los que no son matemáticos han salido de la habitación. Un matemático en una famosa universidad fue a ver el nuevo auditorio, y cuando estaba allí se encontró al decano de la facultad mirando al techo y murmurando para sí: «Cuarenta y cinco, cuarenta y seis, cuarenta y siete...». Naturalmente, el matemático interrumpió la cuenta para descubrir de qué se trataba. «Estoy contando las luces», dijo el decano. El matemático miró hacia arriba, a la perfecta disposición rectangular de luces y dijo: «Eso es fácil, hay... doce en esa dirección y... ocho en esa otra. Doce por ocho son noventa y seis». «No, no», dijo el decano con impaciencia. «Yo quiero el número *exacto*».

Incluso cuando se trata de algo tan simple como contar, nosotros, los matemáticos, vemos los números de forma diferente que otras personas.

6

Cómo piensan los matemáticos

Querida Meg:

Yo diría que has sido afortunada. Si te están hablando de personas como Newton, Leibniz, Fourier y otros, significa que tu profesor de cálculo infinitesimal de primer curso conoce la historia de su disciplina; y su pregunta «¿Cómo pensaban ellos en estas cosas?» sugiere que está enseñando el cálculo infinitesimal no como un conjunto de revelaciones divinas (que es como se hace demasiado a menudo), sino como problemas reales que fueron resueltos por personas reales.

Pero tú también tienes razón en que la respuesta «Bueno, ellos eran genios» no es del todo adecuada. Déjame ver si yo puedo ahondar un poco más. La forma general de su pregunta —que es muy importante— sería «¿Cómo piensan los matemáticos?».

Tras buscar en los libros de texto podrías llegar a la razonable conclusión de que todo pensamiento matemático es simbólico. Las palabras están para separar los símbolos y explicar lo que significan; el núcleo de la descripción es fuertemente simbólico. Es cierto que algunas áreas de las matemáticas utilizan imágenes, pero éstas son o bien guías aproximadas para la intuición o bien representaciones visuales de los resultados de los cálculos.

Hay un libro maravilloso sobre la creación matemática, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, de Jacques Hadamard. Se publicó por primera vez en 1945, y hoy se sigue reeditando y es extraordinariamente pertinente. Te recomiendo que te hagas con un ejemplar. Hadamard apunta

dos ideas fundamentales. La primera es que la mayor parte del pensamiento matemático empieza con vagas imágenes visuales y solo más tarde se formaliza con símbolos. Aproximadamente el noventa por ciento de los matemáticos, nos dice, piensan así. El diez por ciento restante se ciñe a los símbolos desde el principio. El segundo punto es que las ideas en matemáticas parecen surgir en tres etapas.

En primer lugar, es necesario trabajar mucho de manera consciente sobre un problema, tratando de entenderlo, explorando formas de abordarlo, trabajando con ejemplos con la esperanza de encontrar algunos aspectos generales útiles. Normalmente, esa etapa queda empantanada en un estado de confusión sin esperanza a medida que emerge la dificultad real del problema.

En ese momento ayuda dejar de pensar en el problema y hacer otra cosa: cavar en el jardín, escribir notas para la clase, empezar a trabajar en otro problema. Esto proporciona al subconsciente una oportunidad para dar vueltas al problema original y tratar de ordenar la mezcla confusa en que lo han convertido tus esfuerzos conscientes. Si tu subconsciente tiene éxito, incluso si todo lo que consigue es dejarlo a medias, «te dará un toque en el hombro» y te avisará de sus conclusiones. Éste es el gran momento «¡ajá!», en que de repente se enciende una pequeña bombilla en la cabeza.

Finalmente, hay otra etapa consciente para elaborar todo formalmente, comprobar los detalles y organizado de modo que puedas publicarlo y otros matemáticos puedan leerlo. La costumbre en la publicación científica (y de la escritura de libros de texto) requiere que el momento «¡ajá!» quede oculto y que el descubrimiento se presente como una deducción puramente racional a partir de premisas conocidas.

Henri Poincaré, probablemente mi favorito entre los grandes matemáticos, era inusualmente consciente de sus propios procesos mentales e impartió conferencias sobre ellos a los psicólogos. Él llamaba a la primera etapa «preparación», a la segunda «incubación seguida de iluminación» y a la tercera «verificación». Hacía particular énfasis en el papel del subconsciente, y vale la pena citar un famoso pasaje de su ensayo *La creación matemática*:

Durante quince días me esforcé en demostrar que no podía haber ninguna función como las que desde entonces he llamado funciones fuchsianas. Entonces yo era muy ignorante; todos los días me sentaba a la mesa, permanecía allí una hora o dos, ensayaba un gran número de combinaciones y no llegaba a ningún resultado. Una tarde, contrariamente a mi costumbre, bebí café solo y no pude dormir. Las ideas se amontonaban; sentía que chocaban hasta que pares de ellas se entrelazaban, por decirlo así, formando una combinación estable. A la mañana siguiente yo había establecido la existencia de una clase de funciones fuchsianas, las que proceden de la serie hipergeométrica; únicamente tenía que escribir los resultados, lo que me llevó solo unas pocas horas.

Ésta fue tan solo una de las numerosas ocasiones en las que Poincaré sintió que estaba «presente en su propio trabajo inconsciente».

Una experiencia mía reciente encaja también en el modelo de tres etapas de Poincaré, aunque yo no tuve la sensación de estar observando mi propio subconsciente. Hace unos años estaba trabajando con mi antiguo colaborador Marty Golubitsky sobre la dinámica de redes. Por «red» entiendo un conjunto de sistemas dinámicos que están «acoplados», de modo que algunos influyen en el comportamiento de otros. Los propios sistemas son los nodos de la red —puedes representarlos como círculos— y dos nodos están unidos por una flecha si uno de ellos (en la cola de la flecha) influye en el otro (en la cabeza de la flecha). Por ejemplo, cada nodo podría ser una célula nerviosa en un organismo, y las flechas podrían ser las conexiones a lo largo de las cuales pasan las señales de una célula a otra.

Marty y yo estábamos particularmente interesados en dos aspectos de estas redes: la sincronía y las relaciones de fase. Dos nodos son sincrónicos si los sistemas que representan hacen exactamente lo mismo en el mismo instante. Por ejemplo, que el trote del perro sincronice diagonalmente las patas opuestas: cuando la pata delantera izquierda pisa el suelo, también lo hace la pata trasera derecha. Las relaciones de fase son similares, pero con un retraso temporal. La pata delantera derecha del perro (que está sincronizada con su pata trasera izquierda) pisa el suelo medio ciclo más tarde que la pata delantera izquierda. Esto es un retraso de fase de medio período.

Sabíamos que la sincronía y los cambios de fase son habituales en las redes simétricas. De hecho, habíamos calculado la única red simétrica plausible que podía explicar todos los pasos estándar de los animales cuadrúpedos^[8]. Y habíamos supuesto, porque no podíamos pensar en ninguna otra razón, que la simetría era también necesaria para que se den sincronía y cambios de fase.

Entonces un alumno de posgrado de Marty, Marcus Pivato, ideó una red muy curiosa que tenía sincronía y cambios de fase pero no simetría. Tenía dieciséis nodos, que se sincronizaban en grupos de cuatro, y cada grupo estaba separado de uno de los demás por un desplazamiento de fase de un cuarto de período. La red era casi simétrica a primera vista, pero cuando la examinabas de cerca te dabas cuenta de que la simetría aparente era imperfecta.

Para nosotros, el ejemplo de Marcus no tenía ningún sentido. Pero no había duda de que sus cálculos eran correctos. Podíamos comprobarlos, y lo hicimos, y funcionaban. Pero nos quedaba una molesta sensación de que no

entendíamos realmente porque funcionaban. Implicaban un tipo de coincidencia, que decididamente sucedía, pero «no debería hacerlo».

Mientras Marty y Marcus trabajaban en otros temas, a mí me preocupaba el ejemplo de Marcus. Fui a Polonia a dar una conferencia y algunas charlas, y durante toda esa semana estuve dibujando esquemas de redes en cuadernos. Lo hice durante el tiempo que pasé en el tren de Varsovia a Cracovia, y dos días más tarde lo volví a hacer de nuevo. Sentía que estaba próximo a algún avance transcendental, pero me parecía imposible descubrir cuál podría ser.

Cansado y hastiado, dejé el tema, metí los esquemas en un archivador, y ocupé mi tiempo en otra cosa. Luego, una mañana me desperté con la extraña sensación de que debería sacar el archivo y echar otra mirada a los esquemas. En pocos minutos había advertido que todos los esquemas que había hecho tenían una característica común, una que había pasado por alto completamente cuando los estaba haciendo. No solo eso; todos los esquemas que no hacían lo que yo buscaba carecían de esa característica. En ese momento «supe» cuál era la respuesta al rompecabezas, e incluso la pude escribir de forma simbólica. Era clara, ordenada y muy simple.

El problema con ese tipo de conocimiento, como suele decir mi amigo biólogo Jack Cohen, es que parece igual de seguro cuando uno está equivocado. No hay sustituto para la demostración. Pero ahora, puesto que sabía *lo que* tenía que demostrar y tenía una idea clara de por qué era verdad, esa etapa final no llevó mucho tiempo. Demostrar que la característica que yo había observado en mis esquemas era *suficiente* para hacer que sucediera todo lo que pensaba que debería suceder era un hecho de claridad meridiana. Demostrar que también era necesario era más complicado, pero no demasiado. Había varios planteamientos relativamente obvios, y el segundo o tercero funcionaban.

Problema resuelto.

Esta descripción encaja de forma tan perfecta con el escenario de Poincaré que me preocupa que yo haya podido adornar la historia y reordenarla para hacer que encaje. Pero estoy completamente seguro de que realmente sucedió como te lo acabo de contar.

¿Cuál era la intuición clave? He repasado las notas que tomé en el tren de Varsovia a Cracovia y están llenas de redes cuyos nodos han sido coloreados. Rojo, azul, verde... En algún momento yo había decidido colorear los nodos de modo que los nodos síncronos tuvieran el mismo color. Utilizando los colores yo podía detectar regularidades ocultas en las redes, y estas regularidades eran las que hacían que funcionase el ejemplo de Marcus. Las

regularidades no eran simétricas, no en el sentido técnico utilizado por los matemáticos, pero tenían un efecto similar.

¿Por qué había estado coloreando las redes? Pon pie los colores facilitaban el escoger los grupos síncronos. Había coloreado docenas de redes y nunca advertí lo que los colores estaban tratando de decirme. Había tenido la respuesta ante mis narices. Pero solo cuando deje de trabajar en el problema mi subconsciente tuvo libertad para ordenarlo.

Me llevó aproximadamente un par de semanas convertir esta intuición en matemáticas formales. Pero el pensamiento visual —los colores— vino primero, y mi subconsciente tuvo que luchar con el problema antes de que yo fuera consciente de la respuesta. Solo entonces empecé a razonar de forma simbólica.

Pero todavía hay más. Una vez que el sistema formal estuvo ordenado advertí una idea más profunda que subyace en el conjunto. Las similitudes entre celdas coloreadas formaban una estructura algebraica natural. En nuestro trabajo previo sobre sistemas simétricos habíamos utilizado una estructura similar desde el principio, porque todos los matemáticos saben cómo formalizar las simetrías. El concepto de interés se denomina grupo. Pero la red de Marcus no tiene simetría, de modo que los grupos no ayudan. La estructura algebraica natural que reemplaza al grupo de simetría en mis diagramas coloreados es algo menos conocida, llamada «grupoides».

Los matemáticos puros han estado estudiando los grupoides durante años, por sus propias razones particulares. De repente me di cuenta que esas estructuras esotéricas están íntimamente relacionadas con la sincronía y desplazamientos de fases en redes de sistemas dinámicos. Es uno de los mejores ejemplos, de entre los temas en los que he estado involucrado, de los misteriosos procesos que convierten las matemáticas puras en aplicaciones.

Una vez que entiendes un problema, muchos aspectos del mismo se hacen repentinamente más sencillos. Como dicen los matemáticos de todo el mundo, cualquier cosa es o imposible o trivial. Nosotros encontramos inmediatamente montones de ejemplos más sencillos que el de Marcus. El más simple tiene tan solo dos nodos y dos flechas.

La investigación es una actividad en desarrollo, y creo que tenemos que ir más lejos que Hadamard y Poincaré para entender el proceso de invención, o descubrimiento, en matemáticas. Su descripción de tres etapas se aplica a un solo «paso inventivo» o «avance en la comprensión». Resolver la mayoría de los problemas de investigación implica toda una serie de pasos semejantes. De hecho, cualquier paso puede descomponerse en una serie de subpasos, y

estos subpasos también pueden descomponerse de una manera similar. De modo que en lugar de un único proceso de tres etapas tenemos una complicada red de tales procesos. Hadamard y Poincaré describían una táctica básica del pensamiento matemático, pero la investigación es más parecida a una lucha estratégica. La estrategia del matemático emplea esa táctica una y otra vez, en niveles diferentes y de formas distintas.

¿Cómo puedes aprender a convertirte en una estrategia? Sigue el ejemplo del libro de los generales. Estudia las tácticas y estrategias de los grandes practicantes del pasado y el presente. Observa, analiza, aprende e interioriza. Y un día, Meg —antes de lo que pudieras creer— otros matemáticos estarán aprendiendo de ti.

Cómo aprender matemáticas

Querida Meg:

Seguro que ya te habrás dado cuenta que la calidad de la enseñanza en una institución universitaria varía bastante. Ello se debe a que, en su mayor parte, los catedráticos y sus profesores ayudantes no se contratan, se mantienen o promocionan sobre la base de su capacidad docente. Están allí para hacer investigación, mientras que la enseñanza, aunque necesaria e importante por muchas razones, es decididamente secundaria para muchos de ellos. Muchos de tus profesores serán apasionados maestros y mentores dedicados; en cambio, encontrarás otros en los que el apasionamiento y la dedicación serán menores. Tendrás que hallar una manera de aprender incluso con profesores cuyos más destacados talentos no se manifiestan necesariamente en el aula.

Una vez tuve un profesor que, yo estaba convencido, había descubierto una manera de hacer que el tiempo se parara. Mis compañeros no compartían esta opinión pero pensaban que sus poderes soporíferos debían tener seguramente usos militares.

Según todo lo escrito sobre la enseñanza de las matemáticas podría deducirse que todas las dificultades que encuentran los estudiantes de matemáticas se deben a los profesores, y siempre es responsabilidad del profesor resolver los problemas de los alumnos. Ésta es, por supuesto, una de las cosas por las que se paga a los profesores, pero también el alumno carga con una responsabilidad. Uno necesita entender cómo aprender.

Como toda enseñanza, la instrucción en matemáticas es bastante artificial. El mundo es complicado y caótico, con muchos cabos sueltos, y la tarea del profesor consiste en imponer orden en la confusión, convertir un conjunto desordenado de episodios en una historia coherente. De modo que tu formación se dividirá en módulos específicos o asignaturas, y cada asignatura tendrá un temario cuidadosamente especificado y un libro de texto. En algunos centros, como sucede en determinadas escuelas públicas norteamericanas, el temario especificará exactamente qué páginas del libro de texto y qué problemas habrá que tratar en un día dado. En otros países y en niveles más avanzados, el profesor tiene más libertad para seguir la materia a su manera, y los apuntes de clase sustituyen al libro de texto.

Puesto que las lecciones avanzan siguiendo un conjunto de temas, de uno en uno, es fácil que los alumnos creen que es así como se aprende la materia. No es una mala idea trabajar sistemáticamente siguiendo el libro, pero se pueden utilizar otras lácticas si uno se queda atascado.

Muchos estudiantes creen que si uno se queda atascado debería detenerse. Volver atrás, leer de nuevo el pasaje difícil, repetir hasta que se haga la luz, ya sea en tu mente o tras la ventana de la biblioteca.

Esto es casi siempre perjudicial. A mis alumnos siempre les digo que lo primero que hay que hacer es seguir leyendo. Recuerda que te has topado con una dificultad, no puedes pretender que todo sea dulce y ligero, pero continúa. A menudo la próxima frase, o el próximo párrafo, resolverá tu problema. He aquí un ejemplo, tomado de mi libro *The Foundations of Mathematics* escrito con David Tall. En la página 16, al introducir el tema de los números reales, comentamos que «los griegos descubrieron que existen líneas cuyas longitudes, en teoría, no pueden medirse exactamente mediante un número racional».

Uno podría fácilmente detenerse aquí: ¿que significa «medido mediante»? Todavía no ha sido definido, y —¡socorro!— no está en el índice. Y en cualquier caso, ¿cómo descubrieron eso los griegos? ¿Se supone que lo sé del curso anterior? ¿De este curso? ¿Habré fallado a una lección? Las páginas anteriores del libro no ofrecen ayuda por muchas veces que vuelvan a leerse. Uno podría pasar horas sin llegar a ninguna parte.

Así que no te detengas. Sigue leyendo. Las próximas frases explican cómo el teorema de Pitágoras lleva a una línea recta cuya longitud es la raíz cuadrada de 2, y afirman que no hay ningún número racional m/n tal que $(m/n)^2 = 2$. Esto se demuestra luego, utilizando ingeniosamente el hecho de que todo número entero puede expresarse como un producto de números

primos de forma unívoca. El resultado se resume como «ningún número racional puede tener 2 como cuadrado, y de ahí que la hipotenusa del triángulo dado no tiene una longitud racional».

Para entonces es probable que todo haya encajado en su lugar. «Medido mediante» presumiblemente significa «tiene una longitud igual a». El razonamiento griego al que se alude de manera tan sucinta es sin duda el argumento que utiliza el teorema de Pitágoras; ayuda saber que Pitágoras era griego. Y uno debería ser capaz de detectar que «la raíz cuadrada de 2 no es racional» es equivalente a «ningún número racional puede tener 2 como cuadrado».

Misterio resuelto.

Si aún sigues atascada después de lanzarte valientemente en busca de iluminación, es ahora el momento de buscar a tu tutor o al profesor y pedirle ayuda. Tratando de resolver el problema por ti misma, habrás puesto en acción tu mente, y con ello es mucho más probable que entiendas la explicación del profesor. Es como la etapa de «incubación» de Poincaré. Lo que, con buen tiempo y viento favorable, lleva a la iluminación.

Hay otra posibilidad, pero en ella probablemente la ayuda del profesor sea esencial. Aun así, puedes tratar de preparar el terreno. Si te quedas atascada en la comprensión de una idea matemática, tal vez se deba a que no entiendes adecuadamente alguna otra idea matemática que se está utilizando aunque no se haya mencionado explícitamente y se haya dado por hecho que sabes manejarla con facilidad. ¿Recuerdas la pirámide invertida del conocimiento matemático? Quizás hayas olvidado qué es un número racional, o qué es lo que demostró Pitágoras, o cuál es la relación entre raíces cuadradas y cuadrados. O quizá te estés preguntando por qué es relevante la propiedad de unicidad de la factorización en números primos. Si es así, no necesitas ayuda para entender la demostración de que la raíz cuadrada de 2 es irracional; lo que necesitas es ayuda para repasar los números racionales, los factores primos o la geometría básica.

Se necesita cierta intuición en tus propios procesos mentales así como cierta disciplina para determinar exactamente lo que no entiendes y relacionarlo con tu dificultad presente. Tus tutores saben esas cosas y será su tarea resolverlas. Sin embargo, es una baza muy útil *dominarlas* por ti misma, si puedes hacerlo.

En suma: si piensas que estás atascada, sigue adelante de todas formas, con la esperanza de llegar a una revelación, pero recuerda dónde te atascaste en caso de que eso no funcione. Si no lo hace, vuelve al punto de atasco y

retrocede hasta que llegues a algo que estás segura de entender. Entonces trata de avanzar otra vez.

Este proceso es muy similar al método general para hallar la salida de un laberinto, lo que los informáticos llaman «búsqueda en primera profundidad». Si es posible, profundiza en el laberinto. Si te atascas, regresa al primer punto donde hay un camino alternativo, y síguelo. Nunca recorras dos veces el mismo camino. Este algoritmo te llevará a salvo por cualquier laberinto. Su análogo en el aprendizaje no licué una garantía tan solida, pero sigue siendo una buena táctica.

Cuando era estudiante llevé este método al extremo. Mi método habitual para leer un texto de matemáticas era sumergirme en él hasta que detectaba algo interesante, luego volver atrás hasta que hubiera localizado todo lo que necesitaba para leer el trozo interesante. En realidad no recomiendo esto a todos, pero muestra que hay alternativas a empezar en la página 1 y continuar la secuencia hasta llegar a la página 250.

Déjame animarte con otro truco útil. Puede parecer que exige mucho trabajo extra, pero te aseguro que se saca mucho provecho.

Lee acerca de tu disciplina.

No leas solo el texto asignado. Los libros son caros, pero las universidades tienen bibliotecas. Busca varios libros sobre el mismo tema o temas similares. Léelos, pero de una manera informal. Sáltate cualquier cosa que parezca demasiado difícil o demasiado aburrida. Concéntrate en lo que atrape tu atención. Es sorprendente cuán a menudo leerás algo que resulte ser útil la próxima semana, o el próximo año.

El último verano antes de ir a Cambridge a estudiar matemáticas leí docenas de libros de esta manera informal. Recuerdo que uno de ellos trataba sobre «vectores», que el autor definía como «cantidades que tienen magnitud y dirección». En ese momento eso tenía poco sentido para mí, pero me gustaban las fórmulas elegantes y los diagramas sencillos con montones de flechas, y lo repasé más de una vez. Luego se me olvidó. En la primera lección sobre vectores, todo se puso de repente en su lugar. Entendí exactamente lo que el autor había estado tratando de decirme antes de que el profesor llegase hasta ese punto. Todas aquellas fórmulas parecían obvias: yo sabía por qué eran verdaderas.

Solo puedo suponer que mi subconsciente había sido despertado, precisamente como afirmaba Poincaré, y durante el período interpuesto había creado cierto orden a partir de mis paseos informales por ese libro sobre

vectores. Únicamente estaba esperando algunas claves simples antes de que pudiera formar una imagen coherente.

Cuando digo «lee acerca de tu disciplina» no me refiero solo a los temas técnicos. Lee *Men of Mathematics*, de Eric Temple Bell, que sigue siendo una buena lectura incluso si algunas de las historias son inventadas y las mujeres son casi invisibles. Hojea las grandes obras del pasado; *The World of Mathematics*^[9] de James Newman es un conjunto de cuatro volúmenes de escritos fascinantes sobre matemáticas desde el Antiguo Egipto a la relatividad. En años recientes ha habido abundancia de libros matemáticos de divulgación: sobre la hipótesis de Riemann, el teorema de los cuatro colores, π , el infinito, las paradojas matemáticas, cómo piensa el cerebro humano las ideas matemáticas, la lógica borrosa, los números de Fibonacci. Hay incluso libros sobre las aplicaciones de las matemáticas, tales como el clásico *On Growth and Form*^[10] de D'Arcy Thompson, que trata de las paulas matemáticas en las criaturas vivas. Quizás esté superado en términos biológicos —fue escrito mucho antes de que se descubriera la estructura del ADN— pero su mensaje general posee tanta validez como siempre.

Estos libros ampliarán tu apreciación de lo que son las matemáticas, para qué pueden utilizarse o qué lugar ocupan en la cultura humana. Es probable que en los exámenes no haya preguntas sobre ninguno de estos temas. Pero conocer estas cuestiones te hará mejor matemática, capaz de captar con más seguridad los puntos esenciales de cualquier tema nuevo.

Hay también algunas técnicas específicas que mejorarán tu capacidad de aprendizaje. El gran educador matemático norteamericano George Pólya expuso muchas de ellas en su clásico *How to Solve It*. Adoptó el punto de vista de que la única manera de entender adecuadamente las matemáticas es la práctica: plantear problemas y resolverlos. Tenía razón. Pero no puedes aprender de esta manera si te atascas en cada problema que trates. Así que tus profesores te plantearán una serie de problemas cuidadosamente escogidos, empezando con cálculos rutinarios para luego pasar a cuestiones más exigentes.

Pólya ofrece muchos trucos para aumentar las habilidades al resolver problemas. Los describe mucho mejor de lo que puedo hacerlo yo, pero he aquí un ejemplo. Si el problema parece desconcertante, trata de reformularlo de una forma más sencilla. Busca un buen ejemplo y prueba tus ideas en el ejemplo; más tarde, puedes generalizar el escenario original. Por ejemplo, si el problema es sobre números primos, pruébalo con 7, 13 o 47. Trata de trabajar hacia atrás a partir de la conclusión: ¿qué pasos debemos dar para

llegar allí? Prueba con diferentes ejemplos y busca pautas comunes; si encuentras una, trata de demostrar que debe darse siempre.

Como comentabas en tu carta, Meg, una de las principales diferencias entre el instituto y la universidad es que en la universidad se trata a los estudiantes como adultos. Esto significa que, en una medida mucho mayor, es cuestión de hundirse o nadar: apruebas, suspendes o cursas otra carrera. Hay mucha ayuda disponible para el que busca, pero eso también exige más iniciativa que en el instituto. No es probable que nadie te coja la mano y le diga: «Parece que tienes problemas».

Por otra parte, las recompensas de la autosuficiencia son mucho mayores. En el instituto se contentaban con que no fueras un problema que requiriera atención extra y, a menos que fueras extraordinariamente afortunado, lo más que podían ofrecer a un estudiante (aparte de las notas que certifican su progreso) era una actividad extraescolar y quizás un par de premios. En una universidad encontrarás estudiosos reales que están a la búsqueda de jóvenes capaces de hacer matemáticas reales, y solo están esperando a que destagues, si puedes hacerlo.

8

El miedo a las demostraciones

Querida Meg:

Tienes mucha razón: una de las mayores diferencias entre las matemáticas de la escuela y las de la universidad está en la demostración. En la escuela aprendemos cómo se resuelven ecuaciones o cómo se encuentra el área de un triángulo; en la universidad aprendemos por qué funcionan esos métodos, y demostramos que lo hacen. Los matemáticos están obsesionados con la idea de «demostración». Y, sí, eso provoca que muchas personas se alejen. Yo les llamo «demostráfobos». Los matemáticos son, por el contrario, demostráfilos: por mucha evidencia circunstancial que pueda haber a favor de un enunciado matemático, el verdadero matemático no queda satisfecho hasta que el enunciado es *demostrado*. Con pleno rigor lógico, con todo hecho preciso e inequívoco.

Hay una buena razón para ello. Una demostración ofrece una férrea garantía de que una idea es correcta. Ninguna evidencia experimental puede sustituirla.

Echemos una ojeada a una demostración y veamos cómo difiere de otras formas de evidencia. No quiero utilizar nada que implique matemáticas técnicas, porque eso oscurecería las ideas subyacentes. La demostración no técnica que prefiero es el teorema SHIP-DOCK, que se refiere a esos juegos de palabras en los que uno tiene que ir de una palabra a otra a través de una secuencia de movimiento: CAT, COT, COG, DOG. En cada paso puede

cambiarse exactamente una letra (pero no moverla) y el resultado debe ser una palabra válida (que figure, por ejemplo, en el diccionario Webster).

Resolver este rompecabezas de palabras no es especialmente difícil: por ejemplo,

SHIP
SHOP
SHOT
SLOT
SOOT
LOOT
LOOK
LOCK
DOCK

Hay otras muchas soluciones. Pero yo no busco una solución como tal, ni siquiera varias: estoy interesado en algo que se aplica a *toda* solución. A saber, en algún paso debe haber una palabra que contiene dos vocales. Como SOOT (y LOOT y LOOK) en esta respuesta particular. Aquí quiero decir *exactamente* dos vocales, ni más, ni menos.

