Ejercicios Guía 1 - ALC

Vic

Ejercicio 1

Voy a resolver primero los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, utilizando el ***método de eliminación de Gauss.***

a)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 2 - x_4 \\ -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 = 9 \quad &\Rightarrow \quad -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \\ -5x_2 - 5x_4 = -5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 + x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_4 \\ x_1 + (1 - x_4) - 2(2 - x_4) + x_4 = -2 & \\ x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 = -2 & \\ x_1 - 3 + 2x_4 = -2 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2x_4 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ 1 - x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
x_3 + x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -x_4 \\
-5x_2 + 7(-x_4) + 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -5x_2 - 5x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_4 \\
x_1 + (-x_4) - 2(-x_4) + x_4 = 0 & \\
x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 = 0 & \\
x_1 + 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2x_4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

b)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La última fila indica que el sistema es incompatible, ya que $0 = -1$ es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible**.

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora , despejamos las variables comenzando desde la segunda fila hacia la primera:

$$-4x_2 + 3x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x_2 = -3x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{4}x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 + \left(\frac{3}{4}x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 & \\
x_1 + x_3 + x_5 + \frac{3}{4}x_4 - 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_3 + x_5 - \frac{5}{4}x_4 = 0 \\
x_1 = -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4 &
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

c)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3-F_1]{iF_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & i-1 & -i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$-2ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$(1-i)x_2 + ix_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad (1-i)x_2 = -1 \quad \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad ix_1 - (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1$$

$$ix_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$ix_1 + 1 + i = -1 \quad \Rightarrow \quad ix_1 = -1 - i - 1 = -2 - i \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-2-i}{i} =$$

$$\frac{(-2-i)(-i)}{i(-i)} = \frac{2i+i^2}{1} = \frac{2i-1}{1} = -1 + 2i$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1+2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3-F_1]{iF_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & i-1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$-2ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$(1-i)x_2 + ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-i)x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

$$ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad ix_1 - (1+i)(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad ix_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es la trivial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

a)

Primero empiezo triangularizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora despejo la última fila:

$$(k-1)x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{k-1} \quad \text{si } k \neq 1$$

pues si k = 1, la ecuación no tiene solución, me quedaría que 1=0 y eso es ABS.

Ahora sigo con la segunda fila:

$$(1+k)x_2 + (k^2-1)x_3 = 0$$

Que valor de k hace que 1 + k=0? k = -1. Entonces, si k = -1:

$$0 + ((-1)^2 - 1)x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Por lo tanto, para k = -1 el sistema tiene infinitas soluciones con x_2 como parámetro libre.

Por otro lado, para que el sistema tenga solución única, necesito que k no sea ni 1 ni -1.

b)

Triangulo la matriz homogénea:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & k^2 & 0 \\ 1 & k & k-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Si o si, para resolver el sistema y que no sea el resultado trivial, necesito que algun pivote sea cero, pruebo con: $k-1=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$.

$k+1=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$.

Resuelvo para $k=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} 2x_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ x_1 + (0) - x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = 1$ es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Resuelvo para $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} -2x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - (0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = -1$ es:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y - z = 0; \; x - y = 0\}$

(b) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{3\times 3} : \; \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^t\}$

(c) $\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3} : \; tr(\boldsymbol{A}) = 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : \; x_1 + x_2 - ix_4 = 0, \; ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

a)

tengo x+y-z=0 y x-y=0. Esto forma la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{triangulo}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora despejo las variables desde abajo hacia arriba:

$$\begin{aligned} -2y + z = 0 \quad &\Rightarrow \quad z = 2y \\ x + y - (2y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Verifico que este vector cumple ambas ecuaciones y, por lo tanto, sea un generador del subespacio:

$$x + y - z = 1 + 1 - 2 = 0$$
$$x - y = 1 - 1 = 0$$

Entonces, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un generador del subespacio.

b)

Decir que una matriz A cumple

$$-A^t = A$$

significa que la matriz es **antisimétrica**.

Como A^t denota la traspuesta de A, la igualdad anterior es equivalente a

$$A^t = -A.$$

Esto implica las siguientes propiedades:

- Para todo par de índices i, j se cumple:
$$a_{ij} = -a_{ji}.$$
- Los elementos de la diagonal principal son cero, ya que si $i = j$:
$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0.$$
- La matriz A debe ser cuadrada.

