Ejercicios Guía 1 - ALC

Vic

Ejercicio 1

Voy a resolver primero los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, utilizando el ***método de eliminación de Gauss.***

a)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 2 - x_4 \\ -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 = 9 \quad &\Rightarrow \quad -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \\ -5x_2 - 5x_4 = -5 \quad &\Rightarrow \quad x_2 + x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 - x_4 \\ x_1 + (1 - x_4) - 2(2 - x_4) + x_4 = -2 \\ x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 = -2 \\ x_1 - 3 + 2x_4 = -2 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2x_4 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ 1 - x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
x_3 + x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = -x_4 \\
-5x_2 + 7(-x_4) + 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad -5x_2 - 5x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 + x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_4 \\
x_1 + (-x_4) - 2(-x_4) + x_4 = 0 & \\
x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 = 0 & \\
x_1 + 2x_4 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -2x_4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

b)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

La última fila indica que el sistema es incompatible, ya que $0 = -1$ es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible**.

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora , despejamos las variables comenzando desde la segunda fila hacia la primera:

$$-4x_2 + 3x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x_2 = -3x_4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{4}x_4$$

$$\begin{aligned}
&x_1 + \left(\frac{3}{4}x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\
&x_1 + x_3 + x_5 + \frac{3}{4}x_4 - 2x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_3 + x_5 - \frac{5}{4}x_4 = 0 \\
&x_1 = -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

c)

Caso no homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3-F_1]{iF_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & i-1 & -i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$-2ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$(1-i)x_2 + ix_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad (1-i)x_2 = -1 \quad \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$ix_1 - (1+i)x_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad ix_1 - (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1$$

$$ix_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$ix_1 + 1 + i = -1 \quad \Rightarrow \quad ix_1 = -1 - i - 1 = -2 - i \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-2-i}{i} =$$

$$\frac{(-2-i)(-i)}{i(-i)} = \frac{2i + i^2}{1} = \frac{2i-1}{1} = -1 + 2i$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1+2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso homogéneo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[iF_3-F_1]{iF_2-F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & i-1 & -i & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$-2ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0$$

$$(1-i)x_2 + ix_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-i)x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$$

$$ix_1 - (1+i)x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad ix_1 - (1+i)(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad ix_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es la trivial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

Ejercicio 2. (a) Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 & = & -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 & = & 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de k para los cuales admite solución no trivial. Para esos k, resolverlo.

a)

Primero empiezo triangularizando la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora despejo la última fila:

$$(k-1)x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{k-1} \quad \text{si } k \neq 1$$

pues si k = 1, la ecuación no tiene solución, me quedaría que 1=0 y eso es ABS.

Ahora sigo con la segunda fila:

$$(1+k)x_2 + (k^2-1)x_3 = 0$$

Que valor de k hace que 1 + k=0? k = -1. Entonces, si k = -1:

$$0 + ((-1)^2 - 1)x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Por lo tanto, para k = -1 el sistema tiene infinitas soluciones con x_2 como parámetro libre.

Por otro lado, para que el sistema tenga solución única, necesito que k no sea ni 1 ni -1.

b)

Triangulo la matriz homogénea:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & k^2 & 0 \\ 1 & k & k-2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right)$$

Si o si, para resolver el sistema y que no sea el resultado trivial, necesito que algun pivote sea cero, pruebo con: $k-1=0 \quad \Rightarrow \quad k=1$.

$k+1=0 \quad \Rightarrow \quad k=-1$.

Resuelvo para $k=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2+F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} 2x_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 \\ x_1 + (0) - x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = 1$ es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Resuelvo para $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 + F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} -2x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - (0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para $k = -1$ es:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$