МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №4

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2021 г.

Задание 4. Анализ систем массового обслуживания с обслуживанием одного требования группой свободных приборов.

Задача. На крупном строительстве имеется растворный узел по замесу бетона. На один замес объемом 10 м^3 затрачивается в среднем несколько часов. После того, как бетон готов, он выливается в ковши, из них производится загрузка автомашин-самосвалов. В самосвал вмещается 2 м^3 бетона. Загрузка производится автоматически, поэтому временем загрузки можно пренебречь. Бетон выдается в первую очередь машинам, снабжающим данную стройку. Всего на перевозке бетона на этой стройке занято несколько самосвалов. На один рейс самосвал затрачивает в среднем 1 час. Если же машин с данной стройки для погрузки бетона в момент окончания замеса нет, то ожидают в течение определенного времени. Если за это время не придет ни одной машины данной стройки, то бетон выдается другим организациям. После того как из какого-либо очередного замеса загружено некоторое количество машин этой стройки, остаток также отдается другим организациям. Необходимо вычислить: а) вероятность того, что 1, 2 или все самосвалы возьмут бетон из замеса (т. е. эти самосвалы не находятся в рейсе); б) среднее число самосвалов, которые возьмут бетон из замеса; в) количество бетона, которое будет израсходовано на свою стройку, и количество бетона, отданного другим организациям; г) вероятность того, что весь бетон будет отдан другим строительным организациям; д) долю машин стройки, используемых для перевозки бетона, и долю машин, простаивающих в ожидании загрузки бетона; е) вероятность простоя самосвалов.

Вариант 1. На один замес бетона затрачивается в среднем 2 часа. Всего на перевозке бетона на стройке занято 4 самосвала. Если машин с данной стройки для погрузки бетона нет, то их ожидают в среднем в течение 2 часов.

Метод анализа СМО с обслуживанием одного требования всеми свободными приборами системы

Существуют системы, где вновь поступившее требование обслуживает только часть всех приборов системы, которые в силу сложившихся обстоятельств могут принять участие в совместном обслуживании, и эти приборы доводят обслуживание до конца. Обслуживание требования в этом случае считается законченным тогда, когда все приборы закончат обслуживание.

Рассмотрим теперь **систему массового обслуживания с ограниченным временем ожидания в очереди**, состоящую из k идентичных приборов, обслуживающих пуассоновский поток требований интенсивности λ. Время обслуживания одного требования прибором является величиной случайной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ. Управление работой приборов организовано так, что поступающее требование обслуживают все свободные приборы (если такие имеются в данный момент). Если же все приборы заняты, то требование становится в очередь, время ожидания в которой ограничено определенным сроком, после чего требование покидает систему необслуженным. Продолжительность ожидания будем считать случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром ν.

Введем обозначения состояний системы:

n, $0 \le n \le \kappa$, – обслуживанием занято n приборов;

$\kappa + s$, $s \ge 1$, – обслуживанием заняты все κ приборов, и s требований стоят в очереди.

Запишем систему линейных алгебраических уравнений для вычисления стационарных вероятностей состояний СМО. Очевидно, что для первых κ состояний системы справедливы уравнения (2.3). Остальные уравнения имеют вид:

$$-(\lambda + \kappa\mu)p_\kappa + \lambda\sum_{n=0}^{\kappa-1} p_n + (\kappa\mu + \nu)p_{\kappa+1} = 0, \qquad (2.5)$$

$$-(\lambda + \kappa\mu + s\nu)p_{\kappa+s} + \lambda p_{\kappa+s-1} + (\kappa\mu + (s+1)\nu)p_{\kappa+s+1} = 0,\ s \ge 1. \qquad (2.6)$$

Система уравнений (2.3), (2.5), (2.6) также может быть записана в виде:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda + n\mu}{(n+1)\mu} p_n,\ 0 \le n < \kappa,$$

$$p_{\kappa+1} = \frac{\lambda + \kappa\mu}{\kappa\mu + \nu} p_\kappa - \frac{\lambda}{\kappa\mu + \nu}\sum_{n=0}^{\kappa-1} p_n,$$

$$p_{\kappa+s+1} = \frac{\lambda + \kappa\mu + s\nu}{\kappa\mu + (s+1)\nu} p_{\kappa+s} - \frac{\lambda}{\kappa\mu + (s+1)\nu} p_{\kappa+s-1},\ s \ge 1.$$

Обозначим $\alpha = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \dfrac{\nu}{\mu}$ и запишем решение системы (2.3), (2.5), (2.6).

Вероятность того, что обслуживанием занято n приборов и очередь пуста, равна

$$p_n = \frac{\prod_{m=0}^{n-1}(\alpha + m)}{n!} p_0,\ 0 < n \le \kappa.$$

Вероятность того, что все κ приборов заняты обслуживанием, а в очереди находится s требований, равна

$$p_{\kappa+s} = \frac{\alpha^s \prod_{m=0}^{\kappa-1}(\alpha + m)}{\kappa!\prod_{r=1}^{s}(\kappa + r\beta)} p_0,\ s \ge 1.$$

Вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания, определится из нормирующего условия:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{\prod_{m=1}^{\kappa}(\alpha + m)}{\kappa!} + \dfrac{\prod_{m=0}^{\kappa-1}(\alpha + m)}{\kappa!}\sum_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^s}{\prod_{r=1}^{s}(\kappa + r\beta)}}.$$

Математическое ожидание числа приборов, занятых обслуживанием, равно

$$\overline{h} = \sum_{n=0}^{\kappa} np_n + \kappa\left(1 - \sum_{n=0}^{\kappa} p_n\right).$$

Среднее число требований, находящихся в очереди равно

$$\overline{b} = \sum_{s=1}^{\infty} sp_{\kappa+s} .$$

Вероятность того, что заявка получит отказ в обслуживании, будет равна $\beta / \alpha \cdot \overline{b}$.

