МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №1

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2020 г.

Задание 1. Анализ систем массового обслуживания с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы или длительность пребывания требований в системе.

Задача. В вычислительный центр поступает пуассоновский поток заказов на проведение метеорологических расчётов. Так как прогноз погоды имеет смысл производить по свежим метеоданным, поступающая информация со временем стареет. Пусть по этой причине получаемая информация сохраняет достоверность в течение определенного числа часов. Вычислительный центр для проведения метеорологических расчётов может использовать несколько ЭВМ. Положим, что время решения на каждой ЭВМ имеет экспоненциальный закон распределения с одинаковыми параметрами распределений. Требуется оценить работу вычислительного центра по проведению расчётов, необходимых для прогноза погоды, а именно вычислить: а) долю времени, когда все ЭВМ свободны от проведения расчётов; б) долю времени, когда одна из ЭВМ будет занята расчётом, а другие свободны; в) вероятность того, что все ЭВМ будут работать одновременно, и не поступило новых данных для проведения расчётов; г) вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчётов; д) среднее число заказов, находящихся в вычислительном центре и ожидающих проведения метеорологических расчётов; е) долю ЭВМ, простаивающих в вычислительном центре.

Определить число ЭВМ, необходимое, чтобы вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчётов не превышала 0,1.

Вариант 1. Получаемые метеоданные сохраняют достоверность в течение 10 часов. Интенсивность поступления заказов на проведение метеорологических расчётов составляет 2 заказа в час. Вычислительный центр для проведения метеорологических расчётов может использовать две ЭВМ. Время решения на каждой ЭВМ одной задачи в среднем равно 5 часам.

Метод анализа СМО с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы

Рассмотрим смешанную систему массового обслуживания с κ обслуживающими приборами при следующих условиях. На вход системы поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью λ. Время обслуживания одного требования – экспоненциальное с параметром μ. Требование, заставшее все приборы занятыми, становится в очередь и ожидает обслуживания. Время ожидания ограничено некоторым сроком t_{wait}. Если до истечения этого срока требование не будет принято к обслуживанию, то оно покидает очередь и остается необслуженным. Срок ожидания t_{wait} будем считать случайным и распределенным экспоненциально с параметром ν. Параметр ν полностью аналогичен параметрам λ и μ потока требований и «потока освобождений». Его можно интерпретировать как интенсивность «потока уходов» требования, стоящего в очереди. Действительно, представим себе требование, которое только и делает, что становится в очередь и ждет в ней, пока не закончится время ожидания t_{wait}, после чего уходит и сразу же снова становится в очередь. Тогда «поток уходов» такого требования из очереди будет иметь интенсивность ν.

Благодаря допущению о пуассоновском характере всех потоков событий, приводящих к изменениям состояний системы, процесс, протекающий в ней, будет марковским. Напишем уравнения для вероятностей состояний системы. Возможные состояния системы:

n, $0 \le n \le \kappa$, – занято ровно n приборов (очереди нет);

$\kappa + s$, $s \ge 1$, – заняты все κ приборов, и s требований стоят в очереди.

Таким образом, система имеет бесконечное (хотя и счетное) множество состояний. Следовательно, число описывающих ее дифференциальных уравнений тоже будет бесконечным.

Очевидно, первые κ дифференциальных уравнений ничем не будут отличаться от соответствующих уравнений Эрланга, полученных для системы с отказами $M/M/\kappa/0$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \ 1 \le n < \kappa - 1;$$

$$\frac{dp_{\kappa-1}(t)}{dt} = -(\lambda + (\kappa - 1)\mu)p_{\kappa-1}(t) + \lambda p_{\kappa-2}(t) + \kappa\mu p_\kappa(t).$$

Отличие новых уравнений от уравнений Эрланга начнется при $n = \kappa$. Действительно, в состояние κ система с ожиданием может перейти не только из $\kappa - 1$, но и из $\kappa + 1$ (все приборы заняты, одно требование стоит в очереди).

Составим дифференциальное уравнение для $p_\kappa(t)$. Зафиксируем момент t и найдем $p_\kappa(t + \Delta t)$ – вероятность того, что система в момент $t + \Delta t$ будет в состоянии κ.