Un ejemplo de matriz antisimétrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su traspuesta es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

y se verifica que

$$A^t = -A.$$

Volviendo al ejercicio, tengo la siguiente matriz genérica de 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

La condición "$-A^t = A$" implica que:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Esto me da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
-a_{11} &= a_{11} = 0 \\
-a_{22} &= a_{22} = 0 \\
-a_{33} &= a_{33} = 0 \\
-a_{21} &= a_{12} \\
-a_{31} &= a_{13} \\
-a_{32} &= a_{23}
\end{aligned}
$$

Resolviendo este sistema, obtengo:

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix},
$$

donde $a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$ son parámetros libres. Entonces, mis generadores del subespacio son:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

c)

Es un subespacio de las matrices 3×3 donde la única restricción es que la suma de la diagonal sea cero.

Una matriz genérica de 3x3 es:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},
$$

La condición ”la suma de la diagonal es cero” implica que:

$$
a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{33} = -a_{11} - a_{22}
$$

Por lo tanto, la matriz queda de la siguiente forma:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix},
$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R}$ son parámetros libres. Entonces, mis generadores del subespacio son:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{12} \quad E_{13}, \quad E_{21}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{23}, \quad E_{31}, \quad E_{32}
$$

d)

Sea el subespacio de $\mathbb{C}^4$ definido por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ i & 1+i & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - iF_1]{}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

Entonces, despejo las variables desde abajo hacia arriba:

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_3 - x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = x_3 + x_4 \\
x_1 + (x_3 + x_4) - ix_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_3 + x_4 - ix_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_3 - x_4 + ix_4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$
\begin{pmatrix} -x_3 - x_4 + ix_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}
$$

y los generadores del subespacio son:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - ix_4 &= -1 + 1 + 1 - i(0) = 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 &= i(-1) + (1+i)(1) - (1) = -i + 1 + i - 1 = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - ix_4 &= (-1+i) + 1 + 0 - i(1) = -1 + i + 1 - i = 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 &= i(-1+i) + (1+i)(1) - 0 = -i + i^2 + 1 + i = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Sea $S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

(b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

(c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

a)

Para determinar si el vector (2,1,3,5) ϵ S=$\langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle$, necesitamos verificar si existen escalares a, b y c tales que:

$$a(1,-1,2,1) + b(3,1,0,-1) + c(1,1,-1,-1) = (2,1,3,5)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 2 \quad (1) \\ -a + b + c &= 1 \quad (2) \\ 2a + 0b - c &= 3 \quad (3) \\ a - b - c &= 5 \quad (4) \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones. Sumando (2) y (4):

$$\begin{aligned} (-a + b + c) + (a - b - c) &= 1 + 5 \\ 0 &= 6 \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, lo que significa que no existen tales escalares a, b y c. Por lo tanto, el vector (2,1,3,5) no pertenece al subespacio S.

b)

Para determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$, necesitamos verificar si cualquier vector que satisface la ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores generadores de S. Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Entonces, podemos expresar x_1 en términos de x_2 y x_3:

$$x_1 = x_2 + x_3$$

Queremos encontrar si existen escalares a, b y c tales que:

$$a(1,-1,2,1) + b(3,1,0,-1) + c(1,1,-1,-1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= x_1 \quad (1) \\ -a + b + c &= x_2 \quad (2) \\ 2a + 0b - c &= x_3 \quad (3) \\ a - b - c &= x_4 \quad (4) \end{aligned}$$

Sustituyendo x_1 en (1):

$$a + 3b + c = x_2 + x_3 \quad (1')$$

Sumando (2) y (4):

$$\begin{aligned} (-a + b + c) + (a - b - c) &= x_2 + x_4 \\ 0 &= x_2 + x_4 \end{aligned}$$

Esto implica que $x_4 = -x_2$. Por lo tanto, no todos los vectores que satisfacen $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ pueden ser expresados como combinaciones lineales de los vectores generadores de S. Por lo tanto, $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \not\subseteq S$. Esto se debe a que x_4 se supone que no tiene ninguna restricción y es libre, lo que se contradice con lo que encontramos.

c)

Para determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, necesitamos verificar si cualquier combinación lineal de los vectores generadores de S satisface la ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Sea $x = a(1, -1, 2, 1) + b(3, 1, 0, -1) + c(1, 1, -1, -1)$ para algunos escalares a, b y c. Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + 3b + c \\ x_2 &= -a + b + c \\ x_3 &= 2a + 0b - c \end{aligned}$$

Calculamos $x_1 - x_2 - x_3$:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= (a + 3b + c) - (-a + b + c) - (2a + 0b - c) \\ &= a + 3b + c + a - b - c - 2a - 0b + c \\ &= (a + a - 2a) + (3b - b - 0b) + (c - c + c) \\ &= 0 + 2b + c \end{aligned}$$

Para que $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, necesitamos que $2b + c = 0$. Esto significa que no todos los vectores en S satisfacen la ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ a menos que se imponga la restricción adicional de que $c = -2b$. Por lo tanto, $S \not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Si hubiera dado 0 en lugar de $2b + c$ en el cálculo, entonces hubiera sido cierto.

