МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №5

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2021 г.

Задание 5. Анализ систем массового обслуживания с обслуживанием одним прибором требований группами ограниченного размера.

Задача. В парке развлечений расположен аттракцион, стоимость билета на который составляет 50 руб. Время между приходами двух желающих попасть на аттракцион является случайной величиной с экспоненциальным законом распределения. Обслуживание начинается после того, как пришло (или находится в очереди) определенное число человек, совпадающее с вместимостью аттракциона. Длительность обслуживания имеет экспоненциальное распределение. Расходы, связанные с использованием аттракциона в течение времени обслуживания, равны 170 руб. Время работы аттракциона – с 11:00 до 20:00. Требуется оценить эффективность аттракциона, а именно, вычислить: а) среднее время ожидания в очереди; б) вероятность того, что аттракцион простаивает; в) среднее число человек, ожидающих в очереди; г) вероятность ожидания в очереди; д) долю времени, в течение которого аттракцион используется; е) средние значения выручки и прибыли от использования аттракциона.

Расходы на аттракцион определяются как произведение количества рабочего времени, в течение которого аттракцион используется, на расходы, связанные с использованием аттракциона.

Определить, как изменяется средняя прибыль и среднее время ожидания в очереди при различных значениях вместимости аттракциона – от 3 до 10 человек (построить графики зависимостей).

Вариант 1. Среднее время между приходами двух желающих попасть на аттракцион равно 5 мин. Обслуживание начинается после того, как пришло 3 человека, а его средняя продолжительность равна 10 мин.

Метод анализа СМО с обслуживанием группы требований одним прибором

Рассмотрим систему $M/M/1$ с групповым обслуживанием, в которую поступает пуассоновский поток требований интенсивности λ, а интенсивность обслуживания группы требований равна μ. Если после освобождения обслуживающий прибор застает в очереди менее a требований, то он ожидает, пока в очереди не окажется группа ровно из a требований, а затем принимает ее на обслуживание. В противном случае, то есть если после освобождения он застает в очереди не менее a требований, то он принимает на обслуживание b требований, если они есть, или столько требований, сколько находится в очереди. Состояния системы можно представить в виде пар (i,n), где $i = 0,1$ является индикатором, а $n \geq 0$ есть число требований в очереди. Здесь $i = 0$ означает, что обслуживающий прибор свободен, а $i=1$ означает, что он обслуживает группу из s требований ($a \le s \le b$). Обозначим через $p_{i,n}$ стационарную вероятность того, что система находится в состоянии (i,n). Заметим, что $p_{i,n}$ отличны от нуля только при $i=0$, $0 \le n \le a-1$, и $i=1$, $n \ge 0$.

Предположим, что стационарный режим функционирования системы существует. Уравнения для стационарных вероятностей состояний системы будут иметь вид

$$-(\lambda+\mu)p_{1,n} + \lambda\, p_{1,n-1} + \mu\, p_{1,n+b} = 0\,,\ n=1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

$$-(\lambda+\mu)p_{1,0} + \lambda\, p_{0,a-1} + \mu \sum_{s=a}^{b} p_{1,s} = 0\,, \tag{3.5}$$

$$-\lambda\, p_{0,0} + \mu\, p_{1,0} = 0\,, \tag{3.6}$$

$$-\lambda\, p_{0,q} + \lambda\, p_{0,q-1} + \mu\, p_{1,q} = 0\,,\ q=1,2,\ldots,a-1\ (a>1). \tag{3.7}$$

Введем оператор смещения E ($E\{p_{1,r}\} = p_{1,r+1}$), тогда уравнение (3.4) может быть записано в виде

$$-(\lambda+\mu)E\{p_{1,n-1}\} + \lambda\, p_{1,n-1} + \mu\, E^{b+1}\{p_{1,n-1}\} = 0\,,\ n=1,2,\ldots,$$

или

$$h(E\{p_{1,n}\}) = 0\,,\ n=0,1,\ldots,$$

где

$$h(z) = \mu z^{b+1} - (\lambda+\mu)z + \lambda = 0\,. \tag{3.8}$$

С помощью теоремы Руше можно показать[3], что $h(z)$ имеет ровно один нуль внутри круга $|z|=1$. Этот корень многочлена $h(z)$ будет вещественным и единственным тогда и только тогда, когда $\psi = \dfrac{\lambda}{b\mu} < 1$. Обозначим этот корень через r $(0<r<1)$, а другие b корней – через $r_1,\ldots,r_b$, $|r_l| \ge 1$, $l=1,\ldots,b$.

