МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №5

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 5. Анализ систем массового обслуживания с переменным числом обслуживающих приборов.

Задача. На крупном предприятии имеется инструментальная кладовая, в которой рабочим выдается всевозможный инструмент. Для сокращения непроизводительного простоя при получении инструмента определено, что наибольшее число рабочих, которые могут стоять в очереди не должно превышать определенного числа N человек. Время, затрачиваемое кладовщиком на выдачу инструмента одному рабочему, случайное и зависит от ряда факторов: количества запрашиваемого инструмента, места хранения его в кладовой, усталости кладовщика, его сноровки и т. д. У окошка для выдачи всегда находится не менее одного кладовщика, даже в случае, если нет рабочих. Если в очереди появляется более N рабочих, то подключается к выдаче ещё один кладовщик и т. д. В остальное время, т. е. когда очередь меньше N рабочих, свободные от выдачи инструмента кладовщики выполняют ряд подготовительных работ: получение на складе инструмента, который нужно обновить в кладовой, оформление учетных документов, проверка исправного состояния инструмента и др.

Требуется вычислить: а) вероятность того, что у раздаточного окна инструментальной кладовой никого из рабочих нет, и дежурный кладовщик свободен от выдачи; б) вероятности того, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, …, 7 кладовщиков; в) вероятности того, что очередь не будет превышать N человек при условии, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, …, 7 кладовщиков; г) среднее число занятых кладовщиков; д) среднее число рабочих, ожидающих в очереди; е) среднее время пребывания рабочих в очереди в ожидании выдачи инструмента.

Требуется определить, сколько в среднем необходимо кладовщиков, чтобы обеспечить обслуживание рабочих в заданных условиях с гарантийной вероятностью не ниже $\alpha/100$, т.е. чтобы в α случаях из 100 очередь в инструментальную кладовую не превышала N человек.

Вариант 1. Наибольшее число рабочих, которые могут стоять в очереди, не должно превышать 2 человек. Опыт показал, что в среднем за инструментом обращается 2 человека в минуту. В среднем время выдачи инструментов кладовщиком одному рабочему составляет 0,5 мин. Необходимо, чтобы в 95 случаях из 100 очередь в инструментальную кладовую не превышала 2 человек.

Метод анализа СМО с переменным числом обслуживающих приборов

Рассмотрим систему с пуассоновским входящим потоком с интенсивностью λ и экспоненциальным распределением времени обслуживания с параметром μ. Минимальное число приборов равно единице и растет с увеличением числа ожидающих требований. Число приборов увеличивается только после того, как достигается максимально допустимая длина очереди, т. е. как только число требований, находящихся в очереди, становится больше N, новый прибор приступает к обслуживанию требования, стоящего в очереди первым. Если ожидающих требований нет, то по окончании обслуживания число приборов уменьшается, и только один прибор остается готовым к обслуживанию все время.

Обозначим $p(\kappa,n)$, $\kappa=1,2,3,\ldots$, $n=0,1,2,\ldots,N$, – стационарная вероятность того, что в очереди находится n требований и κ требований обслуживается (число таких требований равно числу действующих приборов).

Для данной системы массового обслуживания имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний:

$$-\lambda p(0,0)+\mu p(1,0)=0;$$

$$-(\lambda+\mu)p(1,0)+\lambda p(0,0)+\mu p(1,1)+2\mu p(2,0)=0;$$

$$-(\lambda+\kappa\mu)p(\kappa,0)+\kappa\mu p(\kappa,1)+(\kappa+1)\mu p(\kappa+1,0)=0,\ \kappa=2,3,\ldots;$$

$$-(\lambda+\kappa\mu)p(\kappa,n)+\lambda p(\kappa,n-1)+\kappa\mu p(\kappa,n+1)=0,\ \kappa=1,2,3,\ldots,\ n=1,2,\ldots,N-1;$$

$$-(\lambda+\kappa\mu)p(\kappa,N)+\lambda p(\kappa-1,N)+\lambda p(\kappa,N-1)=0,\ \kappa=1,2,3,\ldots.$$

Обозначим $\alpha=\dfrac{\lambda}{\mu}$.

