FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL SEDE SANTANDER DE QUILICHAO

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE SERIES

Ecuación de Bessel

Universidad
del Cauca

PRESENTADO POR:

Victoria Eugenia Guerrero

PRESENTADO A:

Jhonatan Collazos

UNIVERSIDAD DEL CAUCA
ECUACIONES DIFERENCIALES
2022

Índice

1. INGENIERÍA CIVIL

La ingeniería civil es la disciplina de la ingeniería que emplea conocimientos de cálculo, mecánica, hidráulica y física para encargarse del diseño, construcción y mantenimiento de las infraestructuras emplazadas en el entorno, incluyendo carreteras, ferrocarriles, puentes, canales, presas, puertos, aeropuertos, diques y otras construcciones relacionadas.La ingeniería civil es la más antigua después de la ingeniería militar de ahí su nombre para distinguir las actividades civiles con las militares.

2. ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que relaciona una función con sus derivadas. En las matemáticas aplicadas, las funciones usualmente representan cantidades físicas, las derivadas representan sus razones de cambio y la ecuación define la relación entre ellas. Como estas relaciones son muy comunes, las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en diversas disciplinas, incluyendo la ingeniería, la física, la química, la economía y la biología.

3. SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES MEDIANTE SERIES

3.1. Ecuación de Bessel

En esta sección nos ocuparemos del estudio de la ecuación diferencial ordinaria

$$x^2u^{"}(x) + xu'(x) + (x^2 - v^2)u(x) = 0$$

con $v \geq O$, que se denomina ecuación de Bessel de orden v. Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos con coeficientes no contantes. Nótese en primer lugar que la ecuación dada en (1) se reduce a la ecuación con el cambio $R(r) = u(x), x = ru$ Para resolver la ecuación (2) se propone una solución que se pueda escribir en la forma

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+b} \qquad (a_0 \neq 0)$$

donde el exponente b y los coeficientes ak han de ser calculados. Sustituyendo (3) en (2) y tras hacer algunos cálculos se llega a que la función

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!T(k+v+1)} \times \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$$

que se denomina función de Bessel de primera especie de orden v,es solución de la ecuación (2) Si $v \in /N$, entonces las funciones J_v y J_{-v} son linealmente independientes y forman una base del espacio de soluciones de (2), es decir, que la solución general de la ecuación de Bessel (2) es combinación lineal de J_v y J_{-v} Si $v \in N$,entonces las funciones J_v y J_{-v} son linealmente dependientes. De hecho, se verifica que $J_{-v} = (-1)^v J_v$.Para resolver este problema se introduce la función de Bessel de segunda especie Y_v, la cual se define como:

$$Y_v(x) = \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} \qquad (v \nexists N)$$

y finalmente

$$Y_n(x) = \lim_{v \to n} Y_n(x) \qquad (n \in N)$$

Las funciones J_n e Y_n son linealmente independientes y por tanto, la solución general de (2), en el caso $v = n \in N$, es combinación lineal de J_n e Y_n.

4. EJERCICIO PROGRAMADO EN MATLAB

4.1. Función de Bessel

La ecuación diferencial de segundo orden

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

se conoce como ecuación de Bessel. La solución de esta ecuación diferencial

se escribe

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

donde A y B son constantes que se determinan a partir de las condiciones

iniciales. El índice n es un número real, aunque en los libros se proporcionan tablas de las funciones $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ para valores enteros $n = 0, 1, 2, 3....$

$$J_(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$$

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x)\cos(nx) - J_{-n}(x)}{\sin(nx)}$$

Para n entero se cumple

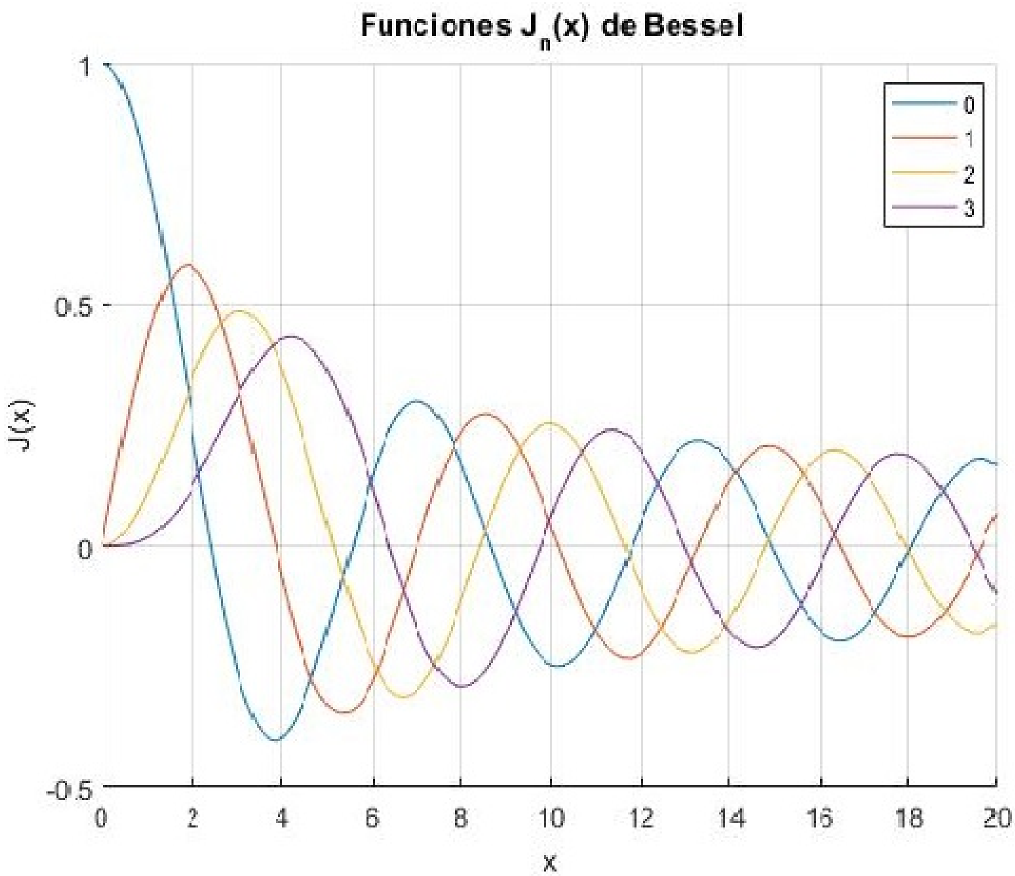
$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

