МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Отчёт по дисциплине
«Модели и методы теории массового обслуживания»

Задание №3

студентки 4 курса 481 группы
направления 27.03.03 – Системный анализ и управление
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Гурковой Виктории Марковны

Преподаватель ________________ Е.С. Рогачко

Саратов 2021 г.

Задание 3. Анализ систем массового обслуживания с обслуживанием одного требования всеми приборами.

Задача. Соединение надводных кораблей, имеющее средства противокатерной обороны в количестве нескольких единиц, подвергается нападению катеров противника. Обстрел катеров ведется сосредоточенным огнём всех средств по одному катеру. В зависимости от построения боевого порядка (интенсивности поступления) нападающих катеров условия для их обстрела меняются. Необходимо вычислить: а) среднее время, требуемое для обстрела катера противника; б) вероятность обстрела катера противника; в) долю катеров, не подвергшихся обстрелу; г) вероятность поражения катера противника **при условии**, что он был обстрелян. Предполагается, что **каждое** средство противокатерной обороны имеет определённую вероятность поражения катера за стрельбу. (Замечание: сначала необходимо вычислить вероятность поражения катера **всеми** средствами противокатерной обороны.)

Определить долю обстрелянных катеров противника в зависимости от: а) плотности их боевого порядка (интенсивности поступления катеров), которая меняется – увеличивается в 2, 3, …, 10 раз (построить график зависимости); б) изменения количества единиц средств противокатерной обороны – увеличения, но не более, чем в 2 раза (построить график зависимости).

Вариант 1. Соединение надводных кораблей имеет средства противокатерной обороны в количестве 6 единиц. Среднее время, необходимое одной единице вооружения на обстрел катера, равно 0,1 мин. Каждое средство противокатерной обороны имеет вероятность поражения катера за стрельбу, равную 0,3. Интенсивность поступления катеров в зону обстрела кораблей равна 2 катера в минуту.

Метод анализа СМО с обслуживанием одного требования всеми приборами системы

Работа некоторых систем массового обслуживания может быть организована так, что поступающее требование обслуживается сразу несколькими приборами. Рассмотрим такую организацию управления работой системы, при которой всякое вновь поступающее требование обслуживают все κ приборов системы, и обслуживание заканчивается в том случае, когда один из них обслужит требование.

Таким образом, имеется κ-приборная **система массового обслуживания с отказами**, которая обслуживает пуассоновский поток требований интенсивности λ. В момент поступления очередного требования в систему к ее обслуживанию немедленно приступают все κ свободных приборов, причем действуют они независимо друг от друга. Обслуживание считается законченным, как только его закончит один из обслуживающих приборов.

Примем закон обслуживания требования каждым прибором экспоненциальным со средним временем обслуживания соответственно для каждого прибора

$$\overline{v}_1 = \frac{1}{\mu_1}; \ \overline{v}_2 = \frac{1}{\mu_2}; \ \ldots; \ \overline{v}_\kappa = \frac{1}{\mu_\kappa}.$$

Определим закон времени обслуживания всеми κ приборами.

Предположим, что $v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ – время обслуживания требования соответственно 1-м, 2-м, …, κ-м приборами.

Тогда вероятность того, что время обслуживания v окажется больше T, будет равна

$$P\{v > T\} = P\{\min(v_1, v_2, \ldots, v_\kappa) > T\}.$$

Так как обслуживание будет закончено в тот момент, как только его закончит один из приборов, очевидно, что

$$P\{\min(v_1, v_2, \ldots, v_\kappa) > T\} = P\{v_1 > T; v_2 > T; \ldots, v_\kappa > T\}.$$

Последняя вероятность может быть вычислена по теореме умножения вероятностей. Так как $v_1, v_2, \ldots, v_\kappa$ не зависят друг от друга,

$$P\{v_1 > T; v_2 > T; \ldots, v_\kappa > T\} = \prod_{i=1}^{\kappa} P\{v_i > T\}. \tag{2.1}$$

Но, так как закон распределения времени обслуживания экспоненциальный, то

$$P\{v_i > T\} = e^{-\mu_i T}.$$

Подставив это значение величины $P\{v_i > T\}$ в равенство (2.1), получим

$$P\{v > T\} = e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\kappa)T}.$$

Обозначив сумму $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\kappa$ через μ^*, получим

$$P\{v > T\} = e^{-\mu^* T},$$

то есть закон распределения времени обслуживания требования, поступающего в систему, при обслуживании его всеми κ приборами независимо друг от друга – тоже экспоненциальный закон с математическим ожиданием времени обслуживания

$$\overline{v} = \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\kappa}. \tag{2.2}$$

Отсюда видно, что среднее значение $\overline{v}$ будет тем меньше, чем большее количество приборов примет участие в обслуживании.

Если все обслуживающие приборы одного типа, то

$$\mu^* = \kappa\mu,$$

то есть среднее время обслуживания уменьшается в κ раз по сравнению с обслуживанием одним прибором.

Таким образом, задача сводится к рассмотрению одноприборной системы с отказами, у которой математическое ожидание времени обслуживания определяется зависимостью (2.2).