Тогда из первого уравнения системы очевидно, что

$$p(1,0) = \alpha p(0,0).$$

Выражение для $p(\kappa, n)$, $\kappa = 2,3,\ldots$, имеет вид:

$$p(\kappa, n) = \frac{\alpha^{\kappa+N}}{\kappa! \sum_{i=0}^{N} \alpha^i} p(0,0), \; n = 0,1,2,\ldots,N.$$

Выражение для $p(1, n)$ имеет вид:

$$p(1, n) = \frac{\alpha^{n+1} \sum_{i=0}^{N-n} \alpha^i}{\sum_{i=0}^{N} \alpha^i} p(0,0), \; n = 0,1,2,\ldots,N.$$

Нормирующее условие для данной системы имеет вид:

$$p(0,0) + \sum_{n=0}^{N} p(1,n) + \sum_{\kappa=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} p(\kappa, n) = 1.$$

Выражения, дающие зависимость $p(\kappa, n)$ и $p(1, n)$ от $p(0,0)$, можно свести к следующим выражениям, полученным в окончательном виде:

$$p(1, n) = \frac{\alpha \sum_{i=0}^{N-n} \alpha^{-i}}{(N+1)e^{\alpha} + \sum_{i=1}^{N} (N-i+1)\alpha^{-i}},$$

$$p(\kappa, n) = \frac{\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\kappa!}}{(N+1)e^{\alpha} + \sum_{i=1}^{N} (N-i+1)\alpha^{-i}}, \; \kappa = 2,3,\ldots, \; n = 0,1,2,\ldots,N.$$

Математическое ожидание числа требований в системе $\overline{n}$ находится по формуле:

$$\overline{n} = \sum_{n=0}^{N} (n+1) p(1, n) + \sum_{\kappa=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} (n+\kappa) p(\kappa, n).$$

Математическое ожидание числа требований в очереди $\overline{b}$ находится по формуле:

$$\overline{b} = \sum_{n=0}^{N} n p(1, n) + \sum_{\kappa=2}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} n p(\kappa, n).$$

Математическое ожидание числа занятых обслуживающих приборов $\bar{h}$ находится по формуле:

$$\bar{h} = \sum_{n=0}^{N} p(1,n) + \sum_{\kappa=2}^{\infty} \kappa \sum_{n=0}^{N} p(\kappa,n).$$

Код разработанной программы:

```
import numpy as np
from math import exp, factorial

N = 2
lmbd = 2
v = 0.5
mu = 1 / v

alpha = lmbd / mu

def p_1n(_n):
    return ((alpha ** (_n + 1) * sum([alpha ** i for i in range(N - _n + 1)])) /
            (sum([alpha ** i for i in range(N + 1)]))) * p_00


def p_kn(_k):
    return (alpha ** (_k + N) /
            (factorial(_k) * sum([alpha ** i for i in range(N + 1)]))) * p_00
```

```
# а) Вероятность того, что у раздаточного окна никого из рабочих нет, и дежурный кладовщик свободен
summ1 = sum([alpha ** (-i) for i in range(N + 1)])
summ2 = sum([(N - i + 1) * alpha ** (-i) for i in range(1, N + 1)])

p_10 = alpha * summ1 / ((N + 1) * exp(alpha) + summ2)
print("p_10 =", p_10)

p_00 = p_10 / alpha
print("p_00 =", p_00)

# в) Вероятности того, что очередь не будет превышать N человек при условии, что на раздаче
# инструмента будет занято 1, 2, 3, ..., 7 кладовщиков

p1n = [(alpha ** (n + 1)) * sum([alpha ** i for i in range(N + 1 - n)]) * p_00 /
       sum([alpha ** i for i in range(N + 1)]) for n in range(N + 1)]

p = [
    [p1n[0]],
    [p1n[1]],
    [p1n[2]]
]


for i in range(N + 1):
    for k in range(2, 8):
        p[i].append((alpha ** (k + N) * p_00 / (factorial(k) * sum([alpha ** i for i in range(N + 1)]))))

for n in range(N + 1):
    for k in range(len(p[n])):
        print("p(", k + 1, ", ", n, ") =", p[n][k])
    print()


# б) Вероятности того, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, ..., 7 кладовщиков
p = np.array(p)
p_k = [p.transpose()[k].sum() for k in range(7)]
print('\nВероятности того, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, ..., 7 кладовщиков:\n')
for k in range(7):
    print('p(', k, ', n) = ', p_k[k], ', где n = 0,1,2.', sep='')


print("\nНормирующее условие: ", p.sum() + p_00)
```

```python
# г) среднее число занятых кладовщиков

h_ = sum([p_1n(n) for n in range(N + 1)]) + \
     sum([k * sum([p_kn(k) for _ in range(N + 1)]) for k in range(2, 150)])
print('\nM.o. числа занятых кладовщиков:', h_)


# д) среднее число рабочих, ожидающих в очереди

b_ = sum([n * p_1n(n) for n in range(N + 1)]) + \
     sum([sum([n * p_kn(k) for n in range(N + 1)]) for k in range(2, 150)])
print('M.o. числа рабочих в очереди:', b_)


# е) среднее время пребывания рабочих в очереди в ожидании выдачи инструмента

w = b_ / lmbd
print("Среднее время ожидания рабочих в очереди: ", w)

#
a = 95 / 100
c = p_00
k = 0
while c < a:
    c += p_k[k]
    k += 1
print("Чтобы обеспечить обслуживание рабочих в заданных условиях в среднем необходимо", k, "кладовщика.")
```