Para evitar objeciones, déjame aclarar qué significan aquí «vocales». Un problema espinoso es la letra Y. En YARD la letra Y es una consonante, pero en WILY es vocal. Análogamente, la W en CWMS actúa como una vocal: «cwm» es galés, y se refiere a una formación geológica para la que no parece haber una palabra en inglés, aunque «corrie» (escocés) y «cirque» (francés) son otras opciones. Debemos tener mucho cuidado con letras que a veces actúan como vocales pero que en otras ocasiones son consonantes. De hecho, la manera más segura de evitar el tipo de palabras que gustan a los jugadores de Scrabble es olvidarse del Webster y redefinir «vocal» y «palabra» en un sentido más limitado. Para el propósito de esta discusión, una «vocal» será una de las letras A, E, I, O, U, y una «palabra» requerirá contener al menos con una de estas cinco letras. Optativamente, podemos exigir que Y y W cuenten siempre como vocales, incluso cuando se están utilizando como consonantes. Lo que no podemos hacer, en este contexto, es permitir que las letras actúen a veces como vocales y a veces como consonantes. Volveré a esto más adelante.

No se trata de cuál sea la convención correcta en lingüística; estoy estableciendo una norma temporal con un fin matemático específico. A veces en matemáticas la mejor manera de avanzar es introducir simplificaciones y

eso es lo que estoy haciendo aquí. Las simplificaciones no son afirmaciones sobre el mundo exterior: son maneras de restringir el dominio del discurso, de mantenerlo tratable. Probablemente un análisis más complicado podría tratar también las letras excepcionales como Y, pero eso complicaría demasiado la historia para mi propósito actual.

Con esa salvedad, ¿estoy en lo cierto? ¿Es verdad que toda solución del rompecabezas SHIP-DOCK incluye una palabra (en ese nuevo sentido restringido) con exactamente dos vocales (en ese nuevo sentido restringido)?

Una forma de investigarlo es buscar otra solución, tal como

SHIP
CHIP
CHOP
COOP
COOT
ROOT
ROOK
ROCK
DOCK

Aquí encontramos dos vocales en COOP, COOT, ROOT, ROOK. Pero incluso si muchas soluciones aisladas tienen dos vocales en algún lugar, eso no demuestra que todas las tengan, pues una demostración es un razonamiento lógico que no deja lugar a dudas.

Después de cierta experimentación y reflexión, el «teorema» que estoy proponiendo aquí empieza a parecer obvio. Cuanto más piensas en cómo se pueden cambiar las vocales de posición, más obvio se hace que en algún momento del proceso debe haber exactamente dos vocales. Pero una sensación de que algo es «obvio» no constituye una demostración, y hay una sutileza en el teorema porque algunas palabras de cuatro letras contienen tres vocales, por ejemplo OOZE.

Sí, pero... ¿no es cierto que en el proceso hacia una palabra de tres vocales tenemos que pasar por una palabra de dos vocales? Estoy de acuerdo, pero eso tampoco es una demostración, aunque pueda ayudarlos a encontrar una. ¿Por qué debemos pasar por una palabra de dos vocales?

Una buena manera de dar con una demostración en este caso es prestar más atención a los detalles. Mira fijamente dónde van las vocales. Inicialmente hay una vocal en la tercera posición. Al final, tenemos una vocal en la segunda posición. Pero —ésta es una idea simple pero crucial— una

vocal no puede cambiar de posición en un paso, porque eso implicaría cambiar dos letras. Precisemos esta idea particular, lógicamente, de modo que podamos basarnos en ella. He aquí una manera de demostrarla. En alguna etapa, una consonante en la segunda posición tiene que cambiarse por una vocal, dejando todas las demás letras como están; en alguna otra etapa, la vocal en la tercera posición tiene que cambiarse por una consonante. Quizás entren o salgan también otras vocales y consonantes, pero cualesquiera que sean estas otras cosas, ahora podemos estar seguros de que una vocal no puede cambiar de posición en un paso.

¿Cómo cambia el número de vocales en la palabra? Bueno, puede quedar igual; puede aumentar en 1 (cuando se cambia una consonante por una vocal), o puede disminuir en 1 (cuando se cambia una vocal por una consonante). No hay otras posibilidades. El número de vocales empieza siendo 1 con SHIP y termina siendo 1 con DOCK, pero no puede ser 1 en todos los pasos, porque entonces la única vocal tendría que estar siempre en el mismo lugar, la posición tres, y sabemos que tiene que terminar en la posición dos.

Se me ocurre una idea: pensemos en el primer paso en el que cambia el número de vocales. El número de vocales tiene que haber sido 1 en todos los pasos anteriores a éste. Por consiguiente, cambia de 1 a algún otro. Las únicas posibilidades son 0 y 2, porque el número aumenta o disminuye en 1.

¿Podría ser 0? No, porque eso significa que la palabra no tenía ninguna vocal y, por definición, en nuestro sentido restringido no puede existir ninguna palabra así. Por consiguiente, la palabra tiene dos vocales; fin de la demostración. Apenas hemos empezado a analizar el problema, y ha surgido una demostración por sí misma. Esto suele suceder cuando sigues la línea de menor resistencia. Ten cuidado, las cosas empiezan a hacerse realmente interesantes cuando la línea de menor resistencia no lleva a ninguna parte.

Siempre es una buena idea comprobar una demostración con ejemplos, porque de esa manera se suelen detectar errores lógicos. Contemos entonces las vocales:

SHIP	1	vocal
SHOP	1	vocal
SHOT	1	vocal
SLOT	1	vocal
SOOT	2	vocales
LOOT	2	vocales
LOOK	2	vocales
LOCK	1	vocal

Según la demostración hay que encontrar la primera palabra donde este número no es 1, y ésa es la palabra SOOT, que tiene dos vocales. De modo que la demostración pasa la prueba en este ejemplo. Además, el número de vocales cambia como mucho en 1 en cada paso. No obstante, estos hechos por sí solos no significan que la demostración sea correcta; para estar seguro de su corrección se debe comprobar la cadena lógica y asegurar que cada eslabón está intacto. Dejaré que te convenzas por ti misma de que es así.

Fíjate en la diferencia que hay aquí entre intuición y demostración. La intuición nos dice que la única vocal en SHIP no puede saltar a una posición diferente a menos que aparezca una nueva vocal en alguna parte. Pero esta intuición no constituye una demostración. La demostración emerge solo cuando tratamos de precisar la intuición: sí, el número de vocales cambia, pero ¿cuándo? ¿A qué debe parecerse el cambio?

No solo nos hemos asegurado de que deben aparecer dos vocales; también entendemos por qué esto es inevitable. Y obtenemos información adicional gratuita.

Si una letra puede ser a veces una vocal y a veces una consonante, entonces esta demostración concreta deja de ser válida. Por ejemplo, con palabras de tres letras está la secuencia

SPA
SPY
SAY
SAD

Si contamos Y como una vocal en SPY pero como una consonante en SAY (lo que es defendible aunque también discutible) entonces cada palabra tiene una sola vocal, pero la posición de la vocal cambia. No creo que este efecto pueda causar problemas cuando se va de SHIP a DOCK, pero eso depende de un análisis mucho más detallado de las palabras reales del diccionario. El mundo real puede ser confuso.

Los rompecabezas de palabras son divertidos (trata de pasar de ORDER a CHAOS). Este rompecabezas particular también nos enseña algo sobre las demostraciones y la lógica. Y sobre las idealizaciones que suelen estar implicadas cuando utilizamos las matemáticas para construir una maqueta del mundo real.

Hay dos grandes preguntas acerca de la demostración. La que preocupa a los matemáticos es: ¿qué es una demostración? El resto del mundo tiene una preocupación diferente: ¿por qué las necesitamos?

Déjame que invierta el orden de las preguntas: una ahora, y la otra en una carta posterior.

He empezado a observar que cuando la gente pregunta por qué algo es necesario, es normalmente porque se sienten incómodos haciéndolo y esperan librarse de ello. Un estudiante que sepa cómo construir demostraciones nunca pregunta para qué sirven. De hecho, un estudiante que sabe cómo hacer una larga multiplicación de memoria mientras hace el pino tampoco pregunta nunca por qué vale la pena hacerlo. La gente que disfruta haciendo algo apenas siente la necesidad de preguntarse si vale la pena; les basta con el placer que obtienen de ello. De modo que el estudiante que pregunta por qué necesitamos demostraciones probablemente está teniendo problemas para entenderlas, o para construir las suyas. Está esperando que le respondas: «No hay que preocuparse por las demostraciones. Son totalmente inútiles. De hecho, las hemos excluido del temario y no saldrán en el examen».

¡Ni soñarlo!

Sigue siendo una buena pregunta, y si lo dejo en lo que acabo de decir, estoy eludiendo la cuestión de forma tan descarada como un estudiante demostráfobo.

Los matemáticos necesitan demostraciones por honestidad. Todas las áreas técnicas de la actividad humana necesitan pruebas empíricas. No basta con creer que algo funciona, que es una buena manera de proceder o incluso que es cierto. Necesitamos saber por qué es cierto. De lo contrario, no sabemos nada en absoluto.

Los ingenieros ponen a prueba sus ideas construyéndolas y viendo si aguantan o se caen a trozos. Cada vez lo hacen con mayor frecuencia mediante simulaciones antes que construyendo un puente y esperando que no se caiga, y al hacerlo remiten sus problemas a la física y a las matemáticas, que son la fuente de las reglas empleadas en sus cálculos y los algoritmos que implementan dichas reglas. Incluso así, pueden presentarse problemas inesperados. El puente del Milenio, un puente peatonal sobre el Támesis en Londres, parecía bien calculado en los modelos por ordenador. Cuando se inauguró y la gente empezó a utilizarlo, repentinamente empezó a balancearse de forma alarmante de un lado a otro. Seguía siendo seguro, no iba a caerse, pero cruzarlo no era una experiencia agradable. En ese momento se vio claro que las simulaciones habían modelizado a las personas como masas que se

mueven suavemente; habían pasado por alto las vibraciones inducidas por los pies al pisar el tablero.

Los militares aprendieron hace tiempo que cuando los soldados atraviesan un puente deben romper la formación. El impacto sincronizado de varios cientos de pies derechos puede iniciar vibraciones y causar daños graves. Sospecho que esto ya lo sabían los romanos. Nadie esperaba que un tipo de sincronización similar apareciera cuando los individuos atravesaran el puente al azar. Pero la gente en el puente responde al movimiento del puente, y lo hacen de una manera similar y aproximadamente al mismo tiempo. De modo que cuando el puente se movía ligeramente —quizás en respuesta a una ráfaga de viento— la gente que estaba sobre él empezaba a moverse en sincronía. Cuanto más se sincronizaban las pisadas de la gente, más se movía el puente, lo que a su vez aumentaba la sincronización de las pisadas. Pronto el puente estaba balanceándose de un lado a otro.

Los físicos utilizan las matemáticas para estudiar lo que ellos curiosamente llaman mundo real. Es real, en cierto sentido, pero buena parte de la física aborda aspectos más bien artificiales de la realidad, tales como un electrón solitario o un sistema solar con un solo planeta.

A veces los físicos desdeñan las demostraciones, en parte por miedo, pero también porque el experimento les proporciona una manera muy efectiva de poner a prueba sus hipótesis y sus cálculos. Si una idea intuitivamente plausible conduce a un resultado que está de acuerdo con el experimento, no tiene mucho sentido retrasar la disciplina diez, cincuenta o trescientos años hasta que alguien encuentre una demostración rigurosa. Estoy totalmente de acuerdo. Por ejemplo, hay cálculos en teoría cuántica de campos que no tienen una rigurosa justificación lógica, pero coinciden con la experiencia con una precisión de nueve cifras decimales. Sería estúpido sugerir que este acuerdo es un accidente y que no hay ningún principio físico implicado.

Sin embargo, la posición del matemático sobre esto va más allá. Dado un acuerdo tan impresionante, es igualmente estúpido no tratar de descubrir la lógica profunda que justifica el cálculo. Tal comprensión haría avanzar la física directamente, pero aunque no fuera así, ciertamente haría avanzar las matemáticas. Y las matemáticas a menudo inciden de manera directa en la física, probablemente en una rama diferente de la física pero, si es así, es una prima adicional.

Así que por eso es por lo que las demostraciones son necesarias, Meg. Incluso para la gente que preferiría no molestarse en ellas.

9

¿No pueden los ordenadores resolverlo todo?

Querida Meg:

Sí, los ordenadores pueden calcular a mucha mayor velocidad que los seres humanos, y con mucha mayor precisión, y supongo que eso es lo que lleva a algunos de tus amigos a cuestionar el valor de lo que tú estudias. La gente cree que los ordenadores convierten en obsoletos a los matemáticos. Puedo asegurarte que no lo somos.

Cualquiera que piense que los ordenadores pueden sustituir a los matemáticos no entiende que es la computación ni qué son las matemáticas. Es como pensar que no necesitamos biólogos ahora que tenemos microscopios. Posiblemente, en esto subyace la falsa idea de que las matemáticas son solo aritmética, y puesto que los ordenadores pueden hacer aritmética más rápidamente y con más precisión que los seres humanos, ¿por qué necesitamos a los humanos? La respuesta, por supuesto, es que las matemáticas no son solo aritmética.

Los microscopios hacen la biología más interesante, no menos, al abrir nuevos caminos para aproximarse a la disciplina. Lo mismo sucede con los ordenadores y las matemáticas. Algo muy importante y muy interesante que los ordenadores han hecho por el matemático es posibilitar la realización de experimentos de forma rápida. Estos experimentos ponen a prueba conjeturas, en ocasiones revelan que lo que esperábamos demostrar es falso, y —con frecuencia cada vez mayor— realizan cálculos gigantescos que nos permiten

demostrar teoremas que de otra forma estarían fuera de nuestro alcance. A veces la gente que piensa que las matemáticas consisten en grandes sumas tiene razón.

Piensa, por ejemplo, en la conjetura de Goldbach. En 1742, Christian Goldbach, un matemático aficionado, escribió a Leonhard Euler diciéndole que hasta donde él podía comprobar todo número par es suma de dos números primos. Por ejemplo, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $100 = 3 + 97$. Calculando a mano, Goldbach solo pudo poner a prueba su conjetura en una pequeña lista de números. En un ordenador moderno puedes comprobarla rápidamente con miles de millones de números: el récord actual es 2×10^{17} . Cada vez que alguien ha realizado una prueba semejante ha visto que Goldbach estaba en lo cierto. Sin embargo, todavía no se ha encontrado una demostración de su conjetura (que pasaría a ser un teorema).

¿Por qué preocuparse? Si miles de millones de experimentos dan la razón a Goldbach, ¿no es cierto que lo que él decía debe ser verdad?

El problema es que los matemáticos utilizan teoremas para demostrar otros teoremas. Un único enunciado falso arruina en principio todas las matemáticas. (En la práctica, advertiríamos la falsedad, aislaríamos el enunciado peligroso y evitaríamos utilizarlo). Por ejemplo, el número π resulta bastante irritante, y estaría bien prescindir de él. Podríamos decidir que no hay ningún peligro real en sustituir π por 3 (como algunos dicen que pasa en la Biblia, pero solo si se toma un pasaje oscuro literalmente^[11]) o por $22/7$. Y si solo quieres utilizar π para calcular perímetros de circunferencias y similares, una aproximación bastante ajustada no perjudicaría.

Sin embargo, si realmente piensas que π es igual a 3, las repercusiones son mucho mayores. Un simple razonamiento revela una consecuencia inesperada. Si $\pi = 3$, entonces $\pi - 3 = 0$, y dividiendo ambos miembros por $\pi - 3$ (que, gracias a Arquímedes, sabemos que es distinto de cero, de modo que la división está permitida), obtenemos $1 = 0$. Multiplicando por cualquier número que queramos, demostramos que todos los números son 0; se sigue entonces que *dos números cualesquiera son iguales*. Así que cuando vas a tu banco a sacar 100 dólares de tu cuenta, el cajero puede darte 1 dólar e insistir en que no hay ninguna diferencia; y de hecho no la hay, porque puedes entonces entrar en un concesionario de Neiman Marcus o Rolls-Royce y explicar que tu dólar es igual que un millón. Y lo que es más interesante, los asesinos no deberían ser encarcelados, porque matar a una persona es lo mismo que matar a ninguna; por el contrario, alguien que nunca ha tocado las drogas en su vida debería ser encarcelado, puesto que la posesión de ninguna

cocaína es lo mismo que poseer miles de toneladas de ella. Y así sucesivamente...

Los hechos matemáticos encajan y llevan, por vía de la lógica, a nuevos hechos. Una deducción es tan fuerte como su eslabón más débil. Para ser segura, todos los eslabones débiles deben ser eliminados. Por ello sería peligroso verificar la conjetura de Goldbach en un ordenador para números de hasta, pongamos, veinte dígitos, y concluir que debe ser verdadera.

Seguramente piensas que Ian está siendo un poco pedante. Si un enunciado es verdadero para números tan grandes, tiene que ser verdadero para cualquier número, ¿o no?

No. Las cosas no funcionan así. Para empezar, un número de veinte dígitos, en el universo matemático, es algo minúsculo. El gran océano de los números se extiende hasta infinito, e incluso un número con mil millones de dígitos es, en algunos contextos, pequeño. Un ejemplo clásico se da en la teoría de los números primos. Aunque no hay pautas evidentes en la secuencia de números primos, hay regularidades estadísticas. En algún momento antes de 1849, cuando escribió una carta sobre el descubrimiento, Carl Friedrich Gauss encontró una buena fórmula aproximada que relacionaba el número de primos menores que un número dado con la «integral logarítmica» de dicho número. Pronto se advirtió que la aproximación parece estar siempre ligeramente por encima del valor correcto. Una vez más, los experimentos hechos mediante ordenador comprobaron dicha propiedad para miles de millones de números.

Pero la generalización es falsa. En 1914, John Littlewood demostró que el valor correcto y la aproximación de la integral logarítmica intercambian su orden infinitamente a menudo. Pero nadie conocía un número *concreto* para el que la aproximación fuera menor que el valor correcto, hasta que un alumno de Littlewood, Samuel Skewes, demostró, en 1933, que semejante número debe tener como máximo $10^{100000000000000000000000000000000}$ dígitos. Esto son treinta y cuatro ceros en el *exponente*. Además, su demostración incluía una hipótesis, un enunciado no demostrado conocido como la hipótesis de Riemann. En 1955, Skewes demostró que si no se supone la hipótesis de Riemann, entonces esos treinta y cuatro ceros en el exponente deben aumentarse hasta un millar de ceros. Y recuerda que este número gigantesco no es el que buscamos: es simplemente el *número de dígitos* que posee dicho número.

El número de Skewes ha sido reducido desde entonces a $1,4 \times 10^{316}$, que es minúsculo en comparación.

Con números de este tamaño, el tipo de experimento que podemos realizar en un ordenador es totalmente irrelevante. Y en teoría de números, ese tamaño es bastante común.

No importaría si todo lo que estuviéramos tratando de hacer fuera aproximar los primos en términos de integrales logarítmicas. Pero las matemáticas deducen nuevos hechos a partir de los viejos. Y como hemos visto con π , si el hecho viejo es realmente falso, las deducciones consiguientes pueden destruir toda la base de las matemáticas. Por muy amplia que pueda ser la evidencia de los cálculos por ordenador, aún tenemos que utilizar la materia gris que tenemos entre las orejas. Los ordenadores pueden ser una ayuda valiosa, pero siempre y cuando hayan intervenido muchas mentes en la puesta en marcha de los procesos informáticos. Todavía no nos han dejado obsoletos nuestras propias creaciones.

Narración matemática

Querida Meg:

En mi última carta te contaba por qué son necesarias las demostraciones. Ahora me centrare en la otra cuestión que planteaba: ¿qué es una demostración?

Las primeras demostraciones registradas, junto con la idea de que las demostraciones son necesarias, se dan en Euclides. Sus *Elementos*, escritos en torno al año 300 a. C., exponían gran parte de la geometría griega en una secuencia lógica. Empiezan con dos tipos de hipótesis fundamentales, que Euclides llama axiomas y nociones comunes. Ambas son básicamente una lista de hipótesis que van a hacerse. Por ejemplo, el axioma 4 afirma que «todos los ángulos rectos son iguales», y la noción común 2 afirma que «si iguales se suman a iguales, los totales son iguales». La diferencia principal es que los axiomas tratan sobre objetos geométricos y las nociones comunes tratan sobre la igualdad. El enfoque moderno los agrupa a todos como axiomas.

Estas hipótesis se establecen para ofrecer un punto de partida lógico. No se intenta demostrarlas; son las «reglas del juego» para la geometría euclídea. Uno es libre de discrepar de las hipótesis o inventar otras nuevas, si lo desea; pero si lo hace, está jugando a un juego diferente con reglas diferentes. Todo lo que Euclides está tratando de hacer es explicitar las reglas de su juego, de modo que los jugadores sepan donde están.

Éste es el método axiomático, que sigue usándose en la actualidad. Los matemáticos posteriores observaron lagunas en la lógica de Euclides, hipótesis no establecidas que en realidad deberían incluirse como axiomas. Por ejemplo, cualquier recta que pasa por el centro de un círculo debe cortar a su circunferencia si la recta se prolonga lo suficiente. Algunos trataron de demostrar el axioma más complejo de Euclides, que las paralelas no convergen ni divergen, a partir de los otros. Con el tiempo quedó demostrado el buen gusto de Euclides cuando se comprendió que todos esos intentos estaban abocados al fracaso. Para enturbiar las aguas filosóficas, en el curso de los siglos han aparecido varias dificultades profundas en el enfoque axiomático, tales como el descubrimiento de Gödel de que si las matemáticas son lógicamente consistentes, entonces nunca podemos demostrar que lo son. Podemos vivir con las incertidumbres gödelianas si tenemos que hacerlo, y «tenemos» que hacerlo.

Los libros de texto de lógica matemática basan sus descripciones de «demostración» en el modelo de Euclides. Una demostración, nos dicen, es una secuencia finita de deducciones lógicas que empieza con axiomas o con resultados previamente demostrados y lleva a una conclusión, conocida como un teorema. Con tal de que cada paso obedezca a las reglas de inferencia lógica —que pueden encontrarse en los libros de texto de lógica elemental— entonces el teorema está demostrado.

Si niegas los axiomas, también eres libre de negar el teorema. Si prefieres reglas de inferencia alternativas, eres libre para inventar las tuyas propias. Solo se afirma que con tales reglas de inferencia, la aceptación de los axiomas establecidos implica la aceptación del teorema. Si uno quiere hacer π igual a 3, tiene que aceptar que todos los números son iguales. Si quiere que números diferentes sean diferentes, tiene que aceptar que π no es 3. Lo que uno no puede hacer es picar de aquí y de allá, haciendo π igual a 3 pero 0 diferente de 1. Es tan simple y razonable como eso.

Toda esta definición de «demostración» está muy bien, pero es parecido a definir una sinfonía como «una secuencia de notas, de tono y duración variables, empezando con la primera nota y terminando con la última». Falta algo. Además, raramente alguien escribe una demostración de la forma que describen los libros de lógica. En 1999 reflexionaba yo sobre esta discrepancia, tras haber aceptado una invitación para una conferencia en Abisko, Suecia, con el tema «Historias de ciencia y la ciencia de las historias». Abisko está al norte del círculo polar ártico, en Laponia, y un grupo de unos treinta escritores de ciencia ficción, escritores de divulgación

científica, periodistas e historiadores de la ciencia iban a pasar allí una semana tratando de buscar un terreno común para las distintas disciplinas. Al preguntarme qué era lo que podía decirles, me di cuenta de repente de lo que es realmente una demostración.

Una demostración es una historia.

Es una historia contada por matemáticos a matemáticos, expresada en su lenguaje común. Tiene un principio (las hipótesis) y un final (la conclusión), y se derrumba instantáneamente si hay alguna laguna lógica. Cualquier cosa rutinaria u obvia puede ser omitida sin problemas, porque la audiencia ya las sabe y quiere que el narrador siga con la línea principal de la historia. Si tú estás leyendo una novela de espías y el héroe está sobre un abismo en el extremo de una cuerda en llamas que cuelga de un helicóptero, no te gustaría leer diez páginas sobre la fuerza de la gravedad y los efectos fisiológicos de un impacto a alta velocidad. Lo que querías es descubrir cómo se salva el héroe. Lo mismo sucede con las demostraciones. «No pierdas el tiempo resolviendo la ecuación de segundo grado, sé cómo hacerlo. Pero dime, ¿por qué sus soluciones determinan la estabilidad del ciclo límite?».

En mi artículo (reimpreso en *Mission to Abisko*^[12]) yo decía esto: «Si una demostración es una historia, entonces una demostración memorable debe contar una historia emocionante. ¿Qué nos dice eso sobre la forma de construir demostraciones? No que necesitemos un lenguaje formal en el que cada minúsculo detalle pueda comprobarse algorítmicamente, sino que la línea argumental debería resaltar con claridad e intensidad. No es la sintaxis de la demostración la que necesita mejora: es la semántica». Es decir, la esencia de una demostración no está en su «gramática», sino en su *significado*.

En ese artículo, yo contrastaba esta noción hay que reconocer que vaga con una noción mucho más formal, la idea de una «demostración estructurada», defendida por el informático Leslie Lamport. Las demostraciones estructuradas hacen explícito cada paso en la lógica, sea profundo o trivial, ingenioso u obvio. Lamport hace una fuerte defensa de las demostraciones estructuradas como una ayuda en la enseñanza, y no hay duda de que pueden ser muy efectivas para asegurar que los estudiantes entienden realmente los detalles. Parte de esa defensa consiste en una anécdota relativa a un resultado famoso llamado teorema de Schröder-Bernstein. Georg Cantor había encontrado una manera de contar cuántos miembros tiene un conjunto, incluso cuando dicho conjunto es infinito, utilizando un tipo de número generalizado que él llamaba un «número transfinito». El teorema de Schröder-

Bernstein nos dice que si dos números transfinitos son cada uno menor o igual que el otro, entonces deben ser realmente iguales. Lampport estaba dando un curso basado en el texto clásico *General Topology* de John Kelley, que incluye una demostración del teorema, pero cuando se añadían los detalles extra necesarios para los estudiantes, la demostración de Kelley resultaba ser errónea.

Años más tarde, Lampport ya no podía localizar el error. La demostración parecía obviamente correcta. Pero cinco minutos dedicados a escribir una demostración estructurada revelaron de nuevo el error.

Yo estaba preocupado porque había incluido una demostración del teorema de Schröder-Bernstein en uno de mis textos. Intenté llegar a la demostración de Kelley por mí mismo, pero no podía descubrir un error. De modo que envié un *e-mail* a Lampport, el cual sugirió que escribiera una demostración estructurada. En lugar de ello, seguí mi camino de forma muy sistemática a lo largo del argumento de Kelley, creando de hecho una demostración estructurada de una manera informal, y finalmente detecté el error.

Hay una demostración clásica del teorema de Schröder-Bernstein que empieza con dos conjuntos, correspondientes a los dos cardinales transfinitos. Cada conjunto se divide en tres piezas, utilizando una noción de «antecesor» ideada simplemente para esta demostración concreta, y las piezas se encajan. En efecto, esta demostración cuenta una historia sobre los dos conjuntos y sus piezas componentes. No es una historia muy emocionante, pero posee un argumento claro y una conclusión memorable. Afortunadamente, yo había utilizado la demostración clásica en mi libro de texto, y no la reformulación que de ella hizo Kelley. Porque Kelley había contado la historia errónea. Sospecho que al intentar simplificar la versión clásica, había sobreentendido las cosas y quebrantado el lema de Einstein: «Tan sencillo como sea posible, pero no más».

La presencia de este error apoya la idea de Lampport sobre el valor de las demostraciones estructuradas. Pero, por citar mi artículo: «Hay otra interpretación, no contradictoria, sino complementaria, y es que Kelley contó mal una buena historia. Es algo parecido a si hubiera presentado a los Tres Mosqueteros como Pooh, Piglet y Eeyore^[13]. Algunas partes de la historia tendrían [aún] sentido —su compañerismo inseparable, por ejemplo— pero otras, como los duelos incesantes, no lo tendrían...».

Si consideramos una demostración en el sentido del libro de texto, todas las demostraciones están en pie de igualdad, igual que todas las piezas de

música parecen renacuajos posados en una valla de alambre cuando se expresan en notación musical, a menos que uno sea un experto y pueda «oír» las partituras en su cabeza. Pero cuando pensamos en una demostración como una historia, hay buenas historias y las hay malas, historias atractivas e historias aburridas, igual que hay música conmovedora o sosa. Hay una estética de la demostración, de modo que una historia realmente buena puede ser bella.