Так как r удовлетворяет (3.8), то

$$b\psi = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{r(1-r^b)}{1-r} = r + r^2 + \ldots + r^b\,. \tag{3.9}$$

Теперь решение (3.4) может быть записано в виде

$$p_{1,n} = Ar^n + \sum_{l=1}^{b} A_l r_l^n\,,\ n = 0,1,\ldots,$$

где A, A_l, $l = 1,\ldots,b$, – константы. Так как $\sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} < 1$, то $A_l = 0$ для всех l. Таким образом,

$$p_{1,n} = Ar^n = \text{(так как } p_{1,0} = A\text{)} = p_{1,0}r^n = \text{(из уравнения (3.6))} = \frac{\lambda}{\mu} p_{0,0} r^n.$$

Окончательно, из равенства (3.9) имеем

$$p_{1,n} = \left(\frac{1-r^b}{1-r}\right) r^{n+1} p_{0,0}\,,\ n = 0,1,\ldots. \tag{3.10}$$

Из (3.5) следует, что

$$p_{0,a-1} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda} p_{1,0} - \frac{\mu}{\lambda}\sum_{s=a}^{b} p_{1,s} = \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{0,0} - \frac{\mu}{\lambda}\sum_{s=a}^{b}\left(\frac{1-r^b}{1-r}\right) r^{s+1} p_{0,0} =$$

$$= \left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right) p_{0,0} - \frac{1}{r}\sum_{s=a}^{b} r^{s+1} p_{0,0} = p_{0,0}\left(1+\frac{\lambda}{\mu} - \sum_{s=a}^{b} r^s\right) =$$

$$= p_{0,0}\left(1+\frac{r(1-r^b)}{1-r} - \frac{r^a - r^{b+1}}{1-r}\right) = p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r}\right).$$

Из (3.7) следует, что

$$p_{0,q-1} = p_{0,q} - \frac{\mu}{\lambda} p_{1,q}\,. \tag{3.11}$$

При $q = a-1$ имеем

$$p_{0,a-2} = p_{0,a-1} - \frac{\mu}{\lambda} p_{1,a-1} = p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r}\right) - \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1-r^b}{1-r}\right) r^a p_{0,0} =$$

$$= p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r}\right) - r^{a-1} p_{0,0} = p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r} - r^{a-1}\right) = p_{0,0}\left(\frac{1-r^{a-1}}{1-r}\right).$$

Используя (3.11), аналогично получаем выражения для $p_{0,a-3}$, …, $p_{0,1}$. Окончательно, имеем

$$p_{0,a-2} = p_{0,a-1} - \frac{\mu}{\lambda} p_{1,a-1} = p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r}\right) - \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1-r^b}{1-r}\right) r^a p_{0,0} =$$

$$= p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r}\right) - r^{a-1}p_{0,0} = p_{0,0}\left(\frac{1-r^a}{1-r} - r^{a-1}\right) = p_{0,0}\left(\frac{1-r^{a-1}}{1-r}\right).$$

Используя (3.11), аналогично получаем выражения для $p_{0,a-3}$, …, $p_{0,1}$. Окончательно, имеем

$$p_{0,q} = \left(\frac{1-r^{q+1}}{1-r}\right)p_{0,0},\ q = 1, 2, \ldots, a-1. \tag{3.12}$$

Используем условие нормировки

$$\sum_{q=0}^{a-1} p_{0,q} + \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} = 1$$

и получаем

$$p_{0,0} = \left[\frac{a}{1-r} + \frac{r^{a+1} - r^{b+1}}{(1-r)^2}\right]^{-1}. \tag{3.13}$$

Таким образом, решение системы уравнений (3.4)–(3.7) имеет вид (3.10), (3.12), (3.13).

