МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №7

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель _________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2021 г.

Задание 7. Анализ систем массового обслуживания с неординарными входящими потоками и ожиданием требований.

Задача. В порту имеется несколько причалов, которые оснащены оборудованием для слива нефти с нефтеналивных барж. Производительность оборудования каждого причала такова, что в среднем в течение рабочего дня разгружается 2 баржи. Баржи в порт на разгрузку поступают караванами, каждый из которых состоит из нескольких однотипных (одинаковых по тоннажу) барж. Каждая из барж каравана может разгружаться на любом из свободных причалов. Поток поступления судов пуассоновский. Требуется оценить работу порта, а именно, вычислить: а) среднее число барж, находящихся в порту; б) среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов; в) среднее число занятых причалов; г) коэффициенты загрузки и простоя причалов; д) вероятность отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов; е) долю времени простоя оборудования причалов.

Требуется для рассматриваемой системы обслуживания выписать систему линейных алгебраических уравнений для нахождения стационарных вероятностей состояний.

Вычислить (с заданной точностью) стационарные вероятности состояний системы массового обслуживания.

Вариант 1. В порту имеется 7 причалов. Караван барж состоит из 3 однотипных барж. Интенсивность поступления барж в порт равна 3 караванам в день.

Метод анализа СМО с неординарными входящими потоками и ожиданием требований

Имеется система массового обслуживания с ожиданием, состоящая из κ однотипных приборов. Все приборы обладают одинаковой производительностью, которая характеризуется интенсивностью обслуживания μ. Время обслуживания требования приборами подчиняется экспоненциальному закону распределения, а его среднее значение равно $1/\mu$. В систему поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ групп требований в единицу времени. В каждой группе содержится m $(m \le \kappa)$ требований. Если поступившие в систему требования застанут все приборы занятыми обслуживанием предыдущих требований, то они становятся в очередь. По мере освобождения приборов требования из групп принимаются на обслуживание, но уже случайным образом. Требуется оценить эффективность функционирования системы.

Обозначим вероятности соответствующих состояний системы:

p_0 – вероятность того, что все приборы свободны от обслуживания;

p_n – вероятность того, что n приборов заняты обслуживанием, $0 < n < \kappa$;

p_κ – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием;

$p_{\kappa+s}$ – вероятность того, что все приборы заняты обслуживанием, а s требований ожидают в очереди, $s \geq 1$.

Вероятности возможных состояний системы описываются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu\, p_1(t);$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu\, p_{n+1}(t),\ 1 \leq n < m;$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu) p_n(t) + \lambda p_{n-m}(t) + (n+1)\mu\, p_{n+1}(t),\ m \leq n < \kappa;$$

$$\frac{dp_\kappa(t)}{dt} = -(\lambda + \kappa\mu)\, p_\kappa(t) + \lambda p_{\kappa-m}(t) + \kappa\mu\, p_{\kappa+1}(t);$$

$$\frac{dp_{\kappa+s}(t)}{dt} = -(\lambda + \kappa\mu)\, p_{\kappa+s}(t) + \lambda p_{\kappa+s-m}(t) + \kappa\mu\, p_{\kappa+s+1}(t),\ s \geq 1.$$

Для стационарного режима при $t \to \infty$ эта система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических уравнений:

$$-\lambda p_0 + \mu\, p_1 = 0;$$

$$-(\lambda + n\mu) p_n + (n+1)\mu\, p_{n+1} = 0,\ 1 \leq n < m;$$

$$-(\lambda + n\mu) p_n + \lambda p_{n-m} + (n+1)\mu\, p_{n+1} = 0,\ m \leq n < \kappa;$$

$$-(\lambda + \kappa\mu)\, p_\kappa + \lambda p_{\kappa-m} + \kappa\mu\, p_{\kappa+1} = 0;$$

$$-(\lambda + \kappa\mu) p_{\kappa+s} + \lambda p_{\kappa+s-m} + \kappa\mu\, p_{\kappa+s+1} = 0,\ s \geq 1.$$

К этой системе добавляется еще одно очевидное условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda, \mu) = 1.$$

Отсюда

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda, \mu)}.$$

Величину $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(\lambda, \mu)$ можно получить из рекуррентных формул ранее записанной системы алгебраических уравнений.

