

# Ejercicios Guía 1 - ALC

Vic

## Ejercicio 1

Voy a resolver primero los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, utilizando el **método de eliminación de Gauss**.

a)

### Caso no homogéneo

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \xrightarrow[5F_3-2F_2]{ } \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 2 \Rightarrow x_3 = 2 - x_4 \\ -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 &= 9 \Rightarrow -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \\ -5x_2 - 5x_4 &= -5 \Rightarrow x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_4 \\ x_1 + (1 - x_4) - 2(2 - x_4) + x_4 &= -2 \\ x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 3 + 2x_4 &= -2 \Rightarrow x_1 = -2x_4 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ 1 - x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

### Caso homogéneo

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-3F_1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[5F_3-2F_2]{ } \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
 x_3 + x_4 &= 0 \Rightarrow x_3 = -x_4 \\
 -5x_2 + 7(-x_4) + 2x_4 &= 0 \Rightarrow -5x_2 - 5x_4 = 0 \Rightarrow x_2 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_4 \\
 x_1 + (-x_4) - 2(-x_4) + x_4 &= 0 \\
 x_1 - x_4 + 2x_4 + x_4 &= 0 \\
 x_1 + 2x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 = -2x_4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

b)

### Caso no homogéneo

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-3F_1} \\
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3-2F_2]{ } \\
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

La última fila indica que el sistema es incompatible, ya que  $0 = -1$  es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible**.

### Caso homogéneo

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-3F_1} \\
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3-2F_2]{ } \\
 \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Ahora , despejamos las variables comenzando desde la segunda fila hacia la primera:

$$\begin{aligned}
 -4x_2 + 3x_4 &= 0 \Rightarrow -4x_2 = -3x_4 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{4}x_4 \\
 x_1 + \left(\frac{3}{4}x_4\right) + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\
 x_1 + x_3 + x_5 + \frac{3}{4}x_4 - 2x_4 &= 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_5 - \frac{5}{4}x_4 = 0 \\
 x_1 &= -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} -x_3 - x_5 + \frac{5}{4}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

c)

### Caso no homogéneo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \xrightarrow{iF_2-F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & i-1 & -i & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{iF_3-F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array} \right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} -2ix_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ (1-i)x_2 + ix_3 &= -1 \Rightarrow (1-i)x_2 = -1 \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \Rightarrow ix_1 - (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1 \\ ix_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} &= -1 \\ ix_1 + 1 + i &= -1 \Rightarrow ix_1 = -1 - i - 1 = -2 - i \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - i}{i} = \\ \frac{(-2 - i)(-i)}{i(-i)} &= \frac{2i + i^2}{1} = \frac{2i - 1}{1} = -1 + 2i \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1 + 2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Caso homogéneo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{iF_2-F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & i-1 & -i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{iF_3-F_2} \left( \begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & i & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array} \right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} -2ix_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ (1-i)x_2 + ix_3 &= 0 \Rightarrow (1-i)x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ ix_1 - (1+i)x_2 &= 0 \Rightarrow ix_1 - (1+i)(0) = 0 \Rightarrow ix_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es la trivial:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Ejercicio 2

**Ejercicio 2.** (a) Determinar los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para que el siguiente sistema tenga solución única, infinitas soluciones, o no tenga solución:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

(b) Considerar el sistema homogéneo asociado y dar los valores de  $k$  para los cuales admite solución no trivial. Para esos  $k$ , resolverlo.

a)

Primero empiezo triangularizando la matriz:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{F_2+F_1}{F_3-F_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora despejo la última fila:

$$(k-1)x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{k-1} \quad \text{si } k \neq 1$$

pues si  $k = 1$ , la ecuación no tiene solución, me quedaría que  $1=0$  y eso es ABS.

Ahora sigo con la segunda fila:

$$(1+k)x_2 + (k^2-1)x_3 = 0$$

Que valor de  $k$  hace que  $1+k=0$ ?  $k = -1$ . Entonces, si  $k = -1$ :

$$0 + ((-1)^2 - 1)x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, para  $k = -1$  el sistema tiene infinitas soluciones con  $x_2$  como parámetro libre.

