

Ejercicios Guía 1 - ALC

Vic

Ejercicio 1

Voy a resolver primero los sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos, utilizando el **método de eliminación de Gauss**.

a)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \xrightarrow[F_2-3F_1]{F_3-F_1} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array} \xrightarrow[5F_3-2F_2]{} \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 2 \Rightarrow x_3 = 2 - x_4 \\ -5x_2 + 7(2 - x_4) + 2x_4 &= 9 \Rightarrow -5x_2 + 14 - 7x_4 + 2x_4 = 9 \\ -5x_2 - 5x_4 &= -5 \Rightarrow x_2 + x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_4 \\ x_1 + (1 - x_4) - 2(2 - x_4) + x_4 &= -2 \\ x_1 + 1 - x_4 - 4 + 2x_4 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 3 + 2x_4 &= -2 \Rightarrow x_1 = -2x_4 + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -2x_4 + 1 \\ 1 - x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-3F_1} \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array} \xrightarrow[F_3-2F_2]{} \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

La última fila indica que el sistema es incompatible, ya que $0 = -1$ es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución. Es un **sistema incompatible**.

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \xrightarrow{iF_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 1 & 2i & -1 & 2i \end{array} \right) \xrightarrow{iF_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} i & -(1+i) & 0 & -1 \\ 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array} \right)$$

Ahora, despejamos las variables comenzando desde la última fila hacia la primera:

$$\begin{aligned} -2ix_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ (1-i)x_2 + ix_3 &= -1 \Rightarrow (1-i)x_2 = -1 \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{-1}{1-i} = \frac{-1(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1-i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ ix_1 - (1+i)x_2 &= -1 \Rightarrow ix_1 - (1+i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) = -1 \\ ix_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} &= -1 \\ ix_1 + 1 + i &= -1 \Rightarrow ix_1 = -1 - i - 1 = -2 - i \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - i}{i} = \\ \frac{(-2 - i)(-i)}{i(-i)} &= \frac{2i + i^2}{1} = \frac{2i - 1}{1} = -1 + 2i \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} -1 + 2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2