Hoja Nº 1

Si tengo q' sacar la **norma** o longitud:

$\vec{v} = (x, y, z)$ $\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Distancia:

$d(A,B) = 2$ si $A = (x_1, y_1, z_1) \wedge B = (x_2, y_2, z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Ej: $d(A,B)$ si $A = (\underset{x_1,}{1}, \underset{y_1,}{1}, \underset{z_1}{1})$ y $B = (\underset{x_2,}{K}, \underset{y_2,}{-K}, \underset{z_2}{2})$

$$d = \sqrt{(K-1)^2 + ((-K)-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$2 = \sqrt{K^2 \cancel{-2K} + 1 + K^2 \cancel{+2K} + 1 + 1}$$

$$2^2 = \left(\sqrt{2K^2+3}\right)^2$$

$$4 = 2K^2 + 3$$

$$1 = 2K^2$$

$$\frac{1}{2} = K^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = K$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = K$$

C. aux

$(K-1)^2 = (K-1)(K-1)$
$= K^2 - K - K + 1$
$= K^2 - 2K + 1$

$((-K)-1)^2 = ((-K)-1)((-K)-1)$
$= K^2 + K + K + 1$
$= K^2 + 2K + 1$

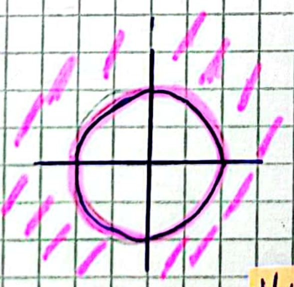
$(2-1)^2 = (2-1)(2-1)$
$= 4 - 2 - 2 + 1$
$= 1$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

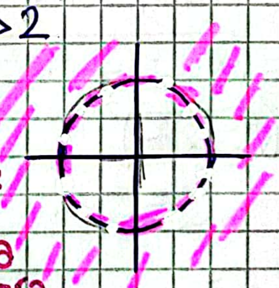
$\|u\| \geq 2$

esfera sólida



$\|u\| > 2$

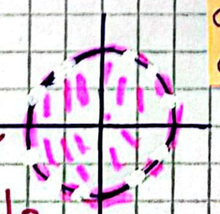
sólo la superficie o cascara de la esfera



$\|u\| = 2$ sólo la superficie o cascara de la esfera

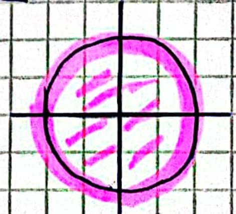
$\|u\| < 2$

sólo la superficie o cascara de la esfera.



$\|u\| \leq 2$

esfera sólida



Vectores Paralelos: 2 vectores son //, cdo son múltiplos entre ellos.

$\boxed{\vec{u} = \alpha . \vec{v}}$ → $\boxed{x_1 = x_2 \ y \ y_1 = y_2}$

Ej: Determinar si $\vec{u} = (4, -5)$ y $\vec{v} = (8, -10)$ son //

$\vec{u} = \alpha . \vec{v}$

$(4, -5) = \alpha . (8, -10)$

$(4, -5) = (8\alpha - 10\alpha)$

$x_1 = x_2 \ y \ y_1 = y_2$

$4 = 8\alpha \ y \ -5 = -10\alpha$

$\frac{4}{8} = \alpha \wedge \frac{-5}{-10} = \alpha$

$\boxed{\frac{1}{2} = \alpha} \wedge \boxed{\frac{1}{2} = \alpha}$ → Son paralelos. Si dan ≠, no lo son.

Ej: Hallar los vectores $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ de Norma = 5 q'sea // a $\vec{v} = (2, -1)$

$\|\vec{u}\| = 5$ $\quad \vec{u} \parallel \vec{v}$

$\vec{u} = \alpha . (2, -1)$

$\vec{u} = (2\alpha, -\alpha)$ → Ahora, saco la norma, p/sacar α

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$

$5 = \sqrt{(2\alpha)^2 + (-\alpha)^2}$

$5 = \sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2}$

$5^2 = (\cancel{\sqrt{5\alpha^2}})^2$

$25 = 5\alpha^2$

$\frac{25}{5} = \alpha^2$

$5 = \alpha^2$

$\pm\sqrt{5} = \alpha$

$(2\alpha)^2 = (2\alpha)(2\alpha)$
$= 2^2\alpha^2$
$= 4\alpha^2$

$(-\alpha)^2 = (-\alpha)(-\alpha)$
$= \alpha^2$

Rta:

$\vec{u}_1 = (2.\sqrt{5}, -\sqrt{5})$

$(-\alpha, -\sqrt{5})$

$\vec{u}_2 = (-2.\sqrt{5}, \sqrt{5})$

2

Vectores Perpendiculares u Ortogonales:

Sí y sólo sí $r = 90°$ $\vec{u} \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$ $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0} \qquad \boxed{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(r)}$$

→ El rtado es un producto escalar

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$(u_x, u_y, u_z)(v_x, v_y, v_z) = 0$

$u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z = 0$

Ej: $\vec{u} = (3, -2, -1)$ $\vec{v} = (-2, -4, 1)$

$(3, -2, -1)(-2, -4, 1) = 0$

$3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 = 0$

$-6 + 8 + 1 = 0$

$\underbrace{\boxed{3 = 0}}_{\text{Falso}}$ → Si no da $= 0$, no son $\perp$

Ej: Hallar todos los vectores ortogonales al $(2; +2)$ c/ norma 1. $\vec{u} = (2; 2)$ $\|\vec{u}\| = 1$

$(2, 2) \cdot (\alpha, \beta) = 0$

$2\alpha + 2\beta = 0$

$2\alpha = -2\beta$

$\alpha = \frac{-2\beta}{2}$

$\alpha = -\beta$

$\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ $+\beta$

$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $-\beta$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$1 = \sqrt{(-\beta)^2 + \beta^2}$

$1 = \sqrt{\beta^2 + \beta^2}$

$1 = \sqrt{2\beta^2}$

$1 = 2\beta^2$

$\frac{1}{2} = \beta^2$

$\pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \beta$

$\frac{\pm\sqrt{2}}{2} = \beta$

C. aux

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{\vec{v}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

cdo tengo los componentes de un vector, puedo sacar la norma p/acá ya me da la norma entonces, uso la formula de norma, p/ sacar β. mi única incognita, va a ser β. entonces, al encontrar β, tengo α y encuentro el vector $\perp$ a $\vec{u}$.

es importante recordar q'cuando en la norma, me queda x^2, y pasa como $\sqrt{n}$, eso da + y −. Da 2 $\pm\sqrt{n}$ soluciones.

Hallar 3 vectores del espacio q' sean // al $(1,-2)$

$u=\alpha v \qquad u=(1,-2) \quad v=(v_x, v_y)$

$(1,-2)=\alpha(v_x, v_y)$

$(1,-2)=(\alpha v_x, \alpha v_y)$

$1=\alpha v_x \quad \wedge \quad -2=\alpha v_y$

$\frac{1}{v_x}=\alpha \quad \wedge \quad \frac{-2}{v_y}=\alpha$

hasta aca hago lo mismo que si no tuviera incógnitas

$\frac{1}{v_x}=\frac{-2}{v_y}$

tomo las 2 partes sin α, y despejo 1.

$1 v_y=-2 v_x$

$v_y=-2 v_x$

cdo llego acá, le doy valores, alg'no tenga nada, en este caso vy.

SON INVENTADOS

$8=-2 v_x \qquad 2=-2 v_x \qquad 4=-2 v_x$

$-\frac{8}{2}=v_x \qquad -\frac{2}{2}=v_x \qquad -\frac{4}{2}=v_x$

$-4=v_x \qquad -1=v_x$

INECUACIONES:

cuadraticas:

$-x^2+x+6 \geq 0$

Si a; es NEGATIVA, da vuelta el signo de la desigualdad.