Имеем:

$$p_\kappa(t + \Delta t) \approx p_\kappa(t)(1 - \lambda\Delta t - \kappa\mu\Delta t) + p_{\kappa-1}(t)\lambda\Delta t + p_{\kappa+1}(t)(\kappa\mu + \nu)\Delta t,$$

откуда

$$\frac{dp_\kappa(t)}{dt} = -(\lambda + \kappa\mu)p_\kappa(t) + \lambda p_{\kappa-1}(t) + (\kappa\mu + \nu)p_{\kappa+1}(t).$$

Вычислим теперь $p_{\kappa+s}(t + \Delta t)$ при любом $s > 0$ – вероятность того, что в момент $t + \Delta t$ все κ приборов будут заняты, и ровно s требований будут стоять в очереди.

$$p_{\kappa+s}(t+\Delta t)\approx$$
$$\approx p_{\kappa+s}(t)(1-\lambda\Delta t-\kappa\mu\Delta t-s\nu\Delta t)+p_{\kappa+s-1}(t)\lambda\Delta t+p_{\kappa+s+1}(t)(\kappa\mu+(s+1)\nu)\Delta t,$$

откуда

$$\frac{dp_{\kappa+s}(t)}{dt}=-(\lambda+\kappa\mu+s\nu)p_{\kappa+s}(t)+\lambda p_{\kappa+s-1}(t)+(\kappa\mu+(s+1)\nu)p_{\kappa+s+1}(t).$$

Таким образом, получили для вероятностей состояний систему бесконечного числа дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t);$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-(\lambda+n\mu)p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)+(n+1)\mu p_{n+1}(t),\ 1\le n\le\kappa-1; \tag{1.1}$$
$$\frac{dp_\kappa(t)}{dt}=-(\lambda+\kappa\mu)p_\kappa(t)+\lambda p_{\kappa-1}(t)+(\kappa\mu+\nu)p_{\kappa+1}(t);$$
$$\frac{dp_{\kappa+s}(t)}{dt}=-(\lambda+\kappa\mu+s\nu)p_{\kappa+s}(t)+\lambda p_{\kappa+s-1}(t)+(\kappa\mu+(s+1)\nu)p_{\kappa+s+1}(t),\ s\ge1.$$

Выведем формулы, аналогичные формулам Эрланга, для вероятностей состояний системы при стационарном режиме функционирования (при $t\to\infty$). Из уравнений (1.1), полагая все p_n $(n=0,1,\dots,\kappa,\dots)$ постоянными, а все производные – равными нулю, получим систему алгебраических уравнений:

$$-\lambda p_0+\mu p_1=0;$$
$$-(\lambda+n\mu)p_n+\lambda p_{n-1}+(n+1)\mu p_{n+1}=0,\ 1\le n\le\kappa-1; \tag{1.2}$$
$$-(\lambda+\kappa\mu)p_\kappa+\lambda p_{\kappa-1}+(\kappa\mu+\nu)p_{\kappa+1}=0;$$
$$-(\lambda+\kappa\mu+s\nu)p_{\kappa+s}+\lambda p_{\kappa+s-1}+(\kappa\mu+(s+1)\nu)p_{\kappa+s+1}=0,\ s\ge1.$$

К ним нужно присоединить условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1. \tag{1.3}$$

Найдем решение системы (1.2), (1.3).

Для этого применим тот же прием, что и для случая системы с отказами: разрешим первое уравнение относительно p_1, подставим во второе, и т. д. Для любого $n\le\kappa$, как и в случае системы с отказами, получим:

$$p_n=\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}p_0. \tag{1.4}$$

Перейдем к уравнениям для $n>\kappa$ $(n=\kappa+s,\ s\ge1)$. Тем же способом получим:

$$p_{\kappa+1}=\frac{\lambda^{\kappa+1}}{\kappa!\,\mu^\kappa(\kappa\mu+\nu)}p_0,$$
$$p_{\kappa+2}=\frac{\lambda^{\kappa+2}}{\kappa!\,\mu^\kappa(\kappa\mu+\nu)(\kappa\mu+2\nu)}p_0,$$

и вообще при любом $s \geq 1$

$$p_{\kappa+s} = \frac{\lambda^{\kappa+s}}{\kappa!\,\mu^{\kappa}\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa\mu + m\nu)}\,p_0. \tag{1.5}$$

