МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №2

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 2. Анализ систем массового обслуживания с ограничением на длину очереди и с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы или длительность пребывания требований в системе.

Задача. На овощную базу поступают овощи нового урожая. Для обеспечения длительного хранения они проходят стадию обработки. До обработки они хранятся на площадке под открытым небом, которая вмещает 5 тонн овощей. В зависимости от погоды и состояния овощи после транспортировки могут храниться без существенной потери качества определенное время. На базу овощи поступают с близлежащих хозяйств неравномерно, и поэтому в первом приближении можно считать поступающий поток овощей пуассоновским. На базе работает несколько бригад по предварительной обработке овощей перед закладкой их на длительное хранение. Необходимо оценить работу базы по принятию овощей на длительное хранение, а именно, определить: а) вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей; б) вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны; в) среднее число бригад, занятых обработкой овощей; д) среднее число тонн овощей, обработанных за сутки, и среднее число тонн овощей, потерянных за сутки из-за их несвоевременной обработки; е) среднее число тонн овощей, ожидающих обработки.

Определить необходимое количество бригад, чтобы потери привезенных овощей из-за несвоевременной их обработки составляли не более 10%.

Вариант 1. Овощи после транспортировки могут храниться без существенной потери качества не больше 1 суток. В среднем на базу в течение декады (10 дней) прибывает до 25 автомашин овощей грузоподъемностью 2 тонны. На базе работает 2 бригады по обработке овощей. Каждая бригада способна переработать за сутки до 4 тонн овощей.

Метод анализа СМО с ограничением на длину очереди и с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы

Рассмотрим обобщение описанной в подразделе 1.1 системы массового обслуживания. Особенность рассматриваемой системы в том, что всякое вновь поступающее требование, застав все приборы уже занятыми обслуживанием, покидает систему, если уже имеется очередь, в которой находится не менее B требований, и находящееся в очереди системы требование покидает ее, если оно простояло в ожидании более времени $1/\nu$ в среднем.

Возможные состояния системы описываются системой дифференциальных уравнений, которую можно получить из системы (1.1), если наложить ограничение на длину очереди:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t),\ 1 \le n \le \kappa - 1;$$
$$\frac{dp_\kappa(t)}{dt} = -(\lambda + \kappa\mu)p_\kappa(t) + \lambda p_{\kappa-1}(t) + (\kappa\mu + \nu)p_{\kappa+1}(t);$$
$$\frac{dp_{\kappa+s}(t)}{dt} = -(\lambda + \kappa\mu + s\nu)p_{\kappa+s}(t) + \lambda p_{\kappa+s-1}(t) + (\kappa\mu + (s+1)\nu)p_{\kappa+s+1}(t),\quad 1 \le s < B;$$
$$\frac{dp_{\kappa+B}(t)}{dt} = -(\kappa\mu + B\nu)p_{\kappa+B}(t) + \lambda p_{\kappa+B-1}(t).$$

При стационарном режиме ($t \to \infty$) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&-\alpha p_0 + p_1 = 0; \\
&-(\alpha + n)p_n + \alpha\, p_{n-1} + (n+1)p_{n+1} = 0,\ 1 \le n \le \kappa - 1; \\
&-(\alpha + \kappa)p_\kappa + \alpha\, p_{\kappa-1} + (\kappa + \beta)p_{\kappa+1} = 0; \\
&-(\alpha + \kappa + s\beta)p_{\kappa+s} + \alpha\, p_{\kappa+s-1} + (\kappa + (s+1)\beta)p_{\kappa+s+1} = 0,\ 1 \le s < B; \\
&-(\kappa + B\beta)p_{\kappa+B} + \alpha p_{\kappa+B-1} = 0,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где α и β определяются по формулам (1.7).

Нормирующее условие запишется в виде

$$\sum_{n=0}^{\kappa+B} p_n = 1. \tag{1.16}$$

В результате решения системы уравнений (1.15), (1.16) получим:

$$p_n = \frac{\alpha^n}{n!}p_0,\ 0 < n \le \kappa;$$

$$p_{\kappa+s} = \frac{\alpha^{\kappa+s}}{\kappa!\prod_{m=1}^{s}(\kappa + m\beta)}p_0,\ 1 \le s \le B;$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\kappa}\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^\kappa}{\kappa!}\sum_{s=1}^{B}\frac{\alpha^s}{\prod_{m=1}^{s}(\kappa + m\beta)}}.$$

Вероятность отказа в обслуживании

$$p_{ОТК} = \frac{\alpha - \kappa + \sum_{n=0}^{\kappa}(\kappa - n)p_n}{\alpha}.$$

Остальные стационарные характеристики вычисляются аналогично характеристикам системы, рассмотренной в подразделе 1.1.

