INFORME ACADEMICO: INTEGRALES DEFINIDAS Y APLICACIONES

INTEGRANTES:

MARÍA VICTORIA ARTEAGA REVELO

KAROL ISABELLA CABRERA PANTOJA

OSCAR ALEJANDRO TIMARAN MELO

ANDRES CAMILO MAYA ROSERO

DOCENTE: YESSICA ÑAÑES

UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA CAMPUS PASTO

INGENIERIA DE SOFTWARE

CÁLCULO INTEGRAL

2025

INTRODUCCIÓN

Para entender el cálculo integral, es útil mirar un poco hacia su origen. Aunque sus bases se pueden rastrear hasta la antigua Grecia, con matemáticos que exploraron ideas sobre áreas y proporciones, fue en el siglo XVIII, conocido como el Siglo de las Luces, cuando realmente tomó forma. Grandes pensadores de la época, tanto matemáticos como filósofos, desarrollaron y difundieron los fundamentos del cálculo integral a través de libros y teorías que marcaron un antes y un después en las matemáticas.

El cálculo integral se basa en sumar cantidades infinitamente pequeñas y en el concepto de límite. Gracias a esto, se pueden calcular áreas bajo curvas, volúmenes de cuerpos, longitudes de trayectorias, centros de masa y más. Tiene aplicaciones en una gran variedad de campos: física, biología, economía, estadística e ingeniería. Es especialmente útil para analizar fenómenos continuos y sistemas dinámicos, como el flujo de líquidos, el crecimiento de poblaciones o el comportamiento de fuerzas físicas.

En el caso de la ingeniería de software, el cálculo integral también tiene un papel importante. Permite modelar el uso continuo de recursos, simular cargas variables en servidores o analizar el rendimiento de algoritmos en situaciones cambiantes. En este trabajo se abordaron estos temas a través de problemas prácticos como sumas de Riemann, áreas entre curvas y volúmenes de sólidos de revolución. Esto no solo permitió aplicar conceptos matemáticos a situaciones reales del desarrollo de software, sino que también ayudó a afianzar habilidades teóricas y prácticas esenciales para nuestra formación profesional.

SITUACIÓN

A continuación, se expone el modelo matemático que servirá de base para el desarrollo de este informe, junto con el planteamiento de una aplicación del cálculo integral en situaciones cotidianas, con un enfoque orientado al desarrollo de software.

Modelo matemático

I. **Sumas de Riemann:** Estas son un método numérico que se utiliza para aproximar el valor de una integral definida, es decir, el área bajo una curva sobre un intervalo $[a, b]$. Consiste en dividir el intervalo en subintervalos pequeños y sumar el área de rectángulos que se forman debajo o encima de la función evaluada.

Fórmula:

$$\boldsymbol{S = \sum_{i=1}^{n} f(xi^{*}) * \Delta x}$$

Donde:

- $\sum_{i=1}^{n}$: Es la sumatoria que indica que se están sumando n términos, uno por cada subintervalo en los que se ha dividido $[a, b]$.
- $f(xi^{*})$: Es el valor de la función $f(x)$ evaluada en ese punto.
- xi^{*}: Representa un punto arbitrario dentro del subintervalo $[xi - 1, xi]$.
- n: Es el número de subintervalos (rectángulos) en los que se divide $[a, b]$.
- $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ Es la longitud de igual tamaño de cada subintervalo.

Existen tres tipos de sumas de Riemann, las cuales dependen del punto xi^*.

- Suma por la derecha: se toma la formula, $xi^* = xi - 1$.
- Suma por la izquierda: se toma la formula, $xi^* = xi$.
- Suma en el medio: Se toma la formula, $xi^* = \frac{xi-1+zi}{2}$.

II. Área entre curvas: Esta es una aplicación directa del cálculo integral el cual permite determinar el área de la región encerrada entre dos funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$. Este cálculo se basa en integrar la diferencia entre dos funciones a lo largo un intervalo dado.

Fórmula:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

Donde:

- $f(x)$: Es la función superior, es decir, la que se encuentra por encima de la otra en el intervalo considerado.
- $g(x)$: Es la función inferior, ubicada por debajo de $f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$.
- $[a, b]$: Es el intervalo de integración, es decir, los límites donde se encuentra la región encerrada entre las curvas.
- $f(x) - g(x)$: Representa la distancia vertical entre las funciones en cada punto x.

