МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №6

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2021 г.

Задание 6. Анализ систем массового обслуживания с неординарными входящими потоками и потерей требований.

Задача. Назначение вычислительной машины – обработка сообщений, которые поступают группами фиксированного или случайного размера. Поток групп сообщений является пуассоновским. Поступающие сообщения, застав все каналы обработки информации машины занятыми, теряются. Время обработки одного сообщения является случайным. Пусть оно подчинено экспоненциальному закону. Требуется оценить эффективность функционирования вычислительной машины, а именно, вычислить: а) вероятность потери информации; б) математическое ожидание числа каналов, занятых обработкой информации; в) коэффициент загрузки вычислительной машины; г) коэффициент простоя каналов обработки информации.

Определить, сколько каналов обработки информации должна иметь вычислительная машина, чтобы вероятность потери информации была не более 5%.

Требуется для рассматриваемой системы обслуживания выписать систему линейных алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний.

Вычислить стационарные вероятности всех состояний системы массового обслуживания.

Вариант 1. Среднее время обработки одного сообщения равно 0,2 сек. Вычислительная машина имеет 5 каналов обработки информации. Число сообщений в группе постоянное и равно 3 сообщениям. Интенсивность входящего потока равна 5 групп сообщений в сек.

Метод анализа СМО с неординарными входящими потоками и потерей требований

Ранее рассматривалось использование математического аппарата теории массового обслуживания, разработанного применительно к ординарным потокам требований. Однако в практике возможны случаи, когда требования на обслуживание поступают в систему группами – парами, тройками либо группами со случайным числом требований в каждой. Придя в систему массового обслуживания, каждое из требований группы либо обслуживается, либо получает отказ, в зависимости от занятости обслуживающих приборов.

Для решения подобных задач разработан математический аппарат, который получен при следующих допущениях:

– поток групп требований пуассоновский;

– длительность обслуживания каждого требований в группе подчинено экспоненциальному закону;

– выбор требования в группе производится случайно, по закону равной вероятности.

Как и для случая ординарного пуассоновского потока, справедливо утверждение, что зависимости, получаемые для стационарного решения, не зависят от распределения длительности обслуживания, если входящий поток групп требований является пуассоновским.

4.1.1. Случай постоянного числа требований в группе

Обозначим:

m – число требований в группе;

λ – интенсивность потока групп требований;

$1/\mu$ – средняя длительность обслуживания каждого требования;

$$\alpha = \lambda / \mu ;$$

κ $(\kappa \geq m)$ – число обслуживающих приборов в системе.

Получены следующие рекуррентные зависимости для нахождения стационарных вероятностей состояний системы:

$\alpha p_0 = p_1$;

$(n+\alpha)p_n = (n+1)p_{n+1}$, $1 \leq n < m$;

$(n+\alpha)p_n = (n+1)p_{n+1} + \alpha p_{n-m}$, $m \leq n < \kappa$;

$(\kappa+\alpha)p_\kappa = \alpha\, p_{\kappa-m}$.

Значение величины p_0 определяется из нормирующего условия

$$\sum_{n=0}^{\kappa} p_n = 1.$$

Среднее число занятых приборов

$$\overline{h} = \sum_{n=1}^{\kappa} n p_n ,$$

вероятность отказа в обслуживании

$$p_{OTK} = 1 - \frac{\mu \overline{h}}{\lambda m} = \frac{\overline{h}}{\alpha m} .$$

Код разработанной программы:

```python
import numpy as np
from pprint import pprint
```

```python
def get_p(M, v):
    return np.linalg.solve(M, v)

def get_matrix(k):
    M = [[1] * (k + 1)]

    for i in range(k):
        line = [0] * (k + 1)
        line[i], line[i + 1] = i + 1, -(i + 1)
        if i > 2:
            line[i - 3] = -1

        M.append(line)
    return M
```

```python
k = 5
m = 3
lambd = 5
mu = 5
alpha = lambd / mu
```

```python
M = get_matrix(k)
v = [1] + [0] * k

p = get_p(M, v)
print('Стационарные вероятности состояний системы:')
print(p)
```

```python
# а) вероятность потери информации
h_ = sum([n * p[n] for n in range(k + 1)])
p_otk = 1 - h_ / (alpha * m)
print('Вероятность потери информации:', p_otk)


# б) математическое ожидание числа каналов, занятых обработкой информации
print('М.о. числа каналов, занятых обслуживанеим:', h_)


# в) коэффициент загрузки вычислительной машины
print('Коэффициент загрузки вычислительной машины:', h_ / k)


# г) коэффициент простоя каналов обработки информации
print('Коэффициент простоя каналов обработки информации:', 1 - h_ / k)
```

```python
# Определить, сколько каналов обработки информации должна иметь вычислительная машина,
# чтобы вероятность потери информации была не более 5%

while p_otk >= 0.05:
    k += 1
    M = get_matrix(k)
    v = [1] + [0] * k

    p = get_p(M, v)

    h_ = sum([n * p[n] for n in range(k + 1)])
    p_otk = 1 - h_ / (alpha * m)
    print(f'Вероятность потери информации при {k} каналах равна {p_otk}\n')
```

Результат:

```
Вероятность потери информации: 0.26100628930817615
М.о. числа каналов, занятых обслуживанеим: 2.2169811320754715
Коэффициент загрузки вычислительной машины: 0.4433962264150943
Коэффициент простоя каналов обработки информации: 0.5566037735849056

Вероятность потери информации при 6 каналах равна 0.1759530791788858

Вероятность потери информации при 7 каналах равна 0.11468381564844599

Вероятность потери информации при 8 каналах равна 0.07162818061479648

Вероятность потери информации при 9 каналах равна 0.042817546008315666
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с неординарными входящими потоками и потерей требований были получены следующие результаты:

а) Вероятность потери информации равна 0,26;
б) Математическое ожидание числа каналов, занятых обработкой информации равно 2,22;
в) Коэффициент загрузки вычислительной машины равен 0,44;
г) Коэффициент простоя каналов обработки информации равен 0,56.

Стационарные вероятности всех состояний системы равны соответственно: [0.18867925, 0.18867925, 0.18867925, 0.18867925, 0.14150943, 0.10377358].

Чтобы вероятность потери информации была не более 5%, вычислительная машина должна иметь не менее 9 каналов обработки информации.