Aula 10: Análise de Sinais e Sistemas

Prof. Dr Jahyr Gonçalves Neto

EAD unifev
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Objetivo da aula

Apresentar aos alunos os conceitos da ementa da disciplina de Análise de Sinais e Sistemas

Nesta aula

- Resposta em Frequência

EAD unifev
EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

Transformada de Fourier

Nas séries de Fourier, desenvolvemos uma representação dos sinais periódicos como uma combinação linear de exponenciais complexas relacionadas harmonicamente

Na transformada de Fourier de tempo contínuo, estendemos o conceito para sinais não periódicos. Todos os sinais podem ser representados como uma combinação linear de exponenciais complexas. Para os sinais periódicos as exponenciais complexas que o representam estão relacionados harmonicamente.

Transformada de Fourier

Fourier considera que um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com um período infinito. Mais precisamente, na representação da série de Fourier de um sinal periódico, enquanto o período aumenta, a frequência fundamental diminui e os componentes harmonicamente relacionados tornam-se mais próximos em frequência. À medida que o período se torna infinito, os componentes de frequência se aproximam de modo a formar um conjunto contínuo e a soma da série de Fourier torna-se uma integral

Resposta em Frequência

A resposta em frequência de um sistema LTI fornece a caracterização do comportamento entrada-saída do sistema.

Isso ocorre porque a convolução no domínio do tempo se torna multiplicação no domínio da frequência. A saída do sistema representada no domínio da frequência é obtida multiplicando-se a representação em frequência do sinal de entrada pela resposta em frequência do sistema

Resposta em Frequência

A transformadas de Fourier faz o mapeamento da convolução de 2 sinais, no produto das transformadas de Fourier. H(w), a Transformada de Fourier da resposta ao impulso, é a resposta em frequência

A resposta em frequência H(w) desempenha um papel tão importante na análise de sistemas LIT quanto sua transformada inversa, a resposta ao impulso unitário (h(t)). Como h(t) caracteriza completamente um sistema LIT, o mesmo ocorre com H(w)

Resposta em Frequência

Vimos que a saída y(t) de um sistema LTI de tempo contínuo é igual à convolução da entrada x(t) com a resp ao impulso h(t)

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Aplicando a propriedade da convolução temos

$$Y(\omega) = X(\omega)\,H(\omega) \quad \therefore \quad H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

Exemplo

1) A saída de um sistema em resposta a uma entrada $x(t) = e^{-2t}u(t)$ é $y(t)$ $e^{-t}u(t)$. Encontre a resposta em frequência e a resposta ao impulso

Utilizando a tabela:

Sinal		Transformada
$e^{-at}u(t)$	=	$\frac{1}{j\omega + a}$
$\delta(t)$	=	1

fazemos as transformadas:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Exemplo

1) Achando a resposta em frequência:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega+1}}{\frac{1}{j\omega+2}} = \frac{1}{j\omega+1} \cdot j\omega+2 = \frac{j\omega+2}{j\omega+1}$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega+2}{j\omega+1}$$

Podemos reescrever como

$$H(\omega) = \frac{j\omega+1}{j\omega+1} + \frac{1}{j\omega+1} = 1 + \frac{1}{j\omega+1}$$

Exemplo

1) Fazendo a transformada inversa temos a resposta ao impulso h(t):

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

Sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

As equações diferenciais são representadas por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (1)$$

Vamos considerar a questão de determinar a resposta em frequência desses sistemas LIT

Sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Considere um sistema LIT caracterizado por:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$

sendo $Y(\omega)$, $X(j\omega)$ e $H(j\omega)$ as transformadas de Fourier da saída $y(t)$ da entrada $x(t)$ e da resp. ao impulso $h(t)$

Sistemas caracterizados por equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

Fazendo a transformada de Fourier da equação 1 temos:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

Exemplo

2) Considere um sistema LIT estável caracterizado pela equação diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t) \quad \text{com } a>0$$

Pelo teorema da diferenciação temos que:

$$\boxed{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n X(j\omega).}$$

$$j\omega\,(Y(j\omega)) + a\,Y(j\omega) = X(j\omega)$$

Exemplo

2)

$$j\omega(Y(j\omega)) + aY(j\omega) = X(j\omega)$$

Desta forma, temos a resposta em frequência H(jw)

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{j\omega + a} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

Fazendo a transformada inversa: $h(t) = e^{-at}u(t)$

Exercícios

1) Ache a resposta em frequência H(w) e a resposta ao impulso h(t) para:

$$x(t) = e^{-6t}u(t) \quad e \quad y(t)e^{-4t}u(t)$$

2) Dada a transformada $(jw+2)Y(w) = (1+jw)X(w)$ ache H(w) e h(t).

Exercícios

3) Considere um sistema LIT causal com resposta em frequência $H(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega + 3}$. Para uma entrada em particular $x(t)$ temos a saída $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$. Determine $x(t)$

Exercícios

4) Considere um sistema LIT estável caracterizado pela equação diferencial

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

Ache a resposta em frequência H(jw).

5) Considere um sistema LIT estável caracterizado pela equação diferencial. Ache H(jw) e h(t)

$$y'(t) + 4y(t) = x'(t) + 3x(t)$$

Referências

Haykin, S. e Van Veen, B. Sinais e sistemas. Porto Alegre: Bookman, 2002.

Carlson, G. E. Signal and linear system analysis. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

Hsu, H. Sinais e sistemas. Porto Alegre: Bookman, 2004.

Oppenheim, A. V. e Willsky, A. S. Sinais e Sistemas. 2ª ed. Ed. Pearson