При вычислении p_0 требуется найти такое n^*, что $\left| \sum\limits_{n=0}^{n^*} f_n(\lambda, \mu) - \sum\limits_{n=0}^{n^*-1} f_n(\lambda, \mu) \right| < \varepsilon$ (например, $\varepsilon = 0{,}001$); при этом полагаем, что $f_0(\lambda, \mu) = 1$.

Код разработанной программы:

```python
import numpy as np
from pprint import pprint
```

```python
def get_p(M, v):
    return np.linalg.solve(M, v)

def get_matrix(k, s):
    M = [[1] * (k + s + 1)]

    a, b = -3, 2

    for i in range(k + 1):
        if i == k:
            b = 14
        line = [0] * (k + s + 1)
        line[i], line[i + 1] = a, b
        a, b = a - 2, b + 2

        if i >= 3:
            line[i - 3] = 3

        M.append(line)

    for i in range(k + 2, k + s + 1):
        M.append([0] * (i - 4) + [3] + [0] * 2 + [-17, 14] + [0] * (k + s - i))

    return M
```

```python
eps = 0.001
p_pr = 1

k = 7
s = 10

M = get_matrix(k, s)
v = [1] + [0] * (k + s)

p = get_p(M, v)

while abs(p_pr ** (-1) - p[0] ** (-1)) >= eps:
    s += 1
    M = get_matrix(k, s)
    v = [1] + [0] * (k + s)
    p_pr = p[0]
    p = get_p(M, v)


print(f"p = \n{p}")
print(f"s = {s}")
print(f"n = {k + s}")
```

```python
# а) среднее число барж, находящихся в порту
n_ = sum([n * p[n] for n in range(len(p))])
print(f"Среднее число барж, находящихся в порту: {n_}")

# б) среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов
b_ = sum([(n - k) * p[n] for n in range(k + 1, k + s + 1)])
print(f"Среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов: {b_} ")
```

```python
# в) среднее число занятых причалов
h_ = n_ - b_
print(f"Среднее число занятых причалов: {h_}")

# г) коэффициенты загрузки и простоя причалов
print(f"Коэффициент загрузки причалов: {h_ / k}")
print(f"Коэффициент простоя причалов: {1 - h_ / k}")

# д) вероятность отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов
print(f"Вероятность отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов: {sum(p[k + 1:])}")

# е) долю времени простоя оборудования причалов
print(f"Доля времени простоя оборудования причалов: {p[0]}")
```

Результат:

```
p =
[5.48336353e-02 8.22504529e-02 1.02813066e-01 1.19948577e-01
 1.14379536e-01 1.01142354e-01 8.38676167e-02 6.41548943e-02
 5.33924710e-02 4.31603533e-02 3.44373683e-02 2.80693270e-02
 2.26429390e-02 1.82463502e-02 1.47768463e-02 1.19284576e-02
 9.63249731e-03 7.78667169e-03 6.28877713e-03 5.08027417e-03
 4.10479778e-03 3.31582480e-03 2.67876359e-03 2.16415418e-03
 1.74830198e-03 1.41240423e-03 1.14104151e-03 9.21803084e-04
 7.44696178e-04 6.01615880e-04 4.86024673e-04 3.92643585e-04
 3.17203744e-04 2.56258286e-04 2.07022632e-04 1.67246713e-04
 1.35113064e-04 1.09153373e-04 8.81813894e-05 7.12388200e-05
 5.75514820e-05 4.64939339e-05]
s = 34
n = 41
```

```
Среднее число барж, находящихся в порту: 5.930951015343213
Среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов: 1.4314397507218748
Среднее число занятых причалов: 4.499511264621338
Коэффициент загрузки причалов: 0.642787323517334
Коэффициент простоя причалов: 0.3572126764826659 7
Вероятность отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов: 0.27660986785602665
Доля времени простоя оборудования причалов: 0.054833635252586894
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с неординарными входящими потоками и ожиданием требований были получены следующие результаты:

а) Среднее число барж, находящихся в порту равно 5,93;
б) Среднее число барж, ожидающих разгрузки из-за занятости причалов равно 1,43;
в) Среднее число занятых причалов равно 4,5;
г) Коэффициенты загрузки и простоя причалов равны соответственно 0,64 и 0,36;
д) Вероятность отказа в обслуживании барж из-за занятости всех причалов равна 0,28;
е) Доля времени простоя оборудования причалов составляет 0,055.

Стационарные вероятности состояний системы с заданной точностью для n = 41 требований в системе представлены выше.