Коэффициент загрузки приборов системы определится из зависимости $\frac{\overline{h}}{\kappa}$, а доля времени, в течение которого приборы свободны от обслуживания, равна $\frac{\kappa - \overline{h}}{\kappa}$.

Код разработанной программы:

```
from math import factorial
import numpy as np
```

```
k = 4
lambda_ = 2.5
mu = 1

t_wait = 2
q_v = 1 / t_wait

alpha = lambda_ / mu
beta = q_v / mu
```

```
def get_p_ks(s, alpha, beta, k, p_0):
    numerator = np.prod([alpha + m for m in range(k)]) * (alpha ** s)
    denominator = np.prod([k + r * beta for r in range(1, s + 1)]) * factorial(k)
    return (numerator / denominator) * p_0
```

```
prod1 = np.prod([alpha + m for m in range(1, k + 1)]) / factorial(k)
prod2 = np.prod([alpha + m for m in range(k)]) / factorial(k)
summa = sum([alpha ** s / np.prod([k + r * beta for r in range(1, s + 1)]) for s in range(1, 150)])

p_0 = 1 / (prod1 + prod2 * summa)
```

```
# а) вероятность того, что 1, 2 или все самосвалы возьмут бетон из замеса
p = [np.prod([alpha + m for m in range(n)]) / factorial(n) * p_0 for n in range(k + 1)]

[print(f'Вероятность того, что {i} самосвала возьмут бетон из замеса: {p[k - i]}') for i in range (1, k + 1)]
print()

# б) среднее число самосвалов, которые возьмут бетон из замеса
h = sum([n * p[n] for n in range(k + 1)]) + k * (1 - sum([p[n] for n in range(k + 1)]))
print(f'Среднее число самосвалов, которые возьмут бетон из замеса: {k - h}')
print()

# в) количество бетона, которое будет израсходовано на свою стройку,
# и количество бетона, отданного другим организациям
b = sum([s * get_p_ks(s, alpha, beta, k, p_0) for s in range(1, 150)])
p_otk = b * (beta / alpha)
print(f'Количество бетона, которое будет израсходовано на свою стройку: {lambda_ * (1 - p_otk)}')
print(f'Количество бетона, отданного другим организациям: {lambda_ * p_otk}')
print()
```

```python
# г) Вероятность того, что весь бетон будет отдан другим строительным организациям
print(f'Вероятность того, что весь бетон будет отдан другим строительным организациям: {p_otk}')
print()

# д) долю машин стройки, используемых для перевозки бетона,
# и долю машин, простаивающих в ожидании загрузки бетона
print(f'Доля машин, используемых для перевозки бетона: {h / k}')
print(f'Доля машин, простаивающих в ожидании загрузки бетона: {(k - h) / k}')
print()

# е) вероятность простоя самосвалов
print(f'Вероятность простоя самосвалов: {p[0]}')
print()
```

Результат:

```
Вероятность того, что 1 самосвала возьмут бетон из замеса: 0.19962841230990427
Вероятность того, что 2 самосвала возьмут бетон из замеса: 0.13308560820660287
Вероятность того, что 3 самосвала возьмут бетон из замеса: 0.07604891897520163
Вероятность того, что 4 самосвала возьмут бетон из замеса: 0.030419567590080653

Среднее число самосвалов, которые возьмут бетон из замеса: 0.8156246560090374

Количество бетона, которое будет израсходовано на свою стройку: 2.2432699716728424
Количество бетона, отданного другим организациям: 0.2567300283271578

Вероятность того, что весь бетон будет отдан другим строительным организациям: 0.1026920113308631З

Доля машин, используемых для перевозки бетона: 0.7960938359977406
Доля машин, простаивающих в ожидании загрузки бетона: 0.20390616400225936

Вероятность простоя самосвалов: 0.030419567590080653
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с обслуживанием одного требования группой свободных приборов системы были получены следующие результаты:

а) Вероятность того, что 1 самосвал возьмет бетон из замеса равна 0,1996; вероятность того, что 2 самосвала возьмут бетон из замеса равна 0,1331; вероятность того, что 3 самосвала возьмут бетон из замеса равна 0,0760; вероятность того, что 4 самосвала возьмут бетон из замеса равна 0,0304;

б) Среднее число самосвалов, которые возьмут бетон из замеса равно 0,8156;

в) Количество бетона, которое будет израсходовано на свою стройку равно 2,2433 м^3, а количество бетона, отданного другим организациям равно 0,2567 м^3 соответственно;

г) Вероятность того, что весь бетон будет отдан другим строительным организациям равна 0,1027;

д) Доля машин стройки, используемых для перевозки бетона составляет 0,7961, а доля машин, простаивающих в ожидании загрузки бетона составляет 0,2039 соответственно;

е) Вероятность простоя самосвалов равна 0,0304.