Por otro lado, para que el sistema tenga solución única, necesito que  $k$  no sea ni 1 ni -1.

b)

Triangulo la matriz homogénea:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ -1 & 1 & k^2 & 0 \\ 1 & k & k-2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{F_2+F_1}{F_3-F_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 0 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array} \right)$$

Si o si, para resolver el sistema y que no sea el resultado trivial, necesito que algun pivote sea cero, pruebo con:  $k-1=0 \Rightarrow k=1$ .

$$k+1=0 \Rightarrow k=-1.$$

Resuelvo para  $k=1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{F_2+F_1}{F_3-F_1}}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_1 + (0) - x_3 &= 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para  $k = 1$  es:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Resuelvo para  $k = -1$ :

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{F_2+F_1}{F_3-F_1}} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Despejo las variables:

$$\begin{aligned} -2x_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - (0) &= 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema homogéneo para  $k = -1$  es:

$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

## Ejercicio 5

**Ejercicio 5.** Encontrar un sistema de generadores para los siguientes espacios vectoriales:

- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0; x - y = 0\}$
- (b)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{3 \times 3} : \mathbf{A} = -\mathbf{A}^t\}$
- (c)  $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$
- (d)  $\{x \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 - ix_4 = 0, ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 = 0\}$

a)

tengo  $x+y-z=0$  y  $x-y=0$ . Esto forma la matriz:

$$\begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{triangulo}} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Ahora despejo las variables desde abajo hacia arriba:

$$\begin{aligned} -2y + z &= 0 \Rightarrow z = 2y \\ x + y - (2y) &= 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Verifico que este vector cumple ambas ecuaciones y, por lo tanto, sea un generador del subespacio:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ x - y &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Entonces, el vector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  es un generador del subespacio.

b)

Decir que una matriz  $A$  cumple

$$-A^t = A$$

significa que la matriz es **antisimétrica**.

Como  $A^t$  denota la traspuesta de  $A$ , la igualdad anterior es equivalente a

$$A^t = -A.$$

Esto implica las siguientes propiedades:

- Para todo par de índices  $i, j$  se cumple:

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

- Los elementos de la diagonal principal son cero, ya que si  $i = j$ :

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0.$$

- La matriz  $A$  debe ser cuadrada.

Un ejemplo de matriz antisimétrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su traspuesta es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

y se verifica que

$$A^t = -A.$$

Volviendo al ejercicio, tengo la siguiente matriz genérica de 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

La condición " $-A^t = A$ " implica que:

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Esto me da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -a_{11} &= a_{11} = 0 \\ -a_{22} &= a_{22} = 0 \\ -a_{33} &= a_{33} = 0 \\ -a_{21} &= a_{12} \\ -a_{31} &= a_{13} \\ -a_{32} &= a_{23} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, obtengo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C}$  son parámetros libres. Entonces, mis generadores del subespacio son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)

Es un subespacio de las matrices  $3 \times 3$  donde la única restricción es que la suma de la diagonal sea cero.

Una matriz genérica de  $3 \times 3$  es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

La condición "la suma de la diagonal es cero" implica que:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \Rightarrow a_{33} = -a_{11} - a_{22}$$

Por lo tanto, la matriz queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32} \in \mathbb{R}$  son parámetros libres. Entonces, mis generadores del subespacio son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{12}, \quad E_{13}, \quad E_{21}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{23}, \quad E_{31}, \quad E_{32}$$

d)

Sea el subespacio de  $\mathbb{C}^4$  definido por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{cccc|c} A = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -i \\ i & 1+i & -1 & 0 \end{array} \right) & \xrightarrow{F_2 - iF_1} & \left( \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

Entonces, despejo las variables desde abajo hacia arriba:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \Rightarrow x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + (x_3 + x_4) - ix_4 &= 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 - ix_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 - x_4 + ix_4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -x_3 - x_4 + ix_4 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 + i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3, x_4 \in \mathbb{C}$$

y los generadores del subespacio son:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - ix_4 &= -1 + 1 + 1 - i(0) = 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 &= i(-1) + (1+i)(1) - (1) = -i + 1 + i - 1 = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - ix_4 &= (-1+i) + 1 + 0 - i(1) = -1 + i + 1 - i = 0 \\ ix_1 + (1+i)x_2 - x_3 &= i(-1+i) + (1+i)(1) - 0 = -i + i^2 + 1 + i = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 6.** Sea  $S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ .

- (a) Determinar si  $(2, 1, 3, 5) \in S$ .
- (b) Determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$ .
- (c) Determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ .

a)

Para determinar si el vector  $(2, 1, 3, 5) \in S = \langle (1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1) \rangle$ , necesitamos verificar si existen escalares  $a, b$  y  $c$  tales que:

$$a(1, -1, 2, 1) + b(3, 1, 0, -1) + c(1, 1, -1, -1) = (2, 1, 3, 5)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 2 & (1) \\ -a + b + c &= 1 & (2) \\ 2a + 0b - c &= 3 & (3) \\ a - b - c &= 5 & (4) \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones. Sumando (2) y (4):

$$\begin{aligned} (-a + b + c) + (a - b - c) &= 1 + 5 \\ 0 &= 6 \end{aligned}$$

Esto es una contradicción, lo que significa que no existen tales escalares  $a, b$  y  $c$ . Por lo tanto, el vector  $(2, 1, 3, 5)$  no pertenece al subespacio  $S$ .

b)

Para determinar si  $\{x \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$ , necesitamos verificar si cualquier vector que satisface la ecuación  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$  puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores generadores de  $S$ . Sea  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  tal que  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ . Entonces, podemos expresar  $x_1$  en términos de  $x_2$  y  $x_3$ :

$$x_1 = x_2 + x_3$$

Queremos encontrar si existen escalares  $a, b$  y  $c$  tales que:

$$a(1, -1, 2, 1) + b(3, 1, 0, -1) + c(1, 1, -1, -1) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + 3b + c = x_1 \quad (1)$$

$$-a + b + c = x_2 \quad (2)$$

$$2a + 0b - c = x_3 \quad (3)$$

$$a - b - c = x_4 \quad (4)$$

Sustituyendo  $x_1$  en (1):

$$a + 3b + c = x_2 + x_3 \quad (1')$$

Sumando (2) y (4):

$$\begin{aligned} (-a + b + c) + (a - b - c) &= x_2 + x_4 \\ 0 &= x_2 + x_4 \end{aligned}$$

Esto implica que  $x_4 = -x_2$ . Por lo tanto, no todos los vectores que satisfacen  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$  pueden ser expresados como combinaciones lineales de los vectores generadores de  $S$ . Por lo tanto,  $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \not\subseteq S$ . Esto se debe a que  $x_4$  se supone que no tiene ninguna restricción y es libre, lo que se contradice con lo que encontramos.

c)

Para determinar si  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ , necesitamos verificar si cualquier combinación lineal de los vectores generadores de  $S$  satisface la ecuación  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ . Sea  $x = a(1, -1, 2, 1) + b(3, 1, 0, -1) + c(1, 1, -1, -1)$  para algunos escalares  $a, b$  y  $c$ . Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a + 3b + c \\ x_2 &= -a + b + c \\ x_3 &= 2a + 0b - c \end{aligned}$$

Calculamos  $x_1 - x_2 - x_3$ :

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= (a + 3b + c) - (-a + b + c) - (2a + 0b - c) \\ &= a + 3b + c + a - b - c - 2a - 0b + c \\ &= (a + a - 2a) + (3b - b - 0b) + (c - c + c) \\ &= 0 + 2b + c \end{aligned}$$

Para que  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ , necesitamos que  $2b + c = 0$ . Esto significa que no todos los vectores en  $S$  satisfacen la ecuación  $x_1 - x_2 - x_3 = 0$  a menos que se imponga la restricción adicional de que  $c = -2b$ . Por lo tanto,  $S \not\subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ . Si hubiera dado 0 en lugar de  $2b + c$  en el cálculo, entonces hubiera sido cierto.

**Ejercicio 7.** Hallar un sistema de generadores para  $S \cap T$  y para  $S + T$  como subespacios de  $V$ , y determinar si la suma es directa en cada uno de los siguientes casos:

- (a)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\}$  y  $T = \{(x, y, z) : x + z = 0\}$ .
- (b)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$  y  $T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$ .
- (c)  $V = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \langle(1, 1, 3), (1, 3, 5), (6, 12, 24)\rangle$   $T = \langle(1, 1, 0), (3, 2, 1)\rangle$ .
- (d)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $S = \{(x_{ij}) / x_{ij} = x_{ji} \forall i, j\}$   $T = \{(x_{ij}) / x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0\}$ .
- (e)  $V = \mathbb{C}^3$ ,  $S = \langle(i, 1, 3-i), (4, 1-i, 0)\rangle$   $T = \{x \in \mathbb{C}^3 : (1-i)x_1 - 4x_2 + x_3 = 0\}$ .

a)