Код разработанной программы:

```
import numpy as np
from math import exp, factorial
```

```
def product(k, s, beta):
    temp = 1
    for m in range(1, s + 1):
        temp *= (k + m * beta)
    return temp
```

```
def get_p_0(k, alpha, beta, B):
    temp1 = sum([alpha ** n / factorial(n) for n in range(0, k + 1)])
    temp2 = alpha ** k / factorial(k)
    temp3 = sum([alpha ** s / product(k, s, beta) for s in range(1, B + 1)])
    return 1 / (temp1 + temp2 * temp3)
```

```
def get_p_n(n, alpha, p_0):
    return (alpha ** n / factorial(n)) * p_0
```

```
def get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0):
    temp = (alpha ** (k + s)) / (factorial(k) * product(k, s, beta))
    return temp * p_0
```

```
v = 1
lambda_ = 5
mu = 4
k = 2
B = 5

alpha = lambda_ / mu
beta = v / mu

# а) вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей;
p_0 = get_p_0(k, alpha, beta, B)

print('Вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей:', p_0)

# б) вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны;
p_otk = (alpha - k + sum([(k - n) * get_p_n(n, alpha, p_0) for n in range(0, k + 1)])) / alpha

print('Вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны:', p_otk)

# в) среднее число бригад, занятых обработкой овощей;
h = sum([n * get_p_n(n, alpha, p_0) for n in range(1, k + 1)]) + \
    k * sum([get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0) for s in range(1, B + 1)])

print('Среднее число бригад, занятых обработкой овощей:', h)

# г) доля бригад, простаивающих или занятых обработкой овощей;
g = k - h
k_g = g / k
k_w = 1 - k_g

print('Доля простаивающих бригад:', k_g)
print('Доля бригад, занятых обработкой:', k_w)
```

```
# д.1) среднее число тонн овощей, обработанных за сутки;
avg_sv = lambda_ * (1 - p_otk)

print('Среднее число тонн овощей, обработанных за сутки:', avg_sv)

# д.2) среднее число тонн овощей, потерянных за сутки;
avg_lv = lambda_ * p_otk

print('Среднее число тонн овощей, потерянных за сутки:', avg_lv)
```

```python
# е) среднее число тонн овощей, ожидающих обработки;
b = sum([s * get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0) for s in range(1, B + 1)])

print('Среднее число тонн овощей, ожидающих обработки:', b)

# необходимое количество бригад, чтобы потери привезенных овощей составляли не более 10%.
required_prob = 0.1
while p_otk >= required_prob:
    k += 1
    p_0 = get_p_0(k, alpha, beta, B)
    p_otk = (alpha - k + sum([(k - n) * get_p_n(n, alpha, p_0) for n in range(0, k + 1)])) / alpha

print(f"Чтобы потери привезенных обощей составляли не более 10%, необходимо {k} бригад.")
```

Результат:

```
Вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей: 0.2605629904259677
Вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны: 0.07746377510751597
Среднее число бригад, занятых обработкой овощей: 1.1531702811156048
Доля простаивающих бригад: 0.4234148594421976
Доля бригад, занятых обработкой: 0.5765851405578024
Среднее число тонн овощей, обработанных за сутки: 4.61268112446242
Среднее число тонн овощей, потерянных за сутки: 0.3873188755375798
Среднее число тонн овощей, ожидающих обработки: 0.36672381877299065
Чтобы потери привезенных обощей составляли не более 10%, необходимо 2 бригады.
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с ограничением на длину очереди и с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы были получены следующие результаты:

а) Вероятность того, что все бригады будут сидеть без дела из-за отсутствия овощей равна 0,2606;
б) Вероятность того, что привезенные овощи не будут своевременно обработаны равна 0,0775;
в) Среднее число бригад, занятых обработкой овощей равно 1,1532;
г) Доля простаивающих бригад равна 0,4234, а доля бригад, занятых обработкой овощей, равна 0,5766 соответственно;
д) Среднее число тонн овощей, обработанных за сутки, и среднее число тонн овощей, потерянных за сутки, равны 4,6127 и 0,3873 соответственно;
е) Среднее число тонн овощей, ожидающих обработки, равно 0,3667.

Чтобы потери привезенных овощей из-за несвоевременной их обработки составляли не более 10%, необходимо 2 бригады.