

Ejercicios Guía 1 - ALC

Vic

Ejercicio 1

Voy a resolver primero los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, utilizando el **método de eliminación de Gauss**.

a)

Caso no homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & | & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & | & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & | & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2 - x_4 \\ -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 &= 9 \quad \Rightarrow \quad -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \\ -5x_2 - 5x_4 &= -5 \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_4 \\ x_1 + (1 - x_4) - 2(2 - x_4) + x_4 &= -2 \\ x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 3 + 2x_4 &= -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_4 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ 1 - x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

Caso homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & | & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
 x_3 + x_4 &= 0 \Rightarrow x_3 = -x_4 \\
 -5x_2 + 7(-x_4) + 2x_4 &= 0 \Rightarrow -5x_2 - 5x_4 = 0 \Rightarrow x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_4 \\
 x_1 + (-x_4) - 2(-x_4) + x_4 &= 0 \\
 x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 &= 0 \\
 x_1 + 2x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 = -2x_4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

b)

Caso no homogéneo

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \\
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \\
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

La última fila indica que el sistema es incompatible, ya que $0 = -1$ es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible**.

Caso homogéneo

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1} \\
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-2F_2} \\
 &\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la segunda fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
 -4x_2 + 3x_4 &= 0 \Rightarrow -4x_2 = -3x_4 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}x_4 \\
 x_1 + \left(\frac{3}{4}x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\
 x_1 + x_3 + x_5 + \frac{3}{4}x_4 - 2x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_5 - \frac{5}{4}x_4 = 0 \\
 x_1 &= -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

c)

Caso no homogéneo

$$\begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & -1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2i & -1 & | & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{iF_2-F_1 \\ iF_3-F_1}} \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & -1 \\ 0 & 1-i & i & | & -1 \\ 0 & i-1 & -i & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & -1 \\ 0 & 1-i & i & | & -1 \\ 0 & 0 & -2i & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} -2ix_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ (1-i)x_2 + ix_3 &= -1 \Rightarrow (1-i)x_2 = -1 \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \Rightarrow ix_1 - (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1 \\ ix_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} &= -1 \\ ix_1 + 1 + i &= -1 \Rightarrow ix_1 = -1 - i - 1 = -2 - i \Rightarrow x_1 = \frac{-2-i}{i} = \\ \frac{(-2-i)(-i)}{i(-i)} &= \frac{2i+i^2}{1} = \frac{2i-1}{1} = -1 + 2i \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1+2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso homogéneo

$$\begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2i & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{iF_2-F_1 \\ iF_3-F_1}} \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-i & i & | & 0 \\ 0 & i-1 & -i & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} i & -(1+i) & 0 & | & 0 \\ 0 & 1-i & i & | & 0 \\ 0 & 0 & -2i & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} -2ix_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ (1-i)x_2 + ix_3 &= 0 \Rightarrow (1-i)x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ ix_1 - (1+i)x_2 &= 0 \Rightarrow ix_1 - (1+i)(0) = 0 \Rightarrow ix_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es la trivial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 &= -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 &= 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k , resolverlo.

a)

Primero empiezo triangularizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora despejo la última fila:

$$(k-1)x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{k-1} \quad \text{si } k \neq 1$$

pues si $k = 1$, la ecuación no tiene solución, me quedaría que $1=0$ y eso es ABS.

Ahora sigo con la segunda fila:

$$(1+k)x_2 + (k^2-1)x_3 = 0$$

Que valor de k hace que $1+k=0$? $k = -1$. Entonces, si $k = -1$:

$$0 + ((-1)^2 - 1)x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, para $k = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones con x_2 como parámetro libre.

Por otro lado, para que el sistema tenga solución única, necesito que k no sea ni 1 ni -1.

b)

Triangulo la matriz homogénea:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & k^2 & 0 \\ 1 & k & k-2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right)$$

Si o si, para resolver el sistema y que no sea el resultado trivial, necesito que algun pivote sea cero, pruebo con: $k-1=0 \Rightarrow k=1$.

$$k+1=0 \Rightarrow k=-1.$$

Resuelvo para $k = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= 0 &\Rightarrow & x_2 = 0 \\ x_1 + (0) - x_3 &= 0 &\Rightarrow & x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = 1$ es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Resuelvo para $k = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} -2x_3 &= 0 &\Rightarrow & x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - (0) &= 0 &\Rightarrow & x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = -1$ es:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 5

Ejercicio 5. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0, ix_1 + (1 + i)x_2 - x_3 = 0\}$

a)

tengo $x+y-z=0$ y $x-y=0$. Esto forma la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_2 - F_1]{triangulo}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Ahora despejo las variables desde abajo hacia arriba:

$$\begin{aligned} -2y + z &= 0 &\Rightarrow & z = 2y \\ x + y - (2y) &= 0 &\Rightarrow & x - y = 0 &\Rightarrow & x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Verifico que este vector cumple ambas ecuaciones y, por lo tanto, sea un generador del subespacio:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ x - y &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Entonces, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un generador del subespacio.

b)

Decir que una matriz A cumple

$$-A^t = A$$

significa que la matriz es **antisimétrica**.

Como A^t denota la traspuesta de A , la igualdad anterior es equivalente a

$$A^t = -A.$$

Esto implica las siguientes propiedades:

- Para todo par de índices i, j se cumple:

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

- Los elementos de la diagonal principal son cero, ya que si $i = j$:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0.$$

- La matriz A debe ser cuadrada.

Un ejemplo de matriz antisimétrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su traspuesta es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

y se verifica que

$$A^t = -A.$$

Volviendo al ejercicio, tengo la siguiente matriz genérica de 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

La condición " $-A^t = A$ " implica que:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Esto me da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-a_{11} = a_{11} = 0$$

$$-a_{22} = a_{22} = 0$$

$$-a_{33} = a_{33} = 0$$

$$-a_{21} = a_{12}$$

$$-a_{31} = a_{13}$$

$$-a_{32} = a_{23}$$

Resolviendo este sistema, obtengo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$ son parámetros libres. Entonces, mis generadores del subespacio son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$