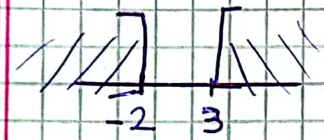
$x_1 = 3 \quad x_2 = -2$

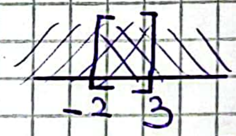
$-(x-3)(x+2) \geq 0$

$(x-3)(x+2) \leq 0$

$x-3 \geq 0 \wedge x+2 \leq 0 \vee x-3 \leq 0 \wedge x+2 \geq 0$

$x \geq 3 \quad \wedge \quad x \leq -2 \qquad\qquad x \leq 3 \wedge x \geq -2$





$S = \phi \qquad\qquad S = [-2;3]$

las inecuaciones cuadraticas, cumplen la regla de los signos

P/si un signo lleva, =, va en todos. Osea:

$\geq \rightarrow \geq \geq \leq \leq$

$\leq \rightarrow \geq \leq \leq \geq$

Con Modulo

$|x+3| > 2$ mayores union

$x+3 > 2 \quad \vee \quad x+3 < 2$

$x > 2-3 \quad \vee \quad x < 2-3$

$x > -1 \quad \vee \quad x < -5$

$S = (-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$

$2|3x-6|-4 \geq 0$

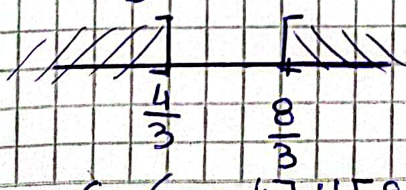
$|3x-6| \geq 4/2$

$|3x-6| \geq 2$

$3x-6 \geq 2 \qquad\qquad 3x-6 \leq -2$

$x \geq 2+6/3 \qquad\qquad x \leq -2+6/3$

$x \geq \frac{8}{3} \qquad\qquad x \leq \frac{4}{3}$



$S = (-\infty; \frac{4}{3}] \cup [\frac{8}{3}; +\infty)$

En Inecuaciones c/ módulo, los signos determinan si la solución es U o ∩

MAYOR es UNION
MENOR es Intersecci

Cdo dejo el lado del |x|, sin nada al rededor se abre 1 inecuacion tal cual está, y la otra cambia: el signo de la desigualdad y del nro q'está del otro lado

Inecuacion Doble

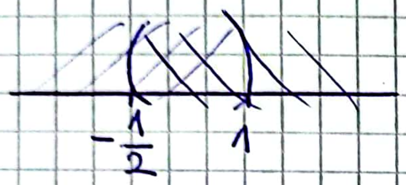
$-3 < -2x - 1 < 0$

$-3 + 1 < -2x < +1$

c/el 2 sale diviendo cambia los signos.

$\frac{-2}{-2} > x > \frac{1}{-2}$

$1 > x > -\frac{1}{2}$



X es $> -\frac{1}{2}$ y
X es < 1

En inecuaciones dobles el rtado es Intersección 100pre si no, no hay rtado.

4

Hoja Nº

$P(x) = 8x^4 - 9x^2 + 1 - 2x + 2x^3$ 1 y -1 son raíces

$= 8x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 1$ T.I.

% $D1 = \{\pm 1\}$

$D8 = \{\pm 1; \pm 2 \pm 4; \pm 8\}$

$D1:8 = \{\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}\}$

los divisores de T.I. por los del otro nro.

$x_1 = 1$ $x_3 = -\frac{1}{2}$
$x_2 = \frac{1}{4}$ $x_4 = -1$

calculadora

uso p/ ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 8 & 2 & -9 & -2 & 1 & \\ 1 & & 8 & 10 & 1 & -1 & \\ \hline & 8 & 10 & 1 & -1 & & 0 \end{array}$$

$(x-1)\ 8x^3 + 10x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 8 & 10 & 1 & -1 & \\ -1 & & -8 & -2 & 1 & \\ \hline & 8 & 2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$(x+1)\ 8x^2 + 2x - 1$

$x_1 = \frac{1}{4}$ $x_2 = -\frac{1}{2}$

$(x-1)(x+1)(x-\frac{1}{4})(x+\frac{1}{2})$

CASOS de FACTOREO

1 Factor Común: El mayor nro q' dividido todos los términos de cero. Y la letra q' acompaña a ese nro es la q' se repite en todos c/el menor exponente.

2 $X^{PAR} - n^o$: Diferencia de Cuadrados $x^4 - 4 = \sqrt{x^4}\ \sqrt{4} = x^2$ y 2
$(x^2+2)(x^2-2)$

3 $X^{impar} \pm n^o$: RUFINI

Nombre:

húsares