В обе формулы (1.4) и (1.5) в качестве сомножителя входит вероятность p_0. Определим ее из условия (1.3). Подставляя в него выражения (1.4) и (1.5) для $n \leq \kappa$ и $n = \kappa + s$, $s \geq 1$, получим:

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{\kappa}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa+s}}{\kappa!\,\mu^{\kappa}\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa\mu + m\nu)}\right\} = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\lambda^{\kappa+s}}{\kappa!\,\mu^{\kappa}\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa\mu + m\nu)}}. \tag{1.6}$$

Преобразуем выражения (1.4), (1.5) и (1.6), вводя в них вместо интенсивностей λ и ν «приведенные» интенсивности:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \alpha, \quad \frac{\nu}{\mu} = \beta. \tag{1.7}$$

Параметры α и β выражают соответственно среднее число требований и среднее число уходов требования, стоящего в очереди, приходящиеся на среднее время обслуживания одного требования.

В новых обозначениях формулы (1.4), (1.5) и (1.6) примут вид:

$$p_n = \frac{\alpha^n}{n!}p_0, \; 0 < n \leq \kappa; \tag{1.8}$$

$$p_{\kappa+s} = \frac{\alpha^{\kappa+s}}{\kappa!\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa + m\beta)}\,p_0, \; s \geq 1; \tag{1.9}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{\kappa}}{\kappa!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa + m\beta)}}. \tag{1.10}$$

Зная вероятности всех состояний системы, можно определить другие характеристики системы, в частности, вероятность p_{OTK} того, что требование покинет систему необслуженным.

Для этого сначала вычислим математическое ожидание b числа требований, находящихся в очереди:

$$b = \sum_{s=1}^{\infty} s p_{\kappa+s} = \frac{\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\kappa!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{s\alpha^{s}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa+m\beta)}}{\sum\limits_{n=0}^{\kappa}\dfrac{\alpha^{n}}{n!}+\dfrac{\alpha^{\kappa}}{\kappa!}\sum\limits_{s=1}^{\infty}\dfrac{\alpha^{s}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa+m\beta)}}. \qquad (1.11)$$

Чтобы получить p_{OTK}, нужно b умножить на «интенсивность уходов» одного требования ν и разделить на интенсивность поступления требований λ, т. е. умножить на коэффициент ν / λ.

Получим:

$$p_{OTK} = b\frac{\nu}{\lambda} = b\frac{\beta}{\alpha}.$$

Непосредственное использование формул (1.8)–(1.11) несколько затруднено тем, что в них входят бесконечные суммы. Однако члены этих сумм быстро убывают. Для определения номера r члена суммы, начиная с которого можно отбросить остальные члены суммы, чтобы погрешность ее вычислений не превысила ε, можно воспользоваться следующими формулами для грубой оценки ошибки вычислений:

$$\sum_{s=r}^{\infty}\frac{\alpha^{s}}{\prod\limits_{m=1}^{s}(\kappa+m\beta)} < \frac{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{r}}{r!}e^{\frac{\alpha}{\beta}} < \varepsilon$$

Далее приводятся выражения для еще нескольких стационарных характеристик рассматриваемой системы:

среднее число приборов, занятых обслуживанием требований,

$$h = \sum_{n=1}^{\kappa} n p_n + \kappa\sum_{s=1}^{\infty} p_{\kappa+s}; \qquad (1.12)$$

