МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №4

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 4. Анализ систем массового обслуживания, состоящих из параллельных приборов с различными интенсивностями обслуживания.

Задача. В магазине два продавца обслуживают покупателей. В зависимости от количества товаров, их особенностей и многих других причин на обслуживание каждого покупателя продавец затрачивает случайное время. Положим, что оно подчиняется экспоненциальному закону распределения с заданным параметром. Однако опыт у продавцов разный, поэтому первый продавец в среднем обслуживает покупателей быстрее, чем второй. Появления покупателей – явления случайные, независимые друг от друга, и можно полагать, что они образуют пуассоновский поток.

Требуется оценить работу магазина, а именно вычислить: а) долю рабочего времени, когда оба продавца будут свободны (заняты); б) вероятность того, что первый продавец занят обслуживанием покупателей, а второй свободен (и наоборот); в) вероятность того, что в магазине больше 3 покупателей; г) среднее число покупателей, находящихся в магазине; д) среднее время ожидания покупателя в очереди; е) среднее время пребывания покупателя в магазине.

Вариант 1. Первый продавец обслуживает в среднем 9 покупателей в час, а второй – 6 покупателей. Интенсивность потока покупателей в магазин равна 12 покупателям в час. Выбор покупателями продавцов равновероятен.

Метод анализа СМО с ожиданием и двумя неодинаковыми приборами

Рассмотрим случай, когда система массового обслуживания с ожиданием состоит из приборов разной производительности. Примеров подобных систем можно привести много. Однако математический аппарат оценки функционирования подобных систем не разработан, и не потому, что это вызывает теоретические трудности, а потому, что это связано с громоздкими выкладками. В этом подразделе рассмотрен случай, когда система массового обслуживания с ожиданием состоит из двух приборов разной производительности. Положим, что первый прибор имеет более высокую производительность, чем второй, т. е. $\mu_1 > \mu_2$, где μ_1 и μ_2 – параметры экспоненциального закона распределения времени обслуживания требований соответственно для первого и второго приборов.

Пусть в систему поступает пуассоновский поток требований на обслуживание с параметром λ. Каждое требование, поступившее в сферу обслуживания, сразу же начинает обслуживаться свободным прибором. Если оба прибора свободны, то оно попадает на обслуживание в первый прибор с вероятностью φ, а на второй – с вероятностью $1-\varphi$. Это означает, что при $\varphi=0{,}5$ требование безразлично к выбору прибора, при $\varphi=1$ первый прибор пользуется безусловным приоритетом. Если требование застанет оба прибора занятыми, то оно становится в очередь.

Уравнения, описывающие состояния системы в момент времени t, записываются в виде:

$$\frac{dP_{00}(t)}{dt}=-\lambda P_{00}(t)+\mu_1 P_{10}(t)+\mu_2 P_{01}(t),$$

$$\frac{dP_{01}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu_2)P_{01}(t)+\mu_1 P_2(t)+(1-\varphi)\lambda P_{00}(t),$$

$$\frac{dP_{10}(t)}{dt}=-(\lambda+\mu_1)P_{10}(t)+\mu_2 P_2(t)+\varphi\lambda P_{00}(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_n(t)+(\mu_1+\mu_2)P_{n+1}(t)+\lambda P_{n-1}(t),\ n\ge 2.$$

Решение этой системы уравнений для стационарного режима принимает вид:

Решение этой системы уравнений для стационарного режима принимает вид:

$$p_{01}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}(\alpha+1-\varphi)p_{00},$$

$$p_{10}=\frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot(1+\beta)(\alpha+\varphi)p_{00},$$

$$p_2=\frac{\alpha^2}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}(1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi)p_{00},$$

$\ldots$

$$p_n = \frac{\alpha^n}{1+2\alpha} \cdot \frac{1+\beta}{\beta}(1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi)\,p_{00},$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} < 1, \ \beta = \frac{\mu_2}{\mu_1} < 1;$$

p_{00} – вероятность того, что оба прибора свободны;

p_{10} – вероятность состояния системы, в котором первый прибор занят обслуживанием, а второй свободен;

p_{01} – вероятность состояния системы, в котором первый прибор свободен, а второй занят обслуживанием;

p_n – вероятность того, что в системе находятся n требований.

