МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №2

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 2. Анализ и оптимизация системы массового обслуживания M_N / GI_N / 1 с относительными приоритетами.

Задача. В ателье индивидуального пошива одежды поступают заказы трех категорий: сверхсрочные, срочные и несрочные. Несмотря на то, что сверхсрочные заказы подлежат реализации вне всякой очереди, а несрочные заказы не принимаются к исполнению ранее срочных, в ателье существует порядок, согласно которому уже начатая работа по заказу любой категории непременно доводится до конца, т. е. не допускается прерывание работы по уже принятому к исполнению заказу, с тем чтобы переключиться на исполнение заказа с более высоким приоритетом. В рассматриваемом случае имеют место три очереди, каждая из которых характеризуется своим приоритетом. Необходимо вычислить среднюю продолжительность ожидания в каждой из трёх очередей; среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание; среднюю длину очереди для каждого уровня приоритета; среднее число (по обслуживающей системе) находящихся в очереди заказов. Сравнить полученные результаты с результатами для системы без приоритетов. Определить, является ли оптимальным порядок назначения приоритетов заказов при условии, что их стоимостные коэффициенты равны: $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$.

Вариант 1. Поступления заказов всех трех категорий распределены во времени в соответствии с законом Пуассона со средними значениями, равными соответственно 0,2, 0,3 и 0,1 заказам в день. Допустим, что длительности исполнения заказов разных категорий имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями 2, 1, 2 дней соответственно (дисперсия равна 0,5 дня).

Метод анализа системы M_N / GI_N / 1 с относительными приоритетами

Пусть в систему поступают N пуассоновских потоков требований разных классов с интенсивностями $\lambda_i, \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}}$, и функциями распределения длительностей обслуживания $B_i(\boldsymbol{t})$ с конечными двумя моментами v_i и $\boldsymbol{v}_i^{(2)}, \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}}$. Эти потоки занумерованы в порядке убывания важности требований. Предположим, что требования i-го потока (i-требования) образуют свою i-очередь, и условимся, что в момент окончания обслуживания на освободившийся прибор выбирается требование из непустой очереди с минимальным номером. Тогда говорят, что в СМО установлены относительные приоритеты в обслуживании требований и i-требования обладают i-приоритетом, $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}}$.

В СМО со стационарным режимом вычислим средние очереди требований каждого приоритета. Такой режим имеет место при коэффициенте использования прибора, меньшем единицы, т. е. при $\boldsymbol{R_N} < 1$,

$$\boldsymbol{R_N} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi_i} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i.$$

По аналогии с предыдущим разделом введем: n_i – среднее число i-требований в СМО; $\boldsymbol{b_i}$ – среднее число i-требований в i-очереди; $\boldsymbol{u_i}$ — среднее время пребывания i-требования в СМО; $\boldsymbol{w_i}$ – среднее время ожидания i-требования в i-очереди.

Заметим некоторое поступающее в СМО требование j-приоритета, $\boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}$, и проследим за его движением. Перед тем как ему попасть на прибор, должно быть закончено обслуживание требования на приборе, должны быть обслужены все наличные требования из очередей с номерами от 1 до j и вновь поступающие приоритетные требования из потоков с номерами от 1 до j-1. Для средних длительностей перечисленных событий имеем уравнение:

$$w_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi_i \Delta_i} + \sum_{i=1}^{j} \lambda_i w_i v_i + w_j \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i v_i. \qquad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\Delta_i} = \boldsymbol{v_i^{(2)}}/\boldsymbol{2} v_i$ – среднее время дообслуживания i-требования, если оно находится на приборе; $\sigma = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi_i \Delta_i}$ – среднее время дообслуживания требования из суммарного потока; $w_i\lambda_i$ – средняя i-очередь, $\lambda_i w_i v_i$ – среднее время ее обслуживания; $w_j\lambda_i$ – среднее число i-требований, поступивших в СМО за время ожидания j-требования ($i<j$), $w_j\lambda_i v_i$ – среднее время их обслуживания. Из (2.1) получаем рекуррентное соотношение

$$w_j = \frac{\sigma + \sum_{i=1}^{j-1} \psi_i w_i}{1 - R_j}, \qquad (2.2)$$

где $\boldsymbol{R_j} = \sum_{i=1}^{j} \boldsymbol{\psi_i}$.

По индукции получаем выражение

$$w_j = \frac{\sigma}{(1 - R_{j-1})(1 - R_j)} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_i^{(2)}}{(1 - R_{j-1})(1 - R_j)}, \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{N}}. \qquad (2.3)$$

Оптимизация относительных приоритетов.

Введем критерий эффективности работы СМО:

$$F = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{u}_i\, \boldsymbol{c}_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \boldsymbol{w}_i\, \boldsymbol{c}_i + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{\psi}_i. \qquad (2.6)$$

Здесь $\boldsymbol{c}_i$ – стоимость пребывания требования i-ого класса в единицу времени в системе, а потому F – стоимость пребывания всех требований в единицу времени в системе. Если положить все $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{1}$, то F – среднее число требований в СМО.