С помощью найденных стационарных вероятностей можно найти математическое ожидание числа требований в очереди системы

$$\overline{b} = \sum_{q=0}^{a-1} qp_{0,q} + \sum_{n=0}^{\infty} np_{1,n} = \frac{p_{0,0}}{1-r}\sum_{q=1}^{a-1} q(1-r^{q+1}) + \frac{p_{0,0}(1-r^b)}{1-r}\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n+1} =$$

$$= \frac{p_{0,0}}{1-r}\left\{\frac{a(a-1)}{2} - \frac{r^2\left[-ar^{a-1} + ar^a + 1 - r^a\right]}{(1-r)^2}\right\} + \frac{p_{0,0}(1-r^b)}{1-r}\frac{r^2}{(1-r)^2} =$$

$$= \frac{p_{0,0}}{1-r}\left\{\frac{a(a-1)}{2} + \frac{r^2\left[ar^{a-1}(1-r) - (1-r^a)\right]}{(1-r)^2}\right\} + \frac{p_{0,0}(1-r^b)}{1-r}\frac{r^2}{(1-r)^2},$$

а также по формуле Литтла математическое ожидание длительности пребывания требований в очереди $\overline{w} = \overline{b}/\lambda$.

Далее рассмотрим **частные случаи системы** $M/M(a,b)/1$.

1. $M/M(k,k)/1$ (фиксированный размер группы требований).

В этом случае $a = b = k$, $\psi = \lambda/(k\mu)$, и r – вещественный корень $(0 < r < 1)$ уравнения $\dfrac{\lambda}{\mu} = r + r^2 + \ldots + r^k$. Обозначим p_l – вероятность того, что в системе находятся l требований. Тогда

$$p_0 = p_{0,0} = \frac{1-r}{k}, \qquad p_q = p_{0,q} = \frac{1-r^{q+1}}{k},\ q = 1, 2, \dots, k-1,$$

$$p_{k+n} = p_{1,n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) p_0 r^n = \psi(1-r) r^n = p_k r^n,\ n = 0, 1, \dots .$$

Код разработанной программы:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import solve
from sympy.abc import x
```

```
def get_r(equation, power):
    s = solve(equation)
    return s[0] if power % 2 != 0 else s[1]

def get_p0(r, k):
    return (1 - r) / k

def get_pq(r, k, q):
    return (1 - r ** (q + 1)) / k
960.000000000000
def get_pkn(r, psy, n):
    return psy * (1 - r) * (r ** n)
```

```
k = 3
lambd = 1 / 5
mu = 1 / 10

psy = lambd / (k * mu)

profit = 50
expenses = 170
work_time = 9

r = get_r(x + x ** 2 + x ** 3 - (lambd / mu), power=k)
```

```
p0 = get_p0(r, k)
print('p0 =', p0)

# а) среднее время ожидания в очереди
temp1 = p0 / (1 - r)
temp2 = (k * (k - 1)) / 2

numerator = r ** 2 * (k * r ** (k - 1) * (1 - r) - (1 - r ** k))
denominator = (1 - r) ** 2
temp3 = numerator / denominator

temp4 = p0 * (1 - r ** k) / (1 - r)
temp5 = (r ** 2) / ((1 - r) ** 2)
```

```
b_ = temp1 * (temp2 + temp3) + temp4 * temp5
print('b_ =', b_)

w_ = b_ / lambd
print('Среднее время ожидания в очереди:', w_)

# б) вероятность того, что аттракцион простаивает
p_p = p0 + sum([get_pq(r, k, q) for q in range(1, k)])
print('Вероятность того, что аттракцион простаивает:', p_p)
```

```python
# в) среднее число человек, ожидающих в очереди
print('Среднее число человек, ожидающих в очереди:', b_)

# г) вероятность ожидания в очереди
p_wait_q = sum([get_pq(r, k, q) for q in range(1, k)]) + sum([get_pkn(r, psy, n)
                                                              for n in range(500)])
print('Вероятность ожидания в очереди:', p_wait_q)

# д) долю времени, в течение которого аттракцион используется
p_w = 1 - p_p
print('Долю времени, в течение которого аттракцион используется:', p_w)

# е) средние значения выручки и прибыли от использования аттракциона
revenue = profit * k * work_time * p_w * (60 / (1 / mu))
print('Среднее значение выручки от использования аттракциона:', revenue)

earnings = expenses * work_time * p_w * (60 / (1 / mu))
print('Среднее значение прибыли от использования аттракциона:', revenue - earnings)
```