Тогда имеем:

1. Вероятность состояния системы, при котором оба прибора свободны, равна (из условия нормировки)

$$p_{00} = \frac{1-\alpha}{1+\dfrac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\beta}(1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi)}.$$

2. Среднее число требований, находящихся в системе, равно

$$\overline{n} = \frac{\alpha(1+\beta)}{1-\alpha}\frac{1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi}{\beta(1+2\alpha)+\alpha(1+(1+\beta^2)\alpha-(1-\beta^2)\varphi)}.$$

3. Вероятность того, что оба прибора системы заняты обслуживанием,

$$\Pi_2 = 1 - p_{00} - p_1,$$

где $p_1 = p_{10} + p_{01}$,

$$p_1 = \frac{\alpha}{1+2\alpha}\cdot\frac{1+\beta}{\beta}(1+(1+\beta)\alpha-(1-\beta)\varphi)\,p_{00}.$$

4. Вероятность того, что число требований в системе больше некоторой величины m,

$$p_{>m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1 - \sum_{n=0}^{m} p_n =$$

$$= 1 - \{1 + \frac{1}{1+2\alpha} \frac{\alpha(\alpha^m - 1)}{\alpha - 1} \cdot \frac{1+\beta}{\beta}(1 + (1+\beta)\alpha - (1-\beta)\varphi)\} p_{00}.$$

Код разработанной программы:

```
mu1 = 9
mu2 = 6
lmbd = 12
phi = 0.5

alpha = lmbd / (mu1 + mu2)
beta = mu2 / mu1
print("alpha =", alpha, "beta =", beta)

# а) доля рабочего времени, когда оба продавца будут свободны
mem1 = alpha / ((1 + 2 * alpha) * beta)
mem2 = (1 + (1 + beta ** 2) * alpha - (1 - beta ** 2) * phi)

p00 = (1 - alpha) / (1 + mem1 * mem2)
print("p00 =", p00)

# доля рабочего времени, когда оба продавца будут заняты
p1 = mem1 * (1 + beta) * (1 + (1 + beta) * alpha - (1 - beta) * phi) * p00
print("p1 =", p1)

p_both_busy = 1 - p00 - p1
print("p_both_busy =", p_both_busy)

# б) вероятность того, что первый продавец занят, а второй свободен
p10 = alpha * (1 + beta) * (alpha + phi) * p00 / (1 + 2 * alpha)
print("p10 =", p10)

# вероятность того, что первый продавец свободен, а второй занят
p01 = mem1 * (1 + beta) * (alpha + 1 - phi) * p00
print("p01 =", p01)

# в) вероятность того, что в магазине больше 3-х покупателей
m = 3
mem3 = (1 + (1 + beta) * alpha - (1 - beta) * phi)
mem6 = (alpha * (alpha ** m - 1) * (1 + beta) / ((1 + 2 * alpha) * (alpha - 1) * beta))

p_m = 1 - (1 + mem6 * mem3) * p00
print("p_m =", p_m)

# г) среднее число покупателей в магазине
mem4 = alpha * (1 + beta) / (1 - alpha)
mem5 = (beta * (1 + 2 * alpha) + alpha * (1 + (1 + beta ** 2) * alpha - (1 - beta ** 2) * phi))
```

```python
n_ = mem4 * (mem3 / mem5)
print("n_ =", n_)

# д) среднее время ожидания покупателя в очереди
h = p1 + 2 * (1 - p00 - p1)

b = n_ - h
print("b =", b)

w = b / lmbd
print("w =", w)

# е) среднее время пребывания покупателя в магазине
u = n_ / lmbd
print("u =", u)
```

Результат:

```
alpha = 0.8 beta = 0.6666666666666666
p00 = 0.10714285714285711
p1 = 0.17857142857142846
p_both_busy = 0.7142857142857144
p10 = 0.07142857142857141
p01 = 0.10714285714285711
p_m = 0.4571428571428573
n_ = 4.464285714285714
b = 2.857142857142857
w = 0.2380952380952381
u = 0.37202380952380953
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с ожиданием и двумя неодинаковыми приборами были получены следующие результаты:

а) доля рабочего времени, когда оба продавца будут свободны равна 0.1071, а доля рабочего времени, когда оба продавца будут заняты равна 0.7143;
б) вероятность того, что первый продавец занят обслуживанием, а второй свободен равна 0.0714, а вероятность того, что первый продавец свободен, а второй занят обслуживанием равна 0.1071;
в) вероятность того, что в магазине больше 3х покупателей равна 0.4571;
г) среднее число покупателей, находящихся в магазине равно 4.4643;
д) среднее время ожидания покупателя в очереди равно 0.2381;
е) среднее время пребывания покупателя в магазине равно 0.372.