Пусть имеем заведомо оптимальную по критерию (2.6) СМО, в которой потоки занумерованы в порядке убывания относительных приоритетов. Если поменять в ней приоритеты j-го и $(j+1)$-го потоков, то величина нашего критерия (2.6) лишь возрастет. Распишем это неравенство, а затем тождественными преобразованиями попытаемся найти закономерности в распределении оптимальных приоритетов:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{j-1} c_i\lambda_i w_i + c_j\lambda_j w_j + c_{j+1}\lambda_{j+1} w_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{N} c_i\lambda_i w_i \le \\ \le \sum_{i=1}^{j-1} c_i\lambda_i w_i + c_{j+1}\lambda_{j+1}\boldsymbol{w'}_{j+1} + c_j\lambda_j \boldsymbol{w'}_j + \sum_{i=j+2}^{N} c_i\lambda_i w_i. \end{gathered} \qquad (2.9)$$

Дальнейшие преобразования дают

$$\boldsymbol{c_j/v_j \ge c_{j+1}/v_{j+1}, j = \overline{1, N-1}} \qquad (2.10)$$

Это значит, что в СМО с оптимальными по (2.6) относительными приоритетами потоки занумерованы в порядке убывания индексов $\boldsymbol{c_j/v_j, j = \overline{1, N}}$, имеющих физический смысл скорости извлечения прибором штрафов из СМО, т. е. согласно (2.10) прибор выбирает такое требование из очереди, которое обеспечивает ему максимальную скорость извлечения штрафов из СМО.

Разработанная программа.

```
N = [1, 2, 3]
disp = 0.5

# начальные условия
# lambdas = [0.2, 0.3, 0.1]
# v = [2, 1, 2]
# c = [3, 2, 1]

# условия при оптимальном приоритете
lambdas = [0.3, 0.2, 0.1]
v = [1, 2, 2]
c = [2, 3, 1]

alpha_2 = [disp + v[i] ** 2 for i in range(len(N))]

mu = []
for i in range(len(mu)):
    mu[i] = 1 / v[i]

psi = [lambdas[i] * v[i] for i in range(len(N))]

R = []
summa = 0
for j in range(len(N)):
    summa += lambdas[j] * v[j]
    R.append(summa)
print("R =", R)

delta = [alpha_2[i] / (2 * v[i]) for i in range(len(N))]

sigma = sum(psi[i] * delta[i] for i in range(len(N)))

w = []
for j in range(len(N)):
    if j == 0:
        w.append((0.5 * sum([lambdas[i] * alpha_2[i] for i in range(len(N))])) / (1 - R[0]))
    else:
        w.append((0.5 * sum([lambdas[i] * alpha_2[i] for i in range(len(N))])) / ((1 - R[j - 1]) * (1 - R[j])))
print("Средняя продолжительность ожидания в каждой из 3-х очередей w =", w)

# среднее время ожидания произвольно выбранного заказа
w_random = sum([w[i] * lambdas[i] / sum(lambdas) for i in range(len(N))])
print("Среднее время ожидания произвольно выбранного заказа: ", w_random)

b = [lambdas[i] * w[i] for i in range(len(N))]
for i in range(len(b)):
    print('Среднее число заказов, находящихся в', i + 1, '-й', 'очереди равно', b[i])

avg_queue_len = sum(b)
print("Среднее число (по обслуживающей системе) находящихся в очереди заказов:", avg_queue_len)

F = sum([lambdas[i] * w[i] * c[i] for i in range(len(N))]) + sum([c[i] * psi[i] for i in range(len(N))])
print("F =", F)

c_div_v = [c[j] / v[j] for j in range(len(N))]
print("Скорости извлечения прибором штрафов из СМО: ", c_div_v)
```

Результат для приоритета [1, 2, 3]:

```
R = [0.4, 0.7, 0.8999999999999999]
Средняя продолжительность ожидания в каждой из 3-х очередей w = [1.5, 4.999999999999999, 29.99999999999997]
Среднее время ожидания произвольно выбранного заказа:  7.999999999999995
Среднее число заказов, находящихся в 1 -й очереди равно 0.30000000000000004
Среднее число заказов, находящихся в 2 -й очереди равно 1.4999999999999998
Среднее число заказов, находящихся в 3 -й очереди равно 2.9999999999999973
Среднее число (по обслуживающей системе) находящихся в очереди заказов: 4.799999999999997
F = 8.899999999999997
Скорости извлечения прибором штрафов из СМО:  [1.5, 2.0, 0.5]
```

Результат для приоритета [2, 1, 3]:

```
R = [0.3, 0.7, 0.8999999999999999]
Средняя продолжительность ожидания в каждой из 3-х очередей w = [1.2857142857142858, 4.285714285714286, 29.99999999999997]
Среднее время ожидания произвольно выбранного заказа:  7.071428571428568
Среднее число заказов, находящихся в 1 -й очереди равно 0.38571428571428573
Среднее число заказов, находящихся в 2 -й очереди равно 0.8571428571428572
Среднее число заказов, находящихся в 3 -й очереди равно 2.9999999999999973
Среднее число (по обслуживающей системе) находящихся в очереди заказов: 4.24285714285714
F = 8.34285714285714
Скорости извлечения прибором штрафов из СМО:  [2.0, 1.5, 0.5]
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания $M_N / GI_N / 1$ с относительными приоритетами были получены следующие результаты:

- средняя продолжительность ожидания в каждой из трёх очередей:
  - в 1-й очереди — 1.2857;
  - во 2-й очереди — 4.2857;
  - в 3-й очереди — 29.9999;
- среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание равно 7.0714;
- средняя длина очереди равна 4.2429;
- среднее число заказов в 1-й очереди равно 0.3857;
- среднее число заказов в 2-й очереди равно 0.8571;
- среднее число заказов в 3-й очереди равно 2.9999.

Так же было определено, что исходный порядок назначения приоритетов не является оптимальным. Оптимальным является следующий порядок: 2, 1, 3.