Dado el caso de que se espere encontrar el área entre curvas respecto al eje "y", se hará uso de la siguiente formula.

$$\boldsymbol{A = \int_{a}^{b} [f(y) - g(y)]dy}$$

Donde $f(y)$ y $g(y)$ están expresadas en términos de "y".

III. Volumen de solidos de revolución: El volumen de solidos de revolución es una aplicación del cálculo integral la cual permite encontrar el volumen generado al rotar una curva alrededor de un eje (en este caso el eje "x" o el eje "y"). Existen diferentes métodos para encontrar el volumen, pero en este informe solo se va a utilizar el siguiente metodo.

- **Método del disco:** Al girar una función $f(x)$ continua y no negativa alrededor del eje x en el intervalo $[a, b]$, el volumen del solido generado se calcula mediante la formula del disco.

Fórmula:

$$\boldsymbol{V = \pi \int_{a}^{bf} [f(x)]^2 \, dx}$$

Donde:

- $f(x)$: Representa el radio del disco en cada punto x.
- $[f(x)]^2$: Es el área del círculo en ese punto.

- $\boldsymbol{\pi}$: Es la constante que aparece por la fórmula del área del circulo ($A = \pi r^2$).

Situación aplicada a la ingeniería de software

Planteamiento del problema: En una empresa de desarrollo de software, se está evaluando el rendimiento de dos algoritmos para la ejecución de procesos en segundo plano dentro de una aplicación móvil. Ambos algoritmos han sido probados para diferentes niveles de carga (número de tareas realizadas de manera simultánea), y se ha medido el tiempo de respuesta promedio (en milisegundos) como función del número de tareas x.

Se modelaron los tiempos con dos funciones cuadráticas. Se quiere calcular el área entre ambas funciones en el intervalo donde se interceptan, para obtener la diferencia acumulada de rendimiento entre los dos algoritmos. Para esto se tienen las funciones:

- Algoritmo A: $f(x) = x^2 - 4x + 5$
- Algoritmo B: $g(x) = -x^2 + 8x - 5$

ANALISIS

A continuación, se presenta el desarrollo del modelo matemático para los ejercicios planteados en el documento guía y la situación aplicada en la vida cotidiana dentro del campo de la ingeniería de software.

I. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 + \frac{1}{2}x$ con $-1 \leq x \leq 7$, con seis subintervalos, tomando los puntos externos de la izquierda como los puntos muestra.

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$

$$\int_{-1}^{7} 3 + \frac{1}{2}x\,dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Supongamos que n = 6, entonces el ancho de cada intervalo es:

$$\Delta x = \frac{7-(-1)}{6} = \frac{4}{3}$$

Los puntos de división serían

$$x_0 = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{5}{3}$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 = \frac{13}{3}$$

$$x_5 = \frac{17}{3}$$

$$x_6 = 7$$

La altura de cada rectángulo es f(xi), donde xi es el punto medio o extremo de cada intervalo.

Podemos calcular los puntos extremos izquierdos:

$$S = \sum f(xi)\Delta x$$

$$= \left(f(-1) * \frac{4}{3} + f\left(\frac{1}{3}\right) * \frac{4}{3} + f\left(\frac{5}{3}\right) * \frac{4}{3} + f(3) * \frac{4}{3} + f\left(\frac{13}{3}\right) * \frac{4}{3} + f\left(\frac{17}{3}\right) * \frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(3 + \frac{1}{2}(-1)\right) * \left(\frac{4}{3}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\right) * \left(\frac{4}{3}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right) * \left(\frac{4}{3}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}(3)\right) * \left(\frac{4}{3}\right) +$$
$$\left(3 + \frac{1}{2}\left(\frac{13}{3}\right)\right) * \left(\frac{4}{3}\right) + \left(3 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{3}\right)\right) * \left(\frac{4}{3}\right)$$