Paul Erdős tenía una visión poco ortodoxa de la belleza de las demostraciones. Erdős fue un matemático excéntrico y brillante que colaboró con más personas que cualquier otro en el planeta; puedes leer la historia de su vida en *The Man Who Loved Only Numbers*^[14] de Paul Hoffman. Se dice que cualquiera que fue coautor de un artículo con él tiene un «número de Erdős» uno. Sus colaboradores tienen un número de Erdős dos, y así sucesivamente. Es la versión del matemático del Oráculo de Kevin Bacon, en el que los actores están relacionados con Bacon por sus apariciones en las mismas películas, o por sus apariciones con actores que han aparecido con Bacon, y así sucesivamente. Mi número de Erdős es tres. Nunca colaboré con él, y no estoy en la lista de personas con número de Erdős dos, pero uno de mis colaboradores lo está.

En cualquier caso, Erdős consideraba que en el cielo Dios tenía un libro que contenía las mejores demostraciones. Si Erdős estaba realmente impresionado por una demostración, decía que estaba sacada de «El Libro». En su opinión, la tarea del matemático consistía en husmear por encima del hombro de Dios y transmitir la belleza de Su creación al resto de Sus criaturas.

El Libro de la deidad es un libro de historias. Terminé de la siguiente manera mi charla en Abisko: «Los psicólogos nos dicen ahora que sin soportes emocionales la parte racional de nuestra mente no funciona. Parece que solo podemos ser racionales acerca de las cosas si tenemos un compromiso emocional con una técnica tan recientemente desarrollada como la racionalidad. (...) Yo no creo que pudiera emocionarme mucho con una demostración estructurada, por elegante que fuera. Pero cuando realmente soy capaz de sentir la fuerza de una historia matemática, algo sucede en mi mente que nunca puedo olvidar. (...) Diría más bien que mejoremos la narración de las demostraciones, en lugar de diseccionarlas en trozos que puedan ser colocados en pilas de carpetas y ordenados».

Directo a la yugular

Querida Meg:

Si quieres hacerte un nombre como montañera, tienes que conquistar una cima a la que nadie más haya subido. Si quieres hacerte un nombre como matemática, no hay mejor manera que vencer uno de los clásicos problemas no resueltos de la disciplina. La conjetura de Poincaré, la hipótesis de Riemann, la conjetura de Goldbach, la conjetura de los primos gemelos.

¡No te aconsejo que seas tan ambiciosa mientras estés trabajando en una tesis doctoral! Los grandes problemas, como las grandes montañas, son peligrosos. Podrías pasar tres o cuatro años haciendo cosas extraordinariamente ingeniosas pero no conseguir tu objetivo y terminar sin nada. Las matemáticas difieren de otras ciencias a este respecto: si uno realiza una serie de experimentos en química, siempre puede escribir los resultados, ya confirmen o no las teorías de su director de tesis. Pero en matemáticas, normalmente no se puede escribir una tesis y decir: «He aquí cómo traté de resolver el problema, y he aquí por qué no funciona».

Incluso los profesionales tienen que tratar los grandes problemas con un respeto considerable. Hoy día las universidades esperan que su profesorado sea productivo, y tienden a medir la productividad en términos de publicaciones por año. Si no publicas nada durante cinco años y luego resuelves la conjetura de Poincaré te habrás colocado de por vida, suponiendo que se te haya permitido conservar tu trabajo mientras estabas resolviendo la

conjetura. Si no publicas nada durante cinco años y luego no consigues resolver la conjetura de Poincaré, te pondrán de patitas en la calle.

Una solución razonable es dedicar parte de tu tiempo de trabajo a un gran problema y el resto a trabajar en problemas menores, resolubles pero aún dignos de tratar. Sería maravilloso vivir en un mundo donde fuera posible concentrarse solamente en las grandes cuestiones, pero no lo hacemos. De todas formas, algunos espíritus valientes se las han arreglado para encontrar un modo de hacer precisamente eso, y lo han logrado. En sus manos, una conjetura adquiere estatus de demostración, y se convierte en un teorema.

En mi última carta te contaba que una demostración es una historia. Se suele decir que hay solo siete argumentos básicos para una novela, y los antiguos griegos los conocían todos. Parece haber relativamente pocas líneas narrativas para las demostraciones matemáticas, pero los antiguos griegos solo conocían una: el corto, dulce y atractivamente ingenioso argumento de Euclides que hacía de QED^[15] el pan de cada día.

¿Qué vamos a hacer entonces con las demostraciones matemáticas que tienen centenares o incluso miles de páginas de longitud? ¿O con las demostraciones que implican meses de cálculo en una gran red de ordenadores? Cada vez nacen más monstruos de este tipo, normalmente como soluciones a uno de aquellos grandes problemas abiertos. En lugar de la historia corta y atractiva que los griegos conocían, estas demostraciones son epopeyas, o aún peor, largos ciclos de historias cuyo hilo principal puede estar sumergido en intrincados subargumentos de varios capítulos simultáneos. ¿Qué ha sucedido con la visión de Erdős de la belleza de la creación matemática de Dios? ¿Son estas enormes demostraciones realmente necesarias? ¿Son tan enormes solo porque los matemáticos son demasiado estúpidos para encontrar las versiones breves y elegantes escritas en El Libro?

La demostración señera de Wiles del último teorema de Fermat equivalía a aproximadamente un centenal de páginas de matemáticas muy técnicas, lo que impulsó al periodista científico John Horgan a escribir un provocativo artículo titulado «La muerte de la demostración». Horgan expuso varias razones por las que las demostraciones se estaban haciendo obsoletas, incluyendo la aparición del ordenador, la desaparición de las demostraciones de las matemáticas escolares y la existencia de culebrones como el de Wiles. Se trataba de un curioso intento de convertir la victoria en derrota, de tratar un logro histórico como una mala noticia. Sí, colocamos un hombre en la Luna, pero fíjate en el valioso combustible de cohete que tuvimos que utilizar.

La demostración de Wiles quizá sea un culebrón, pero cuenta una historia apasionante. Tuvo que utilizar herramientas matemáticas a gran escala para una pregunta sencilla, igual que un físico necesita un acelerador de partículas de muchos kilómetros de circunferencia para estudiar un quark. Pero lejos de ser aburrida, su demostración es intensa y bella. Esos cientos de páginas tienen un argumento, una historia. Un experto puede saltarse los detalles y seguir la narración, con sus giros y recovecos lógicos y el fuerte elemento de suspense: ¿superará el héroe el último teorema en las páginas finales, o el fantasma de Fermat seguirá asustando a la profesión matemática? Nadie declaró muerta la literatura porque *Guerra y paz* fuese bastante larga o porque *Finnegans Wake* no se leyera en las escuelas. Los matemáticos profesionales pueden manejar cien páginas de demostración. Incluso diez mil páginas —la longitud total del teorema de clasificación de los grupos finitos simples, combinando el trabajo de docenas de personas durante una década o más— no les asustan.

No hay razón para esperar que todo enunciado corto, sencillo y verdadero tenga una demostración corta y sencilla. De hecho, hay una buena razón para esperar lo contrario. Gödel demostró también que, en principio, algunos enunciados cortos requieren a veces demostraciones largas. Pero nunca podemos saber, por adelantado, qué enunciados cortos son esos.

Pierre de Fermat nació en 1601. Su padre vendía cuero; su madre era hija de una familia de letrados del Parlamento. En 1648 se convirtió en concejal real en el Parlamento local de Toulouse, donde sirvió para el resto de su vida, hasta que murió en 1665, solo dos días después de concluir un juicio legal. Nunca desempeñó un puesto académico de ningún tipo, pero las matemáticas eran su pasión. El historiador de las matemáticas Bell le llamó, «el príncipe de los aficionados», y la mayoría de los profesionales de hoy se contentarían con tener la mitad de su talento. Aunque trabajó en muchos campos de las matemáticas, las ideas más influyentes de Fermat repercutieron en teoría de números, un tema que surgió de la obra de Diofanto de Alejandría, que vivió en torno al 250 d. C. y escribió un libro llamado *Aritmética*. Trataba de lo que ahora se llaman ecuaciones diofánticas, ecuaciones que deben tener soluciones enteras.

Un problema al que Diofanto dio una respuesta completamente general es el de encontrar «triángulos pitagóricos»: dos cuadrados perfectos cuya suma es también un cuadrado perfecto. El teorema de Pitágoras nos dice que tales tripletas son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Dos ejemplos son $3^2 + 4^2 = 5^2$ y $5^2 + 12^2 = 13^2$. Fermat poseía un ejemplar de la

Aritmética, que inspiró muchas de sus investigaciones, y lo utilizaba para escribir sus conclusiones en los márgenes. En algún momento en torno a 1637 reflexionó sobre la ecuación pitagórica, y se preguntó qué pasaba si en lugar de con cuadrados pruebas con cubos o potencias superiores, por ejemplo $x^4 + y^4 = z^4$. Pero no pudo encontrar ningún ejemplo. En el margen de su ejemplar de la *Aritmética* escribió el comentario más famoso en la historia de las matemáticas: «Resolver un cubo en suma de dos cubos, una potencia cuarta en dos potencias cuartas o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos del mismo tipo, es imposible; de lo que he encontrado una demostración notable. El margen es demasiado pequeño para contenerla».

Este enunciado ha llegado a conocerse como su «último teorema», porque durante muchos años era la única afirmación suya que sus sucesores no habían demostrado ni refutado. Nadie pudo reconstruir la «notable demostración» de Fermat, y parecía cada vez más dudoso que hubiera encontrado una realmente. Pero si él hubiera dado con una demostración, incluso si no pudiera escribirla en un margen, ¿no es cierto que sería suficientemente concisa y elegante para ganarse un lugar en el Libro de Dios? Nadie escribía largas demostraciones en el siglo XVII. Pero durante tres siglos y medio, un matemático tras otro fracasaron en su intento de dar con la demostración ausente de Fermat. Luego, a finales de los años ochenta del siglo XX, Wiles abordó el problema durante mucho tiempo. Trabajaba solo en el ático de su casa y solo lo sabían unos pocos colegas selectos, quienes habían jurado mantener el secreto.

La estrategia de Wiles, como la de muchos matemáticos antes que él, consistía en suponer que existía una solución y entonces jugar algebraicamente con los números con la esperanza de que esto llevaría a una contradicción. Su punto de partida era una idea original del matemático alemán Gerhard Frey, quien se dio cuenta de que se podía construir un tipo de ecuación cúbica conocida como una curva elíptica a partir de los tres números que aparecen en la supuesta solución de la ecuación «imposible» de Fermat. Ésta era una idea brillante, porque los matemáticos habían estado jugando con curvas elípticas durante más de un siglo y habían desarrollado muchas maneras de manipularlas. Y lo que es más, los matemáticos se dieron cuenta entonces de que la curva elíptica construida a partir de las raíces de Fermat tendría propiedades tan extrañas que contradiría otra conjetura —la denominada conjetura de Taniyama-Shimura— que guía el comportamiento de tales curvas.

Nadie había demostrado nunca la conjetura de Taniyama-Shimura, aunque la mayoría de los matemáticos pensaban que probablemente era cierta. Si tenían razón, por supuesto, las raíces de la ecuación de Fermat llevarían a una contradicción, al demostrar que no podrían existir. Así que Wiles respiró hondo y se propuso demostrar la conjetura de Taniyama-Shimura. Durante siete años utilizó toda la artillería de la teoría de números para trabajar en ello, hasta que finalmente dio con una estrategia que le abrió el camino. Aunque trabajaba solo, no inventó toda el área por sí mismo. Se mantenía en estrecho contacto con los nuevos desarrollos sobre curvas elípticas, y sin una fuerte comunidad de teóricos de números que estuvieran creando un flujo continuo de nuevas técnicas probablemente no hubiera tenido éxito. Incluso así, su contribución es enorme, y está impulsando el tema a un nuevo y excitante territorio.

La demostración de Wiles ha sido ahora publicada al completo, y en prensa ocupa algo más de cien páginas. Ciertamente demasiado larga para caber en un margen. ¿Valía la pena?

Desde luego.

La maquinaria que Wiles desarrolló para descifrar el último teorema de Fermat está abriendo nuevos campos en teoría de números. Es cierto que la historia que tenía que contar era larga, y solo los expertos en el área podrían tener esperanza de entenderla en todos los detalles, pero quejarse de ello no tiene más sentido que el que tendría quejarse de que para leer a Tolstoi en el original uno tiene que ser capaz de entender ruso.

Culebrones

Querida Meg:

No, no bromeaba cuando decía que la clasificación de los grupos finitos simples ocupa diez mil páginas. No obstante, actualmente está siendo simplificada y reorganizada. Con un poco de suerte y vientos a favor, podría reducirse a solo dos mil. La mayor parte de la demostración se realizó a mano, y las ideas que había detrás eran producto exclusivo de la mente humana. Pero algunas partes clave requirieron la ayuda del ordenador.

Es ésta una tendencia creciente, y ha llevado a un nuevo tipo de estilo narrativo para las demostraciones, la demostración asistida por ordenador, que solo cuenta con treinta años de antigüedad. Es como la producción de comida rápida que sirve miles de millones de hamburguesas aburridas y repetitivas: hace su trabajo, pero no de una manera muy elegante. A veces hay algunas ideas ingeniosas, pero la función del ordenador consiste en reducir el problema a un cálculo en masa, aunque en principio rutinario. Este cálculo se confía entonces a un ordenador, y si éste dice que «sí», la demostración está completa.

Un ejemplo de este tipo de demostración se dio recientemente en relación con el problema de Kepler. En 1611 Johannes Kepler estaba considerando cómo podrían agruparse esferas. Llegó a la conclusión de que el método más eficiente —el que agrupa el máximo número de bolas posible en una región dada— es el que suelen utilizar los fruteros para apilar las naranjas. Se dispone una capa plana siguiendo una pauta de panal, luego se apila otra capa

igual encima, colocando las naranjas de la segunda capa en los intersticios de la primera capa, y se continúa así indefinidamente. Esta estructura se manifiesta en muchos cristales, y los físicos la llaman red cúbica centrada en las caras.

Suele decirse que la afirmación de Kepler es «obvia», pero quien piense así no aprecia las sutilezas. Por ejemplo, ni siquiera está claro que la disposición más eficiente incluya una capa plana de esferas. Los fruteros empiezan apilando sobre una superficie plana, pero no hay por qué hacerlo así. Incluso la versión bidimensional del problema —que muestra que una estructura de panal es la manera más eficiente de agrupar círculos iguales en el plano— no fue demostrada hasta que en 1947 László Fejes Tóth lo hizo. Su demostración es demasiado complicada para pertenecer a El Libro, pero es todo lo que tenemos.

En 1998, Thomas Hales anunció una demostración asistida por ordenador de la conjetura de Kepler que implicaba centenares de páginas de matemáticas más tres *giga bytes* de cálculos de ordenador auxiliares. Desde entonces se ha publicado en los *Annals of Mathematics*, la primera revista matemática del mundo, con una importante reserva: los revisores afirman que no han sido capaces de comprobar cada paso de los cálculos.

El enfoque de Hales consistía en hacer una lista de todas las maneras posibles de disponer pequeños grupos de esferas; luego demostraba que cada vez que el grupo no se encuentra en una red cúbica centrada en las caras, puede «comprimirse» reordenando las esferas. Conclusión: la única disposición incompresible —la que llena el espacio de forma más eficiente— es la conjeturada. Así es como manejó Tóth el caso bidimensional, y tuvo que hacer una lista de unas cincuenta posibilidades. Hales tuvo que trabajar con miles, en tres dimensiones, y el ordenador tuvo que verificar una enorme lista de desigualdades —esos tres *giga bytes* de memoria son los que se necesitaron para tabularlas—.

Una de las primeras demostraciones que utilizó este método de fuerza bruta por ordenador fue la demostración del teorema de los cuatro colores. Hace aproximadamente un siglo Francis Guthrie preguntó si todo posible mapa bidimensional que contenga cualquier disposición de países puede ser coloreado utilizando solo cuatro colores, de modo que dos países vecinos tengan siempre colores diferentes. Parece sencillo, pero la demostración se mostraba muy difícil de conseguir. Finalmente, en 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken demostraron el teorema de los cuatro colores. Por ensayo y error, y cálculos a mano, llegaron primero a una lista de casi dos mil

configuraciones de «países» y recurrieron al ordenador para demostrar que la lista es «inevitable», lo que significa que todo mapa posible debe contener países dispuestos de la misma manera que al menos una configuración de la lista.

El paso siguiente consistía en demostrar que cada una de estas configuraciones es «reducible». Es decir, cada configuración puede contraerse hasta que una parte de ella desaparece, simplificando el mapa. De forma crucial, la contracción debe asegurar que si el mapa más sencillo que resulta de ello puede ser coloreado con cuatro colores, también puede serlo el original. Debes recordar que todo mapa posible debe contener al menos una de las dos mil configuraciones. Por lo tanto, incluso el mapa más simple que uno haya creado mediante este proceso debe tener otra configuración que puede contraerse una vez más, y así sucesivamente. El resultado es que si uno puede encontrar una manera de contraer cada configuración posible, ya ha dado con su demostración. Emparejar cada configuración con una forma de «contraerla» como ésta implica un cálculo enorme pero rutinario por ordenador, que en aquellos días necesitó unas dos mil horas en el ordenador más rápido disponible. (Hoy día quizá baste con una hora). Pero al final, Appel y Haken tenían su respuesta.

Las demostraciones asistidas por ordenador plantean cuestiones de gusto, creatividad, técnica y filosofía. Algunos filósofos piensan que, con sus métodos de fuerza bruta, no son demostraciones en el sentido tradicional. Pero es precisamente para este tipo de cálculo masivo pero rutinario para lo que se inventaron los ordenadores. En eso es en lo que son buenos, y en eso es en lo que los humanos están muy limitados. Si un ordenador y un ser humano realizan un cálculo enorme y obtienen resultados diferentes, lo más sensato es apostar por el ordenador. Pero hay que decir que cualquier fragmento de la demostración, cualquier cálculo por ordenador, normalmente es algo trivial y extraordinariamente aburrido. Solo cuando los encadenas tienen alguna utilidad. Si la demostración de Wiles del último teorema de Fermat es rica en ideas y formas —como *Guerra y paz*—, las demostraciones por ordenador se parecen más a listines telefónicos. De hecho, en el caso de la demostración de Appel-Haken, y más incluso en la demostración de Hales, hay que pensar que la vida es —literalmente— demasiado corta para leerla entera con todo detalle, y no digamos para comprobarla.

Pese a todo, estas demostraciones no carecen de elegancia e intuición. Uno tiene que ser muy ingenioso para plantear el problema de modo que el ordenador lo pueda manejar. Y lo que es más, una vez que se sabe que la

conjetura es correcta, uno puede proponerse tratar de encontrar una forma más elegante de demostrarlo. Esto podría sonar extraño, pero entre los matemáticos es bien sabido que es mucho más fácil demostrar algo que ya se sabe que es cierto. En los ambientes matemáticos en todo el mundo oirás en ocasiones que algunos sugieren —medio en broma— que podría ser una buena idea difundir rumores de que algún problema importante ha sido resuelto, con la esperanza de que eso pueda acelerar su solución real. Es un poco como cruzar el Atlántico. Para Cristóbal Colón fue desesperadamente difícil, pero fue más fácil para John Cabot, que zarpó solo cinco años después, porque él sabía lo que Colón había encontrado.

¿Significa eso que con el tiempo los matemáticos pueden encontrar las demostraciones de Dios para el problema de Kepler y el teorema de los cuatro colores? Quizá sí, pero tal vez no. Es un poco ingenuo imaginar que todo teorema con un enunciado simple debe tener una demostración simple. Todos sabemos que muchos problemas tremendamente difíciles son engañosamente simples de enunciar: «Aterrizar en la Luna», «Curar el cáncer». ¿Por qué deberían ser diferentes las matemáticas?

Los expertos suelen mostrarse vehementes acerca de las demostraciones, bien porque la más conocida no puede simplificarse, bien porque los métodos alternativos que alguien propone no pueden funcionar. A menudo tienen razón, pero a veces su juicio puede estar condicionado por saber demasiado. Si uno es un escalador experimentado que propone escalar una alta cima, con glaciares, grietas y demás, el camino «obvio» puede ser excesivamente largo y complicado.

Es natural, también, suponer que la cara vertical, que parece ser la única ruta alternativa, es sencillamente imposible de escalar. Pero quizá pueda inventarse un helicóptero que lleve rápida y fácilmente a la cima. Los expertos pueden ver las grietas y la pared vertical, pero pueden pasar por alto una buena idea para el diseño de un helicóptero. De vez en cuando alguien concibe una pieza semejante, como caída del cielo, y demuestra que todos los expertos estaban equivocados^[16].

Por otra parte, piensa en Gödel. Sabemos que algunas demostraciones sencillamente tienen que ser largas, y quizás el teorema de los cuatro colores o el último teorema de Fermat son ejemplos de ello. En el caso del teorema de los cuatro colores es posible hacer algunos cálculos sencillos para demostrar que si uno quiere utilizar la aproximación actual —encontrar una lista de configuraciones «inevitables» y luego eliminarlas una a una por el proceso de «contracción»— entonces no es posible nada radicalmente más corto. Pero

eso, de hecho, es tan solo contar las grietas probables. Eso no descarta un helicóptero. De modo que si estos mamotretos es lo mejor que podemos hacer, ¿por qué Fermat escribió lo que escribió? Por supuesto, él no pudo haber dado con una demostración de cien páginas, incluyendo una demostración de una conjetura sobre curvas elípticas que todavía no había sido propuesta, y garabatear que no cabía en el margen.

Un destacado teórico de números algebraico, *sir* Peter Swinnerton-Dyer, ha dado una explicación más sencilla de la afirmación de Fermat^[17]: «Estoy seguro de que Fermat creía que lo había demostrado; y de hecho se puede reconstruir su razonamiento con plena confianza, incluyendo un paso crucial pero ilegítimo». Sería muy bonito imaginar que el gran Fermat estaba realmente en posesión de una demostración, porque los métodos disponibles para él habrían sido más sencillos que los utilizados por Wiles. Pero parece más probable que Fermat cometiera un error sutil pero fatal, un error que fácilmente habría pasado inadvertido en aquella época.

13

Problemas imposibles

Querida Meg:

No trates de trisecar el ángulo, por favor. Yo te enviaré algunos problemas interesantes para que trabajes si quieres empezar ya a flexionar tus músculos para la investigación; simplemente guárdate de la trisección del ángulo. ¿Por qué? Porque perderías el tiempo. Se conocen métodos que van más allá de la tradicional regla no graduada y compás; los métodos que no son de ese tipo no pueden ser correctos. Lo sabemos porque las matemáticas disfrutan de un privilegio que le está negado a casi todos los demás caminos en la vida. En matemáticas podemos demostrar que algo es imposible.

En la mayoría de las profesiones, «imposible» puede significar desde algo parecido a «No tengo ganas de molestarte» hasta «Nadie sabe cómo hacerlo» o «Los que se encargan de ello nunca se ponen de acuerdo». El escritor de ciencia ficción Arthur C. Clarke escribió que «Cuando un científico anciano y distinguido afirma que algo es posible, es muy probable que esté en lo cierto. Cuando afirma que es imposible, es casi seguro que está equivocado». (Clarke escribía en 1963, cuando la mayoría de los científicos, especialmente los ancianos y distinguidos, eran casi con seguridad «él»). Pero aplicada a los matemáticos y los teoremas matemáticos, la afirmación de Clarke es lisa y llanamente errónea. Una demostración matemática de imposibilidad es una garantía prácticamente irrompible.

Digo «prácticamente» porque a veces lo imposible puede hacerse posible si la pregunta se cambia de forma sutil. Entonces, por supuesto, ya no es la misma pregunta. Arquímedes sabía cómo trisecar un ángulo utilizando una regla *graduada* y compás^[18].

El sencillo problema imposible que más me gusta es un rompecabezas. Aunque parece frívolo a primera vista, proporciona gran intuición sobre la inferencia lógica en matemáticas, y en particular sobre cómo sabemos que algunas tareas son imposibles. El rompecabezas es éste: dado un tablero de ajedrez al que le faltan dos casillas en los extremos de una diagonal, ¿puedes cubrirlo con treinta y una fichas de dominó, cada una del tamaño adecuado para cubrir dos casillas adyacentes?^[19]

Debe entenderse que no se permite «hacer trampa». Las fichas de dominó no deben solaparse, ni cortarse, ni nada parecido.

La primera pregunta que se plantea es razonablemente simple y se le ocurre de forma natural a cualquier matemático: ¿es el área un obstáculo para tener éxito? El área total del tablero de ajedrez mutilado es $64 - 2 = 62$ casillas. El área total de las fichas de dominó es $2 \times 31 = 62$ casillas. Así que tenemos exactamente el número correcto de fichas para cubrir el tablero. Si solo nos hubieran dado treinta, entonces calculando el área total se hubiera demostrado inmediatamente que la tarea es imposible. Pero nos han dado treinta y una, de modo que el área no es un obstáculo.

Meg, sé que te has ejercitado mucho en matemáticas, pero es posible que no hayas tropezado con este rompecabezas. Los rompecabezas no destacan en los libros de texto universitarios. Inténtalo, por favor. De momento, hazlo sin pensar; simplemente recorta unas fichas de dominó en cartón y trata de encajarlas.

¿Lo has hecho? ¿Has llegado a alguna parte?

No. Lo has intentado una y otra vez pero ha sido cu vano. Descubrirás ver por qué si cuentas las casillas blancas y negras.

Cada ficha, no importa dónde esté situada, cubre una casilla negra y una casilla blanca del tablero. De modo que cualquier disposición de fichas que no se solapan debe cubrir tantas casillas blancas como negras. Pero el tablero mutilado tiene treinta y dos casillas negras y treinta casillas blancas. No importa cómo dispongas las fichas, siempre deben quedar vacías al menos dos fichas negras.

Si en su lugar se eliminan dos esquinas contiguas —una negra y otra blanca— este argumento falla. Y, de hecho, entonces puede resolverse el rompecabezas. Pero el argumento de «paridad», con los números de

casillas de los dos colores y compararlos, deseando la versión que planteé de entrada. La tarea es imposible... y punto.

El mensaje más profundo que hay detrás de este rompecabezas es válido para las matemáticas en su conjunto. Cuando un problema te lleva a considerar un número enorme de posibilidades —tales como las diferentes maneras en que pueden disponerse las fichas— no hay en general ninguna forma práctica de tratarlas de una en una. Debes buscar alguna característica común que no cambia cuando cambias la disposición: un *invariante*.

Aquí, el primer invariante que hemos probado es el área. Si reordenas las fichas, su área total sigue siendo la misma. De modo que ese invariante no sirve aquí. Así que recurrí a un invariante diferente: la diferencia entre el número de casillas negras y el número de casillas blancas. Ésta es siempre cero en cualquier disposición de las fichas. De modo que *no* puede obtenerse ninguna disposición en la que el invariante sea distinto de cero si disponemos las fichas de acuerdo con nuestras reglas.

La demostración deja abierta la posibilidad de que algunas disposiciones con invariante cero pudieran no ser posibles por otras razones. De hecho, existen; quizá tú puedas encontrar alguna. El invariante «área» resuelve algunos rompecabezas pero no otros. También lo hace el invariante «paridad», par o impar. Lo mismo puede decirse de la mayoría de los invariantes.

Ahora debemos avanzar, desde los rompecabezas a problemas matemáticos serios. De forma extraordinaria y placentera siguen aplicándose ideas similares.

La trisección del ángulo es un ejemplo a medida. Ahora sabemos —lo hemos sabido desde que un alumno de Gauss, Pierre Wantzel, elaboró una demostración en 1837— que es imposible trisecar el ángulo utilizando una regla no graduada y un compás^[20]. Es decir, no hay ninguna construcción geométrica, que utilice las herramientas tradicionales al modo tradicional, que divida cualquier ángulo dado en tres partes exactamente iguales.

