

4 Моделирование движения планеты вокруг Солнца

Необходимо получить модель, описывающую движение планеты вокруг Солнца. Обозначим массу планеты как m , массу Солнца как M . Используя закон всемирного тяготения необходимо получить выражения для ускорения планеты. Зная ускорение определить скорость и положение планеты в следующий момент времени.

Модель необходимо реализовать в виде программного кода, который для заданного конечного момента времени T находит положение планеты для множества моментов времени $t_i \leq T$. Расчеты необходимо вести в двумерных декартовых координатах, центр которых связан с Солнцем. В конце расчета должны быть получены следующие результаты:

- рисунок изображающий положения планеты во все промежуточные моменты времени t_i ;
- максимальное отклонение текущей полной энергии планеты от начального значения полной энергии (дисбаланс энергии в процентах);
- период обращения планеты вокруг Солнца, если его возможно вычислить для текущих начальных условий.

Для удобства все вычисления необходимо вести в системе единиц, где длина измеряется в астрономических единицах (среднее расстояние от Земли до Солнца), а время измеряется в годах. В данной системе единиц произведение гравитационной постоянной G на массу Солнца примерно равно $G \cdot M \approx 4\pi^2$. В работе также понадобится значение модуля скорости планеты для случая круговой орбиты. На круговой орбите модуль скорости равен

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}},$$

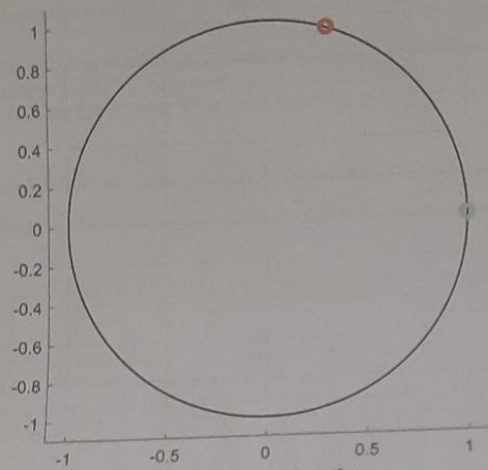
где r – радиус орбиты.

С помощью созданной модели необходимо решить следующие задачи:

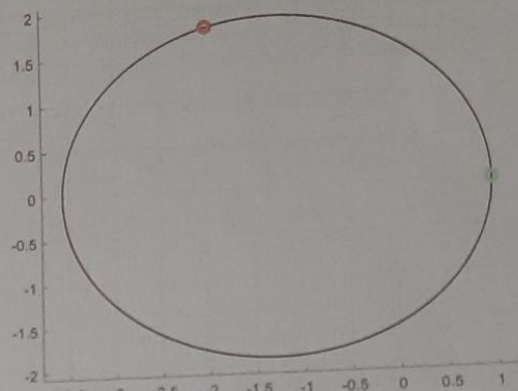
1. провести расчет для нескольких вариантов круговых орбит; дать оценку максимально допустимого шага по времени, при котором получаются достаточно точные результаты (дисбаланс полной энергии менее сотых долей процента);
2. подобрать начальное значение скорости так, чтобы реализовалась эллиптическая орбита планеты вокруг Солнца; определить малую и большую полуось орбиты; проверить выполнение третьего закона Кеплера для 3-4 различных орбит;
3. получить вид орбиты планеты в случае, если зависимость силы притяжения планеты к Солнцу незначительно отклоняется от закона обратных квадратов, то есть $F \sim r^{-(2+\delta)}$, где r – расстояние между планетой и Солнцем, δ – малое число, например 0.05.

Расчеты рекомендуется проводить для следующего начального положения планеты $x(t=0) = x_0$, $y(t=0) = 0$, при этом $v_x(t=0) = 0$. Все расчеты должны проводиться до конечного момента времени T , который как минимум в 20 раз больше чем текущий период обращения планеты вокруг Солнца.

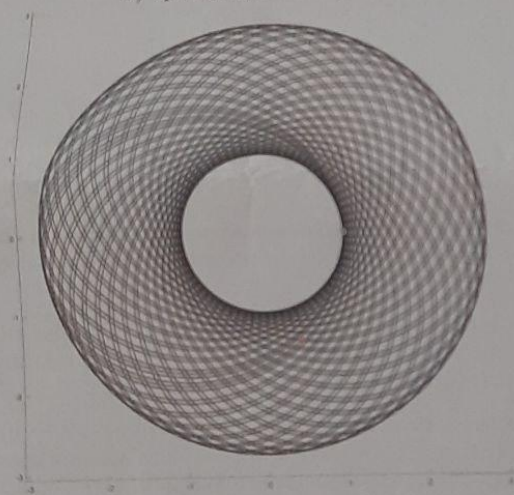
Ниже приведены примеры орбит различного вида.



а) пример круговой орбиты



б) пример эллиптической орбиты



в) пример прецессии орбиты