4.2. Funciones de Bessel de primera especie

Representamos $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ y $J_3(x)$ llamando a la función bessel $j(n,x)$ de MATLAB, dando valores a su primer parámetro $n = 0, 1, 2, 3$,

```
hold on
for n=0:3
    f=@(x) besselj(n,x);
    fplot(f,[0,20], 'displayName',num2str(n));
end
legend('-DynamicLegend','location','Best')
xlabel('x')
ylabel('J(x)')
title('Funciones J_n(x) de Bessel')
grid on
hold off
```



4.3. Aproximaciones

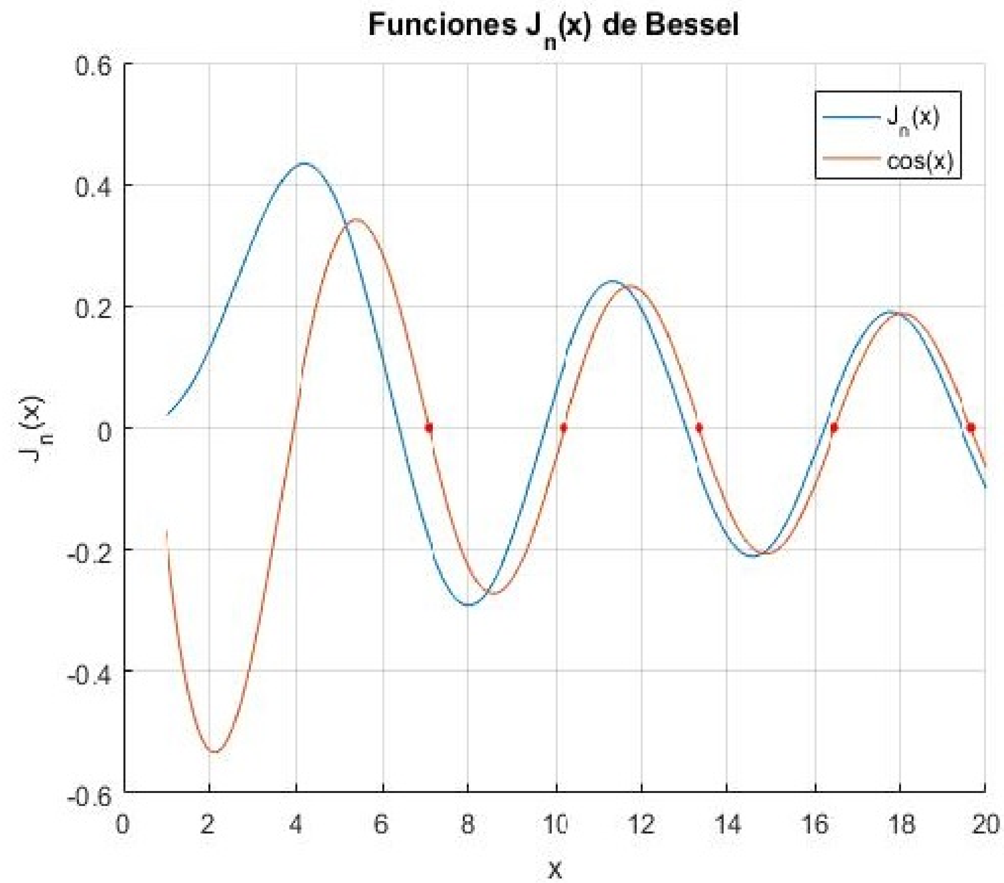
Cuando x se hace grande la función $J_n(x)$, tiende hacia

$$J_0(x) \approxeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$J_n(x) \approxeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$$

Representamos la función $J_n(x)$ y su aproximación asintótica

```
n=3;
f=@(x) sqrt(2./(pi*x)).*cos(x-n*pi/2-pi/4);
k=0:4;
hold on
fplot(@(x) besselj(n,x),[1,20])
fplot(f,[1,20])
r=(2*k+1)*pi/2+n*pi/2+pi/4; %ceros coseno
plot(r,0,'o','markersize',3,'markeredgecolor','r','markerfacecolor','r')
hold off
legend('J_n(x)','cos(x)')
xlabel('x')
ylabel('J_n(x)')
title('Funciones J_n(x) de Bessel')
grid on
hold off
```



En la figura, se ha representado los ceros de la función $\cos(x-n\pi/2-\pi/4)$, que como vemos son próximos a los ceros de la función $J_n(x)$. Este hecho nos permite calcular los ceros de la función de Bessel mediante el comando fzero de MATLAB. Recuérdese que los ceros de la función coseno son $(2k+\pi)/2$, $k = 0, 1, 2, 3...$

Referencias

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Ingenier

[2] https://manualdelatex.com/tutoriales/figuras

[3] https://manualdelatex.com/tutoriales/ecuaciones

[4] https://www.youtube.com/watch?v=bvKc9Z9DXPc

[5] https://www.youtube.com/watch?

[6] https://www.dmae.upct.es/ fperiago/apuntesdocencia/tema7.pdf