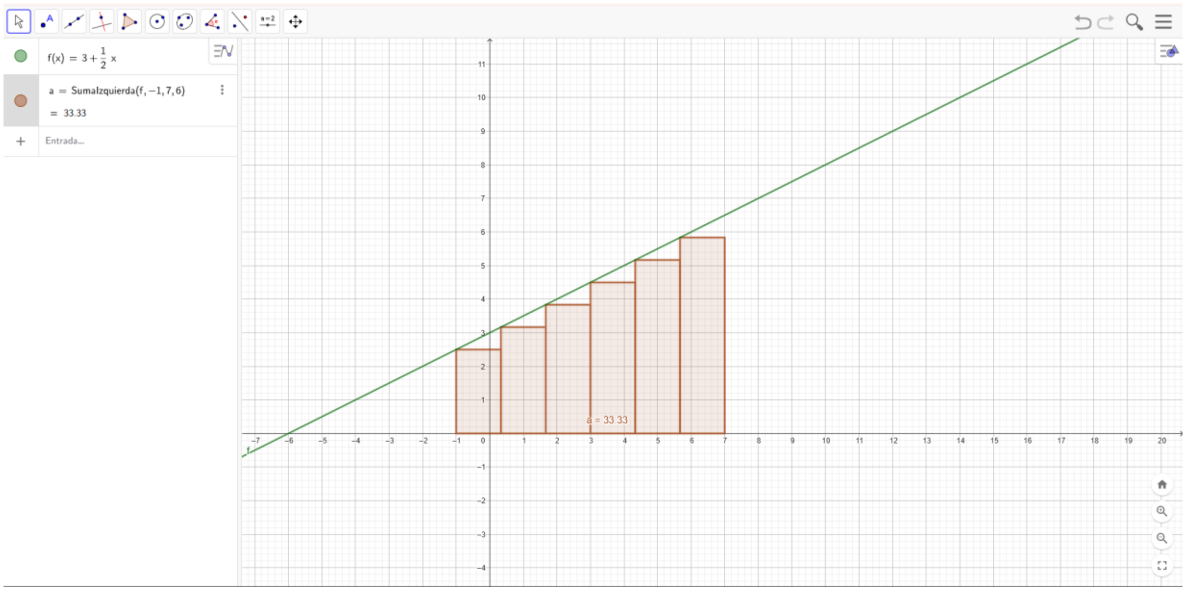
$$= (2{,}5 + 3{,}1667 + 3{,}8333 + 4{,}5 + 5{,}1667 + 5{,}8333) * \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$S = 24{,}9999 * \left(\frac{4}{3}\right)$$

$$S = 33{,}3332$$

Entonces la suma de Riemann es aproximadamente 33,33.

Con ayuda del software GeoGebra, obtenemos la gráfica del área aproximado.



Gráfica 1.

II. La optimización en la base de datos se mide en la convergencia entre la velocidad y la precisión en las revisiones de consultas, estas se miden con $y = \sqrt{3-x}$ y $y = x - 1$, respectivamente. Encuentre el área de la región ($eje\ y$) acotada por las gráficas que representa la máxima optimización en la base de datos.