Voy a buscar los generadores de  $S \cap T$ : Busco los generadores de  $S$ :  $S = \{(x, y, z) : 3x - 2y + z = 0\} \rightarrow z = 2y - 3x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2y - 3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Los generadores de S son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Busco los generadores de T:  $T = \{(x,y,z) : x+z=0\} \rightarrow z = -x$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Los generadores de T son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, para encontrar  $S \cap T$ , busco los vectores que pueden ser expresados como combinaciones lineales de los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= c & (1) \\ b &= d & (2) \\ -3a + 2b &= -c & (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\begin{aligned} -3c + 2d &= -c \\ -2c + 2d &= 0 \\ -2c &= -2d \\ c &= d \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos dependen de un solo parámetro, llamémoslo  $t$ :  $\text{vector} = t(1, 0, -3) + t(0, 1, 2) = t(1, 1, -1)$   
Eso te dice inmediatamente que:  $S \cap T = \langle(1, 1, -1)\rangle$

Voy a buscar los generadores de  $S + T$ : Para encontrar  $S + T$ , combinamos los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = a + c, \\ x_2 = b + d, \\ x_3 = -3a + 2b - c. \end{cases}$$

Entonces, la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \\ -3a + 2b - c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

los generadores de  $S + T$  pueden tomarse como:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b)

Tengo los subespacios:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0, x - y = 0\}$$

$$T = \langle(1, 1, 0), (5, 7, 3)\rangle$$

Primero, encuentro los generadores de S: De la ecuación  $x - y = 0$ , deduzco que  $y = x$ . Sustituyendo esto en la primera ecuación:

$$3x - 2x + z = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$$

Por lo tanto, los vectores en S pueden expresarse como:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Entonces, el generador de S es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora, para encontrar  $S \cap T$ , busco los vectores que pueden ser expresados como combinaciones lineales de los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= c + 5d & (1) \\ a &= c + 7d & (2) \\ -a &= 0 + 3d & (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$\begin{aligned} c + 5d &= c + 7d \\ 5d &= 7d \\ 0 &= 2d \\ d &= 0 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $d = 0$  en (1):

$$\begin{aligned} a &= c + 5(0) \\ a &= c \end{aligned}$$

Sustituyendo  $d = 0$  en (3):

$$\begin{aligned} -a &= 0 + 3(0) \\ -a &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a = 0$  y  $c = 0$ . Esto implica que el único vector en  $S \cap T$  es el vector cero. Por lo tanto,  $S \cap T = \{(0, 0, 0)\}$ .

Luego busco los generadores de  $S + T$ : Para encontrar  $S + T$ , combinamos los generadores de S y T:

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Y verifico que son linealmente independientes:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3+F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

Como los tres vectores son linealmente independientes, los generadores de  $S + T$  son:

$$\left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} 5 \\ 7 \\ 3 \end{array} \right)$$

**Ejercicio 8.** Determinar todos los  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales:

- (a)  $\langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle$ .
- (b)  $S \cap T = \langle(0, 1, 1)\rangle$  siendo  $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle(1, k, 2), (-1, 2, k)\rangle$ .

a)

sea  $U = \langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle = \langle(1, k, 2k), (-1, -1, k^2 - 2), (1, 1, k)\rangle = W$

Como estamos en  $\mathbb{R}^3$ , voy a generar la base del subespacio de la derecha,  $U$ .  $U$  es un subespacio de dimensión 2, o sea un plano por el origen. Todo plano por el origen en  $\mathbb{R}^3$  puede ser definido por una ecuación lineal de la forma:  $U = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot X = 0\}$  donde  $n$  es un vector normal al plano  $U$  (ORTOGONAL A LOS GENERADORES DE  $U$ ).

Entonces, busco el vector normal  $n$ :

$$U = \langle(-2, 1, 6), (3, 0, -8)\rangle$$

Calculamos un vector normal a  $U$  mediante el producto cruz:

$$n = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -8 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante:

$$n = \mathbf{i}(1 \cdot (-8) - 6 \cdot 0) - \mathbf{j}((-2) \cdot (-8) - 6 \cdot 3) + \mathbf{k}((-2) \cdot 0 - 1 \cdot 3)$$

Un vector normal a  $U$  es:

$$n = (-8, 2, -3)$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana del plano  $U$  es:

$$n \cdot (x, y, z) = 0$$

es decir:

$$-8x + 2y - 3z = 0$$

o, de manera equivalente:

$$8x - 2y + 3z = 0.$$

Como  $U = W$  busco que los generadores de  $W$  cumplan esta ecuación:

$$\begin{aligned} (1) \quad 8(1) - 2(k) + 3(2k) &= 0 \\ 8 - 2k + 6k &= 0 \\ 8 + 4k &= 0 \\ 4k &= -8 \\ k &= -2 \end{aligned}$$