Ejercicio 7. Hallar un sistema de generadores para $S \cap T$ y para $S + T$ como subespacios de V, y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$ y $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$ y $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$ $T = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$.

(d) $V = \mathbb{R}^{3\times3}$, $S = \{(x_{ij}) \,/\, x_{ij} = x_{ji}\ \forall\, i, j\}$ $T = \{(x_{ij}) \,/\, x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$.

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $S = \langle(i, 1, 3 - i), (4, 1 - i, 0)\rangle$ $T = \{x \in \mathbb{C}^3 : (1 - i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$.

a)

Voy a buscar los generadores de $S \cap T$: Busco los generadores de S: S = { (x,y,z): 3x-2y+z=0} $\rightarrow z = 2y - 3x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Los generadores de S son:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Busco los generadores de T: T = { (x,y,z): x+z=0} $\rightarrow z = -x$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\-x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Los generadores de T son:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Entonces, para encontrar $S \cap T$, busco los vectores que pueden ser expresados como combinaciones lineales de los generadores de S y T:

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= c \quad (1)\\ b &= d \quad (2)\\ -3a + 2b &= -c \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\begin{aligned} -3c + 2d &= -c\\ -2c + 2d &= 0\\ -2c &= -2d\\ c &= d \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos dependen de un solo parámetro, llamémoslo t: $vector = t(1, 0, -3) + t(0, 1, 2) = t(1, 1, -1)$
Eso te dice inmediatamente que: $S \cap T = \langle(1, 1, -1)\rangle$

Voy a buscar los generadores de $S + T$: Para encontrar $S + T$, combinamos los generadores de S y T:

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = a + c,\\ x_2 = b + d,\\ x_3 = -3a + 2b - c. \end{cases}$$

Entonces, la solución general es:

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+c\\b+d\\-3a+2b-c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

los generadores de $S + T$ pueden tomarse como:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

b)

Tengo los subespacios:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$$
$$T = \langle (1, 1, 0), (5, 7, 3) \rangle$$

Primero, encuentro los generadores de S: De la ecuación $x - y = 0$, deduzco que $y = x$. Sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$3x - 2x + z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$$

Por lo tanto, los vectores en S pueden expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Entonces, el generador de S es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para encontrar $S \cap T$, busco los vectores que pueden ser expresados como combinaciones lineales de los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= c + 5d \quad (1) \\ a &= c + 7d \quad (2) \\ -a &= 0 + 3d \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$\begin{aligned} c + 5d &= c + 7d \\ 5d &= 7d \\ 0 &= 2d \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 0$ en (1):

$$\begin{aligned} a &= c + 5(0) \\ a &= c \end{aligned}$$

Sustituyendo $d = 0$ en (3):

$$\begin{aligned} -a &= 0 + 3(0) \\ -a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a = 0$ y $c = 0$. Esto implica que el único vector en $S \cap T$ es el vector cero. Por lo tanto, $S \cap T = \{(0, 0, 0)\}$.

Luego busco los generadores de $S + T$: Para encontrar $S + T$, combinamos los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Y verifico que son linealmente independientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

Como los tres vectores son linealmente independientes, los generadores de $S+T$ son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

(a) $\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle$.

(b) $S \cap T = \langle(0,1,1)\rangle$ siendo $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle(1,k,2),(-1,2,k)\rangle$.

a)

sea U=$\langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle = \langle(1,k,2k),(-1,-1,k^2-2),(1,1,k)\rangle$=W

Como estamos en $\mathbb{R}^3$, voy a generar la base del subespacio de la derecha, U. U es un subespacio de dimensión 2, o sea un plano por el origen. Todo plano por el origen en $\mathbb{R}^3$ puede ser definido por una ecuación lineal de la forma: U=$\{X \epsilon \mathbb{R}^3 | n * X = 0\}$ donde n es un vector normal al plano U (ORTOGONAL A LOS GENERADORES DE U).