1. Encontramos puntos de intersección

Igualamos ambas funciones

$\sqrt{3-x} = x - 1$

Elevamos ambos lados al cuadrado

$\sqrt{3-x} = (x-1)^2$

$$\sqrt{3-x} = (x^2 - 2x + 1)$$

Pasamos todo al mismo lado

$$3 - x - x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

2. Resolvemos la ecuación cuadrática

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

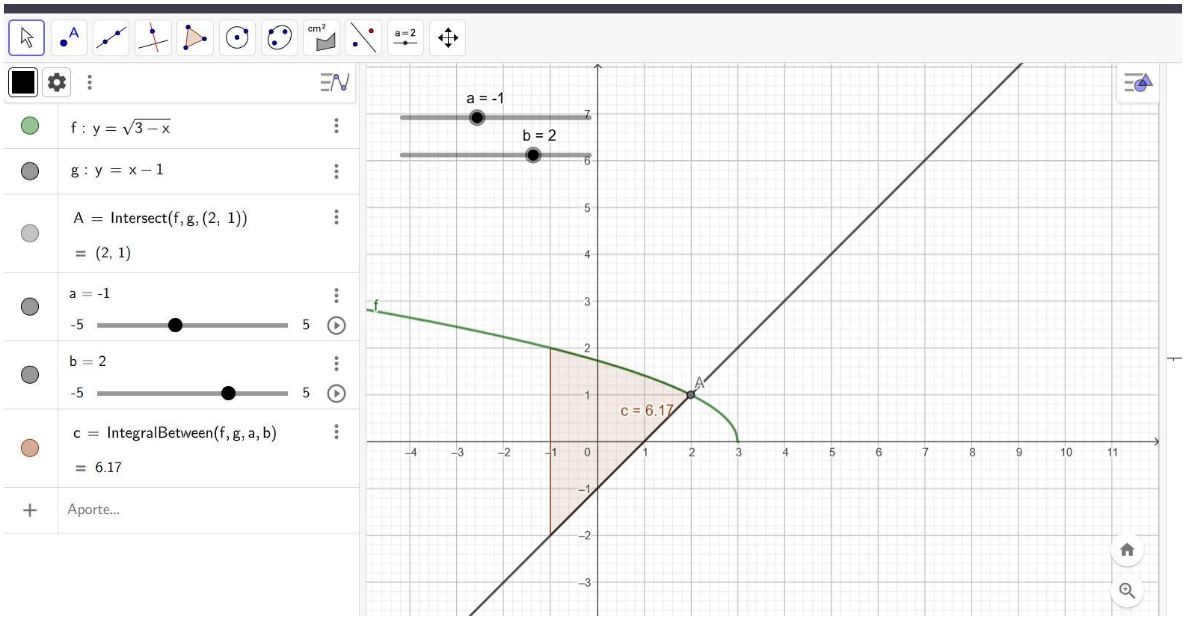
$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Resultados de x

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Con ayuda del software GeoGebra, obtenemos la gráfica de ambas funciones.



Gráfica 2.

Con esta grafica podemos observar que la función superior es $y = \sqrt{3-x}$, entonces:

3. Calculamos el área

$$A = \int_{-1}^{2} \left(\sqrt{3-x} - (\mathrm{x} - 1)\right)$$

Simplificamos la expresión

$$A = \int_{-1}^{2} (\sqrt{3-x} - x + 1)$$

Separamos la integral

$$A = \int_{-1}^{2} \sqrt{3-x}\, dx - \int_{-1}^{2} x\, dx + \int_{-1}^{2} 1\, dx$$

Resolvemos cada una

- Para: $\int_{-1}^{2} \sqrt{3-x}\, dx$

u=3-x |

u=-dx

$$\int \sqrt{u}\,(-du) = -\frac{2}{3} u^{3/2} = -\frac{2}{3}(3-x)^{3/2}$$

- Para: $\int (x-1)^2 dx$

$\int (x-1)^2 dx = \frac{x^2}{2} - x$

4. Expresamos la integral completa

$$A = \left[-\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right]_{-1}^{2}$$

$$A = \left[-\frac{2}{3}(3-x)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{2}$$

4. Evaluamos los limites

$$A = \left(-\frac{2}{3}(3-2)^{3/2} - \frac{(2)^2}{2} + 2\right) - \left(-\frac{2}{3}\left(3-(-1)\right)^{3/2} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right)$$

$$A = \left(-\frac{2}{3}(1)^{3/2} - 2 + 2\right) - \left(-\frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$A = \frac{37}{6}$$

III. Calcula el volumen del solido generado al girar la región entre la curva $y = e^x, x = 0, y\ x = 1$ alrededor del eje x.

Región delimitada:

$$y = \sin(x)$$

$$x = 0\ eje\ x$$

$$x = \frac{\pi}{2}\ eje\ x$$

Usamos el método de discos alrededor del eje X y su fórmula general

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

Reemplazando tendríamos estos datos, donde:

$$V = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [sen(x)]^2 \ dx$$

Hacemos uso de la identidad trigonométrica:

$$V = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \ dx$$

$$V = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2x)) \, dx$$

Límites

Aquí evaluamos los límites de la ecuación cuando

$$X = \frac{\pi}{2}: \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(x)}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Y cuando:

$$X = 0: 0 - \frac{\sin(0)}{2} = 0$$

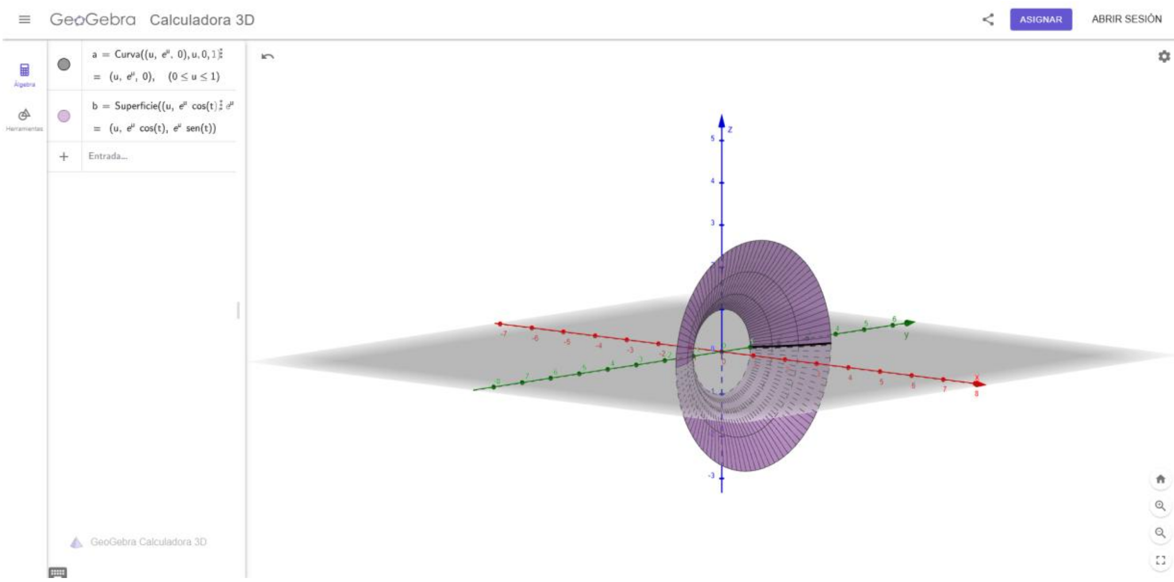
Entonces tenemos:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2x)) \, dx = \frac{\pi}{2}$$

Hacemos la multiplicación por: $\frac{\pi}{2}$

$$V = \frac{\pi}{2} * \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Con la ayuda del software GeoGebra, obtenemos la gráfica de la función para determinar el volumen del sólido de revolución



Gráfica 3.

Entonces tenemos que, este es el volumen de un sólido generado que al girar la región delimitada por $y = \sin(x),\ \ x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2}$

IV. Modelo matemático del planteamiento en la Ing. De software

- Se tienen las funciones, $f(x) = x^2 - 4x + 5,\ \ g(x) = -x^2 + 8x - 5$

Primero igualamos las funciones

$$x^2 - 4x + 5 = -x^2 + 8x - 5$$

$$2x^2 - 12x + 10 = 0$$

Se divide ambos lados entre 2

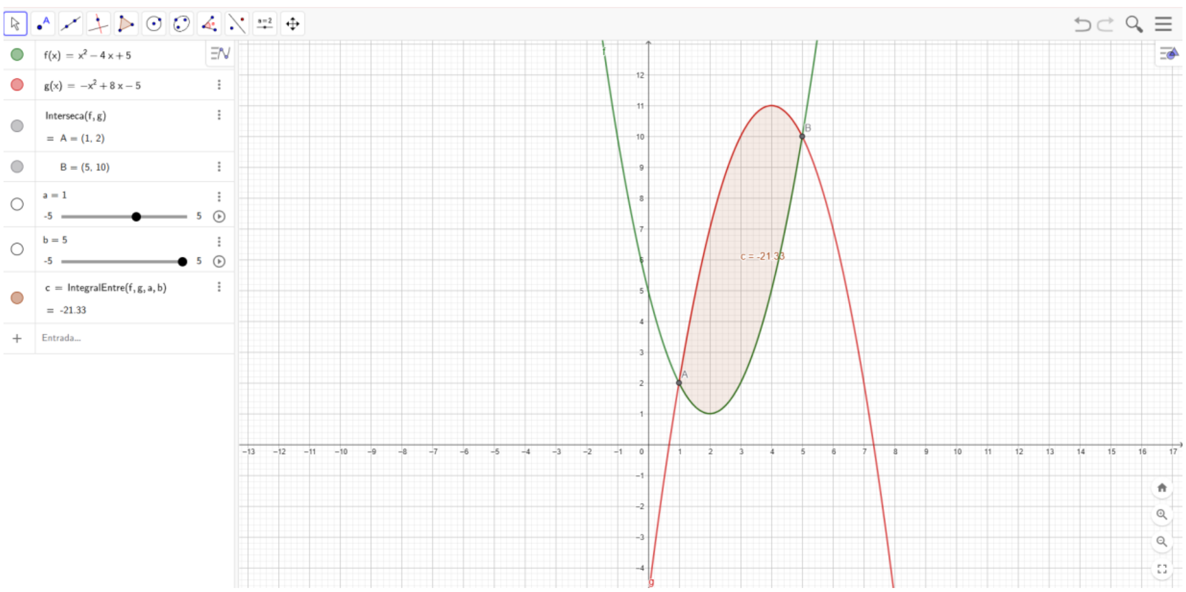
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Ahora factorizamos

