МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №1

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 1. Анализ системы массового обслуживания $M_N / GI_N / 1$ без приоритетов.

Задача. В ателье индивидуального пошива одежды поступают заказы трех категорий: сверхсрочные, срочные и несрочные. Несмотря на то, что сверхсрочные заказы подлежат реализации вне всякой очереди, а несрочные заказы не принимаются к исполнению ранее срочных, в ателье существует порядок, согласно которому уже начатая работа по заказу любой категории непременно доводится до конца, т. е. не допускается прерывание работы по уже принятому к исполнению заказу, с тем чтобы переключиться на исполнение заказа с более высоким приоритетом. В рассматриваемом случае имеют место три очереди, каждая из которых характеризуется своим приоритетом. Необходимо вычислить среднюю продолжительность ожидания в каждой из трёх очередей; среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание; среднюю длину очереди для каждого уровня приоритета; среднее число (по обслуживающей системе) находящихся в очереди заказов. Сравнить полученные результаты с результатами для системы без приоритетов. Определить, является ли оптимальным порядок назначения приоритетов заказов при условии, что их стоимостные коэффициенты равны: $c_1 = 3$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$.

Вариант 1. Поступления заказов всех трех категорий распределены во времени в соответствии с законом Пуассона со средними значениями, равными соответственно 0,2, 0,3 и 0,1 заказам в день. Допустим, что длительности исполнения заказов разных категорий имеют нормальное распределение с математическими ожиданиями 2, 1, 2 дней соответственно (дисперсия равна 0,5 дня).

Метод анализа системы $M_N / GI_N / 1$ без приоритетов.

Пусть λ — интенсивность поступления требований в СМО, а ν — среднее время обслуживания требования. Эти параметры являются исходными для рассматриваемой СМО.

Пусть P_0 — стационарная вероятность того, что в произвольный момент времени прибор свободен. Интенсивность обслуживания требований работающим прибором есть $\mu = 1 / \nu$, а интенсивность входящего потока требований в произвольный момент времени независимо от состояния прибора равна $\mu(1 - P_0)$, где $(1 - P_0)$ — вероятность того, что прибор работает. Тогда имеем

$$\lambda = \mu(1 - P_0).$$

Отсюда $P_0 = 1 - \psi$, где $\psi = \lambda / \mu = \lambda\nu$. В стационарном режиме $\psi < 1$; ψ принято называть *коэффициентом использования прибора.*

Если в систему поступают требования N классов с интенсивностями λ_i и средними временами обслуживания v_i, $\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}}$, то стационарная вероятность незанятости прибора равна

$$\boldsymbol{P_0} = \mathbf{1} - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi_i} = \mathbf{1} - \boldsymbol{R_N}.$$

Здесь $\boldsymbol{\psi_i} = \lambda_i v_i$ – коэффициент использования прибора i-ми требованиями (требованиями i-ого класса), а $\boldsymbol{R_N} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi_i} < 1$ – коэффициент использования прибора любыми требованиями.

Среднее время пребывания требования в системе (u) складывается из среднего времени ожидания в очереди (w) и среднего времени обслуживания (v), т. е. $u = w + v$.

Среднее число требований в системе (n) складывается из среднего числа требований в очереди (b) и среднего числа требований на приборе ($\psi < 1$), т. е. $n = b + \psi$.

Связь между перечисленными величинами имеет вид $n = \lambda u$, $b = \lambda$. Данные соотношения называются формулами Литтла.

Если в систему поступают требования N классов, то для каждого потока аналогично имеем

$$\boldsymbol{n_i} = \lambda_i \boldsymbol{u_i},\ \boldsymbol{b_i} = \lambda_i \boldsymbol{w_i}, \boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{N}}.$$

Средние очереди в системе $M_N / GI_N / 1$.

Для нахождения данной характеристики необходимо вычислить сначала среднее время ожидания требования в очереди w.

Для этого заметим некоторое требование и проследим за его движением. В момент поступления в СМО оно застанет в очереди в среднем $b = \lambda w$ требований и на приборе – в среднем $\psi < 1$ требований.

Перед тем как замеченное требование поступит на прибор, должно быть дообслужено требование на приборе. Это займет в среднем $\psi\Delta$ единиц времени. Поскольку должны быть обслужены все требования из очереди, то это составит в среднем $\lambda w v$ единиц времени. Поэтому $w = \lambda w v + \psi\Delta$. Отсюда

$$w = \frac{\psi\Delta}{1-\psi} = \frac{\frac{1}{2}\lambda v^{(2)}}{1-\psi}.$$

Данное выражение известно в литературе как формула Полячека-Хинчина.

В СМО с N классами требований, которые обслуживаются в порядке поступления, по аналогичным соображениям

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{R}_N + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi}_i \Delta_i \,, \quad \text{откуда} \quad \boldsymbol{w} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \, v_i^{(2)}}{1 - \boldsymbol{R}_N},$$

где $\boldsymbol{R}_N = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\psi}_i < 1$.

Далее очевидно:

$$b_i = \lambda_i \boldsymbol{w}, \ \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \,.$$

Разработанная программа.

```
lambdas = [0.2, 0.3, 0.1]
v = [2, 1, 2]
mu = [0, 0, 0]
c = [3, 2, 1]
disp = 0.5

for i in range(len(mu)):
    mu[i] = 1 / v[i]

# второй момент длительности обслуживания
alpha_2 = [disp + v[i] ** 2 for i in range(len(lambdas))]

sum_lambda_v = sum([lambdas[i] * alpha_2[i] for i in range(len(lambdas))])
R_n = sum([lambdas[i] / mu[i] for i in range(len(lambdas))])

w = 0.5 * sum_lambda_v / (1 - R_n)
print('Средняя продолжительность ожидания в каждой из 3-х очередей равна', w)
print('Среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание равно', w)

b = [lambdas[i] * w for i in range(len(lambdas))]
for i in range(len(b)):
    print('Среднее число заказов, находящихся в', i + 1, '-й', 'очереди равно', b[i])

avrg_queue_len = sum(b)
print('Средняя длина очереди равна', avrg_queue_len)

cost_function = sum(c[i] * b[i] for i in range(len(c)))
print('Значение функции стоимости:', cost_function)
```

Результат.

```
Средняя продолжительность ожидания в каждой из 3-х очередей равна 8.999999999999993
Среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание равно 8.999999999999993
Среднее число заказов, находящихся в 1 -й очереди равно 1.7999999999999987
Среднее число заказов, находящихся в 2 -й очереди равно 2.699999999999998
Среднее число заказов, находящихся в 3 -й очереди равно 0.8999999999999994
Средняя длина очереди равна 5.399999999999996
Значение функции стоимости: 11.69999999999999
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания $M_N / GI_N / 1$ были получены следующие результаты:

- средняя продолжительность ожидания в каждой из трёх очередей одинакова, так как отсутствуют приоритеты, и равна 8.9;
- среднее время ожидания произвольно выбранного заказа на обслуживание также равно 8.9, так как при отсутствии приоритетов среднее время ожидания будет одинаковым для всех заказов;
- средняя длина очереди равна 5.39;
- среднее число заказов в 1-й очереди равно1.79;
- среднее число заказов в 2-й очереди равно 2.69;
- среднее число заказов в 3-й очереди равно 0.89;
- функция стоимости принимает значение 11.69.