```
\documentclass[12pt,a4paper]{article}
\usepackage[spanish]{babel}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{blindtext}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{amssymb,amsfonts,latexsym}

\begin{document}
\begin{center}
{\bfseries\Large FACULTAD DE INGENIER\'IA CIVIL SEDE SANTANDER DE
QUILICHAO \par}
\vspace{1cm}
{\scshape\Large SOLUCI\'ON DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE
SERIES \par}
{\scshape\Large\textbf{Ecuaci\'on de Bessel}\par}
\vspace{1cm}
\begin{figure}[h!]
\centering
\includegraphics[width=8cm]{1.png}
\end{figure}
\vspace{1cm}
{\scshape\Large \textbf{PRESENTADO POR:} \par}
{\scshape\Large Victoria Eugenia Guerrero\par}
{\scshape\Large \textbf{PRESENTADO A:} \par}
{\scshape\Large Jhonatan Collazos \par}
\vspace{1,5cm}
{\scshape\Large \textbf{UNIVERSIDAD DEL CAUCA} \par}
{\scshape\Large \textbf{ECUACIONES DIFERENCIALES} \par}
{\scshape\Large \textbf{2022} \par}
\end{center}

\tableofcontents

\vspace{15cm}

\section{INGENIER\'IA CIVIL}
\vspace{0,5cm}
\includegraphics[width=13cm, height=7cm]{../../Pictures/im (2).jpg}

\vspace{0,5cm}

La ingeniería civil es la disciplina de la ingeniería que emplea
conocimientos de cálculo, mecánica, hidráulica y física para encargarse
del diseño, construcción y mantenimiento de las infraestructuras
emplazadas en el entorno, incluyendo carreteras, ferrocarriles, puentes,
canales, presas, puertos, aeropuertos, diques y otras construcciones
relacionadas.La ingeniería civil es la más antigua después de la
ingeniería militar de ahí su nombre para distinguir las actividades
civiles con las militares.

\vspace{0,5cm}
\section{ECUACI\'ON DIFERENCIAL}
```

```latex
\vspace{0,1cm}
Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una
función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones
usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus
razones de cambio y la ecuación define la relación entre ellas. Como
estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un
rol primordial en diversas disciplinas, incluyendo la ingeniería, la
física, la química, la economía y la biología.

\vspace{0,1cm}
\section{SOLUCI\'ON DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE SERIES}
\vspace{0,1cm}
\subsection{Ecuaci\'on de Bessel}
\text{En esta sección nos ocuparemos del estudio de la ecuación
diferencial ordinaria}

 $$ x^{2}u^{"}(x)+ xu{'}(x)+(x^{2}-v^{2})u(x)=0 $$

 \textbf{con $v\geq O$, que se denomina ecuación de Bessel de orden $v$.
Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con
coeficientes no contantes. Nótese en primer lugar que la ecuación dada en
(1) se reduce a la ecuación  con el cambio
$R(r)=u(x), x =ru $ Para resolver la ecuación (2) se propone una solución
que se pueda escribir en la forma}
\begin{equation*}
u(x)=\sum _{k=0}^{\infty}a_kx^{k+b}\hspace*{1cm}   (a_0\neq 0 )
\end{equation*}

\vspace{0,1cm}

  donde el exponente $b$ y los coeficientes $ak$ han de ser calculados.
Sustituyendo (3) en (2) y
tras hacer algunos cálculos se llega a que la función
\begin{equation*}
J_v(x)=\sum _{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!T(k+v+1)}
\times\left(\frac {x}{2} \right)^{2k+v}
\end{equation*}

\textbf{que se denomina función de Bessel de primera especie de orden
$v$,es solución de la ecuación (2) Si $v \in/ N $, entonces las funciones
$J_v$ y $J_{-v}$ son linealmente independientes y forman una base
del espacio de soluciones de (2), es decir, que la solución general de la
ecuación de Bessel (2) es combinación lineal de $J_v$ y $J_{-v}$ Si $v\in
N$ ,entonces las funciones $J_v$ y $J_{-v}$ son linealmente dependientes.