$$(x - 5)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 \quad x = 5$$

Con ayuda del software GeoGebra, obtenemos la gráfica de ambas funciones.



Gráfica 4.

Con el análisis grafico obtenemos que la función superior es, $g(x) = -x^2 + 8x - 5$ entonces,

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 8x - 5) - (x^2 - 4x + 5)\, dx$$

$$A = \int_1^5 -2x^2 + 12x - 10\, dx$$

Resolvemos la integral

$$A = \left[-2\frac{x^3}{3} + 6x^2 - 10x \right]_1^5$$

Evaluamos en cada uno de los extremos del intervalo

$$A = \left(-2\frac{(5)^3}{3} + 6(5)^2 - 10(5) \right) - \left(-2\frac{(1)^3}{3} + 6(1)^2 - 10(1) \right)$$

$$A = \left(-\frac{250}{3} + 150 - 50 \right) - \left(-\frac{2}{3} + 6 - 10 \right)$$

$$A = \left(-\frac{250}{3} + 100 \right) - \left(-\frac{2}{3} - 4 \right)$$

$$A = -\frac{248}{3} + 104$$

$$A = -\frac{248 + 312}{3} = \frac{64}{3} = 21.33$$

El cálculo del área entre las funciones que modelan el tiempo de respuesta de los dos algoritmos permitió conocer la diferencia acumulada de rendimiento entre ellos en el intervalo de carga de trabajo de 1 a 5 de manera simultánea. El resultado, en unidades cuadradas (aproximadamente 21.33), indica que el Algoritmo B fue más eficiente que el Algoritmo A en ese rango. Esta aplicación del cálculo integral demuestra su utilidad en la ingeniería de software para tomar decisiones informadas al comparar soluciones en función de su comportamiento a lo largo del tiempo.

CONCLUCIONES

Tras este recorrido por curvas, áreas, sumas de Riemann y sólidos de revolución, podemos concluir que el cálculo integral no solo representa un desafío académico con funciones complejas, sino que también constituye una herramienta fundamental para interpretar fenómenos cotidianos en ingeniería de software, como el consumo de recursos en un servidor o la gestión de la carga de usuarios en un sistema.

De manera similar a un desarrollador que encuentra una solución inesperada al presentar su problema a un profesor, hemos comprendido que las integrales revelan información más profunda de lo que parece a simple vista. Son instrumentos esenciales para cuantificar lo invisible, permitiendo calcular el área "bajo la curva", tal como quien intenta estimar la cantidad de café en una taza sin remover la tapa.

El análisis de funciones mediante GeoGebra resultó comparable a la creación de una aplicación: requiere entender la lógica, trazar caminos (gráficas) y verificar que todo funcione correctamente, incluso si ello implica realizar derivaciones manuales para asegurar la precisión. Así, aprendimos que integrar no es simplemente sumar infinitamente, sino aplicar paciencia y método.

En resumen, este informe nos enseñó que el cálculo integral es el soporte silencioso detrás de muchos procesos en ingeniería de software. Y aunque a veces resolver estas integrales pueda parecer tan complejo como explicar el trabajo de un ingeniero de software, al final comprendimos que todo se reduce a modelar, optimizar y resolver.

BIBLIOGRAFIA

- Stewart, J. (2018). *Cálculo de una variable*. Cengage Learning.
- Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2019). *Cálculo multivariable*. Wiley.
- Universidad Cooperativa de Colombia (2025). *Guía de trabajo final: Cálculo Integral*.
- GeoGebra, Desmos, y Python — nuestros santos patronos durante este viacrucis académico

LINK DIAPOSITIVAS Y VIDEO

https://drive.google.com/file/d/1dOy4F_BnQgrM2wrZn1nHBb4DR0o1v4Gj/view?usp=sharing