```python
# Определить, как изменятся средняя прибыль и среднее время ожидания
# в очереди при различных значениях вместимости аттракциона – от 3 до 10 человек

capacity = list(range(3, 11))
profits = []
w_list = []

equation = x + x ** 2 - (lambd / mu)

for c in capacity:
    equation += x ** c
    r = get_r(equation, power=c)
    print('r =', r, '-> equation =', equation, '\n')

    p0 = get_p0(r, c)

    temp1 = p0 / (1 - r)
    temp2 = (c * (c - 1)) / 2

    numerator = r ** 2 * (c * r ** (c - 1) * (1 - r) - (1 - r ** c))
    denominator = (1 - r) ** 2
    temp3 = numerator / denominator

    temp4 = p0 * (1 - r ** c) / (1 - r)
    temp5 = (r ** 2) / ((1 - r) ** 2)

    b_ = temp1 * (temp2 + temp3) + temp4 * temp5

    w_ = b_ / lambd
    w_list.append(w_)

    p_p = p0 + sum([get_pq(r, c, q) for q in range(1, c)])
    p_w = 1 - p_p

    revenue = profit * c * work_time * p_w * (60 / (1 / mu))
    earnings = expenses * work_time * p_w * (60 / (1 / mu))
    profits.append(revenue - earnings)
```

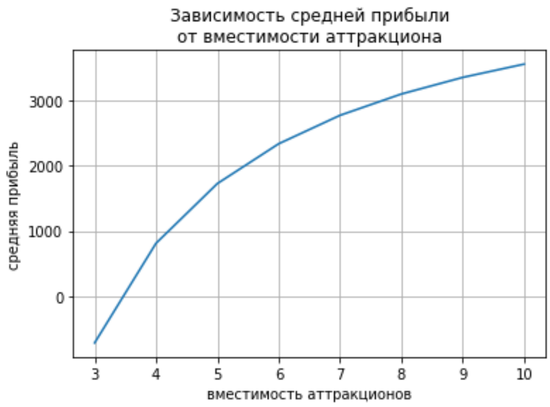
```python
plt.plot(capacity, profits)
plt.title('Зависимость средней прибыли\nот вместимости аттракциона')
plt.xlabel('вместимость аттракционов')
plt.ylabel('средняя прибыль')
plt.grid()
plt.show()
```

```
plt.plot(capacity, w_list)
plt.title('Зависимость среднего ожидания в очереди\nот вместимости аттракциона')
plt.xlabel('вместимость аттракционов')
plt.ylabel('w')
plt.grid()
plt.show()
```

Результат:

```
p0 = 0.0631547620779544
b_ = 3.27803957082265
Среднее время ожидания в очереди: 16.3901978541133
Вероятность того, что аттракцион простаивает: 0.333333333333333
Среднее число человек, ожидающих в очереди: 3.27803957082265
Вероятность ожидания в очереди: 0.936845237922046
Долю времени, в течение которого аттракцион используется: 0.666666666666667
Среднее значение выручки от использования аттракциона: 5400.00000000000
Среднее значение прибыли от использования аттракциона: -720.000000000000
```

```
r = 0.810535713766137 -> equation = x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.741270910566002 -> equation = x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.709011195150870 -> equation = x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.691994437613488 -> equation = x**6 + x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.682327803828019 -> equation = x**7 + x**6 + x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.676567688589135 -> equation = x**8 + x**7 + x**6 + x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.673022533611638 -> equation = x**9 + x**8 + x**7 + x**6 + x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0

r = 0.670790841970839 -> equation = x**10 + x**9 + x**8 + x**7 + x**6 + x**5 + x**4 + x**3 + x**2 + x - 2.0
```



Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с обслуживанием одним прибором требований группами ограниченного размера были получены следующие результаты:

а) Среднее время ожидания в очереди равно 16,39 мин.;
б) Вероятность того, что аттракцион простаивает равна 0,33;
в) Среднее число человек, ожидающих в очереди, равно 3,28;
г) Вероятность ожидания в очереди равна 0,94;
д) Доля времени, в течение которого аттракцион используется, составляет 0,67;
е) Средние значения выручки и прибыли от использования аттракциона равны 5400 руб. и -720 (убыток) руб. соответственно.

Зависимости средней прибыли и среднего времени ожидания в очереди представлены на графиках выше. Из полученных графиков видно, что с увеличением вместимости аттракциона средняя прибыль экспоненциально увеличивается. Также можно наблюдать, что при вместимости аттракциона, равной 4, значение времени ожидания в очереди минимально и составляет в среднем 12 минут.