Entonces, busco el vector normal n:

$$U = \langle(-2,1,6),(3,0,-8)\rangle$$

Calculamos un vector normal a U mediante el producto cruz:

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante:

$$n = \mathbf{i}(1 \cdot (-8) - 6 \cdot 0) - \mathbf{j}((-2) \cdot (-8) - 6 \cdot 3) + \mathbf{k}((-2) \cdot 0 - 1 \cdot 3)$$

Un vector normal a U es:

$$n = (-8,\ 2,\ -3)$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana del plano U es:

$$n \cdot (x,y,z) = 0$$

es decir:

$$-8x + 2y - 3z = 0$$

o, de manera equivalente:

$$8x - 2y + 3z = 0.$$

Como U = W busco que los generadores de W cumplan esta ecuación:

$$\begin{aligned} (1) \quad 8(1) - 2(k) + 3(2k) &= 0 \\ 8 - 2k + 6k &= 0 \\ 8 + 4k &= 0 \\ 4k &= -8 \\ k &= -2 \end{aligned}$$

Ahora verifico con el segundo generador:

$$
\begin{aligned}
(2) \quad 8(-1)-2(-1)+3(k^2-2)&=0\\
-8+2+3(k^2-2)&=0\\
-6+3k^2-6&=0\\
3k^2-12&=0\\
3k^2&=12\\
k^2&=4\\
k&=\pm 2
\end{aligned}
$$

Como ya habíamos obtenido $k=-2$ del primer generador, tomamos $k=-2$ como la solución final. Y verifico con el tercer generador:

$$
\begin{aligned}
(3) \quad 8(1)-2(1)+3(k)&=0\\
8-2+3(-2)&=0\\
6-6&=0\\
0&=0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de k que satisface la igualdad $U=W$ es:

$$k=-2.$$

b)

Teniendo que $S\cap T=\langle(0,1,1)\rangle$, siendo S=$\{x\epsilon\mathbb{R} : x_1+x_2-x_3=0\}$ y T= $\langle(1,k,2),(-1,2,k)\rangle$ Entonces voy a buscar el valor de K para que $(0,1,1)\epsilon T$ y que además satisfaga la ecuación de S. Primero verifico que $(0,1,1)$ satisface la ecuación de S

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3&=0\\
0+1-1&=0\\
0&=0
\end{aligned}
$$

Ahora, busco si existen escalares a y b tales que:

$$a(1,k,2)+b(-1,2,k)=(0,1,1)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
a-b&=0 \quad (1)\\
ak+2b&=1 \quad (2)\\
2a+bk&=1 \quad (3)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$
\begin{aligned}
ak+2a&=1 \quad (2')\\
2a+ak&=1 \quad (3')
\end{aligned}
$$

Ambas ecuaciones (2') y (3') son idénticas, por lo que podemos resolver cualquiera de ellas. Tomemos (2'):

$$
\begin{aligned}
a(k+2)&=1\\
a&=\frac{1}{k+2}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow k\neq -2$ para que a esté definido.
Sustituyendo el valor de a en (1):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k+2}-b&=0\\
b&=\frac{1}{k+2}
\end{aligned}
$$

Ahora, sustituimos los valores de a y b en (3) para encontrar k:

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}\right)k &= 1\\
\frac{2+k}{k+2} &= 1\\
2+k &= k+2\\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Además, hay que verificar que no ocurra que $T \subseteq S$, por lo que verifico si los generadores de T cumplen la ecuación de S: Para el primer generador $(1, k, 2)$:

$$
\begin{aligned}
1+k-2 &= 0\\
k-1 &= 0\\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Para el segundo generador $(-1, 2, k)$:

$$
\begin{aligned}
-1+2-k &= 0\\
1-k &= 0\\
k &= 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el valor de k que satisface la condición $S \cap T = \langle(0,1,1)\rangle$ es:

$$\forall k \in \mathbb{R}, k \neq -2 \text{ y } k \neq 1$$

Ejercicio 9

Sean S y T subespacios de un espacio vectorial V. Demostrar que: $S \cup T$ es un subespacio de V si y sólo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Proof. ($\Rightarrow$) Supongamos que $S \cup T$ es un subespacio de V. Para demostrar que $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$, consideremos dos casos:

- Si $S \subseteq T$, entonces la afirmación es verdadera.
- Si $T \subseteq S$, entonces la afirmación también es verdadera.
- Si ni $S \subseteq T$ ni $T \subseteq S$, entonces existen elementos $s \in S$ y $t \in T$ tales que $s \notin T$ y $t \notin S$.
  Consideremos el vector $s+t$. Dado que $S \cup T$ es un subespacio, $s+t$ debe pertenecer a $S \cup T$. Sin embargo, si $s+t \in S$, entonces $t = (s+t) - s$ también pertenecería a S, lo cual es una contradicción.
  De manera similar, si $s+t \in T$, entonces $s = (s+t) - t$ también pertenecería a T, lo cual también es una contradicción. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

Por lo tanto, si $S \cup T$ es un subespacio, entonces $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $S \subseteq T$. Entonces, $S \cup T = T$, que es un subespacio de V. De manera similar, si $T \subseteq S$, entonces $S \cup T = S$, que también es un subespacio de V. Por lo tanto, en ambos casos, $S \cup T$ es un subespacio de V. □

Ejercicio 10

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son linealmente independientes sobre K. Cuando no lo sean, escribir a uno de ellos como combinación lineal de los otros.

(a) $\{(1,4,-1,3)\,,\,(2,1,-3,-1)\,,\,(0,2,1,-5)\}$ en $\mathbb{R}^4$, para $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(1-i, i)\,,\,(2,-1+i)\}$ en $\mathbb{C}^2$, para $K = \mathbb{C}$.

a)

Verifico que sean LI:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+\frac{2}{7}F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & -\frac{59}{7} \end{pmatrix}$$

Como las tres filas son no nulas, los vectores son linealmente independientes.

b)

Ahora vuelvo a probarlo con los vectores dados en $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & i \\ 2 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & -1-i \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+\frac{2i}{1-i}F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como hay una fila nula, los vectores son linealmente dependientes.

Ejercicio 11

Ejercicio 11. Extraer una base de S de cada uno de los siguientes sistemas de generadores y hallar la dimensión de S. Extender la base de S a una base del espacio vectorial correspondiente.

(a) $S = \langle (1,1,2), (1,3,5), (1,1,4), (5,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3,\ \ K = \mathbb{R}$

(b) $S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$, $K = \mathbb{C}$

a)

Para extraer una base de S $= \langle (1,1,2), (1,3,5), (1,1,4), (5,1,1) \rangle$, formo una matriz con los vectores como filas y luego la llevo a su forma escalonada reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-F_1} F_4 - 5F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+2F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas no nulas de la matriz escalonada forman una base de S:

$$\mathcal{B}_S = \{(1,1,2), (0,2,3), (0,0,2)\}.$$

b)

S=$\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ Formo una matriz con los vectores como filas y luego la llevo a su forma escalonada reducida por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_3]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas no nulas de la matriz escalonada forman una base de S:

$$\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejercicio 12

Sean $v_1, ..., v_k \, \epsilon \mathbb{R}^n$, probar que $\{v_1, .., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Proof. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$. Esto significa que la única solución a la ecuación:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k = 0$$

donde $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$, es la solución trivial $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$. Ahora, consideremos la misma ecuación pero con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_kv_k = 0$$

donde $b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{C}$. Si esta ecuación tiene una solución no trivial, entonces al separar las partes reales e imaginarias de los coeficientes b_i, podemos escribir:

$$(c_1 + id_1)v_1 + (c_2 + id_2)v_2 + ... + (c_k + id_k)v_k = 0$$

donde $c_i, d_i \in \mathbb{R}$. Esto implica que:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k + i(d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_kv_k) = 0$$

Separando las partes reales e imaginarias, obtenemos dos ecuaciones que deben anularse por separado:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_kv_k = 0 \quad (1)$$

$$d_1v_1 + d_2v_2 + ... + d_kv_k = 0 \quad (2)$$

Dado que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$, las únicas soluciones a (1) y (2) son $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ y $d_1 = d_2 = ... = d_k = 0$. Por lo tanto, $b_1 = b_2 = ... = b_k = 0$, lo que demuestra que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$. Esto significa que la única solución a la ecuación:

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_kv_k = 0$$

donde $b_1, b_2, ..., b_k \in \mathbb{C}$, es la solución trivial $b_1 = b_2 = ... = b_k = 0$. Ahora, consideremos la misma ecuación pero con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k = 0$$

donde $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{R}$. Dado que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, cualquier solución a esta ecuación también es una solución a la ecuación con coeficientes en $\mathbb{C}$. Por lo tanto, si existe una solución no trivial a la ecuación con coeficientes en $\mathbb{R}$, entonces también existiría una solución no trivial a la ecuación con coeficientes en $\mathbb{C}$, lo cual contradice nuestra suposición de que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$. Por lo tanto, la única solución a la ecuación con coeficientes en $\mathbb{R}$ es la solución trivial $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$, lo que demuestra que $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$. □

Ejercicio 13

Ejercicio 14

Ejercicio 15

Ejercicio 16

Ejercicio 17

Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{nxn}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

a)

$S_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es triangular superior}\}$

Proof. Para demostrar que S_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$, debemos verificar que cumple con las tres propiedades de un subespacio vectorial:

- **Cerrado bajo la suma:** Sea $A, B \in S_1$. Entonces, A y B son matrices triangulares superiores. La suma de dos matrices triangulares superiores también es una matriz triangular superior. Por lo tanto, $A + B \in S_1$.
- **Cerrado bajo la multiplicación por un escalar:** Sea $A \in S_1$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, A es una matriz triangular superior. La multiplicación de una matriz triangular superior por un escalar también resulta en una matriz triangular superior. Por lo tanto, $cA \in S_1$.
- **Contiene el vector cero:** La matriz cero es una matriz triangular superior, ya que todos sus elementos son cero. Por lo tanto, la matriz cero pertenece a S_1.
- **Conclusión:** Dado que S_1 cumple con las tres propiedades de un subespacio vectorial, concluimos que S_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

□

b)

$S_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\}$

Proof. Para demostrar que S_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$, debemos verificar que cumple con las tres propiedades de un subespacio vectorial:

- **Cerrado bajo la suma:** Sea $A, B \in S_2$. Entonces, A y B son matrices simétricas. La suma de dos matrices simétricas también es una matriz simétrica. Por lo tanto, $A + B \in S_2$.
- **Cerrado bajo la multiplicación por un escalar:** Sea $A \in S_2$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, A es una matriz simétrica. La multiplicación de una matriz simétrica por un escalar también resulta en una matriz simétrica. Por lo tanto, $cA \in S_2$.
- **Contiene el vector cero:** La matriz cero es una matriz simétrica, ya que todos sus elementos son cero. Por lo tanto, la matriz cero pertenece a S_2.

- **Conclusión:** Dado que S_2 cumple con las tres propiedades de un subespacio vectorial, concluimos que S_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$\square$

Ejercicio 18

Calcular el determinante de A en cada uno de los siguientes casos:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz A es una matriz 4×4 (cuatro filas y cuatro columnas), es una matriz cuadrada. Por lo tanto, podemos calcular el determinante de A. Calculamos el determinante de A utilizando la regla de Sarrus o la expansión por cofactores. Aquí, utilizaremos la expansión por cofactores a lo largo de la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - 0 + 0 + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las matrices 3×3:

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -2(1{\cdot}0-4{\cdot}-2)-3(0{\cdot}0-4{\cdot}1)+(-1)(0{\cdot}-2-1{\cdot}1) = -2(8)-3(-4)+(-1)(-1) = -16+12+1 = -3$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 0(0{\cdot}-2-1{\cdot}1)-(-2)(-1{\cdot}-2-1{\cdot}0)+3(-1{\cdot}1-0{\cdot}0) = 0-(-2)(2)+3(-1) = 0-4-3 = -7$$

Sustituyendo estos valores en la expresión original:

$$\det(A) = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-7) = -3 - 14 = -17$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz A es -17.

b)

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ -1 & 1-i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de B utilizando la regla de Sarrus o la expansión por cofactores. Aquí, utilizaremos la expansión por cofactores a lo largo de la primera fila:

$$\det(B) = i \cdot \det \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 0 + (2+i) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes de las matrices 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (1-i)(-1) - 0 = -1 + i$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1-i \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)(0) - (1-i)(2) = -2 + 2i$$

Sustituyendo estos valores en la expresión original:

$$\det(B) = i(-1+i) + (2+i)(-2+2i)$$

Calculamos cada término:

$$i(-1+i) = -i + i^2 = -i - 1$$

$$(2+i)(-2+2i) = -4 + 4i - 2i + 2i^2 = -4 + 2i - 2 = -6 + 2i$$

Sumando ambos resultados:

$$\det(B) = (-i-1) + (-6+2i) = -7 + i$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz B es $-7 + i$.