Результат:

```
p_10 = 0.2689414213699951
p_00 = 0.2689414213699951
p( 1 ,  0 ) = 0.2689414213699951
p( 2 ,  0 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  0 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  0 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  0 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  0 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  0 ) = 1.778713104298909З e-05

p( 1 ,  1 ) = 0.17929428091333008
p( 2 ,  1 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  1 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  1 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  1 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  1 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  1 ) = 1.7787131042989093e-05

p( 1 ,  2 ) = 0.08964714045666504
p( 2 ,  2 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  2 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  2 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  2 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  2 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  2 ) = 1.7787131042989093e-05


Вероятности того, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, ..., 7 кладовщиков:

p(0, n) = 0.5378828427399902, где n = 0,1,2.
p(1, n) = 0.13447071068499755, где n = 0,1,2.
p(2, n) = 0.04482357022833252, где n = 0,1,2.
p(3, n) = 0.01120589255708313, где n = 0,1,2.
p(4, n) = 0.002241178511416626, где n = 0,1,2.
p(5, n) = 0.000373529751902771, где n = 0,1,2.
p(6, n) = 5.336139312896728e-05, где n = 0,1,2.

Нормирующее условие:  0.9999925072368469

M.o. числа занятых кладовщиков: 1.0
M.o. числа рабочих в очереди: 0.5517642977166747
Среднее время ожидания рабочих в очереди:  0.27588214885833734
Чтобы обеспечить обслуживание рабочих в заданных условиях в среднем необходимо 3 кладовщика.
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с переменным числом обслуживающих приборов были получены следующие результаты:

а) вероятность того, что у раздаточного окна инструментальной кладовой никого из рабочих нет, и дежурный кладовщик свободен от выдачи равна 0.2689;

б) вероятности того, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, …, 7 кладовщиков равны

```
p( 1 ,  0 ) = 0.2689414213699951
p( 2 ,  0 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  0 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  0 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  0 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  0 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  0 ) = 1.7787131042989093e-05
```

```
p( 1 ,  1 ) = 0.17929428091333008
p( 2 ,  1 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  1 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  1 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  1 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  1 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  1 ) = 1.7787131042989093e-05

p( 1 ,  2 ) = 0.08964714045666504
p( 2 ,  2 ) = 0.04482357022833252
p( 3 ,  2 ) = 0.01494119007611084
p( 4 ,  2 ) = 0.00373529751902771
p( 5 ,  2 ) = 0.000747059503805542
p( 6 ,  2 ) = 0.00012450991730092367
p( 7 ,  2 ) = 1.7787131042989093e-05
```

в) вероятности того, что очередь не будет превышать N человек при условии, что на раздаче инструмента будет занято 1, 2, 3, …, 7 кладовщиков равны

```
p(0, n) = 0.5378828427399902, где n = 0,1,2.
p(1, n) = 0.13447071068499755, где n = 0,1,2.
p(2, n) = 0.04482357022833252, где n = 0,1,2.
p(3, n) = 0.01120589255708313, где n = 0,1,2.
p(4, n) = 0.002241178511416626, где n = 0,1,2.
p(5, n) = 0.000373529751902771, где n = 0,1,2.
p(6, n) = 5.336139312896728e-05, где n = 0,1,2.
```

г) среднее число занятых кладовщиков равно 1;

д) среднее число рабочих, ожидающих в очереди равно 0.5518;

е) среднее время пребывания рабочих в очереди в ожидании выдачи инструмента равно 0.2759.

Чтобы в 95 случаях из 100 очередь в инструментальную кладовую не превышала 2 человека в среднем необходимо 3 кладовщика.