Код разработанной программы:

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
k = 6
v = 0.1
lambda_ = 2

p_obs = 0.3
```

```
# а) среднее время, требуемое для обстрела катера противника
mu = 1 / v
mu_ = k * mu
v_ = 1 / mu_

print(f'Среднее время, требуемое для обстрела катера противника: {v_} минут\n')

# б) вероятность обстрела катера противника
p0 = mu_ / (lambda_ + mu_)
print(f'Вероятность обстрела катера противника: {p0}\n')

# в) доля катеров, не подвергшихся обстрелу
p1 = lambda_ / (lambda_ + mu_)
print(f'Доля катеров, не подвергшихся обстрелу: {p1}\n')

# г) вероятность поражения катера противника при условии, что он был обстрелян
p_p = (p_obs ** k) * p0
print(f'Вероятность поражения катера противника при условии, что он был обстрелян: {p_p}\n')
```

```
# Определить долю обстрелянных катеров противника в зависимости от:

# а) плотности их боевого порядка (интенсивности поступления),
# которая меняется – увеличивается в 2, 3, …, 10 раз

prob = []
lambdas = [lambda_ * i for i in range(1, 11)]

for l in lambdas:
    prob.append(mu_ / (l + mu_))

# print(lambdas)
# print(prob)

plt.plot(lambdas, prob)
plt.title('Доля обстреленных катеров в зависимости от интенсивности их поступления')
plt.xlabel('lambdas')
plt.ylabel('prob')
plt.grid()
```

```
# б) изменения количества единиц средств противокатерной обороны –
# увеличения, но не более, чем в 2 раза
prob = []
k_count = list(range(1, k * 2 + 1))

for k_ in k_count:
    mu_ = k_ * mu
    prob.append(mu_ / (lambda_ + mu_))

# print(k_count)
# print(prob)

plt.plot(k_count, prob)
plt.title('Доля обстреленных катеров в зависимости от изменения количества единиц обороны')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('prob')
plt.grid()
```

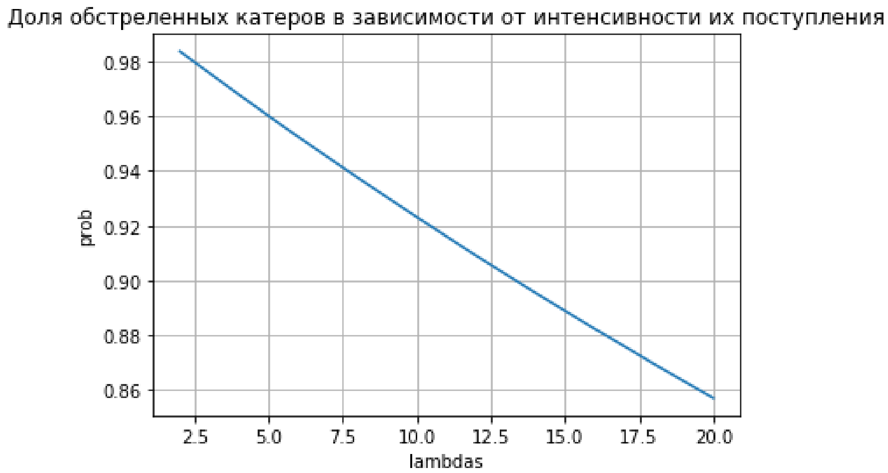
Результат:

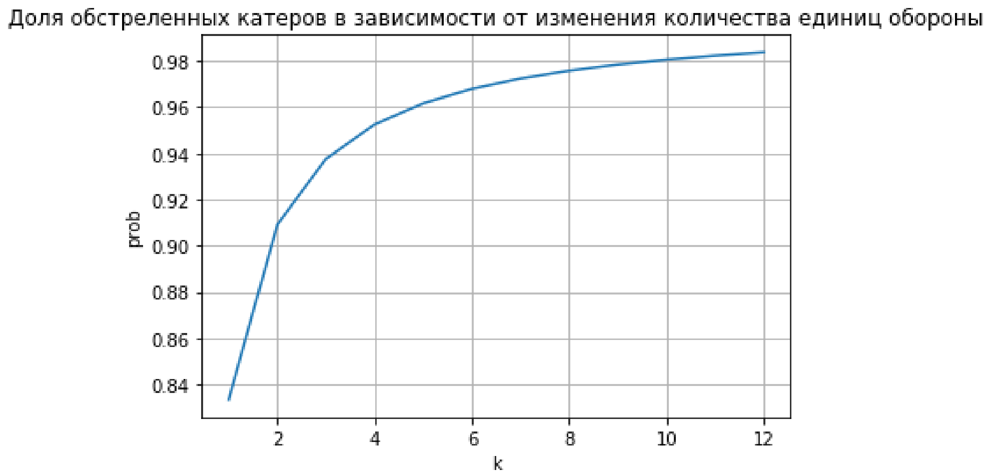
```
Среднее время, требуемое для обстрела катера противника: 0.016666666666666666 минут

Вероятность обстрела катера противника: 0.967741935483871

Доля катеров, не подвергшихся обстрелу: 0.03225806451612903

Вероятность поражения катера противника при условии, что он был обстрелян: 0.0007054838709677417
```





Ответ.

Таким образом, для системы массового обслуживания с обслуживанием одного требования всеми приборами системы были получены следующие результаты:

а) Среднее время, требуемое для обстрела катера противника равно 0,0167 минут;
б) Вероятность обстрела катера противника равна 0,9677;
в) Доля катеров, не подвергшихся обстрелу равна 0,0323;
г) Вероятность поражения катера противника при условии, что он был обстрелян равна 0,0007.

График зависимости доли обстрелянных катеров противника от плотности их боевого порядка (интенсивности поступления) свидетельствует о том, что с увеличением интенсивности поступления доля обстрелянных катеров уменьшается.

Из графика зависимости доли обстрелянных катеров противника от изменения количества единиц средств противокатерной обороны можно сделать вывод о том, что с увеличением количества единиц средств противокатерной обороны доля обстрелянных катеров экспоненциально увеличивается.