Hay tropecientas mil interpretaciones aproximadas. Ninguna será exacta. Puedo decirlo sin el menor temor a la contradicción y sin examinar ningún método propuesto. Sabemos que debe contener un error. No sabemos dónde está o cuál es el error —y puede ser muy difícil de encontrar—, pero podemos estar seguros de que existe.

Sé que esto suena arrogante. Puede ser muy decepcionante para cualquiera que aspire a trisecar el ángulo. «¿Cómo pueden saber esto cuando ni siquiera han examinado mi demostración?».

Lo saben porque se ha demostrado que dicha construcción es imposible. Si alguien afirmara que podía correr un kilómetro en diez segundos, no necesitarías cronometrarle para saber que tenía que haber un truco. Quizá «corre» utilizando la ayuda de un cohete. Quizá su «kilómetro» no esté medido de la forma ortodoxa y no es más largo que un autobús. Tal vez haya algo extraño en su reloj. No necesitamos saber qué es lo que huele mal.

Así pasa en matemáticas, pero con un mayor grado de certeza.

Muy bien: ¿cómo sabemos que la trisección del ángulo es imposible?

Aunque el problema en cuestión pertenece a la geometría, su resolución pertenece al álgebra. Esto es algo estándar en la investigación matemática: trata de transformar tu problema en algo que es lógicamente equivalente pero yace en un área diferente de las matemáticas. Si tienes suerte, la nueva área permitirá el uso de otras técnicas que arrojan nueva luz sobre el problema. La idea de reemplazar la geometría por álgebra —o a la inversa— se remonta al menos a René Descartes. En un apéndice a su *Discurso del método* de 1637, con el título «La geometría», esbozó el uso de coordenadas para convertir formas geométricas en ecuaciones algebraicas, y al revés. Hoy las llamamos coordenadas cartesianas en su honor.

La idea te resultará familiar, Meg. Cualquier punto en el plano puede caracterizarse por dos números, distancias medidas en dos direcciones que forman ángulos rectos entre sí. Horizontal y vertical, o norte/sur y este/oeste. Una recta, un círculo u otra curva es solo una colección de puntos, un conjunto de pares de números. Cualquier enunciado sobre estas rectas y curvas puede convertirse en un enunciado correspondiente sobre números, y tales enunciados pertenecen al dominio del álgebra. Así pues, el hecho de que un círculo tiene radio unidad, cuando se traduce al álgebra utilizando el teorema de Pitágoras, se convierte en el hecho de que para cualquier punto de su circunferencia el cuadrado de su coordenada horizontal sumado al cuadrado de su coordenada vertical es igual a 1. En signos, $x^2 + y^2 = 1$. Ésta es la ecuación que corresponde a dicho círculo.

Cada círculo, cada línea recta y cada curva tienen una ecuación correspondiente. Y los puntos donde, por ejemplo, un círculo corta a una recta son esos pares de números que satisfacen a la vez la ecuación para el círculo y la ecuación para la recta. En lugar de dibujar rectas y curvas y encontrar sus puntos de intersección, podemos resolver simplemente ecuaciones. Y lo que es más importante, en lugar de *pensar* en dibujar rectas y curvas y encontrar sus puntos de intersección, podemos pensar en resolver las ecuaciones

correspondientes. Y así podemos demostrar que los ángulos no pueden trisecarse de la forma especificada.

Así es como se procede, quitando detalles técnicos. Cualquier construcción geométrica empieza con una colección de puntos y luego construye nuevos puntos por uno de estos tres métodos. O bien dibujamos dos rectas que pasan por los puntos existentes y descubrimos dónde se cortan dichas rectas; o dibujamos una recta semejante y encontramos dónde corta a un círculo con centro en un punto conocido y que pasa por otro punto conocido; o dibujamos dos círculos semejantes y vemos dónde se cortan. Este pequeño conjunto de jugadas es un producto de nuestras herramientas: una regla recta hace solo líneas rectas, y un compás hace solo círculos. Así pues, construimos nuevos puntos a partir de los viejos, y seguimos haciendo un número finito de tales jugadas y luego paramos.

Ésta es otra técnica de demostración estándar: dividir el problema en las partes más simples posibles.

Puede parecer que un ángulo no encaja en esta descripción. Pero un ángulo está especificado por dos rectas que se cortan en un punto común, y esas dos rectas pueden especificarse por el punto común, otro punto en la primera recta y otro punto en la segunda recta. Tres puntos bastan para definir un ángulo. Solo se necesita un punto más para especificar un ángulo de un tercio de tamaño. Pero localizar ese cuarto punto puede requerir en principio la construcción de muchos puntos auxiliares sobre la marcha, y lo que se afirma es que ninguno de éstos servirá realmente.

Para ver por qué, aplicamos otra técnica de demostración estándar: examinamos cada uno de los pasos más simples y tratamos de encontrar sus características esenciales.

Desde un punto de vista geométrico hay tres pasos distintos: dos rectas, recta más círculo, dos círculos. Pero si traducimos estos pasos al álgebra, vemos que el primero es equivalente a resolver una ecuación lineal y los otros dos son equivalentes a resolver una ecuación de segundo grado. En una ecuación lineal se nos dice que la suma de un múltiplo de la incógnita y un número es 0. En una ecuación de segundo grado se nos dice que la suma de un múltiplo del cuadrado de la incógnita, un múltiplo de la incógnita y un número es 0.

Las ecuaciones lineales son «casos especiales» de ecuaciones de segundo grado en las que el cuadrado de la incógnita está multiplicado por 0. De modo que los tres pasos se reducen a resolver ecuaciones de segundo grado.

Métodos para resolver ecuaciones de segundo grado eran ya conocidos para los babilonios en el 2000 a. C., y la idea básica es que siempre puede hacerse utilizando raíces cuadradas. En resumen, hemos reemplazado «construirlas utilizando regla no graduada y compás» por «expresarlas por una secuencia de raíces cuadradas (y otras operaciones aritméticas tales como la suma y la resta)». Eso caracteriza todos los puntos posibles que pueden aparecer a partir de construcciones geométricas.

Supongamos que un ángulo puede trisecarse utilizando una construcción semejante. Entonces las coordenadas del punto correspondiente —el asociado con un ángulo de un tercio de tamaño— deben ser expresables por una secuencia de raíces cuadradas. ¿Es eso posible? Bueno, algo sabemos sobre ese nuevo punto, o sea, que sus coordenadas están dadas por una ecuación cúbica, una ecuación que también incluye el cubo de la incógnita. Esta observación procede de la trigonometría, donde hay una fórmula estándar que relaciona el seno de un ángulo con el seno de tres veces ese ángulo.

Todo el tinglado se reduce entonces a una cuestión simple: dado un número que uno sabe que es la solución de una ecuación cúbica, ¿es posible expresar dicho número utilizando solamente raíces cuadradas? La idea es que hay aquí un desajuste: ninguna secuencia de pasos que implique al número 2 debería dar lugar al número 3. Un examen detenido de las propiedades de las soluciones de las ecuaciones conduce a un invariante, conocido como el *grado*. Este no tiene nada que ver con el «grado» como una unidad de medida de ángulos; es un número entero que especifica el tipo de ecuación que se está resolviendo. Las propiedades simples del grado prueban que el único caso en que se puede resolver una ecuación cúbica utilizando nada más elaborado que raíces cuadradas es cuando la ecuación cúbica se descompone en una ecuación lineal y en una cuadrática, o en tres ecuaciones lineales.

Sin embargo, un breve cálculo muestra que, con raras excepciones, la ecuación cúbica asociada con la trisección del ángulo no es de este tipo^[21]. No se descompone. En particular, esto es lo que sucede cuando el ángulo inicial es de 60° , por ejemplo. Por consiguiente, la ecuación cúbica no puede resolverse exactamente utilizando solo raíces cuadradas. De hecho, si pudiera resolverse de esta manera, entonces el entero 3 tendría que ser un número par. Pero por supuesto no lo es.

Dejo aparte los detalles —si quieres verlos puedes encontrarlos en muchos textos de álgebra estándar—, pero espero que la historia quede clara. Transformando la geometría en álgebra, podemos reformular la trisección del ángulo (de hecho, cualquier construcción) como una pregunta algebraica:

¿puede un número asociado con la construcción deseada ser expresado utilizando raíces cuadradas? Si sabemos algo útil sobre el número en cuestión —aquí, que está dado por una ecuación cúbica— entonces quizá podamos responder la versión algebraica de la pregunta. En este caso, el álgebra descarta cualquier posibilidad de que exista tal construcción, gracias al invariante conocido como el grado.

No se trata de ser más o menos ingenioso: por astuto que uno sea, su construcción propuesta será necesariamente inexacta. Podría ser muy aproximada (lamentablemente, la mayoría de los intentos no lo son; echa una ojeada a *A Budget of Trisections* de Underwood Dudley), pero no puede ser exacta. Tampoco se trata de encontrar otros métodos de trisecar ángulos: éstos ya se conocen, y no era ésa la cuestión. A quienes me envían un intento de trisección siempre les digo que no me preocupa que sea falso, ni debería preocuparles a ellos. El problema es que, si tienen *razón*, entonces una consecuencia directa de su demostración es que 3 es un número par.

¿Realmente quieren entrar en los libros de historia por afirmar algo así?

Te advierto que eso no les desanima. Ningún argumento racional disuade a un alguien que de verdad aspire a trisecar el ángulo de su certeza innata en que tiene razón.

El invariante «grado» explica también por qué puede construirse un polígono regular de diecisiete lados pero no puede construirse uno de siete lados. Los grados correspondientes resultan ser uno menos que el número de lados: dieciséis y seis. Puesto que 16 es la cuarta potencia de 2, el polígono de diecisiete lados puede construirse resolviendo cuatro ecuaciones cuadráticas sucesivas. Pero 6 no es una potencia de 2, de modo que no existe una construcción en este caso. Según mi experiencia, los trisectores del ángulo rara vez cuestionan esta deducción, aunque es irónico que ella implique que una trisección válida del ángulo llevaría directamente a una construcción del heptágono regular.

Hay otros muchos problemas imposibles en matemáticas. La trisección del ángulo es uno de los tres famosos «problemas de la Antigüedad» atribuidos a los antiguos geómetras griegos, desgraciadamente sin mucha justificación histórica porque la limitación a regla no graduada y compás fue un añadido posterior. Los griegos sabían cómo resolver los tres problemas utilizando instrumentos más complicados. Pero es cierto que ésta era la única manera de la que sabían para resolverlos. Los matemáticos posteriores se preguntaron si alguien podía hacerlo mejor y, finalmente, se dieron cuenta de que no podían.

Los otros dos problemas de la Antigüedad son la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo. Es decir, construir, utilizando los métodos tradicionales, un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado, o un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. En términos modernos, estos problemas buscan construcciones para π y la raíz cúbica de 2, respectivamente. Puede demostrarse que son imposibles por métodos similares. De hecho, la raíz cúbica de 2 satisface evidentemente una ecuación cúbica: su cubo es 2. Y π no satisface ninguna ecuación algebraica; pero ésa es otra historia.

El escalafón de la carrera

Querida Meg:

No hay de qué. Siempre me gusta invitarte a comer cuando nos encontramos en la misma ciudad, lo que, si estás intentando realmente hacer carrera como investigadora, podría ser cada vez más frecuente.

Pero déjame hacer de abogado del diablo por un momento. Es importante que te preguntes si quieres quedarte en la universidad porque es allí donde te sientes más cómoda. A tu edad no deberías perseguir la «comodidad».

Ser un matemático investigador es parecido a ser un escritor o un artista: todo el encanto aparente para los de fuera se desvanece rápidamente ante la frustración, la incertidumbre y el trabajo duro y a menudo solitario. No puedes esperar que tus ocasionales momentos de fama compensen todo esto. A menos que seas más superficial de lo que creo que eres, no lo compensarán. Tu satisfacción debe proceder de la euforia que alcanzas cuando de repente, por primera vez, entiendes el problema en el que estás trabajando y ves la vía hacia una solución. Utilizo la palabra «euforia» a propósito. Necesitas ser algo parecido a una adicta para que esa sensación te proporcione suficiente recompensa por todo el trabajo.

He aquí la paradoja: aunque buena parte del trabajo de un matemático es individual, incluso solitario, el aspecto más importante de tu investigación no es el campo que elijas o los problemas en los que te embarques, sino cómo tratas con la gente que te rodea.

Cuando decides sacar un doctorado, no lo haces sola. Tus colegas estudiantes constituirán un importante grupo de apoyo; tu departamento funcionará como tu clan dentro de la gran tribu de matemáticos en todo el mundo; sobre todo, tendrás un director de tesis (o supervisor, como lo llamamos en Reino Unido). Normalmente él o ella serán unos expertos reconocidos con un sólido currículum en el área en la que proyectas estudiar. A veces será alguien que ha terminado su propio doctorado hace solo unos años, en cuyo caso habrá probablemente un segundo director más veterano para aportar experiencia a la mezcla.

Un director joven a menudo supone una elección excelente. Normalmente los jóvenes están desbordantes de ideas, y apenas han pasado por la maquinaria académica, de modo que tal vez sean más comprensivos con tus esfuerzos.

En el número de abril de 1991 de *The Psychologist*, mi amiga socióloga Helen Haste analizaba las pautas de intercambio de obsequios entre unas gentes distantes y primitivas conocidas como «académicos». El artículo era un ensayo antropológico, pero llegaba a algunas conclusiones reveladoras. Los obsequios eran copias de publicaciones de investigación, y el artículo clasificaba a los académicos en una escala de seis peldaños, más un papel poco ortodoxo que quedaba al margen.

Tú estás a punto de unirme al primer peldaño de la escala al hacerte una EDDX: estudiante de doctorado del doctor X. Desde esa etapa estoy seguro que pasarás rápidamente a JPI, joven promesa investigadora, y de ahí a IE, investigadora en plantilla. Si decides quedarte en el mundo académico, los grados sucesivos son CS (científico senior), GA (gran anciano) y GE (gurú emérito).

Como EDDX todavía no habrás producido ningún obsequio ritual propio de ti, y por ello no puedes ofrecérselos a nadie. Puedes pedirlos, pero normalmente solo a tus pares. Cuando actúes ante la tribu —es decir, cuando des seminarios— invocarás repetidamente a dos ancestros, un teórico importante y tu director de tesis. El JPI está más relajado y entiende mejor los rituales. Él o ella seguirán invocando a esos dos ancestros, pero menos y a veces como simples notas a pie de página. En su lugar, los JPI astutos invocan a los CS. Viajan a reuniones tribales (conferencias) tan cargados de obsequios que el viaje se parece más a un peregrinaje, y los reparten con generosidad. También se sienten capaces de solicitar obsequios de sus mayores, aunque no demasiado a menudo y siempre cortésmente. El IE rara vez se refiere a un teórico importante, pues prefiere mencionar solo a ancestros que aún estén en

activo, pero —y esto es revelador— un IE puede mencionar también a la progenie, para demostrar que él o ella la tienen. El IE no lleva obsequios a la reunión tribal, pues astutamente los ha repartido por adelantado al círculo interno de la tribu.

El CS invoca frecuentemente a un teórico importante, con el objetivo de sustituirle haciendo ver que ha hecho grandes avances sobre las ideas del teórico importante. El CS nunca los da o recibe en público, pero espera recibir muchos obsequios por medios más ocultos. El GA se sienta en el pináculo de la jerarquía de los obsequios: no ofrece obsequios pero los exige de todos, especialmente de los jóvenes. El GE es invocado como un ancestro por casi todos, pero no participa en absoluto en el intercambios de obsequios.

El papel que no encaja en esta secuencia —de hecho no encaja en ninguna parte, que es su razón de ser— es el gurú heterodoxo (GH). Helen dice lo siguiente sobre el GH: «El gurú heterodoxo cumple un papel simbólico importante, pues posee curiosos poderes mágicos que provocan miedo y fascinación en la comunidad. El GH está fuera de la ortodoxia principal, pero empeñado en criticarla. El GH no puede ser invocado como un ancestro por los miembros jóvenes de la comunidad que intentan permanecer dentro de la corriente principal. (...) Un otrora GH se convierte rápidamente en un GA».

Menciono todo esto porque tienes que valorar tu lugar dentro de la tribu, y porque tu progresión desde EDDX a JPI y a IE depende mucho de tu elección de X, que debería ser o un IE, o un CS o quizás un GA. *No elijas* un GH, por muy atractiva que pueda parecer esa opción, a menos que pretendas hacer toda tu carrera al margen de la jerarquía oficial. Y, en general, le aconsejo que te alejes de los GA. Hazme caso: yo quería convertirme en un GH, pero creo que en lugar de ello he terminado como un GA. Un GA tendrá un currículum impresionante, pero buena parte del mismo datará del pasado oscuro y lejano: de hace cinco años, o incluso más. Cuanto más viejo se vuelve un académico, más bagaje intelectual lleva con él. Las mentes de los GA tienden a seguir surcos familiares, y aunque lo hacen con impresionante facilidad y confianza, sus alumnos pueden perderse las ideas realmente nuevas que son la savia de la investigación. A pesar de eso, algunos GA son directores excelentes, normalmente los que están cerca de ser GH pero no del todo.

Los GE nunca tienen alumnos.

Mi director era un CS en el campo de la teoría de grupos —las matemáticas formales de la simetría— llamado Brian Hartley. Era joven, pero no demasiado. Yo no le escogí, y él tampoco me escogió exactamente; yo escogí el campo, y el sistema me llevó a él porque él trabajaba en ese campo.

Había cuatro o cinco opciones. Cualesquiera de ellas hubiese sido buena — más tarde llegué a conocer a todos ellos, ya como colegas—, pero mi investigación habría sido muy diferente. Tuve mucha suerte al encontrar a Brian, que me propuso un problema —o mejor, todo un programa— que realmente satisfacía mis intereses y capacidades. Era brillante. Me veía regularmente, siempre estaba disponible si yo me quedaba atascado, y difícilmente se mostraba perplejo ante una idea.

Creo que Brian se sorprendió ligeramente cuando entré en su despacho el primer día de mi curso de doctorado y le pedí un problema de investigación. Normalmente los alumnos necesitan más tiempo para decidirse. Pero en menos de media hora él me había dado uno —sacado de uno de sus propios artículos, era la primera vez que yo recibía un regalo— y resultó ser algo muy bonito. El programa de investigación consistía en estudiar un tipo especial de grupo que un matemático ruso, Anatoly Ivanovich Malcev, había asociado con otra estructura matemática llamada un álgebra de Lie. Esta estructura fue desarrollada por primera vez hace un siglo por el noruego Sophus Lie, pero (pese a su nombre) fue estudiada principalmente en el contexto del análisis, no del álgebra abstracta. De modo que la versión puramente algebraica de Malcev era un punto de vista nuevo. Como muchos rusos en esa época, él había esbozado las ideas pero no las había desarrollado en detalle. El problema que debía resolver consistía en asumir las ideas y conjeturas de Malcev, y completar las demostraciones necesarias y otras conexiones, de hecho, para convertir un conjunto de esbozos y revoques en el plano acabado de un edificio. Me llevó tres meses y me quedé enganchado a la teoría de Lie. Terminé escribiendo mi tesis sobre álgebras de Lie.

La influencia de Brian no se limitaba a los problemas de investigación. Él y su mujer, Mary, me invitaban a mí y a otros doctorandos a su casa. A veces me invitaba a tocar con él en una sesión de *jazz* en un *pub* local. Era un padre académico, un mentor y un amigo. Murió en 1994, inesperadamente, a los cincuenta y cinco años cuando paseaba por las colinas próximas a Manchester. Escribí su necrológica para *The Guardian*. Terminaba así: «Vi a Brian por última vez hace unas semanas, en una reunión para celebrar el sexagésimo cumpleaños de un amigo común. Acababa de obtener una beca muy cuantiosa que le liberaría de todos sus deberes docentes durante cinco años para concentrarse en la investigación. Murió con las botas puestas, literalmente, mientras caminaba por sus amadas colinas, y también metafóricamente. Y así es como todos le recordaremos».

Aún me resulta difícil aceptar que se haya ido.

Como digo, fui afortunado. El sistema me asignó al director ideal. Pero tú puedes hacerlo mejor. No lo dejes al azar: «elige» a tu director de tesis. Lee la literatura, habla con la gente que trabaja en ese campo, descubre quién tiene buena reputación y —esto es crucial— quién lo hace bien con los estudiantes. Escribe una corta lista. Visítalos; de hecho, «entrevístales». Luego haz caso a tu instinto. Y recuerda: tú no quieres un GA que no te haga caso; tú quieres una estrecha relación personal.

¿Hace falta que diga que no «demasiado» estrecha? El tópico de los profesores que se acuestan con sus alumnos existe porque se dan casos. Alguien observó en cierta ocasión que cuanto más subjetiva era la disciplina, mejor vestían los profesores, y un principio similar parece aplicarse a las relaciones sexuales ilícitas. Los matemáticos, en general, lo hacemos bastante menos, quizá por lo mal que vestimos. En cualquier caso, todo el mundo sabe que es poco profesional, y ahora existen leyes contra el acoso sexual. Ya es suficiente. Para esparcimiento y afecto, límitate a tus colegas estudiantes o a personas ajenas al campus, por favor.

Suele contarse un chiste en el que se dice que la capacidad matemática se transmite normalmente de padre a yerno (o, en nuestros días, de madre a nuera). La idea subyacente es que un estudiante de doctorado varón solía casarse con la hija de su director de tesis. Es una forma de conocer a gente fuera del campus. De modo que tu ascendencia real puede estar afectada por tu ascendencia matemática.

Los matemáticos están orgullosos de rastrear su linaje matemático a través de sus directores de tesis^[22]. Brian fue mi padre matemático, y Philip Hall mi abuelo. Hall pertenecía a una generación para la que no era necesario un doctorado como cualificación para obtener un puesto en la universidad, pero la influencia más importante en su primer trabajo fue William Burnside. Del mismo modo, Burnside puede considerarse un hijo matemático de Arthur Cayley, uno de los más famosos matemáticos ingleses de la época victoriana.

Recuerdo estas cosas y las valoro. Sé dónde y cómo encajo en el árbol genealógico del pensamiento matemático. Arthur Cayley es un ancestro matemático tan importante para mí como cualquiera de mis tatarabuelos biológicos.

El talento debe transmitirse a las generaciones siguientes. He sido hasta el momento director de tesis de treinta estudiantes, veinte hombres y diez mujeres. Desde 1985 la proporción es de cincuenta por ciento de hombres y cincuenta por ciento de mujeres. Sé que las mujeres son tan buenas en matemáticas como los hombres porque he observado a unos y a otras de

cerca. Estoy particularmente orgulloso de mis hijas matemáticas, muchas de las cuales vienen de Portugal, donde hace tiempo que las matemáticas se consideran como una actividad adecuada para las mujeres. Todas mis hijas portuguesas han seguido dedicándose a las matemáticas^[23]. De hecho, la mayoría de mis alumnos han seguido trabajando en matemáticas, y todos y cada uno de ellos obtuvo un doctorado. Sin embargo, uno es ahora contable, varios trabajan en computación, y uno posee una compañía de electrónica, o al menos la poseía la última vez que supe de él.

En la actualidad, el resto del mundo está ahora siguiendo los pasos de Portugal. En julio de 2005 la American Mathematical Society (la Sociedad Americana de Matemáticas) publicó los resultados de su *Annual Survey of the Mathematical Sciences* de 2004. Desde principios de los años noventa, las mujeres han obtenido en torno al 45 por ciento de todos los grados en matemáticas. Las mujeres obtuvieron casi un tercio del total de los doctorados de Estados Unidos en ciencias matemáticas en el año académico 2003-2004, y una cuarta parte de los concedidos en los cuarenta y ocho principales departamentos de matemáticas. En total, 333 mujeres se doctoraron en matemáticas ese año, el mayor número nunca registrado.

La idea de que las matemáticas no son una disciplina adecuada para mujeres es anticuada. El escalafón de la carrera está abierto a ambos sexos, aunque aún sigue desequilibrado en el extremo superior.

¿Puras o aplicadas?

Querida Meg:

Cuando vayas a elegir una especialidad como estudiante de primer año de la carrera de matemáticas, mucha gente te dirá que la elección más importante que va a hacer es elegir entre estudiar matemáticas puras o aplicadas.

En una primera respuesta te diría que deberías estudiar ambas. Pero reflexionándolo un poco más la distinción es inútil y enseguida se convierte en insostenible. «Puras» y «aplicadas» representan dos aproximaciones distintas a nuestra disciplina, pero no compiten entre sí. El físico Eugene Wigner se refirió en cierta ocasión a la «irrazonable efectividad de las matemáticas» para dar una idea sobre el mundo natural, y su elección de palabras deja claro que estaba hablando de las matemáticas puras. ¿Por qué tales formulaciones abstractas, aparentemente divorciadas de cualquier conexión con la realidad, tendrían que ser relevantes para tantas áreas de la ciencia? Y, sin embargo, lo son.

Hay muchos tipos de matemáticas, y aunque resulta que esos dos tipos tienen nombres, tan solo representan dos puntos dentro del espectro del pensamiento matemático. Las matemáticas puras se funden con la lógica y la filosofía, y las matemáticas aplicadas se funden con la física matemática y la ingeniería. Son tendencias, no los extremos del espectro. Por una casualidad histórica, estas dos tendencias han creado una división administrativa en las matemáticas académicas: muchas universidades sitúan las matemáticas puras

y las matemáticas aplicadas en departamentos diferentes. Acostumbraban a luchar con uñas y dientes por cada nuevo nombramiento y cada nuevo representante en las comisiones, pero últimamente lo están haciendo bastante mejor.

Tal como las caricaturizan los matemáticos aplicados, las matemáticas puras son un sinsentido intelectual abstracto en una torre de marfil sin ninguna repercusión práctica. Las matemáticas aplicadas, responden los matemáticos puros intransigentes, son intelectualmente descuidadas, carentes de rigor y sustituyen la comprensión por la acumulación de números. Como todas las buenas caricaturas, ambas afirmaciones contienen algo de verdad, pero no deberías tomarlas al pie de la letra. De todas formas, en ocasiones te encontrarás con estas exageradas actitudes, igual que te encontrarás con personas que aún creen que las mujeres no sirven para las matemáticas y la ciencia. No hagas caso de estas personas; su época ha pasado, pero no se han dado cuenta de ello.

Timothy Poston, un colega matemático a quien conozco desde hace treinta y cinco años, escribió un penetrante artículo en 1981 en *Mathematics Tomorrow*^[24]. Él observaba —para parafrasear un argumento complejo— que la «pureza» de las matemáticas puras no es la de una princesa ociosa que se niega a ensuciarse las manos con un trabajo bueno y honrado, sino una pureza de *método*. En matemáticas puras no se te permite tomar atajos o llegar conclusiones no justificadas, por plausibles que sean. Como decía Tim: «El pensamiento conceptual es la sal de las matemáticas. Si la sal se ha vuelto insípida, ¿con qué se sazonarán las aplicaciones?».

En los años setenta del siglo pasado surgió un terreno intermedio, llamado «matemáticas aplicables», aunque el nombre nunca llegó a cuajar. Estoy convencido de que todas las áreas de las matemáticas son potencialmente aplicables, aunque —como sucede con la igualdad en *Rebelión en la granja*— algunas son más aplicables que otras. Prefiero un único nombre, matemáticas, y creo que deberían hallarse dentro de un mismo departamento universitario. Actualmente se pone énfasis en desarrollar la unidad de áreas solapadas de matemáticas y ciencias, no en imponer fronteras artificiales.

Nos ha llevado un tiempo llegar a este feliz estado de cosas.

En los días de Euler y Gauss nadie distinguía entre la estructura interna de las matemáticas y la forma como se utilizaban. Euler escribía un día sobre la disposición de los mástiles en los barcos y al día siguiente sobre integrales elípticas. Gauss quedó immortalizado por su trabajo en teoría de números, incluyendo joyas como la ley de la reciprocidad cuadrática^[25], pero también

sacó tiempo para calcular la órbita de Ceres, el primer asteroide conocido. Una regularidad empírica en la separación de los planetas, la ley de Titius-Bode^[26], predecía un planeta desconocido en una órbita entre Marte y Júpiter. En 1801 el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi descubrió un cuerpo celeste en una órbita apropiada y le llamó Ceres. Las observaciones eran tan escasas que los astrónomos desesperaban de volver a localizar a Ceres, y entonces reapareció por detrás del Sol. Gauss respondió mejorando los métodos para el cálculo de órbitas, e inventando de paso herramientas tales como el ajuste por mínimos cuadrados. El trabajo le hizo famoso, y le desvió hacia la mecánica celeste; incluso así, es de la opinión general que su mejor trabajo lo llevó a cabo en el campo de las matemáticas puras.