среднее число свободных обслуживающих приборов

$$g = \kappa - h = \sum_{n=0}^{\kappa}(\kappa - n) p_n;$$

коэффициент простоя обслуживающих приборов

$$k_g = \frac{g}{\kappa}.$$

Код разработанной программы:

```python
import numpy as np
from math import exp, factorial
```

```python
def get_r(alpha, beta):
    e = .00000001
    r = 1
    while ((alpha / beta) ** r / factorial(r - 1)) * exp(alpha / beta) > e:
        r += 1
    return r
```

```python
def product(k, s, beta):
    temp = 1
    for m in range(1, s + 1):
        temp *= (k + m * beta)
    return temp
```

```python
def get_p_0(k, alpha, beta, r):
    temp1 = sum([alpha ** n / factorial(n) for n in range(0, k + 1)])
    temp2 = alpha ** k / factorial(k)
    temp3 = sum([alpha ** s / product(k, s, beta) for s in range(1, r + 1)])
    return 1 / (temp1 + temp2 * temp3)
```

```python
def get_p_n(n, alpha, p_0):
    return (alpha ** n / factorial(n)) * p_0
```

```python
def get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0):
    temp = (alpha ** (k + s)) / (factorial(k) * product(k, s, beta))
    return temp * p_0
```

```python
v = 0.1
lambda_ = 2
mu = 0.2
k = 2

alpha = lambda_ / mu
beta = v / mu

r = get_r(alpha, beta)

# а) доля времени, когда все ЭВМ свободны от проведения расчетов;
p_0 = get_p_0(k, alpha, beta, r)

print("Доля времени, когда все ЭВМ свободны от проведения расчетов:", p_0)

# б) доля времени, когда одна из ЭВМ будет занята расчетом, а другие свободны;
n = 1
p_n = get_p_n(n, alpha, p_0)

print("Доля времени, когда одна из ЭВМ будет занята расчетом, а другие свободны:", p_n)

# в) вероятность того, что все ЭВМ будут работать одновременно, и
# не поступило новых данных для проведения расчетов;
p_k = get_p_n(k, alpha, p_0)

print("Вероятность того, что все ЭВМ будут работать одновременно, " +
      "и не поступило новых данных для проведения расчетов:", p_k)

# г) вероятность отказа поступившим заказам;
b = sum([s * get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0) for s in range(1, r + 1)])
p_otk = b * (beta / alpha)

print("Вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчетов:", p_otk)

# д) среднее число заказов, находящихся в вычисл. центре и
# ожидающих проведения метеор. расчетов;
h = sum([n * get_p_n(n, alpha, p_0) for n in range(1, k + 1)]) + \
    k * sum([get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0) for s in range(1, r + 1)])
```

```python
print("Среднее число заказов, ожидающих проведения метеорологических расчетов:", b)
print("Среднее число заказов, находящихся в вычислительном центре:", b + h)

# е) доля ЭВМ, простаивающих в вычислительном центре.
g = k - h
k_g = g / k

print("Доля ЭВМ, простаивающих в вычислительном центре:", k_g)

# число ЭВМ, необходимое, чтобы вероятность отказа поступившим заказам
# на проведение метеорологических расчетов не превышала 0,1.
required_prob = 0.1
while p_otk >= required_prob:
    k += 1
    p_0 = get_p_0(k, alpha, beta, r)
    b = sum([s * get_p_ks(k, s, alpha, beta, p_0) for s in range(1, r + 1)])
    p_otk = b * (beta / alpha)

print("Чтобы вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчетов"
      f"не превышала 0.1, необходимо {k} ЭВМ.")
```

Результат:

```
Доля времени, когда все ЭВМ свободны от проведения расчетов: 2.748205326503576e-07
Доля времени, когда одна из ЭВМ будет занята расчетом, а другие свободны: 2.748205326503576e-06
Вероятность того, что все ЭВМ будут работать одновременно, и не поступило новых данных для проведения расчетов: 1.3741026632517
88e-05
Вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчетов: 0.8000003297846394
Среднее число заказов, ожидающих проведения метеорологических расчетов: 16.00000659569279
Среднее число заказов, находящихся в вычислительном центре: 18.000003297846398
Доля ЭВМ, простаивающих в вычислительном центре: 1.648923195651797e-06
Чтобы вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчетовне превышала 0.1, необходимо 11 ЭВМ.
```

Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с ограничением на длительность ожидания требований в очереди системы были получены следующие результаты:

а) Доля времени, когда все ЭВМ свободны от проведения расчётов равна $2{,}75 * 10^{-7}$;
б) Доля времени, когда одна из ЭВМ будет занята расчётом, а другие свободны равна $2{,}75 * 10^{-6}$;
в) Вероятность того, что все ЭВМ будут работать одновременно, и не поступило новых данных для проведения расчётов равна $1{,}37 * 10^{-5}$;
г) Вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчётов равна 0,8;
д) Среднее число заказов, находящихся в вычислительном центре и ожидающих проведения метеорологических расчётов равно 16 и 18 соответственно;
е) Доля ЭВМ, простаивающих в вычислительном центре равна $1{,}65 * 10^{-6}$.

Чтобы вероятность отказа поступившим заказам на проведение метеорологических расчётов не превышала 0,1, необходимо 11 ЭВМ.