De hecho, se verifica
que $J_{-v}=(-1)^{v}J_v$.Para resolver este problema se introduce la
función de Bessel de segunda especie $Y_v$, la cual se define como:}
\begin{equation*}
Y_v(x)=\frac{\cos(v\pi)J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}\hspace*{1cm}
(v\nexists N)
\end{equation*}
y finalmente

\vspace{0,1cm}
```

```latex
\begin{equation*}
Y_n(x)=\lim_{v \to n}Y_n(x) \hspace*{1cm} (n \in N)
\end{equation*}

\vspace{2cm}
Las funciones $J_n$ e $Y_n$ son linealmente independientes y por tanto,
la solución general de (2), en el caso $v = n \in N$, es combinación
lineal de $J_n$ e $Y_n$.

\section{EJERCICIO PROGRAMADO EN MATLAB}
\subsection{Función de Bessel}
La ecuación diferencial de segundo orden
\vspace{0,2cm}
\begin{equation*}
x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0
\end{equation*}
\vspace{0,4cm}
se conoce como ecuación de Bessel. La solución de esta ecuación
diferencial se escribe \vspace{0,2cm}
$$y=AJ_n(x)+BY_n(x)$$ \vspace{0,2cm} donde $A$ y $B$ son constantes que
se determinan a partir de las condiciones iniciales. El índice n es un
número real, aunque en los libros se proporcionan tablas de las funciones
\vspace{0,2cm}
$J_n(x)$ y $Y_n(x)$ para valores enteros $n=0,1,2,3....$
\vspace{0,2cm}
\begin{equation*}
J_(x)=\sum _{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}
\end{equation*}
\vspace{0,2cm}
\begin{equation*}
Y_n(x)=\frac{J_n(x)\cos(nx)-J_{-n}(x)}{\sin(nx)}
\end{equation*}

\vspace{0,6cm}
Para $n$ entero se cumple
\vspace{0,6cm}
$$J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$$
$$Y_{-n}(x)=(-1)^n Y_n(x)$$

\vspace{3cm}
\subsection{Funciones de Bessel de primera especie}
Representamos $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ y $J_3(x)$ llamando a la
función bessel $j(n,x)$ de MATLAB, dando valores a su primer parámetro
$n=0,1,2,3,$

\vspace{0,6cm}
\includegraphics[width=14cm, height=6cm]{cap1.jpg}

\vspace{0,6cm}
\includegraphics[width=14cm]{cap2.jpg}
\subsection{Aproximaciones}
Cuando $x$ se hace grande la función $J_n(x)$, tiende hacia

\vspace{0,6cm}
```

```
\begin{equation*}
J_0(x)\approxeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos (x- \frac{\pi}{4})
\end{equation*}

\begin{equation*}
J_n(x)\approxeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos (x- \frac{n\pi}{2}-
\frac{\pi}{4})
\end{equation*}

\vspace{0,6cm}
Representamos la función $J_n(x)$ y su aproximación asintótica

\includegraphics[width=14cm, height=10cm]{../../Pictures/Screenshots/cap
3.jpg}

\includegraphics[width=14cm,
height=12cm]{../../Pictures/Screenshots/cap4.jpg}

\vspace{0,6cm}
En la figura, se ha representado los ceros de la función cos$(x-n\pi/2-
\pi/4)$, que como vemos son próximos a los ceros de la función $J_n(x)$.
Este hecho nos permite calcular los ceros de la función de Bessel
mediante el comando fzero de MATLAB. Recuérdese que los ceros de la
función coseno son $(2k+\pi)/2$, $k=0,1,2,3...$


\vspace{4cm}
\begin{thebibliography}{10}
\bibitem{vick}https://es.wikipedia.org/wiki/Ingenier%C3%ADa_civil
\bibitem{vick1}https://manualdelatex.com/tutoriales/figuras
\bibitem{vick2}https://manualdelatex.com/tutoriales/ecuaciones
\bibitem{vick3}https://www.youtube.com/watch?v=bvKc9Z9DXPc
\bibitem{vick0}https://www.youtube.com/watch?
\bibitem{vick5}https://www.dmae.upct.es/~fperiago/apuntesdocencia/tema7.p
df
\end{thebibliography}
\end{document}
```