Gauss pasó a realizar medidas geodésicas y a inventar el telégrafo. Nadie podría acusarle de ser poco práctico. En matemáticas aplicadas era un genio. Pero en matemáticas puras era un dios.

En el momento en que el siglo XIX se fundía con el XX, las matemáticas se habían hecho demasiado grandes para que una persona las abarcara por completo. La gente empezó a especializarse. Los investigadores se encaminaban hacia áreas de las matemáticas cuyos métodos les atraían. Quienes disfrutaban descifrando pautas extrañas y gozaban con los esfuerzos lógicos requeridos para encontrar demostraciones se especializaron en las partes más abstractas del panorama matemático. Los tipos prácticos que querían *respuestas* se veían arrastrados hacia áreas que se hallaban entre la física y la ingeniería.

En 1960 esta divergencia se había convertido en una división. Lo que los matemáticos puros consideraban la corriente principal —análisis, topología, álgebra— se había introducido tanto en los dominios de la abstracción que resultaba desagradable para los que tenían una mente práctica. Mientras tanto, los matemáticos aplicados estaban sacrificando el rigor lógico para extraer números de ecuaciones cada vez más difíciles. Obtener una respuesta se volvió más importante que obtener la respuesta correcta, y cualquier argumento que llevaba a una solución razonable era aceptable, incluso si nadie podía explicar por qué funcionaba. A los estudiantes de física se les decía que no siguiesen cursos de los matemáticos porque eso destruiría sus cerebros.

Demasiadas de las personas involucradas en este debate fracasaron en su intento por advertir que no había ninguna razón particular para restringir la actividad matemática a un estilo de pensamiento. No había ninguna buena razón para suponer que las matemáticas puras eran buenas y las matemáticas

aplicadas eran malas, o al revés. Pero aun así, muchas personas adoptaron estas posturas. Los matemáticos puros no ayudaban al mostrarse ostentosamente desinteresados por buscar la utilidad de lo que hacían; muchos, como Hardy, estaban orgullosos de que su trabajo no tuviera ningún valor práctico. Visto en retrospectiva, había una buena razón para ello, entre varias razones malas. La búsqueda de generalidad condujo a un examen profundo de la estructura de las matemáticas, y éste análisis reveló a su vez algunas grandes lagunas en nuestra comprensión de los fundamentos de la disciplina. Hipótesis que habían parecido tan obvias que nadie se había dado cuenta de que eran hipótesis, y resultaron ser falsas.

Por ejemplo, todos habían supuesto que cualquier curva continua debe tener una tangente bien definida, casi en todo lugar, aunque por supuesto no en esquinas abruptas, que es por lo que «en todo lugar» era un enunciado demasiado tajante. De forma equivalente, toda función continua debía ser diferenciable casi en todo lugar.

No es así. Karl Weierstrass halló una sencilla función continua que no es diferenciable en ninguna parte.

¿Importa eso? Durante un siglo el área conocida como análisis de Fourier se vio plagada por dificultades similares, hasta el punto de que nadie estaba seguro de qué teoremas eran correctos y cuáles eran falsos. Nada de ello impidió a los ingenieros hacer buen uso del análisis de Fourier, pero una consecuencia de la lucha por ordenar toda el área fue la creación de la teoría de la medida, que más tarde proporcionó las bases de la teoría de la probabilidad. Otra fue la geometría fractal, una de las maneras más prometedoras de entender las irregularidades de la naturaleza. Los problemas de rigor rara vez afectan a las aplicaciones directas e inmediatas de los conceptos matemáticos. Pero al ordenar estos problemas suelen ponerse de manifiesto ideas nuevas y elegantes, importantes en alguna otra área de aplicación, que de lo contrario no se habrían hallado.

Dejar dificultades conceptuales no resueltas es como utilizar nuevas tarjetas de crédito para pagar las deudas contraídas con las viejas. Puedes hacerlo durante algún tiempo, pero al final eso pasa factura.

El estilo del pensamiento matemático necesario para ordenar el análisis de Fourier era poco familiar incluso para los matemáticos puros. Demasiado a menudo parecía que el objetivo no era demostrar nuevos teoremas sino idear ejemplos despiadadamente complicados que ponían límites a los teoremas existentes. Muchos matemáticos puros se sentían molestos con estos ejemplos, los estimaban «patológicos» y «monstruosos», y confiaban en que

si se pasaban por alto de algún modo desaparecerían. Pero David Hilbert, uno de los matemáticos más destacados de principios del siglo xx, discrepaba, y calificaba de «paraíso» el área que estaba emergiendo. Se necesitó tiempo para que la mayoría de los matemáticos entendieran su idea. En los años sesenta, sin embargo, la habían asumido a tal extremo que sus mentes estaban concentradas casi exclusivamente en ordenar las dificultades internas de las grandes teorías matemáticas. Cuando la comprensión que uno tiene de la topología no le permite distinguir un nudo marinero de un nudo de la abuela parece absurdo preocuparse por las aplicaciones. Estas deben esperar hasta que hayamos ordenado este material; no esperes que construya una vitrina para un cóctel cuando todavía estoy tratando de afilar la sierra.

Todo esto tenía algo de torre de marfil. Pero como colectivo, los matemáticos no habían olvidado que la fuerza creativa más importante en matemáticas es su conexión con el mundo natural. Cuando las teorías se hicieron más poderosas y se cubrieron las lagunas, los individuos tomaron la nueva caja de herramientas y empezaron a utilizarlas. Empezaron a adentrarse en un territorio que había pertenecido a los matemáticos aplicados, quienes cuestionaban a los intrusos y no se sentían cómodos con sus métodos.

Marc Kac, un estudioso de las probabilidades con intereses en muchas otras áreas de aplicación, escribió un divertido y penetrante análisis de la tendencia de los matemáticos puros a reformular problemas aplicados en términos abstractos. Comparaba su aproximación a la invención de «elefantes deshidratados», técnicamente difícil pero sin ningún uso práctico. Mi amigo Tim Poston señalaba que ésta era una pobre analogía. En realidad es bastante fácil crear un elefante deshidratado. La cuestión técnica importante es completamente diferente: se trata de asegurar que cuando se añada agua, se obtenga de nuevo un elefante plenamente operativo. Aníbal, decía él, podría haberse valido de un cargamento de elefantes deshidratados cuando marchó sobre Roma.

Metáforas aparte, Kac hacía una buena observación: las reformulaciones abstractas no son un fin en sí mismas. Pero la echaba a perder por completo al poner un ejemplo. Mi suegro cometió el mismo error en los años cincuenta, cuando afirmó, con acierto, que la mayoría de las estrellas del pop no durarían mucho, pero luego puso como ejemplo a Elvis Presley. El ejemplo que ponía Kac de un elefante deshidratado arquetípico era la reformulación que había hecho Steven Smale de la mecánica clásica en términos de «geometría simpléctica». Nos alejaría bastante del tema explicar este nuevo tipo de

geometría, pero baste decir que la idea de Smale se considera ahora como una aplicación profunda de la topología a la física.

Otro crítico vehemente de la abstracción en matemáticas era John Hammersley. Hombre seriamente práctico y consumado solventador de problemas, Hammersley observaba con consternación cómo las «nuevas matemáticas» de los años sesenta dominaban los currículum escolares en todo el mundo, y cosas como resolver ecuaciones de segundo grado eran abandonadas en favor de empalmar cintas de Möbius para ver cuántas caras y bordes tenían. En 1969 escribió una celebrada diatriba llamada «Sobre el debilitamiento de las habilidades matemáticas por las “matemáticas modernas” y similar basura intelectual en escuelas y universidades»^[27].

Como Kac, él tenía algo de razón, pero habría sido mucho mejor si no hubiera estado tan convencido de que algo que a él no le gustaba era basura. «Abstracto» viene de abstraer. Lo general se abstrae de lo particular. Es mejor enseñar lo particular antes de hacer la abstracción. Pero a finales de los años sesenta los educadores se pusieron a desechar lo particular. Se habían convencido de que era más importante saber que $7 + 11 = 11 + 7$ que saber que ambas cosas eran 18, e incluso mejor saber que $a + b = b + a$ sin tener una idea de lo que eran a y b . Puedo entender por qué Hammersley estaba furioso. Pero... ¡vaya hombre! Desde el punto de vista actual parece un poco reaccionario. Resulta que esa «basura intelectual» consistía en ideas útiles e importantes, pero ideas para enseñar mejor en una universidad, y no en el instituto. En sus fronteras, las matemáticas tenían que hacerse generales y abstractas: de otra forma no podrían avanzar. Mirando los años sesenta del siglo pasado desde el siglo XXI, cuando el trabajo de ese período está dando su fruto, creo que Hammersley no tuvo en cuenta que las nuevas aplicaciones necesitarían nuevas herramientas, o que las leonas que estaban siendo desarrolladas de manera tan eficaz por los matemáticos puros serían una fuente principal de dichas herramientas.

Lo que Hammersley denigraba hace cuarenta años calificándolo de «basura intelectual» es precisamente lo que yo utilizo hoy para trabajar en problemas de mecánica de fluidos, biología evolutiva y neurociencia. Utilizo teoría de grupos, el lenguaje fundamental de la simetría, para entender las generalidades de la formación de patrones y la aplicación de dichas ideas a muchas áreas de la ciencia. Así lo hacen centenares de otras personas en matemáticas, física, química, astronomía, ingeniería y biología.

La gente que está orgullosa de ser «práctica» me molesta tanto como los que están orgullosos de no serlo. Ambos tipos de personas pueden sufrir de

miopía. Recuerdo al químico Thomas Midgley, Jr. el cual dedicó buena parte de su vida profesional a dos inventos fundamentales: el freón y la gasolina con plomo. El freón es un clorofluorocarbono (CFC), y esta clase de sustancias químicas fue responsable del agujero en la capa de ozono y ahora está generalmente prohibida. También está prohibido el plomo en la gasolina, debido a sus efectos adversos en la salud, especialmente en los niños. A veces centrarse estrechamente en cuestiones prácticas inmediatas puede más tarde causar problemas. Por supuesto, no es difícil ser prudente a toro pasado: no era fácil prever que las reacciones catalíticas sobre cristales de hielo que hacían aparentemente estables los CFG tendrían un efecto tan dañino en la atmósfera superior. Pero la gasolina con plomo siempre fue una mala idea.

Está bien que la gente defienda su punto de vista acerca de cómo habría que hacer las matemáticas. Pero no se debería presuponer que hay solo una buena forma de hacer matemáticas. Yo valoro la diversidad, Meg, y te animo a hacer lo mismo. También valoro la imaginación, y te animo a que desarrolles la tuya y la utilices. Se necesita una sólida mezcla de imaginación y escepticismo para ver que lo que está actualmente de moda no siempre lo estará, o que lo que tus colegas desprecian como una falacia puede ser algo muy importante. La tendencia de moda actual resulta a veces estar tejida con oro puro.

Mantén tu mente abierta, pero no tan abierta que tus ideas se escapen.

Con los años, varias nuevas áreas de las matemáticas han emergido de diversas fuentes, inspiradas por preguntas del mundo real, o extraídas de teorías abstractas porque alguien pensó que eran interesantes. Algunas han atraído la atención de los medios de comunicación, incluyendo la geometría fractal, la dinámica no lineal («teoría del caos») y los sistemas complejos. Los fractales son formas que tienen una estructura detallada en todas las escalas de ampliación, como los helechos y las montañas. El caos es un comportamiento altamente irregular (como el comportamiento meteorológico) causado por leyes deterministas. Los sistemas complejos modelan las interacciones de grandes números de entidades relativamente simples, como pueden ser los corredores en la Bolsa. En la literatura de la profesión y en las revistas matemáticas de vez en cuando encontrarás críticas a estas áreas escritas con ese gusto reaccionario que resulta demasiado familiar: desdeñosas con lo que no ha tenido un historial de un siglo de duración o con aquello en lo que los críticos no están trabajando. Lo que ha molestado realmente a los críticos no es el contenido de estas nuevas áreas, sino la

repercusión de que han gozado en los medios de comunicación, que su propia área, tan obviamente superior, no está teniendo.

En realidad es bastante fácil valorar la influencia científica de, por ejemplo, los fractales o el caos. Todo lo que tienes que hacer es leer *Nature* o *Science* durante un mes y verás que son utilizadas para investigar, entre otras cosas, cómo se rompen las moléculas durante una reacción química, cómo los planetas gaseosos gigantes capturan nuevas lunas, o cómo las especies en un ecosistema se reparten los recursos. La comunidad científica aceptó hace tiempo esas áreas, hasta el punto de que su uso ahora se ha convertido en algo rutinario y poco reseñable. Pese a todo, algunos recalcitrantes, que aparentemente no sondan los confines más amplios de la ciencia, siguen negando que estas áreas tengan importancia. Me temo que están veinte años pasados de moda. Uno no puede desdeñar algo como una maravilla de un día cuando ha sobrevivido durante nueve mil días y actualmente está floreciendo.

Estas personas necesitan salir más.

Tanto Kac como Hammersley eran inusualmente creativos en sus propios campos, donde sus actitudes eran imaginativas y visionarias. Por eso es algo injusto ponerlos como ejemplos de matemáticos reaccionarios. Ellos expresaban actitudes que eran comunes en su tiempo. Kac hizo contribuciones muy importantes en teoría de probabilidad, y su artículo sobre «la forma de un tambor» es una joya^[28]. La nota necrológica sobre Hammersley en 2004 en el *Independent on Friday*^[29] decía esto sobre su obra: «Hammersley (...) planteó y resolvió algunos bellos problemas, y entre los que destacan los caminos [aleatorios] autoevitantes y la percolación. Estaba encantado de saber en su retiro el reconocimiento que le profesaban matemáticos y físicos, y el enorme progreso hecho desde su propio trabajo pionero». Pero añadía: «Irónicamente, el progreso reciente se ha hecho vía una teoría general antes que por el tipo de técnica práctica favorecido por Hammersley».

Esto puede parecer irónico pero es también completamente predecible. Hammersley pertenecía a la generación arréglate-con-lo-que-hay de matemáticos aplicados. En nuestros días se presta más atención a tener las herramientas correctas para la tarea.

Vivimos en un mundo cuyas capacidades y necesidades tecnológicas se hallan en eclosión. Las nuevas preguntas requieren nuevos métodos, y la pureza del método sigue siendo vital, por práctico que sea el contexto. Así lo son los saltos intuitivos, cuando conducen a vías creativas, incluso si al principio no hay ninguna demostración: las nuevas matemáticas preparan el camino para nueva comprensión. Lo que me lleva de nuevo a Wigner y su

ensayo clásico «La irrazonable declividad de las matemáticas en las ciencias naturales». Wigner no solo se estaba preguntando por qué las matemáticas son *efectivas* para informarnos sobre la naturaleza. Muchas personas han tratado este aspecto de la cuestión, y han dado lo que yo creo que es una respuesta excelente ya lo advierta o no cualquier matemático particular, el desarrollo de las matemáticas es, y ha sido siempre, un intercambio de doble dirección entre problemas del mundo real y métodos simbólicos o geométricos ideados para obtener respuestas. Por supuesto, las matemáticas son efectivas para entender la naturaleza; de ahí es en última instancia de donde proceden.

Pero creo que Wigner estaba preocupado —o agradablemente sorprendido— por algo más profundo. No hay razón para sorprenderse si una parte de un problema del mundo real —digamos, la órbita elíptica de Marte— y desarrolla las matemáticas para describirlo. Esto es exactamente lo que hizo Isaac Newton con su ley de la inversa del cuadrado de la gravedad, sus leyes del movimiento y el cálculo infinitesimal. Pero es mucho más difícil explicar por qué las mismas herramientas (las ecuaciones diferenciales en este caso) proporcionan ideas muy importantes en cuestiones no relacionadas relativas a la aerodinámica o la biología de poblaciones. Es aquí donde la efectividad de las matemáticas se hace «irrazonable». Es como inventar un reloj para decir la hora y descubrir luego que realmente es válido para la navegación, algo que sucedió de verdad, como explicó Dava Sobel en *Longitud*^[30].

¿Cómo una idea extraída de un problema concreto del mundo real puede resolver un problema completamente diferente?

Algunos científicos creen que eso sucede porque el universo está hecho realmente de matemáticas. John Barrow lo argumenta así^[31]: «Para el físico básico, las matemáticas son algo mucho más convincente. Cuanto más se aleja uno de la experiencia cotidiana y el mundo local, cuya aprehensión correcta es un prerequisite para nuestra evolución y supervivencia, más impresionantemente funcionan las matemáticas. En ese espacio interior de las partículas elementales o en el espacio exterior de la astronomía, las predicciones de las matemáticas son casi irrazonablemente precisas. (...) Esto ha convencido a muchos físicos de que la idea de que las matemáticas son simplemente una creación cultural es una explicación lamentablemente inadecuada de su existencia y efectividad para describir el mundo. (...) Si el mundo es matemático en su nivel más profundo, entonces las matemáticas son la analogía que nunca deja de ser válida».

Sería maravilloso que esto fuera cierto. Pero hay una explicación diferente, menos mística y menos fundamentalista. Posiblemente menos convincente.

Tanto las ecuaciones diferenciales como los relojes son herramientas, no respuestas. Trabajan enmarcando el problema original en un contexto más reducido, y derivando métodos generales para entender dicho contexto. Esta generalidad mejora su oportunidad de ser útiles en otro lugar. Por eso es por lo que su efectividad parece irrazonable.

Uno no puede saber siempre por adelantado qué usos se encontrarán para una buena herramienta. Una pieza redonda de madera montada sobre un eje se convierte en una rueda, útil para mover objetos pesados. Haz un surco en su circunferencia y pasa una cuerda alrededor, y la rueda se convierte en una polea con la que no solo puedes mover objetos sino también elevarlos. Haz la rueda de metal en lugar de madera, añade dientes en lugar de un surco, y tendrás un engranaje. Junta tus engranajes y poleas con otros pocos elementos —un péndulo, unas pesas, una esfera abstraída de un antiguo reloj de sol— y tienes un mecanismo para decir la hora, que es algo que los inventores de la rueda original nunca podían haber previsto. Los matemáticos puros de los años sesenta estaban forjando herramientas que luego serían utilizadas por todos en los años ochenta. Siento gran respeto por los Hammersley de este mundo, igual que respeto a un gran perro alsaciano con el que me cruzo en la calle. Mi respeto por los dientes del perro no me lleva a estar de acuerdo con sus opiniones. Si todo el mundo adoptara las actitudes defendidas por Kac y Hammersley, nadie desarrollaría las disparatadas ideas que provocan revoluciones.

Entonces: ¿deberías estudiar matemáticas puras o matemáticas aplicadas?

Ninguna de las dos. Deberías utilizar las herramientas que tienes a mano, adaptarlas y modificarlas para tus propios proyectos, y crear nuevas herramientas cuando surja la necesidad.

¿De dónde sacas esas ideas disparatadas?

Querida Meg:

Es fácil hacer que la investigación suene fascinante: intenta resolver problemas en la vanguardia del pensamiento humano, hacer descubrimientos que durarán mil años... Ciertamente no hay nada como eso. Todo lo que se requiere es una mente original, tiempo para pensar, un lugar donde se pueda trabajar, acceso a una buena biblioteca, acceso a un buen sistema informático, una fotocopidora y una conexión rápida a Internet. Todo ello se te proporcionará como parte de tus estudios de doctorado, excepto lo primero, que tendrás que ponerlo tú misma.

Esto es, por supuesto, el *sine qua non*, el ingrediente sin el que todos los demás son inútiles. Normalmente, los alumnos no son admitidos en unos estudios de doctorado a menos que hayan dado pruebas de un pensamiento original, quizás en un proyecto o en una tesina de licenciatura. La originalidad es una de esas cosas que se tiene o no se tiene; no puede enseñarse. Puede ser estimulada o anulada, pero no hay una asignatura de originalidad 101 que te considere como capaz de pensar nuevas ideas con tal de que leas el libro de texto y apruebes el examen.

Al decir esto reconozco que voy en contra de la opinión dominante entre los psicólogos educacionales, que dice que cualquiera puede conseguir algo con tal de que tenga una formación suficiente. Observando que los músicos de talento practican mucho, los psicólogos han deducido que es la práctica lo que

produce el talento, y han generalizado esta afirmación al resto de las demás áreas de la actividad intelectual. Pero sus creencias están basadas en un mal diseño experimental. Lo que deben hacer, para poner a prueba su teoría, es empezar con muchas personas que carezcan de talento musical, digamos con personas sin ningún oído para la música. Enseñar luego a la mitad de ellos, manteniendo a la otra mitad como grupo de control, y demostrar que la formación produce muchos músicos con talento mientras que su ausencia (presumiblemente) no lo hace. Estoy seguro de que la formación puede llevar alguna mejora. No creo que pueda producir un músico decente a menos que hubiese talento de partida.

Yo no soy Mozart. Tengo algún talento musical, pero no el suficiente, y no es por falta de práctica. La formación puede darme un nivel de capacidad razonable: cuando era universitario tocaba la primera guitarra en un grupo de *rock*. Pero toda la práctica del mundo nunca me podrá convertir en un Jimi Hendrix o en un Eric Clapton, y no digamos en Mozart. Como dijo Edward Bulwer-Lytton: «El genio hace lo que debe; el talento hace lo que puede». Tengo el suficiente talento musical para saber de lo que carezco.

Sí tengo talento matemático. No al nivel de Mozart, pero mucho más que el que poseo para tocar la guitarra. Cuando tenía diez años ya era el mejor de mi clase en matemáticas, y créeme, no era consecuencia de mucha práctica regular. Mi secreto bien guardado es que yo trabajaba muy poco en matemáticas. No lo necesitaba. Mis compañeros pensaban que debía haber dedicado horas y horas de esfuerzo para no morder el polvo en los exámenes de matemáticas, y yo tenía la intuición suficiente para no desengañarles. Me habrían matado si hubieran sabido el poco tiempo que dedicaba en casa al trabajo en matemáticas, comparado con sus esfuerzos extenuantes.

Cuando era universitario en el Churchill College tenía un amigo que también estaba siguiendo una licenciatura en matemáticas. Trabajaba doce horas al día, todos los días. Yo iba a las clases, tomaba apuntes, pasaba una hora o dos por semana trabajando las hojas de problemas, y así continuaba hasta que llegaba el momento de revisar el material para el examen de fin de curso. En el sistema británico de aquella época no había exámenes parciales cada semestre. Esperabas hasta junio y entonces te examinabas de todo lo que habías estudiado durante el curso. Así que yo trabajaba más duro en abril y mayo que en el resto del año. Pero mientras mi amigo se quedaba estudiando hasta alias horas de la noche, yo me iba al *pub* a beber cerveza y jugar a los dardos. ¿Y cuál fue su recompensa por todo lo que estudió? Sacó un aprobado

pelado. Yo obtuve las máximas calificaciones (el equivalente británico de la A) y una beca universitaria.

Es verdad que la gente con talento suele trabajar muy duro. Tienen que hacerlo, para permanecer en la cima de la profesión que han elegido. Un jugador de fútbol que no pase horas entrenándose cada día será reemplazado rápidamente por otro que sí lo haga. Pero el talento tiene que estar allí inicialmente para que la instrucción sea efectiva.

Sospecho que los psicólogos sobreestiman el papel de la formación porque han caído en una teoría políticamente correcta del desarrollo infantil que ve a toda mente juvenil nueva como una «tabla rasa» sobre la que se puede escribir cualquier cosa. Esta teoría fue totalmente demolida por Steve Pinker en su libro *La tabla rasa*^[32], pero una refutación definitiva nunca puede competir con una creencia ferviente.

En cualquier caso, Meg, si has sido aceptada en un doctorado es porque los matemáticos que lo dirigen creen que posees la suficiente originalidad para completarlo con éxito. No tengo duda de que también posees otra cualidad esencial: el compromiso. Quieres hacer investigación; tienes hambre de ello. Uno de mis colegas me dijo una vez: «Realmente no puedo decir quiénes son los mejores matemáticos, pero puedo decir quienes están motivados». Algunas personas creen que a la hora de hacer una carrera, una vez supuesto un nivel de competencia normal, la energía y el estímulo cuentan realmente más que el talento.

A los escritores de ciencia ficción, otra profesión en donde la originalidad es esencial, se les pregunta a menudo, «¿De dónde sacan ustedes esas ideas disparatadas?». La respuesta más común es: «Las inventamos». He escrito novelas de ciencia ficción, y coincidido en esto. Pero los autores no inventan las ideas de la nada. Se sumergen en actividades que podrían generar ideas, tales como leer revistas de ciencia, y mantienen sus antenas sintonizadas para detectar el más mínimo indicio de una idea.

Los matemáticos extraen sus ideas de la misma forma. Leen revistas matemáticas, piensan en aplicaciones y mantienen sus antenas sintonizadas en «alto».

Además, los mejores parecen tener otras maneras de pensar ideas nuevas. Es casi como si vivieran en otro planeta. Srinivasa Ramanujan fue un brillante matemático indio autodidacta cuya vida es muy romántica: está bien contada en *El hombre que conocía el infinito*^[33] de Robert Kanigel. Yo prefiero pensar en Ramanujan como un hombre-fórmula. Él aprendió la mayor parte de sus primeras matemáticas en un único y bastante curioso libro de texto, A

Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics de George Carr. Era una lista de unas cinco mil fórmulas matemáticas, que empezaba con álgebra sencilla y llegaba a complicadas integrales en cálculo infinitesimal y sumas de series infinitas. El libro debe haber atraído a una mente como la de Ramanujan; de lo contrario nunca hubiera podido abrirse camino a través de sus páginas. Por otra parte, le llevó a pensar (porque nadie le había dicho lo contrario) que la esencia de las matemáticas es la derivación de fórmulas.

Hay más que eso en las matemáticas: demostración, para empezar, y estructura conceptual. Pero las fórmulas nuevas tienen un papel, y Ramanujan era un mago con ellas. Llamó la atención de los matemáticos occidentales en 1913 cuando envió una lista de algunas de sus fórmulas a Hardy. Examinando dicha lista, Hardy vio algunas fórmulas que podía reconocer como resultados conocidos, pero muchas otras era tan extrañas que no tenía ni idea de dónde podían haber surgido. El hombre era un falsario o un genio; Hardy y su colega John Littlewood se retiraron a un lugar tranquilo con la lista, decididos a no salir hasta que hubieran determinado si Ramanujan pertenecía al primer o al segundo tipo.

El veredicto fue «genio», y Ramanujan fue traído finalmente a Cambridge, donde colaboró con Hardy y Littlewood. Murió joven, de tuberculosis, y dejó una serie de cuadernos que incluso hoy son un rico tesoro de nuevas fórmulas.

Cuando se le preguntaba de dónde venían sus fórmulas, Ramanujan respondía que la diosa hindú Namagiri se le presentaba en sueños y se las decía. Él había crecido a la sombra del templo Sarangapani, y Namagiri era su deidad familiar. Como te dije en una carta anterior, Hadamard y Poincaré resaltaban el papel crucial del subconsciente en el descubrimiento de las nuevas matemáticas. Pienso que los sueños de Ramanujan con Namagiri eran huellas superficiales de la actividad oculta de su subconsciente.

Uno no puede aspirar a ser Ramanujan. Un talento así es extraordinario; sospecho que la única manera de entenderlo es poseerlo, e incluso entonces probablemente deja poco a la introspección.

Como contrapunto, déjame contarte de dónde saco yo normalmente las nuevas ideas, que es algo mucho más prosaico. Leo mucho, a menudo en campos no relacionados con el mío, y mis mejores ideas suelen venir cuando algo que he leído me recuerda algo que ya sé. Así es como llegué a trabajar en locomoción animal.