Ahora verifico con el segundo generador:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 8(-1) - 2(-1) + 3(k^2 - 2) = 0 \\
 & -8 + 2 + 3(k^2 - 2) = 0 \\
 & -6 + 3k^2 - 6 = 0 \\
 & 3k^2 - 12 = 0 \\
 & 3k^2 = 12 \\
 & k^2 = 4 \\
 & k = \pm 2
 \end{aligned}$$

Como ya habíamos obtenido  $k = -2$  del primer generador, tomamos  $k = -2$  como la solución final. Y verifico con el tercer generador:

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 8(1) - 2(1) + 3(k) = 0 \\
 & 8 - 2 + 3(-2) = 0 \\
 & 6 - 6 = 0 \\
 & 0 = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de  $k$  que satisface la igualdad  $U = W$  es:

$$k = -2.$$

b)

Teniendo que  $S \cap T = \langle (0, 1, 1) \rangle$ , siendo  $S = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  y  $T = \langle (1, k, 2), (-1, 2, k) \rangle$  Entonces voy a buscar el valor de  $K$  para que  $(0, 1, 1) \in T$  y que además satisfaga la ecuación de  $S$ . Primero verifico que  $(0, 1, 1) \in S$  satisface la ecuación de  $S$

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\
 0 + 1 - 1 &= 0 \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora, busco si existen escalares  $a$  y  $b$  tales que:

$$a(1, k, 2) + b(-1, 2, k) = (0, 1, 1)$$

Esto nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 a - b &= 0 \quad (1) \\
 ak + 2b &= 1 \quad (2) \\
 2a + bk &= 1 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$\begin{aligned}
 ak + 2a &= 1 \quad (2') \\
 2a + ak &= 1 \quad (3')
 \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones (2') y (3') son idénticas, por lo que podemos resolver cualquiera de ellas. Tomemos (2'):

$$\begin{aligned}
 a(k + 2) &= 1 \\
 a &= \frac{1}{k + 2}
 \end{aligned}$$

$\rightarrow k \neq -2$  para que  $a$  esté definido.

Sustituyendo el valor de  $a$  en (1):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{k + 2} - b &= 0 \\
 b &= \frac{1}{k + 2}
 \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos los valores de  $a$  y  $b$  en (3) para encontrar  $k$ :

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+2}\right)k &= 1 \\ \frac{2+k}{k+2} &= 1 \\ 2+k &= k+2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Además, hay que verificar que no ocurra que  $T \subseteq S$ , por lo que verifico si los generadores de  $T$  cumplen la ecuación de  $S$ : Para el primer generador  $(1, k, 2)$ :

$$\begin{aligned} 1+k-2 &= 0 \\ k-1 &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Para el segundo generador  $(-1, 2, k)$ :

$$\begin{aligned} -1+2-k &= 0 \\ 1-k &= 0 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de  $k$  que satisface la condición  $S \cap T = \langle(0, 1, 1)\rangle$  es:

$$\forall k \in \mathbb{R}, k \neq -2 \text{ y } k \neq 1$$

## Ejercicio 9

Sean  $S$  y  $T$  subespacios de un espacio vectorial  $V$ . Demostrar que:  $S \cup T$  es un subespacio de  $V$  si y sólo si  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ .

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $S \cup T$  es un subespacio de  $V$ . Para demostrar que  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ , consideremos dos casos:

- Si  $S \subseteq T$ , entonces la afirmación es verdadera.
- Si  $T \subseteq S$ , entonces la afirmación también es verdadera.
- Si ni  $S \subseteq T$  ni  $T \subseteq S$ , entonces existen elementos  $s \in S$  y  $t \in T$  tales que  $s \notin T$  y  $t \notin S$ . Consideremos el vector  $s+t$ . Dado que  $S \cup T$  es un subespacio,  $s+t$  debe pertenecer a  $S \cup T$ . Sin embargo, si  $s+t \in S$ , entonces  $t = (s+t) - s$  también pertenecería a  $S$ , lo cual es una contradicción. De manera similar, si  $s+t \in T$ , entonces  $s = (s+t) - t$  también pertenecería a  $T$ , lo cual también es una contradicción. Por lo tanto, este caso no puede ocurrir.

Por lo tanto, si  $S \cup T$  es un subespacio, entonces  $S \subseteq T$  o  $T \subseteq S$ .

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $S \subseteq T$ . Entonces,  $S \cup T = T$ , que es un subespacio de  $V$ . De manera similar, si  $T \subseteq S$ , entonces  $S \cup T = S$ , que también es un subespacio de  $V$ . Por lo tanto, en ambos casos,  $S \cup T$  es un subespacio de  $V$ .