El origen de este particular conjunto de ideas se remonta a 1983, cuando pasé un año en Houston trabajando con Marty Golubitsky. Desarrollamos una teoría general de pautas espacio-temporales en dinámica periódica. Es decir, examinamos sistemas cuyo comportamiento en el tiempo repite la misma secuencia una y otra vez. El ejemplo más simple es un péndulo, que oscila periódicamente de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Si colocas un péndulo cerca de un espejo, la versión reflejada es exactamente igual que la original, pero con una diferencia: cuando el reflejo alcanza su posición máxima a la derecha, el original está en su posición máxima hacia la izquierda. Ambos estados ocurren en el sistema original, pero allí, están separados por una diferencia de tiempo de exactamente medio período. De modo que el péndulo oscilante tiene un tipo de simetría en el que un cambio espacial (reflexión izquierda-derecha) es equivalente a un cambio temporal (esperar medio período). Estas simetrías espacio-temporales son fundamentales para las pautas en sistemas periódicos.

Buscamos aplicaciones de nuestras ideas, y las encontramos principalmente en la física. Por ejemplo, organizan y explican un montón de pautas que se encuentran en un fluido confinado entre dos cilindros en rotación. En 1985 ambos fuimos a una conferencia en Arcata, al norte de California. Cuando terminó la conferencia, cuatro de nosotros —tres matemáticos y un físico— compartimos un coche alquilado para volver a San Francisco. Era un coche muy pequeño —llamarlo «miniutilitario» sería demasiado generoso— y, además de a nosotros, tenía que llevar todo nuestro equipaje. Para empeorar las cosas, nos detuvimos en un castillo en Napa Valley para que Marty pudiera comprar una caja de su vino favorito.

En cualquier caso, en el viaje nos deteníamos con mucha frecuencia para admirar las secuoyas gigantes, y entre una parada y otra Marty y yo estudiábamos cómo se aplicaba nuestra teoría a un sistema de osciladores acoplados en un anillo. («Oscilador» es solo una palabra para algo que experimenta un comportamiento periódico). Hicimos el trabajo enteramente de memoria, sin escribir nada porque no había espacio para moverse. Este ejercicio era matemáticamente gratificante, pero parecía bastante artificial. Nunca se nos ocurrió examinar la biología en lugar de la física, probablemente porque no sabíamos nada de biología. En ese momento intervino el azar. Yo había enviado la reseña de un libro llamado *Natural Computation* para que apareciera en la revista *New Scientist*. Trataba de ingenieros que se inspiraban en la naturaleza, intentando desarrollar, por ejemplo, visión por ordenador por analogía con el ojo. Un par de capítulos

trataban de locomoción con patas: construcción de robots con patas para moverse sobre terreno accidentado, cosas de ese tipo. Y en dichos capítulos di con una lista de pautas en el movimiento de los animales cuadrúpedos.

Reconocí algunas de las pautas: eran simetrías espacio-temporales, y yo sabía que el lugar natural para que se dieran era en anillos de cuatro osciladores. Cuatro patas... cuatro osciladores... decididamente parecía prometedor, así que mencioné esta curiosidad en la recensión.

Pocos días después de que la recensión del libro apareciese publicada, sonó el teléfono. Era Jim Collins, entonces un joven estudiante de investigación de paso en la Universidad de Oxford, a unos ochenta kilómetros de donde yo vivía. Él sabía mucho sobre movimiento animal, y estaba intrigado por la posible conexión matemática. Vino a visitarme un día, unimos nuestras cabezas... para resumir una larga historia, escribimos una serie de artículos sobre pautas espacio-temporales en locomoción animal.

Muchos de los cambios más radicales en la dirección de mi investigación han sido resultado de cosas similares: detectar una posible conexión entre unas matemáticas que yo ya conocía y algo que me sucedió por casualidad. Cada conexión de este tipo es un potencial programa de investigación, y lo bello es que se tiene una idea muy bonita de cómo empezó. ¿Qué aspectos son cruciales para las matemáticas? ¿Cómo podrían aparecer características similares en la aplicación al mundo real? Por ejemplo, en la historia de la locomoción el anillo de osciladores matemáticos se relaciona con lo que los neurocientíficos llaman un «generador central de pautas». Éste es un circuito formado por células nerviosas que produce espontáneamente los «ritmos» naturales, las pautas espacio-temporales, de la locomoción. Así que Jim y yo comprendimos rápidamente que estábamos tratando de hacer un modelo de un generador central de pautas, y que un primer paso era tratarlo como un anillo de células nerviosas.

Ya no creemos que nuestro modelo original sea correcto: es demasiado simple, tiene un fallo técnico y se necesita algo ligeramente más complicado. Tenemos una idea adecuada de cómo sería ese sustituto. Así es la investigación. Una buena idea, y uno está en marcha durante años.

Lee mucho, mantón tu mente activa, mantón tus antenas desplegadas; cuando te informen de algo interesante, indaga. Como dijo Louis Pasteur, la suerte favorece a la mente preparada.

Cómo enseñar matemáticas

Querida Meg:

¡Qué excelentes noticias! Felicidades por el puesto postdoctoral. Estoy muy contento, aunque no sorprendido: tú lo mereces. El proyecto de investigación sobre el procesamiento visual en las moscas de la fruta parece muy interesante, y compagina muy bien con tus intereses, incluso si no habías tenido relación antes con los aspectos biológicos.

Deberías considerar un premio añadido que tu puesto incluya algunos deberes docentes. Descubrirás que enseñar matemáticas a otros mejora tu capacidad de comprensión. Pero es natural que estés un poco nerviosa, y no me sorprende que pienses que no estás «preparada en absoluto» para tus responsabilidades docentes. Muchas personas en tu situación piensan lo mismo. Pero los nervios desaparecerán en cuanto te pongas en marcha. Has estado en aulas toda tu vida, has observado con detalle a docenas de profesores, y tienes ideas claras de lo que hace que un curso sea bueno o malo. Todo es preparación. Es importante que no dejes que la falta de confianza te haga tomar demasiado a la ligera esta parte de tu trabajo.

Un buen profesor, como el señor Radford, vale su peso en otro. Los buenos profesores inspiran a sus alumnos, bueno, a algunos de ellos. De igual modo, los malos profesores pueden alejar a los estudiantes de la materia que imparten de por vida. Por desgracia, es mucho más fácil ser un mal profesor que uno bueno, y no hay que ser realmente malo para tener el mismo efecto

negativo que alguien que es verdaderamente horrible. Es mucho más fácil destruir la confianza de alguien que ayudarlo a recuperarla.

La enseñanza importa. No es solo una aburrida obligación que hay que cumplir a cambio de la emoción de la investigación. Es la oportunidad que tienes de transmitir tu conocimiento de las matemáticas a la siguiente generación. Muchos buenos matemáticos disfrutaban con la enseñanza, y trabajan tan duro en ella como en sus proyectos de investigación. Se sienten orgullosos de los cursos que imparten.

No es inhabitual que se te ocurra una idea para investigarla mientras estás preparando una clase, o impartíendola, o poniendo un examen. Creo que esto sucede porque cuando estás enseñando, tu mente «se sale» de sus «surcos» de investigación habituales y empiezas a plantearte nuevas preguntas.

Aquí debo confesar algo. Hace ahora varios años desde la última vez que di clases a estudiantes de licenciatura, pues mi posición cambió en 1997 para permitirme más tiempo para actividades de «comprensión pública de la ciencia». En lugar del habitual cincuenta por ciento para enseñanza, cincuenta por ciento para investigación, pasó a ser cincuenta por ciento dedicado a investigación y cincuenta por ciento a conferencias públicas, radio, televisión, revistas y libros de divulgación científica. Esto ha tenido un efecto beneficioso: he podido utilizar técnicas de enseñanza que rara vez encuentras en cursos de licenciatura. La más memorable de éstas fue el día en que introduje un tigre vivo en la sala de conferencias.

Estaba pronunciando las Conferencias de Navidad de 1997, en la cadena de televisión de la BBC: cinco horas de ciencia popular, filmadas «en vivo» ante una audiencia de unas cinco mil personas en su mayor parte jóvenes. Esta serie de conferencias fue iniciada por Michael Faraday en 1826, y yo era el segundo matemático que tomaba parte.

Una de las cinco conferencias versaba sobre simetría y formación de patrones, y yo quería empezar con un poema de William Blake —un tópico, pero un buen tópico de lo das formas— cuya primera estrofa dice: «¡Tigre!, ¡tigre!, luz llameante», y termina con «pudo idear tu temible simetría». Así que, siendo la televisión lo que es, decidimos traer un tigre real. Cómo lo encontramos es una historia aparte, pero baste decir que lo hicimos. Nikka era mía tigresa de seis meses, y entró en la sala de conferencias arrastrada por una cadena de la que tiraban dos jóvenes fornidos.

Nunca he oído una audiencia quedarse en silencio con tanta rapidez.

El papel de Nikka iba más allá de la metáfora poética. La simetría que yo tenía en mente eran sus rayas, especialmente los anillos regulares en su

elegante cola. La tigresa era una auténtica estrella: se comportó magníficamente y pudimos hacer todas las tomas que queríamos.

Nunca he podido conseguir nada igual al iniciar una conferencia.

Lo que perdí en el contacto con los licenciados, lo gané así en el contacto con la naturaleza. El departamento de matemáticas no sufrió, porque se le concedió una plaza docente en sustitución, pero yo eché en falta mis conversaciones regulares con alumnos de licenciatura. Por supuesto, gané en otros aspectos; fundamentalmente, pude repartir mi tiempo como quería, lo que fue maravilloso. Aún dirijo a estudiantes de doctorado, de modo que parte de mi enseñanza ha continuado, pero tú deberías tener en cuenta que algo de lo que pueda decir quizás esté pasado de moda. En mi defensa puedo argumentar que antes de eso impartí cursos regulares para licenciados durante veintiocho años, incluyendo dos años en Estados Unidos, de modo que tengo cierto conocimiento del sistema norteamericano y sus diferencias con el británico. Las similitudes son más importantes que las diferencias, pero trataré de traducir mi experiencia a tu contexto.

En mi opinión, la característica más importante de los buenos profesores es que se colocan en el lugar del alumno. No se trata simplemente de impartir lecciones claras y precisas y de corregir exámenes; el objetivo principal es ayudar al estudiante a entender la materia. Ya estés impartiendo una clase o hablando con los alumnos durante las horas de tutoría en tu despacho, tienes que recordar que lo que parece perfectamente obvio y transparente para ti puede ser misterioso y opaco para alguien que no se ha encontrado antes con esas ideas.

Siempre trataba de acordarme de eso. Cuando se corrigen exámenes es fácil empezar pensando: «Llevo veinte años enseñando estas cosas y ellos todavía no las entienden». Pero cada año llegan nuevos estudiantes, que se topan las mismas dificultades que sus predecesores, cometen los mismos errores, malinterpretan las mismas cosas. Ellos no tienen la culpa de que tú hayas abordado todo eso antes.

En realidad es una ventaja para ti, Meg, que no hayas visto todo eso antes. Considérate afortunada y explótalo. Los alumnos se sentirán cómodos contigo porque tú tienes una edad similar a la suya, acabas de pasar por lo mismo que están pasando ellos, y no te has aburrido de enseñar la misma materia varias veces. Aún puedo recordar vívidamente mis primeras clases; la enseñanza era más fácil para mí entonces que lo que llegó a ser diez años más tarde. Al cabo de un tiempo, uno sabe demasiado, y existe el peligro de que intente transmitir todo ese conocimiento a los estudiantes. Gran error. Ellos no tienen

la misma perspectiva que tú. Así que se aplica el principio KISS^[34]: mantenlo simple, estúpido. Atente a los puntos importantes, y no trates de desviarte si hacerlo requiere que los estudiantes deban comprender nuevas ideas que no están en el temario, por fascinantes e ilustrativas que puedan parecerse.

El sistema norteamericano es más simple que el británico a este respecto. Normalmente hay un conjunto de libros de texto y un temario acordado — hasta el número de páginas y los párrafos específicos que hay que incluir o no — de modo que el contenido está establecido y todo el mundo lo sabe, o debería saberlo. Pero todavía queda un margen para aportaciones del profesor, y se establece un delicado equilibrio entre ayudar a los alumnos poniendo tu propio sello en el material y confundirles introduciendo demasiadas ideas extrañas.

Así que antes de decirles algo que pueda ir más allá del libro de texto, tienes que preguntarte: si yo fuera una alumna, que conociera el libro de texto hasta esta página concreta pero nada más allá, ¿qué me ayudaría más a entender el material? Y el paso clave para dar con una buena respuesta a esa pregunta es asegurarte de que tú misma entiendes el material.

Déjame ponerte un ejemplo. Los detalles son menos importantes que el planteamiento, que es aplicable a muchas situaciones similares.

En algún momento en el inicio de tu carrera docente, alguno de tus alumnos de iniciación al cálculo te preguntará por qué «menos por menos da más». Por ejemplo, $(-3) \times (-5) = +15$, y no -15 . E incluso si este tema debería haber sido superado en el instituto, vas a tener que justificar el convenio matemático estándar.

Lo primero es admitir que se trata de un convenio. Puede ser la única elección que tiene sentido, pero si hubieran querido, los matemáticos podrían haber insistido en que $(-3) \times (-5) = -15$. El concepto de multiplicación habría sido entonces diferente, y las leyes usuales del álgebra habrían sido destrozadas y arrojadas por la ventana, pero qué le vamos a hacer. A menudo las viejas palabras adoptan nuevos significados en nuevos contextos, y no hay nada sagrado en las leyes del álgebra.

Hay dos razones por las que el convenio estándar es bueno: una razón externa, que tiene que ver con la forma como los matemáticos modelan la realidad, y una razón interna, que tiene que ver con la elegancia.

La razón externa convence a muchos alumnos. Considera los números como una representación del dinero en el banco, donde los números positivos son dinero que tú posees y los números negativos son deudas que tienes con el banco. Entonces -5 es una deuda de 5 dólares, así que $3 \times (-5)$ es tres

deudas de 5 dólares, que evidente mente equivale a una deuda total de 15 dólares. Así que $3 \times (-5) = -15$, y nadie parece tener problemas con eso. Pero ¿qué pasa con $(-3) \times (-5)$? Esto es lo que tú obtienes cuando el banco *perdona* tres deudas de 5 dólares. Si lo hace, tú ganas 15 dólares, así que $(-3) \times (-5) = +15$.

La única otra elección que cualquier estudiante pueda defender es -15 , pero eso te dejaría con deuda.

La explicación «interna» es hacer una suma como $(-3) \times (5 - 5)$. Por una parte, esto es evidentemente cero. Por otra, podemos utilizar las leyes del álgebra para desarrollarla, obteniendo $(-3) \times 5 + (-3) \times (-5)$. Puesto que ya hemos acordado que menos por más es menos, deducimos que la consistencia de las leyes del álgebra requiere $-15 + (-3) \times (-5) = 0$, lo que implica que $(-3) \times (-5) = 15$ (sumando 15 a cada miembro).

Lo más que podemos afirmar en el primer caso es que si queremos que las matemáticas sirvan de modelo a las cuentas bancarias, entonces menos por menos tiene que funcionar como más. Lo más que podemos afirmar en el segundo caso es que si queremos que las leyes usuales del álgebra sean válidas para números negativos, entonces pasa lo mismo. No hay nada que obligue a que una u otra de estas cosas sea verdadera. Pero ciertamente será más conveniente si lo son, y por eso es por lo que los matemáticos escogen ese convenio particular.

Estoy seguro de que tú puedes pensar en otros argumentos similares. Lo importante es no decirle al alumno: «Así son las cosas. No lo cuestiones, simplemente apréndelo». Pero en mi opinión sería incluso peor dejarles con la impresión de que no se podía hacer ninguna otra elección, que está ordenado que menos por menos sea más. Todos estos conceptos —más, menos, más— son invenciones humanas.

En este momento uno de tus alumnos más contumaces puede comentar que sí que *está* ordenado, en el sentido de que existe solamente un sistema de matemáticas que procede de los números que se utilizan para contar de una forma completamente consistente. Tú puedes responder que en realidad hay varias extensiones del concepto de número-números negativos, fracciones, números «reales» (con infinitos decimales), números «complejos» en los que -1 tiene una raíz cuadrada... incluso cuaterniones (en los que -1 tiene muchas raíces cuadradas, pero fallan algunas leyes del álgebra). Cada una de estas extensiones es probablemente única, sujetas a poseer ciertas características, pero les toca a los seres humanos escoger qué características consideran importantes. Por ejemplo, sería posible inventar un nuevo sistema

de números en el que todos los números negativos sean iguales, y sería completamente consistente desde un punto de vista lógico. Pero no obedecería a las reglas usuales del álgebra.

Puedes conceder, si te presionan, que algunas extensiones parecen ser más naturales que otras.

Las discusiones de este tipo no siempre funcionan; las ideas erróneas arraigadas pueden ser difíciles de erradicar. Incluso si funcionan, tienes que demostrar a tus alumnos dónde se está equivocando su intuición.

Normalmente, cuando un estudiante se atasca en algún punto del temario, el problema real se halla en otra parte. En unas páginas o asignaturas o años al ras. Quizá no entienden la relación entre la multiplicación y la suma repetida. Quizá lo entienden demasiado bien, y no pueden comprender cómo se pueden sumar menos tres lotes de -5 . Es sorprendente cuán a menudo la enseñanza revela hipótesis ocultas o aspectos no cuestionados de tu propia formación matemática. Cada vez que un concepto matemático existente se extiende a un nuevo dominio, uno tiene que abandonar algunas de sus interpretaciones previas y aceptar otras nuevas.

Uno puede convivir durante bastante tiempo con nuevo material en matemáticas sin asimilarlo por completo. Mi amigo David Tall tiene una teoría sobre esto que me gusta bastante. Piensa que las matemáticas avanzan convirtiendo (conceptualmente) procesos en cosas. Por ejemplo, «número» empieza como el proceso de contar. El número 5 es donde llegas cuando cuentas los dedos (en los que incluyo el pulgar) de una mano: «Uno, dos, tres, cuatro, cinco». Pero para hacer progresos, en alguna etapa tienes que dejar de pasar por el proceso de recuento, y pensar en 5 como un objeto por sí mismo. Esto es ya útil cuando uno empieza a hacer sumas como $5 + 3$. Pero los estudiantes pueden enmascarar su incapacidad para convertir un recuento en una cosa, juntando los dedos de una mano con tres dedos de la otra y contando luego el lote: «Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho».

Este encubrimiento puede pasar inadvertido durante mucho tiempo, pero se viene abajo ante sumas como $2546 + 9773$.

La multiplicación proporciona otro ejemplo. Para empezar, uno puede pensar en 4×5 como $4 + 4 + 4 + 4 + 4$ y recurrir a su comprensión de la suma (incluso utilizando el recuento). Pero cuando te enfrentas a 444×555 necesitas algo más sofisticado.

Lo interesante es que las estrategias que fracasan a largo plazo son precisamente las que utilizamos para llegar a estos nuevos conceptos a corto plazo. Relacionamos los números con el recuento, a menudo utilizando

«contadores» reales. Relacionamos la multiplicación con la suma repetida. No hay nada erróneo en esto. Las matemáticas construyen nuevas ideas sobre las viejas. Es difícil ver de qué otra forma podrían enseñarse. Pero con el tiempo hay que quitar de la bicicleta las ruedas auxiliares: los alumnos tienen que interiorizar la nueva idea.

David llama «proceptos» a estos procesos-cum-conceptos. Un proceso puede a veces verse útilmente como un proceso, y otras veces como un concepto, una cosa. El arte de las matemáticas incluye pasar sin esfuerzo de uno de estos puntos de vista al otro. Cuando estás investigando, ni siquiera adviertes el cambio. Pero cuando estás enseñando, tienes que ser consciente de ello. Si uno de tus alumnos está teniendo problemas con un nuevo procepto, la causa puede ser un fallo pasado al «proceptualizar» uno de los procesos implicados. Así que tu tarea como profesor es recorrer hacia atrás la secuencia de ideas que lleva a la idea nueva. No estás buscando el primer lugar en donde tus alumnos fallan en responder a una pregunta; estás buscando el primer lugar en donde pueden responderla utilizando solamente alguna idea más simple como muleta.

En las escuelas primarias británicas, el sistema educativo se las ha arreglado para confundir espectacularmente todo esto. Ahora tenemos un «currículum nacional» muy prescriptivo, y los profesores comprueban —casi literalmente— cientos de casillas para evaluar el progreso de los estudiantes. ¿Pueden contar hasta cinco? Comprobar. ¿Pueden sumar cinco y tres? Comprobar. La hipótesis es que lo que cuenta es su capacidad para obtener una respuesta. Pero lo que realmente importa es cómo obtienen la respuesta. Estoy suficientemente pasado de moda para creer que en uno u otro caso tienen que obtener la respuesta *correcta*. No sé cómo calificar el «método», pero estoy absolutamente seguro de que comprobar una serie de casillas no es la manera de enseñar matemáticas a nadie.

La comunidad matemática

Querida Meg:

Ahora que estás a punto de convertirte en un miembro plenamente integrado en la comunidad matemática, es una buena idea saber lo que eso entraña. No solo en lo referente a los aspectos profesionales, que ya hemos discutido, sino a la gente con la que trabajarás y a cómo encajarás en ella.

Hay un dicho en los círculos de la ciencia ficción: «Ser adepto es una condición orgullosa y solitaria». El resto del mundo no puede apreciar tu entusiasmo por lo que a ellos les parece una actividad extraña e inútil. La palabra «chiflado» viene a la mente. Pero todos estamos chiflados por algo, a menos que seamos seres abúlicos a los que no les interesa nada excepto lo que emiten en la televisión. Los matemáticos se apasionan por su disciplina, y se sienten orgullosos de pertenecer a una comunidad matemática cuyos tentáculos se extienden tan lejos. Verás que la comunidad es una fuente constante de ánimo y apoyo —por no mencionar de crítica y consejo—. Sí, habrá también discrepancias pero, en general, los matemáticos son amigables y relajados, siempre que evites pulsar los botones equivocados.

Orgullo es una cosa, soledad otra. Mi experiencia es que la opinión pública de hoy es mucho más consciente que antes de que los matemáticos hacen cosas útiles e interesantes. En las fiestas, si tú admites ser una matemática, es más probable que te pregunten: «¿Qué piensas de la teoría del caos?» que te digan: «Nunca fui bueno en matemáticas cuando estaba en la

escuela». En *Parque jurásico*, Michael Crichton dice que los matemáticos de hoy ya no parecen contables, y algunos se parecen más a estrellas de *rock*.

Si es así, eso son muy malas noticias para las estrellas de *rock*.

Incluso si la gente te pregunta sobre la teoría del caos en las fiestas, sigue siendo poco prudente explicar tu último teorema sobre pseudométricas continuas en variedades de Kähler al tipo de la chaqueta de cuero. (Aunque en estos días podría ocurrir que él fuera un matemático, pero no cuentes con ello). Así, a pesar de la reciente tolerancia de la gente en general hacia las matemáticas, habrá ocasiones en las que quieras estar con gente que entienda de dónde vienes. Por ejemplo, cuando hayas demostrado finalmente el caso semicontinuo de la conjetura de Roddick-Federer sobre la irregularidad de las pseudométricas en variedades de Kähler en dimensiones mayores que 34.

Los aficionados a la ciencia ficción van a convenciones («cons» como ellos dicen) a hablar con otros aficionados al mismo género. Los criadores de perros de carreras van a ferias caninas y compiten con otras personas que crían perros. Los matemáticos van a conferencias a hablar con otros matemáticos. O dan seminarios, o coloquios, o simplemente visitan a otros colegas.

Nuestro primer vicerrector, Jack Butterworth, dijo en una ocasión que ninguna universidad valía nada a menos que una cuarta parte de su claustro de profesores estuviese en el aire. Él lo decía en un sentido literal: en vuelo aéreo, no en altos vuelos intelectuales. La mejor manera de hacer avanzar la causa de las matemáticas es ir a encontrarse con otros matemáticos.

Si tienes suerte, ellos irán a buscarte. La Universidad de Warwick, fundada en los años sesenta del siglo xx, se convirtió en un centro de talla mundial en matemáticas porque desde el primer día celebró simposios, programas especiales de un año de duración en algún área de las matemáticas. (Una vez me dijeron que «simposio» significa ‘beber juntos’, una teoría que no puede ser rechazada a la ligera). Pero es una buena idea, y más divertido, si eres tú quien asiste a *ellos*. Las matemáticas, como todas las ciencias, siempre han sido internacionales. Isaac Newton solía escribir a sus homólogos en Francia y en Alemania, pero en la actualidad podría subirse en un avión y encontrarse con ellos.

Los matemáticos se juntan normalmente a la hora del café; Erdős decía que un matemático es una máquina para convertir café en teoremas. Comparten chistes, cotilleos, teoremas y noticias.

Los chistes son matemáticos, por supuesto. Hay un largo compendio de chistes matemáticos clásicos en el número de enero de 2005 del *Notices of the*

American Mathematical Society, y sus contenidos son una parte importante de tu cultura matemática, Meg. Hay, por ejemplo, un chiste sobre el Arca de Noé. (En realidad, el chiste que prefiero sobre el Arca de Noé es un chiste gráfico que tiene que ver con la biología. La lluvia empieza a caer, el arca está cargada con dos animales de cada especie y Noé está a gatas escarbando en el lodo. La señora Noé grita desde el arca: «Noé. Olvídate de la otra ameba»). En cualquier caso, el chiste matemático sobre el Arca de Noé es éste:

El Diluvio ha cesado y el Arca se ha posado a salvo en el monte Ararat; Noé dice a todos los animales que salgan y se multipliquen. Pronto la tierra está rebosante de todo tipo de criaturas vivientes, excepto serpientes. Noé se pregunta por qué. Una mañana dos serpientes afligidas llaman a la puerta del Arca con una queja. «Tú no has cortado ningún árbol». Noé se queda intrigado, pero hace lo que ellas desean. En menos de un mes, no se puede dar un paso sin estar a punto de pisar a una cría de serpiente. Con dificultades, llega hasta las dos progenitoras. «¿Qué pasaba con los árboles?». «Ah», dice una de las serpientes, «no te diste cuenta de qué especie somos». Noé sigue sin entender nada. «Somos víboras, y solo podemos multiplicarnos utilizando troncos».

Éste es un chiste múltiple: se pueden multiplicar números sumando sus logaritmos^[35]. Otros chistes parodian la lógica de las demostraciones: «*Teorema*: un gato tiene nueve colas. *Demostración*: ningún gato tiene ocho colas. Un gato tiene una cola más que ningún gato. QED».

Los matemáticos se cuentan sus teoremas. Los extraños, como «el teorema del sándwich de jamón»: si tienes una rodaja de jamón y dos rebanadas de pan, dispuestas en el espacio en posiciones relativas cualesquiera, entonces existe un plano que divide cada una de las tres piezas exactamente por la mitad. O la recientemente demostrada «conjetura de los fuelles», que dice que si se flexiona un poliedro (como, curiosamente, pueden flexionarse algunos), entonces su volumen no cambia. Pero a menudo traen cola: «¿Demostrado eso? De acuerdo, ahora hazlo con n objetos en n dimensiones». A veces se cuentan conjeturas, teoremas todavía no demostrados y que por todo lo que ellos conocen podrían ser falsos. Mi favorita es la «conjetura de la salchicha». Para los principiantes, supón que quieres envolver varias pelotas de tenis en un papel de plástico. ¿Qué disposición tiene la mínima área superficial? (Supón que el papel forma una superficie convexa: sin entrantes). La respuesta es que si tienes cincuenta y seis pelotas o menos, deberían estar colocadas en línea formando una

«salchicha». Si tienes cincuenta y siete o más, entonces deberían ser amontonadas de una forma más parecida a las patatas en un saco.

En un análogo tetradimensional, el número crítico está en algún lugar entre cincuenta mil y cien mil. Con cincuenta mil pelotas, forman una salchicha. Con cien mil, se amontonan. El número crítico exacto para este caso no se conoce.

Ahora viene la conjetura general: en tres y cuatro dimensiones hay ambigüedad. Demostrar que en cinco o más dimensiones, las salchichas son siempre la respuesta, por muy grande que pueda ser el número de pelotas.

La conjetura de la salchicha ha sido demostrada en cuarenta y dos dimensiones o más.

Esto es extraño. Me encanta.

Habrá cotillees. En nuestros días pueden ser sobre el topólogo que se fugó con su secretaria, o el divorcio de dos teóricos de grupos bien conocidos, pero ésta es una desviación reciente que yo achaco a la mala influencia de la televisión. Tradicionalmente, los cotillees tratan de quien está en consideración para un ascenso para la cátedra de Absurdo Abstracto en la Universidad de Boondoggle, o ¿conoces a alguien que tenga un puesto postdoctoral adecuado para un joven analista funcional como mi alumno Kylie?, o ¿piensas que la pretendida demostración de Fulano y Mengano de la hipótesis del hueco de masas tiene alguna posibilidad de ser correcta?

Habrá noticias serias. En el momento en que escribo, un tema principal de conversación es la última información sobre la supuesta demostración de Grisha Perelman de la conjetura de Poincaré^[36]. ¿Alguien ha descubierto ya un fallo en ella? ¿Qué piensan hoy los expertos? Esto es realmente excitante porque la conjetura de Poincaré es una de las grandes cuestiones abiertas en matemáticas, solo por detrás de la hipótesis de Riemann. Todo se remonta a un error que cometió Henri Poincaré en 1900. Supuso sin demostración que cualquier espacio topológico tridimensional (con ciertas condiciones técnicas) en el que todo lazo puede contraerse continuamente a un único punto debe ser equivalente a una tres-esfera, el análogo tridimensional de la superficie bidimensional de una esfera ordinaria. Luego advirtió que no existía ninguna demostración, trató de encontrar una y fracasó. Convirtió el fracaso en una pregunta: «¿Es todo espacio semejante una tres-esfera?». Pero tan seguros estaban todos de que la respuesta tenía que ser afirmativa que su pregunta se convirtió poco a poco en una conjetura. Luego se demostró su generalización a dimensiones más altas, para cualquier dimensión *salvo* 3, lo que era molesto, como mínimo. La conjetura de Poincaré se hizo tan

desagradablemente famosa que es ahora uno de los siete problemas del milenio seleccionados por el Instituto Clay como las cuestiones abiertas más importantes en matemáticas. Cada solución a estos problemas será recompensada con un millón de dólares.

En 2002 y 2003 Perelman, un joven ruso algo retraído con formación en física, publicó dos artículos en el arXiv («archivo»), una página web para borradores de artículos matemáticos, con el displicente comentario de que no solo demostraban la conjetura de Poincaré sino que también demostraban la aún más poderosa conjetura de geometrización de Thurston, que tiene la clave para *todos* los espacios topológicos tridimensionales.

Normalmente este tipo de afirmaciones resultan ser absurdas, pero la idea de Perelman es ingeniosa y viene con un buen pedigrí. Su truco consiste en utilizar el denominado flujo de Ricci para deformar una buena garantía de una manera muy parecida a como se deforma el espacio-tiempo bajo las ecuaciones de la relatividad general de Einstein. Y ahí está el problema. Para entender la demostración adecuadamente, hay que saber topología tridimensional, relatividad, cosmología y una docena de otras áreas hasta ahora inconexas de las matemáticas puras y la física matemática. Y es una demostración larga y difícil, con muchas trampas para el profano. Además, Perelman siguió la consabida tradición rusa de no dar todos los detalles. De modo que los expertos, que han estado estudiando sus ideas en seminarios en todo el mundo, albergan comprensibles dudas al declarar correcta la demostración. Pero cada vez que alguien encuentra lo que podría ser una laguna o un error, Perelman explica tranquilamente que él ya ha pensado en eso y por qué no es un problema. Y tiene razón.

Se ha llegado a un punto en el que, incluso si la demostración resultara ser errónea, las cosas correctas ganadas en el camino son de gran importancia para las matemáticas. Y en el momento en que escribo esto, los expertos parecen estar cada vez más cerca de pensar que la demostración funciona realmente. Mantén los oídos abiertos a la hora del café, Meg^[37].

A medida que se desarrolle tu carrera, la comunidad matemática mundial será cada vez más importante para ti. Llegarás a formar parte de ella, y entonces tendrás un hogar en cada ciudad de la Tierra.

¿Acabas de llegar a Tokio? Pasa por la universidad más cercana, busca el departamento de matemáticas, entra en él. Habrá al menos una persona a la que conoces, o que te conoce por tu trabajo, incluso si nunca os habéis encontrado antes. Dejarán todo, llamarán a su canguro y por la noche te llevarán a dar una vuelta por la ciudad. Quizá tengan una habitación de sobra

si has olvidado reservar hotel. Te invitarán a un dar seminario, de modo que puedas presentar tus últimas ideas ante una audiencia afín. Incluso intentarán conseguirte una pequeña ayuda económica para el billete de avión.

No vas a volar en primera clase, no obstante. Ni a dormir en una *suite* de un hotel (no una *suite tuya*, al menos). Las matemáticas funcionan sobre el principio de lo barato y desenfadado. A veces me gustaría que no nos infravaloráramos de esa manera, pero es un hábito arraigado y ya es demasiado tarde para cambiarlo.

Es por supuesto más civilizado y organizado poner un *e-mail* por adelantado al departamento de matemáticas de la Universidad de Tokio. El resultado será similar.

Si quedas bien con tu anfitrión, él te invitara a volver. Conforme tú y ellos ascendáis en el escalafón, ambos empezaréis a ser invitados a conferencias. Luego tú misma te encontrarás organizando conferencias, lo que significa que puedes invitar a hablar a todos los que quieras. Hay una especie de «transición de fase», de modo que en un período de aproximadamente un año pasarás de no ser invitada a ninguna conferencia a ser invitada a demasiadas. Se selectiva: aprende a decir no. Aprende a decir sí a veces.

Hay grandes conferencias, conferencias de un tamaño medio y conferencias pequeñas. Hay conferencias especiales y conferencias generales. Las grandes y generales son buenas para conocer a gente y pescar puestos de trabajo. Cada cuatro años se celebra en algún lugar del mundo el Congreso Internacional de Matemáticos. Fui al que se celebró en Kioto, y había cuatro mil participantes. Vi mucho de Kioto, me encontré con numerosos buenos amigos e hice otros nuevos, y aprendí un poco sobre lo que estaba haciendo la gente ajena a mi área. Mi familia venía también, y lo pasaron en grande explorando la ciudad y sus alrededores.

Prefiero las reuniones pequeñas y especializadas en un tema de investigación específico. En ellas puedes aprender mucho, porque casi todas las charlas son sobre algo que te interesa y está relacionado con aquello en lo que estás trabajando en ese momento. Y una vez que lleves unos años en el negocio, conocerás a casi todos los demás asistentes. Excepto a los participantes más jóvenes, que acaban de unirse a la comunidad.

Bienvenida, Meg.

Cerdos y camionetas

Querida Meg:

Profesora agregada. Estoy orgulloso de ti; todos lo estamos. Y en una institución excelente, además. Ahora eres una matemática profesional, con obligaciones profesionales. Y se me ocurre que he estado tan ocupado ofreciéndote consejo sobre lo que hacer en diversas circunstancias que he olvidado el otro lado de la cuestión: qué no hacer. Ahora que puedes aspirar a una posición estable, estarás asumiendo más responsabilidad, de modo que tendrás más que perder si te equivocas. Un matemático tiene muchas maneras de hacer el ridículo en público, y casi todos lo hemos hecho en alguna etapa de nuestra carrera. La gente comete errores; la gente prudente aprende de ellos. Y la manera menos dolorosa es aprender de los errores cometidos por otros.

Cuanto más tiempo permanezcas en el negocio de las matemáticas, mas patinazos cometerás, inevitablemente; así es como la gente experimentada gana su experiencia. Yo mismo he presenciado, y cometido, muchos errores. Pueden ir desde escribir la ecuación errónea en la pizarra a ofender gravemente al rector de tu universidad en algún acontecimiento público importante. Estás advertida. Sin duda, inventarás algunos nuevos errores propios; el ridículo ocasional es la condición natural del ser humano.

La mayoría de mis consejos serán obvios. Un profesor agregado que quiera ser contratado en su universidad debe descubrir cuáles son los requisitos y las expectativas, y entonces satisfacerlos. Si se espera que hayas

publicado dos artículos aparte del tema de tu tesis y en lugar de ello publicas un artículo, entrenas al equipo de matemáticas, diriges un programa de estudios en Budapest, obtienes una beca de investigación importante y ganas el premio al mejor profesor de la década, puede ocurrirte que te nieguen el puesto. Muéstrate diplomática con tus superiores, a menos que tengas una razón excelente para no serlo y quieras cambiar de trabajo. Se diplomática con todos los demás cuando ellos lo merezcan, e incluso a veces cuando no lo merezcan. Si discrepas de alguna decisión o argumento, expón tu opinión de forma concisa, clara y sin dar a entender que la idea contraria es absurda, incluso cuando lo sea. Haz honor a tus compromisos, ya sean sesiones tutoriales, horas de despacho, corrección de exámenes o conferencias plenarias en el Congreso Internacional de Matemáticos. Si estás de acuerdo en formar parte de una comisión, asiste a sus reuniones. Atiende a la discusión. Contribuye, aunque no demasiado. En general, recuerda que eres una profesional, y compórtate como tal.

Por otra parte, algunos errores son obvios solo una vez que los has cometido. Circula por la Universidad de Warwick el rumor de que yo terminé mi primera clase con los estudiantes de licenciatura metiéndome en el escobero. Es hora de desmentirlo. Sí, admito que era un escobero, pero era también la salida de emergencia del aula. Había supuesto, sin comprobarlo por adelantado, que cuando los estudiantes salieran del aula por las puertas principales, yo podría hacerlo por lo que parecía una puerta lateral. Pero cuando lo intenté, me encontré rodeado de cubos y escobas. Peor aún, descubrí que la única manera de salir del edificio por esa ruta era empujar una salida de emergencia que dispararía una alarma. Había advertido el rótulo «SALIDA» sobre la puerta pero no había visto la palabra «EMERGENCIA» encima. Así que me vi obligado a salir, avergonzado, del susodicho escobero y unirme a los estudiantes que subían los escalones hasta el fondo del aula y a salir por la puerta principal.

La moraleja aquí es no supongas nada. Compruébalo todo por adelantado. No solo el plano del aula o la localización del edificio donde se supone que vas a dar una charla, o la ciudad en la que va a tener lugar tu reunión, o la fecha de dicha reunión... Recuerda la ley de Murphy: «Si algo puede salir mal, saldrá mal». Por encima de todo, recuerda el corolario de los matemáticos a la ley de Murphy: «Si algo no puede salir mal, saldrá mal también».

Esto le ocurrió a un buen amigo mío, también matemático, en un viaje a un país que será mejor no nombrar. Iba a asistir a una conferencia y estaba

volando desde el aeropuerto de entrada a otra ciudad bastante lejana. Cuando estaba sentado en el avión garabateando algunos cálculos, advirtió que el piloto salía de la cabina y cerraba la puerta tras él. Unos minutos más tarde el copiloto hizo lo mismo. Inmediatamente después, el piloto volvió y trató de abrir la puerta para volver al puesto de pilotaje. Pareció encontrar cierta dificultad. El copiloto trató de ayudar, pero ninguno de ellos podía abrir la puerta. En ese momento mi amigo se dio cuenta de que el avión estaba volando con piloto automático y nadie podía tomar el control. Una azafata de vuelo se unió al piloto y al copiloto, desapareció y reapareció con un hacha pequeña. El piloto embistió entonces la puerta con el hacha, hizo un agujero, metió la mano y abrió la puerta. La tripulación entró a continuación en la cabina y cerró la puerta tras ellos.

No se dio ninguna explicación de estos sucesos a los asombrados y aterrorizados pasajeros.

Mi consejo aquí va dirigido realmente al piloto y al copiloto, no a los pasajeros. Si vas a conferencias, a veces tendrás que volar en líneas aéreas que han sido contratadas por los organizadores de la conferencia. Tú puedes escoger no ir, si lo deseas, pero no siempre puedes escoger no viajar en una línea aérea con un dudoso dispositivo de seguridad o una flota envejecida. Realmente un pasajero no tiene forma de prever dicho problema, o tratar de resolverlo o evitarlo.

Déjame volver al tema de dar clases. Otro consejo útil es asegurarte de que tienes mucho tiempo para llegar al aula. Evita asumir compromisos impredecibles inmediatamente antes. Aún tengo recuerdos vividos de haber llegado tarde a dar una clase de álgebra. Yo vivía entonces en un pueblo, y otro miembro del departamento de matemáticas tenía una pequeña granja en el mismo pueblo, de modo que compartíamos el coche. Un día que le tocaba a él conducir, decidió llevar un cerdo al matadero local de camino al trabajo. El cerdo, presintiendo quizá que el viaje no iba a ser en su provecho, tenía ideas propias. Se negó a subir a la parte trasera de la camioneta. Es difícil mantener una actitud profesional cuando estás explicando que has llegado tarde porque no podías subir un cerdo a una camioneta.

Una de las formas principales en las que interaccionarás con otros matemáticos es asistiendo a charlas o dándolas. Estas podrán ser seminarios, charlas especializadas para expertos en tu área de investigación; podrán ser coloquios, charlas más generales para matemáticos profesionales pero no especialistas en el área en cuestión; o podrán ser conferencias públicas

abiertas a todo el que quiera asistir. Todas las conferencias están sujetas a desastres potenciales.

Había, por ejemplo, un famoso profesor de teoría de números que tenía la costumbre de aparecer al comienzo del seminario de un orador invitado, quedarse dormido a los pocos minutos de empezar la charla, roncar ruidosamente durante toda ella, y luego plantear cuestiones penetrantes al final cuando los aplausos de la audiencia lo despertaban. Trata por supuesto de imitar las preguntas penetrantes, pero evita los ronquidos si puedes; de lo contrario te ganarás reputación de excéntrica.

Si eres la persona que está dando la charla, las oportunidades para que actúe Murphy son mucho más numerosas si estás utilizando algún aparato. Cuando yo empecé a dar clases, el único equipamiento que teníamos era pizarra y tiza, y confieso que sigo teniendo predilección por las ayudas visuales poco tecnológicas, aunque soy capaz de preparar una espectacular presentación en PowerPoint con un proyector de vídeo y vídeos descargados de Internet si eso es lo que hace falta. He utilizado retroproyectores, pizarras blancas con esos horribles rotuladores que huelen a disolvente, incluso los ubicuos tableros con hojas de papel que usa la gente de negocios.

Incluso con la tiza puede salir mal. En primer lugar, puede no haber. Adquirí la costumbre de llevar mi propia caja de tiza a las clases por si el profesor que me hubiese precedido la hubiese agotado o los alumnos la hubiesen escondido en plan de broma. Alguna tiza es muy polvorienta y se te queda en la ropa: me aseguré de que llevaba el tipo «antipolvo». Aún la tengo en mi ropa, pero las cuentas de la lavandería disminuyeron. Muchos tipos de tiza pueden producir unos horribles chirridos cuando escribes, dando dentera a todo el mundo. Se necesita práctica para evitarlo. Y la tiza de tamaño normal no bastará si estás dando clases a quinientos estudiantes de cálculo novatos en un aula cavernosa. Necesitas un supertamaño.

Otros tipos de equipamiento pueden fallar de forma más espectacular. Un buen amigo mío estaba dando una charla breve en el Coloquio Matemático Británico —la principal conferencia de matemáticas en Reino Unido, celebrada anualmente— e intentaba utilizar un retroproyector para mostrar muchas imágenes en una pantalla. Por desgracia, cuando trató de bajar la pantalla del lecho —era una pantalla enrollable y había que tirar de una cuerda— se le cayó en la cabeza. Terminó proyectando las imágenes en la pared.

Nunca creas a tus anfitriones cuando te digan que todo el equipamiento funciona perfectamente. Compruébalo por ti misma antes de la conferencia.

Yo estaba dando una conferencia pública en Varsovia utilizando un carro de unas ochenta diapositivas en 35 milímetros. Me convencieron para que pasara las diapositivas al proyccionista, que lo haría todo por mí. Mientras, mis anfitriones me llevaron a tomar un café rápido. Cuando entré en la sala para pronunciar la conferencia, el proyccionista puso las diapositivas en el proyector, que estaba inclinado en un ángulo alarmante debido a la alta posición de la pantalla. El carro deslizó por el proyector y cayó al suelo, donde las diapositivas se dispersaron por todas partes. Muchas de ellas estaban colocadas entre delgadas láminas de cristal, que se rompieron. Tardé diez minutos en volver a poner todo en orden, delante de quinientas personas pacientes.

No confundas la pantalla de proyección con una pizarra blanca y escribas sobre ella con tinta indeleble. Muchas personas lo hacen, y su lección queda conservada para la eternidad junto con su error.

El famoso físico Richard Feynman aprendió español en cierta ocasión porque iba a dar una conferencia en Brasil. Asegúrate de cuál es la lengua local.

Si invitas tú a un profesor visitante, y éste va a dar una charla, asegúrate de que tienes la llave de la sala de proyección. En una ocasión tuve que improvisar mi conferencia porque el proyector de diapositivas, aunque visible para todos nosotros dentro de una sala maravillosamente equipada, hubiera podido estar también en la Luna dado que la sala estaba cerrada y nadie sabía cómo conseguir la llave.

No olvides que el profesor visitante al que has invitado quizá no conozca la geografía local. Una vez me abandonaron dentro del edificio que albergaba el departamento de matemáticas holandés cuando mis anfitriones salieron al aparcamiento para ir a un restaurante. Tuve que salir por una ventana, y una alarma antirrobo se disparó. Me las arreglé para alcanzarles en el garaje, lo que fue una suerte porque yo no tenía ni idea de dónde estaba el restaurante, ni siquiera de cuál era su nombre.

Evita deambular por edificios extraños, especialmente a oscuras. Un amigo biólogo estaba visitando una institución con un buen departamento de biología marina, que tenía un acuario. La entrada se hallaba debajo de una corta escalera. Solo en el edificio, a altas horas de la noche, trató de entrar en la habitación oscura, tanteó el interruptor de la luz y accidentalmente disparó en su lugar la alarma contra incendios.

Aparecieron seis camiones-bomba contra incendios, cuyas sirenas aullaban y cuyas luces parpadeaban.

Había avisado a la estación de bomberos para explicar su error, pero de acuerdo con las reglas ellos no podían regresar a la base sin comprobar si había un incendio.

Las comisiones son otro lugar donde puedes cometer fácilmente terribles errores. Las universidades tienden a funcionar como una red de comisiones y subcomisiones interconectadas, algunas son realmente importantes, otras sirven de escaparate. La mayoría tienen una razón de existir, y muchas gestionan actividades triviales pero esenciales, tales como corregir exámenes o establecer las regulaciones de las asignaturas. Indudablemente te verás involucrada en comisiones de trabajo, y debes hacerlo. Una universidad es un lugar complicado, y no funcionará bien si todo el mundo deja que las cosas se resuelvan sobre la marcha. Todo académico tiene que tener algo de administrador, y en alguna medida debe hacerlo, especialmente en «niveles senior».

No siendo yo mismo un animal de comisión, no puedo darte muchos consejos útiles sobre cómo «trabajar» en una comisión para que tome la decisión que tú defiendes. Pero sé lo que no hay que hacer. La historia siguiente es típica. Una importante comisión estaba debatiendo una decisión transcendental sobre una actuación concreta. El matemático de la comisión vio inmediatamente que aprobar la actuación en cuestión llevaría a un desastre, y estuvo cinco minutos explicando la lógica de su argumento, que era incuestionable. Su análisis fue claro y conciso, y sus conclusiones no dejaban lugar a dudas; nadie le contradijo. El debate continuó, sin embargo, porque los otros miembros de la comisión todavía no habían expresado su opinión. Tras más de una hora de discusión —a la que el matemático no contribuyó, habiendo ya (suponía él) expuesto su argumento— la comisión votó. Decidió hacer exactamente aquello contra lo que el matemático había advertido.

¿Cuál fue su error? No fue su análisis, ni su presentación, sino el momento elegido. En cualquier discusión de una comisión hay un momento central en que la decisión puede decantarse en cualquier dirección. Ése es el momento de intervenir. Si expones tu argumento demasiado pronto, todos los demás lo habrán olvidado; si tienes suerte quizá puedas remediarlo con un recordatorio oportuno. Pero si expones tu argumento demasiado tarde, entonces no hay manera de que pueda surtir efecto.

Otra cosa que no hay que hacer en las comisiones es seguir exponiendo tu argumento cuando ya lo tienes ganado. Puedes perder apoyo porque sigas

insistiendo en algo que ahora ya se ha convertido en obvio para todos. Si tienes munición adicional, ahórratela por si la necesitas más tarde.

Consejo que yo mismo voy a seguir ahora.

Placeres y peligros de la colaboración

Querida Meg:

Sí, es un dilema. La plaza fija o la promoción dependen de tu propio currículum docente e investigador, pero es atractivo trabajar con otros como parte de un equipo. Afortunadamente, las ventajas de la investigación en colaboración se están haciendo ampliamente reconocidas, y cualquier contribución que hagas al trabajo de un equipo también será reconocida. Así que pienso que deberías centrarte en investigar lo mejor que puedas, y si eso te lleva a unirte a un equipo, que así sea. Si la investigación es buena, y tu currículum docente está a la altura, entonces habrá promoción, y no importará si hiciste el trabajo tú sola o como parte de un esfuerzo conjunto. De hecho, la colaboración tiene ventajas definidas; por ejemplo, es una manera muy efectiva de ganar experiencia redactando peticiones de financiación y gestionando la financiación. Puedes empezar como miembro joven del equipo de algún otro, y antes de que haya pasado mucho tiempo tú misma serás una investigadora principal.

Las actitudes están cambiando con rapidez. En el pasado, las matemáticas eran básicamente una actividad individual. Los grandes teoremas los descubría y demostraba una persona, que trabajaba en solitario. Por supuesto, su trabajo se realizaba a la par que el de otros matemáticos (igualmente solitarios), pero las colaboraciones eran raras y artículos firmados por tres o cuatro personas eran prácticamente inexistentes. Hoy es completamente normal encontrar artículos firmados por tres o cuatro personas. Cerca del

noventa y ocho por ciento de mi investigación en los últimos veinte años ha sido en colaboración; mi récord está en un artículo firmado por nueve autores.

Esto no es nada comparado con lo que sucede en otras ramas de la ciencia. Algunos artículos de física tienen mucho más de un centenar de autores, como algunos artículos en biología. El crecimiento de la colaboración ha sido ridiculizado a veces como una adaptación a la mentalidad «publica o perece», según la cual la promoción y la estabilidad están determinadas por cuántos artículos ha publicado alguien en un determinado período de tiempo. Una forma fácil de incrementar tu lista de publicaciones es hacerte añadir al artículo de algún otro, y el precio es sencillo: tú les añades al tuyo.

Pero realmente no creo que este comportamiento hoy por ti, mañana por mí, sea responsable, en una medida significativa, del crecimiento de la coautoría.

La razón del enorme número de autores en algunos artículos de física es simple. En física de partículas fundamentales, el trabajo conjunto de un equipo enorme, realizado durante varios años, está típicamente condensado en un artículo de quizá cuatro páginas en una revista. El equipo incluirá a teóricos, programadores, expertos en la construcción de detectores de partículas, expertos en algoritmos de reconocimiento de pautas que interpretan los datos extraordinariamente complejos obtenidos por los detectores, ingenieros que saben cómo construir electroimanes a baja temperatura, y muchos otros. Todos ellos son cruciales para la empresa; todos merecen pleno reconocimiento como autores del informe resultante. Pero el informe es normalmente corto y va al grano. «Hemos detectado la partícula omega-menos predicha por la teoría: ésta es la prueba». Alguno puede obtener el premio Nobel por estas cuatro páginas. Probablemente el primero de la lista.

La gran ciencia envuelve a grandes números de personas. Lo mismo sucede con los proyectos de biología gigantes tales como la secuenciación del genoma.

Algo similar ha estado sucediendo en toda la ciencia. La raíz de ello es que la ciencia y las matemáticas se han ido haciendo cada vez más interdisciplinarias. Por ejemplo, recordarás que un área de interés para mí es la aplicación de la dinámica al movimiento animal, y mis primeros artículos fueron escritos en colaboración con Jim Collins, un experto en biomecánica. Tuvo que ser así: yo no sabía lo suficiente sobre la locomoción animal y Jim no estaba familiarizado con las matemáticas relevantes.

Mi artículo de nueve autores resumía dos proyectos de tres años para aplicar nuevos métodos de análisis de datos a la industria de fabricación de cables y muelles. Más de treinta personas estaban involucradas en este trabajo; en la publicación redujimos la lista de autores a aquellos que habían sido directamente responsables de un aspecto importante de los resultados. Algunos de nosotros trabajamos en los aspectos teóricos de las matemáticas; otros elaboraron nuevas maneras de extraer lo que necesitábamos de los datos que podíamos registrar; otros realizaron el análisis de dichos datos. Nuestros ingenieros diseñaron y construyeron equipos de prueba; nuestros programadores escribieron un código de modo que un ordenador pudiera realizar el análisis necesario en tiempo real. Los proyectos interdisciplinarios son así.

Durante los últimos veinte años, las agencias de financiación en todo el mundo han defendido el crecimiento de la investigación interdisciplinar, y con razón, porque ahí es donde se están haciendo, y se seguirán haciendo, muchos de los grandes avances. Al principio los resultados no fueron muy buenos. Se elogiaba la idea de investigación interdisciplinaria, pero cada vez que alguien presentaba una propuesta en dicho sentido, ésta se destinaba a los comités unidisciplinarios existentes, que por supuesto no entendían partes sustanciales de la solicitud de financiación. Por ejemplo, una propuesta para aplicar dinámica no lineal a la biología evolutiva sería desestimada por la comisión de matemáticas porque ellos y sus evaluadores no tendrían experiencia en la evolución, y luego sería rechazada por la comisión de biología porque ésta no entendería las matemáticas.

El resultado era que las agencias de financiación apoyaban la investigación interdisciplinaria en todo salvo en la obtención de fondos.

Fíjate en que nadie estaba haciendo nada erróneo. Era prácticamente imposible justificar una decisión de gastar dinero en la dinámica de la evolución cuando eso quitaba dinero de proyectos de gran calidad sobre topología algebraica o plegamiento de proteínas, pongamos por caso. En favor de los implicados hay que decir que el sistema ha cambiado para mejor, y uno puede ahora obtener financiación para ciencia y matemáticas que abarquen varias disciplinas. Una consecuencia importante es la creación de disciplinas completamente nuevas, tales como la biomatemática y la cosmología computacional. Otra es la difuminación de las tradicionales fronteras entre disciplinas.

Dejando aparte estos factores políticos, hay otra razón por la que la publicación en colaboración ha aumentado espectacularmente. Es una razón

social. Trabajar en grupo, con colegas, es mucho más divertido que sentarte en tu despacho con tu ordenador. Por supuesto, a veces necesitas soledad para ordenar un problema conceptual, formular una definición o realizar un cálculo. Pero también necesitas el estímulo de discusiones con otros en tu propia área, o en áreas donde quieres aplicar tus ideas. Otras personas saben cosas que tú no sabes. Y lo que es más interesante, cuando dos personas juntan sus cerebros a veces dan con ideas con las que ninguna de ellas habría dado por sí sola. Hay una sinergia, una nueva síntesis, algo que a Jack Cohen y a mí nos gusta llamar *complicidad*. Cuando dos puntos de vista se complementan mutuamente, no solo encajan como llave y candado o como fresas y nata; generan ideas completamente nuevas. A medida que tu carrera vaya avanzando podrás llegar a apreciar los placeres de la colaboración, y el valor de la ayuda, el interés y el apoyo de colegas cuya mente complementa la tuya.

Por desgracia, en la colaboración a veces puede haber un riesgo. Escoger el colaborador equivocado es una receta segura para el desastre. Lamentablemente, esto puede suceder con personas por completo razonables y competentes; es una cuestión de «química» personal, y no siempre resulta fácil de predecir. Lo principal es ser consciente de la posibilidad, y dejarte una puerta de salida.

Hace algunos años, dos matemáticos que conozco estaban escribiendo un libro a medias. No tuvieron ningún problema en acordar el contenido matemático, o el orden en que se presentaba el material. Simplemente no podían ponerse de acuerdo en la puntuación. Llegó un momento en el que uno de ellos revisaba el manuscrito entero poniendo comas, y luego el otro las quitaba de nuevo. Y así sucedió una y otra vez. Consiguieron terminar el libro, pero nunca han vuelto a colaborar. No obstante, siguen siendo muy buenos amigos.

Todo el mundo implicado en una colaboración debe aportar algo útil. No tienen que hacer la misma cantidad de trabajo; una persona puede ser la única que sepa cómo hacer un gran cálculo, o escribir un programa complicado para el ordenador, mientras que otra puede aportar una idea crucial que acaba en forma de dos líneas en medio de una demostración. Mientras todos aporten algo esencial, será justo. Nadie pone objeciones a que todos los coautores obtengan algo del crédito del resultado final. Pero si uno de los participantes está simplemente de acompañante, lo que en ocasiones sucede, entonces todos los demás están más contentos si su nombre no aparece en el artículo, libro o informe final. Y a menudo también hace más feliz a la persona en cuestión.

Esto no tiene por qué ser un signo de pereza; a veces el proyecto cambia de dirección de una forma que no podía haberse previsto, y una contribución que originalmente parecía esencial puede resultar innecesaria.

En la gran ciencia, donde están involucrados equipos enormes, el proyecto normalmente está muy bien marcado y la gente solo lo abandona cuando se van de vacaciones y son sustituidos. Pero las colaboraciones matemáticas tienden a ser vagas y espontáneas, y si hay un proyecto, el primer punto de la lista es estar dispuesto a cambiar el plan.

Ayuda mucho ser tranquilo y tolerante. Eso no evita discusiones; todo lo contrario. Los buenos amigos pueden tener discusiones largas, ruidosas y acaloradas durante un proyecto de investigación. Los psicólogos creen ahora que la parte racional de nuestro cerebro descansa sobre la parte emocional: uno tiene que estar emocionalmente comprometido con el pensamiento racional antes de poder pensar racionalmente. Con algunos de mis colaboradores sucede que ninguno de nosotros tiene la sensación de que el proyecto esté yendo a alguna parte a menos que tengamos un encuentro a gritos de vez en cuando. Pero los gritos cesan tan pronto como ambos decidimos quién tiene razón, y no queda ningún resentimiento residual. Nos mostramos tranquilos al discutir, pero no lo somos tanto como para que no haya discusiones.

Nunca aceptes una colaboración simplemente porque te han convencido de que deberías hacerlo. A menos que estés genuinamente interesada en trabajar con alguien no lo hagas. No importa que sea un gran experto, o que el proyecto conlleve mucho dinero. Apártate de las cosas que no te interesan.

Por otra parte, creo que es rentable tener intereses amplios. De esa manera, la lista de cosas de las que deberías apartarte es mucho menor. Una vez compartí un fascinante almuerzo con un medievalista que era un experto en el uso de comas en la Edad Media. Nada salió de esa interacción, pero se me ocurre que mis dos amigos podrían haberse beneficiado de su presencia cuando escribieron su libro a medias.

¿Es Dios un matemático?

Querida Meg:

Me gustó mucho verte en San Diego el mes pasado. Me da vergüenza decir que casi había perdido el contacto con tus padres desde que se fueron al campo. Les escribí y me alegré de saber que tu padre se ha recuperado.

La gente reacciona de maneras curiosas cuando consigue una plaza fija. La mayoría sigue enseñando e investigando exactamente igual que antes, pero con menos tensión (esto no vale para Reino Unido, dicho sea de paso, porque las plazas fijas fueron suprimidas hace veinte años). Pero recuerdo a un colega que declaró seriamente su intención de no publicar más de un artículo cada cinco años durante el resto de su vida. Esa, decía, era la frecuencia con la que se le ocurrían las buenas ideas. Era una actitud honesta, pero posiblemente poco prudente. Otro se dedicó casi exclusivamente a un trabajo como consultor; en menos de dos años había dejado la universidad para poner en marcha su propia compañía. Ahora tiene una casa de vacaciones en una isla del Caribe. Al parecer se había cansado de lo «barato y desenfadado».

Veo que tú has reaccionado poniéndote filosófica.

El físico Ernest Rutherford solía decir que cuando un joven investigador de su laboratorio empezaba a hablar sobre «el universo» él le frenaba inmediatamente. Yo soy más tranquilo que Rutherford a propósito de eso. Mi principal reserva es que creo que ese ámbito no debería estar reservado únicamente a los filósofos.

Hace dos mil quinientos años, Platón declaró que Dios es un geómetra. En 1939, Paul Dirac se hizo eco de ello, al decir: «Dios es un matemático». Arthur Eddington fue un paso más lejos y declaró que Dios es un matemático puro. Es ciertamente curioso que tantos matemáticos y físicos hayan estado convencidos de una conexión fundamental entre Dios y las matemáticas. (Erdős, que pensaba que Dios tenía cosas más importantes que hacer, aún creía que Él guardaba muy cerca un Libro de Demostraciones).

Tanto Dios como las matemáticas despiertan terror en el corazón de la gente corriente, pero seguramente la conexión debe ser más profunda. No se trata de religión. No necesitas aceptar una deidad personal para sentirte intimidado por las sorprendentes pautas del universo o para observar que parecen ser matemáticas. Cada concha espiral o cada rizo circular en un estanque nos grita ese mensaje.

De aquí solo hay un paso para ver las matemáticas como el tejido de la ley natural y dramatizar esa idea atribuyendo de capacidades matemáticas a una deidad metafórica o real. Pero ¿qué son las leyes de la naturaleza? ¿Son verdades profundas sobre el mundo, o son simplificaciones impuestas por la limitada capacidad mental de la humanidad ante la complejidad inescrutable de la naturaleza? ¿Es Dios realmente un geómetra? ¿Están las pautas matemáticas realmente presentes en la naturaleza, o las inventamos nosotros? O, si son reales, ¿son meramente un aspecto superficial de la naturaleza en el que nos fijamos porque es lo que podemos comprender?

La razón por la que no podemos responder definitivamente a estas preguntas es que los seres humanos no podemos salir de nosotros mismos para tener una visión objetiva del universo. Todo lo que experimentamos está condicionado por nuestros cerebros. Incluso nuestra vivida impresión de que el mundo está «ahí fuera» es un truco maravilloso. Las células nerviosas de nuestro cerebro crean dentro de nuestras cabezas una copia simplificada de la realidad y luego nos persuaden de que vivimos dentro de ella, y no al revés. Tras centenares de millones de años de evolución, las capacidades del cerebro humano no han sido seleccionadas por «objetividad», sino para mejorar las oportunidades de supervivencia de su propietario en un entorno complejo. Como resultado, el cerebro no es en absoluto un observador pasivo de la naturaleza. Nuestro sistema visual, por ejemplo, crea la ilusión de un mundo sin fisuras que nos envuelve por completo, pese a que en cualquier instante nuestros cerebros solo están detectando una minúscula parte del campo visual.

Puesto que no podemos experimentar el universo objetivamente, a veces vemos pautas que no existen. Hace aproximadamente dos mil años, una de las

pruebas más fuertes de la existencia de un Dios geómetra era la teoría ptolemaica de los epiciclos. Se pensaba que el movimiento de cada planeta en el sistema solar estaba construido a partir de un intrincado sistema de esferas en revolución. ¿Cómo se puede ser más matemático? Pero las apariencias son engañosas, y hoy este sistema nos parece absurdo e innecesariamente complicado. Puede ajustarse para servir de modelo de cualquier tipo de órbita, incluso una órbita cuadrada. En última instancia falla, porque no puede llevarnos a una explicación de por qué el mundo debería ser así.

Comparemos los engranajes de Ptolomeo con los engranajes del universo mecánico de Isaac Newton, puestos en movimiento en el momento de la Creación y que desde entonces obedecen a reglas matemáticas fijas e inmutables. Por ejemplo, la aceleración de un cuerpo es la fuerza que actúa sobre él dividida por su masa. Esta ley explica todos los tipos de movimiento, desde las balas de cañón hasta el cosmos. Ha sido refinada para tener en cuenta efectos relativistas y cuánticos en los dominios de lo muy pequeño o lo enormemente rápido, pero unifica un corpus enorme de evidencia observacional. Las minúsculas arrugas descubiertas recientemente en el fondo cósmico de microondas demuestran que cuando estalló el *Big Bang*, el universo no explotó por igual en todas direcciones. Esta simetría es responsable de la aglomeración de materia sin la cual tú y yo no tendríamos una pierna —o un planeta— para sostenernos. Es una verificación impresionante de las aplicaciones modernas de las leyes de Newton, y muestra que las pautas no tienen que ser perfectas para ser importantes.

No es casualidad que las leyes de Newton traten con formas de materia y energía que son accesibles a nuestros sentidos, tales como la fuerza. Si vamos en un todoterreno, nos sentimos empujados por nuestros asientos cuando el vehículo pasa por un bache. Pero una vez más nuestros cerebros están haciendo trucos. Nuestros sentidos no reaccionan directamente a las fuerzas. En nuestros oídos hay aparatos, los canales semicirculares, que no detectan la fuerza, sino la aceleración. Nuestros cerebros ponen entonces las leyes de Newton al revés para proporcionar una sensación de fuerza. Newton estaba «deconstruyendo» su aparato sensorial en las leyes que lo hacían funcionar de entrada. Si las leyes de Newton no hubieran funcionado, entonces sus oídos tampoco lo habrían hecho.

Lo hemos hecho mucho mejor detectando la artificiosidad de pautas supuestas como las de Ptolomeo, ilusiones sistemáticas creadas por unas matemáticas que son tan adaptables que pueden explicar cualquier cosa. Una forma de eliminar estas ilusiones es favorecer la simplicidad y la elegancia:

éste es el punto provocativo de Dirac, y el verdadero mensaje de la navaja de Occam.

Una de las fuentes más simples y más elegantes de pautas matemáticas en la naturaleza es la simetría.

La simetría nos rodea. Nosotros mismos somos bilateralmente simétricos: seguimos pareciendo personas cuando nos vemos en un espejo. La simetría no es perfecta —normalmente el corazón está a la izquierda— pero una cuasisimetría es tan chocante como una simetría exacta, e igualmente necesita una explicación. Hay exactamente 230 tipos de simetría para los cristales. Los copos de nieve son hexagonalmente simétricos. Muchos virus tienen la simetría de un dodecaedro, un sólido regular hecho de doce pentágonos. Una rana empieza su vida como un huevo esféricamente simétrico y la termina como un adulto bilateralmente simétrico. Hay simetrías en la estructura del átomo y en el remolino de las galaxias.

¿De dónde proceden las pautas simétricas de la naturaleza? La simetría es la repetición de unidades idénticas. La principal fuente de unidades idénticas es la materia. La materia está compuesta de minúsculas partículas subatómicas, y todas las partículas de un tipo dado son idénticas. Todos los electrones son exactamente iguales. El famoso físico Richard Feynman sugirió una vez que quizás haya solo un electrón, yendo hacia delante y hacia atrás en el tiempo, y nosotros lo observamos múltiples veces. Como quiera que sea, la intercambiabilidad de los electrones implica que potencialmente el universo tiene una enorme cantidad de simetría. Hay muchas maneras de mover el universo y dejar que parezca igual. Las simetrías de una concha espiral o de las gotas de rocío espaciadas a lo largo de una telaraña al amanecer pueden remitirse a este potencial de formación de pautas de las partículas fundamentales. Las pautas que experimentamos en una escala humana son huellas de pautas más profundas en la estructura del espacio-tiempo.

A menos, por supuesto, que dichas simetrías más profundas sean solo imaginarias, la versión moderna de los epiciclos.

Que el universo que experimentamos sea un artificio de nuestras imaginaciones no implica, sin embargo, que el propio universo no tenga existencia independiente. La imaginación es una actividad de los cerebros que están hechos del mismo tipo de materiales que el resto del cosmos. Los filósofos pueden debatir si la pauta que detectamos en las rayas de un tigre está presente realmente en un tigre real; pero la pauta de actividad neuronal que provocan en nuestros cerebros las rayas del tigre está decididamente

presente en un cerebro real. Las matemáticas son una actividad de los cerebros, de modo que éstos pueden funcionar al menos en ocasiones de acuerdo con las leyes matemáticas. Y si los cerebros realmente pueden hacerlo, ¿por qué no los tigres?

Nuestras mentes pueden ser tan solo remolinos de electrones en células nerviosas, pero dichas células son parte del universo, evolucionan dentro de él y han sido moldeadas por el profundo amor de la naturaleza por la simetría. Los remolinos de electrones en nuestras cabezas no son aleatorios, ni arbitrarios, y no son un accidente —ni siquiera en un universo sin Dios, si se trata de eso—. Son pautas que han sobrevivido a millones de años de selección darwinista por congruencia con la realidad. ¿Qué mejor manera de construir modelos simplificados del mundo que explotar las simplicidades que hay realmente? Los sistemas imaginarios que se apartan demasiado de la realidad no son útiles para la supervivencia.

Las construcciones intelectuales como los epiciclos o las leyes del universo pueden ser o bien verdades profundas o bien ilusiones ingeniosas. La tarea de la ciencia es proporcionar un proceso de selección para las ideas que sea tan restrictivo como el empleado por la evolución para deshacerse de los menos adaptados. Las matemáticas son una de sus herramientas principales, porque las matemáticas imitan las imágenes en nuestras cabezas que nos simplifican el universo. Pero a diferencia de dichas imágenes, los modelos matemáticos pueden ser transferidos de un cerebro a otro. Las matemáticas se han convertido así en un punto de contacto crucial entre diferentes mentes humanas, y con su ayuda la ciencia se ha pronunciado en favor de Newton y en contra de Ptolomeo. Incluso si las leyes de Newton —o, más a propósito, sus modernas sucesoras, la relatividad y la teoría cuántica— pueden resultar con el tiempo meras ilusiones, son ilusiones mucho más productivas que las de Ptolomeo.

La simetría es aún una ilusión mejor. Es profunda, elegante y general. Es también un concepto geométrico, de modo que el Dios geómetra es un dios de la simetría.

Quizás hemos creado un Dios geómetra a nuestra propia imagen, pero lo hemos hecho explotando las simplicidades básicas que suministró la naturaleza cuando evolucionaban nuestros cerebros. Solo un universo matemático puede desarrollar cerebros que hagan matemáticas. Solo un Dios geómetra puede crear una mente que tenga la capacidad de ilusionarse con la existencia de un Dios geómetra.

En ese sentido, Dios es un matemático; y Ella es mucho mejor que nosotros. De vez en cuando, Ella nos deja mirar por encima de su hombro.



IAN STEWART (1945, Folkestone, Reino Unido) es conocido en todo el mundo como divulgador matemático. Recibió la Faraday Medal de la Royal Society en 1995 por promover el conocimiento público de la ciencia, la IMA Gold Medal en 2000, el Public Understanding of Science and Technology Award de la AAAS (American Association for the Advancement of Science) en 2001 y la LMS/IMA Zeeman Medal en 2008. Fue elegido miembro de la Royal Society en 2001. Es catedrático emérito de Matemáticas en la Universidad de Warwick, donde divide su tiempo investigando en dinámica no lineal e impulsando el conocimiento público de las matemáticas. Entre sus libros se incluyen *Las matemáticas de la vida* (2011), *Historia de las matemáticas* (2012), *17 ecuaciones que cambiaron el mundo* (2013), *Los grandes problemas matemáticos* (2014), *Números increíbles* (2016), *Las matemáticas del cosmos* (2017) y *Mentes maravillosas* (2018).

Notas

[1] Editado en castellano por Nivola Libros y Ediciones, Madrid, 1999. (*N. del t.*). <<

[2] *A Wrinkle in Time* es un clásico de la literatura juvenil escrito por Madeleine L'Engle en 1962 (hay traducción en castellano: *Una arruga en el tiempo*, Salvat, Barcelona, 1988). La protagonista de la historia, también llamada Meg, realiza un viaje por el tiempo y por dimensiones superiores del espacio en busca de su padre, hace tiempo desaparecido. A estas dimensiones superiores del espacio se accede a través de *tesseract*s o «hipercubos» en cuatro dimensiones. (N. del t.) <<

[3] En el inglés original dice «red herring» (literalmente, ‘arenque rojo’), que significa ‘pista falsa’. El juego de palabras se pierde inevitablemente en la traducción. (*N. del t.*) <<

[4] Las iniciales W. E. B. coinciden con el término inglés que significa «telaraña». (*N. del t.*). <<

[5] La hipótesis de Riemann se refiere a la función zeta de Riemann $\zeta(z)$, que hace posible convertir cuestiones sobre números primos en cuestiones de análisis complejo. Afirma que si $\zeta(z)$ es 0, entonces o bien z es el doble de un número negativo o la parte real de z es $1/2$. Véase Karl Sabbagh, *Dr. Riemann's Zeros*, Atlantic Books, Londres, 2002. <<

[6] P. Bromwich, J. Cohen, I. Stewart y A. Walker, «Decline in sperm counts, An artefact of changed references range of “normal”?», British Medical Journal 309 (2 de julio de 1994), pp. 19-22. <<

[7] «Fibonacci» significa ‘hijo de Bonaccio’. Este apodo fue inventado probablemente por Guillaume Libri en el siglo XIX, y con seguridad no es muy anterior. <<

[8] M. Golubitsky, I. Stewart, J. J. Collins y P. L. Buono, «Symmetry in locomotor central pattern generators and animal gaits», Nature 401 (1999), pp. 693-695. <<

[9] Hay traducción en castellano: *Sigma: el mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona. (N. del t.). <<

[10] Hay traducción en castellano: *Sobre el crecimiento y la forma*, Hermann Blume, Madrid, 1980 (*N. del t.*). <<

[¹¹] En Reyes 1, 7:23 se lee, «Y él [Hiram en nombre del Rey Salomón] hizo un mar de metal fundido que tenía diez codos de borde a borde: era enteramente redondo, y de cinco codos de altura; un cordón de treinta codos medía su contorno». Si suponemos que la geometría es un círculo, y que las medidas son exactas, entonces la circunferencia es tres veces el diámetro $\pi = 3$. Pero es evidente que este pasaje no pretende ser un enunciado matemático preciso. <<

[12] J. Casti y A. Karlqvist eds., Perseus, Nueva York, 1999, pp. 157-185. <<

[13] Personajes de las historias de *Winnie the Pooh*. (N. del t.). <<

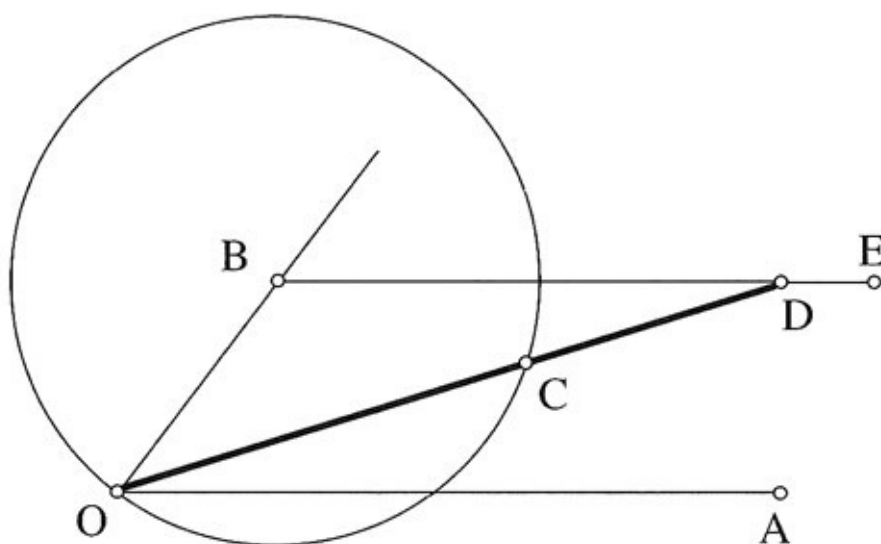
[14] Hay traducción en castellano: *El hombre que solo amaba los números*, Debate, Barcelona, 1997. (N. del t.). <<

[15] QED: *Quod erat demonstrandum* ('Como queríamos demostrar') es la fórmula clásica con la que se cierra una demostración de un teorema. (*N. del t.*). <<

[16] Un caso clásico es la demostración de Louis de Branges de la conjetura de Bieberbach. Véase Ian Stewart, *From Here to Infinity*, Oxford University Press, Oxford, 1996, 206. [Hay traducción en castellano: *De aquí al infinito*, Crítica, Barcelona, 1998]. <<

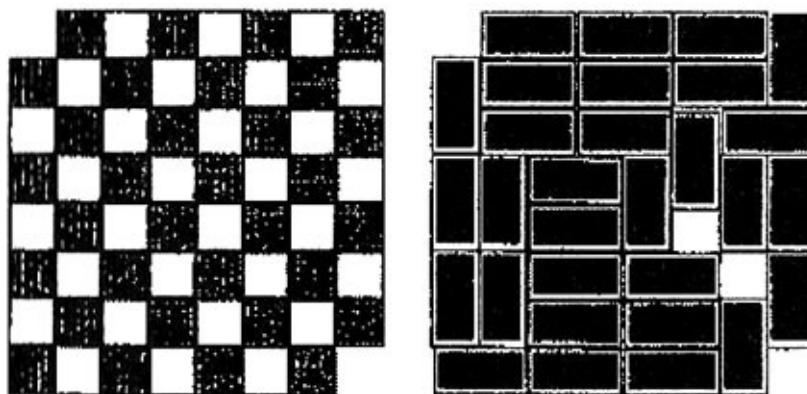
[17] P. Swinnerton-Dyer, «The justification of mathematical statements», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* 363 (2005), pp. 2437-2447. <<

[18] Dado un ángulo AOB , trácese BE paralela a OA , y el círculo centrado en B pasa por O , cuyo radio es igual a CD , donde C y D son las marcas en la regla (línea gruesa).

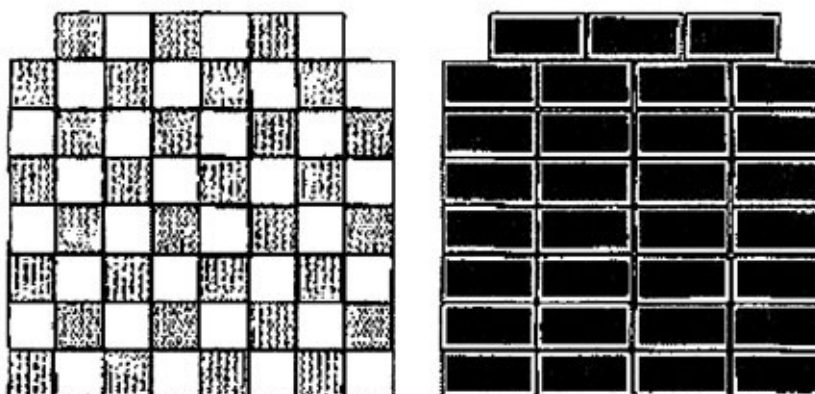


Colóquese la regla de modo que pase por O , mientras C yace en el círculo y D yace en BE . Entonces el ángulo AOC es un tercio del ángulo AOB . Véase Underwood Dudley, *A Budget of Trisections*, Springer, Nueva York, 1987. <<

[19] La figura de la izquierda muestra el tablero de ajedrez con sus dos esquinas ausentes. La figura derecha muestra un típico intento para cubrirlo: dos casillas quedan descubiertas.



Por el contrario, si las dos esquinas que faltan son adyacentes, el rompecabezas se resuelve fácilmente:



<<

[20] La primera demostración fue dada por Wantzel. Véase Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004. <<

[21] Ian Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
<<

[22] Hay una página web dedicada precisamente a eso:
<http://www.genealogy.arms.org/> <<

[23] La historia de la primera, Isabel Labouriau, es una de las muchas historias biográficas fascinantes en un maravilloso libro sobre mujeres y matemáticas: *Complexities* (Betty Anne Case y Anne M. Leggett eds.), Princeton University Press, Princeton, 2005. <<

[24] Timothy Poston, «Purity in applications», en *Mathematics Tomorrow* (L. A. Steen, ed.), Springer, Nueva York, 1981, pp. 49-54. <<

[25] Este teorema, demostrado por primera vez por Gauss, afirma que si p y q son impares primos, entonces la ecuación $x^2 = mp + q$ tiene una solución con números enteros si y solo si la ecuación asociada $y^2 - nq + p$ tiene una solución, excepto que si ambos p y q son de la forma $4k + 3$, entonces una ecuación tiene una solución y la otra no. Véase G. A. Jones y J. M. Jones, *Elementary Number Theory*, Springer, Londres, 1998. <<

[26] Esta pauta empírica en el espaciado de los planetas fue descubierta por Johann Bode en 1772. Toma la serie 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, en la que cada número excepto el primero es el doble del precedente. Suma 4 a cada término y divide por 10, para obtener 0,4, 0,7, 1,0, 1,6, 2,8, 5,2, 10,0. Omitiendo 2,8, éstos números están muy próximos a las distancias del Sol a Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, respectivamente, medidas en unidades astronómicas. (Por definición, la distancia de la Tierra al Sol es una unidad astronómica). El asteroide Ceres encajaba perfectamente en el hueco en 2,8.

<<

[27] J. Hammersley. «On the enfeeblement of mathematical skills by “Modern Mathematics” and by similar soft intellectual trash in schools and universities», *Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications* 4 (1960), p. 66. <<

[28] M. Kac, «Can one hear the shape of a drum?», *American Mathematical Monthly* 73 (1966), pp. 1-23. Dado el espectro de tonos que puede producir una membrana vibrante en el plano, ¿puede deducirse su forma? Kac demostró que su área y perímetro pueden ser deducidos. La pregunta general fue respondida en sentido negativo por C. Gordon, D. Webb y S. Wolpert, «One can't hear the shape of a drum», *Bulletin of the American Mathematical Society* 27 (1992), pp. 134-138. <<

[29] *Independent on Friday*, 14 de mayo de 2004. <<

[30] Hay edición en castellano: Debate, Barcelona, 1997. (*N. del t.*). <<

[31] *Mission to Abisko* (J. Casti y A. Karlqvist, eds.), Perseus, Nueva York, 1999, pp. 3-12. <<

[32] Hay edición en castellano: *La tabla rasa: la negación moderna de la naturaleza humana*, Paidós Ibérica, Barcelona, 2003. (N. del t.). <<

[33] Robert Kanigel, *The Man Who Knew Infinity*, Scribner's, Nueva York, 1991. <<

[34] En el original: *Keep it Simple, Stupid* (N. del t.). <<

[35] Inevitablemente el chiste se pierde en la traducción: el término inglés para víbora es *adder*, que también puede interpretarse como «sumador»; por su parte, el término inglés para tronco es *log*, que asimismo es la abreviatura de logaritmo. (N. del t.). <<

[36] J. Milnor, «Towards the Poincaré's conjecture and the classification of 3-manifolds», *Notices of the American Mathematical Society* 50 (2003), pp. 1226-1233, y M. T. Anderson, «Geometrization of manifolds via the Ricci flow», *Notices of the American Mathematical Society* 51 (2004), pp. 184-193.
<<

[37] El Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en Madrid en agosto de 2006 (con posterioridad a la edición inglesa de este libro) concedió a Perelman una Medalla Fields, el máximo galardón en el mundo matemático, con lo que se reconocía oficialmente su solución a la conjetura de Poincaré. Sin embargo, Perelman, ausente en el Congreso, rechazó el premio y anunció su intención de abandonar el mundo académico. También el Instituto Clay de Matemáticas ha comunicado su voluntad de conceder a Perelman el premio de un millón de dólares establecido a tal efecto. (*N. del t.*). <<

CARTAS A UNA JOVEN MATEMÁTICA

IAN
STEWART



Lectulandia