> *#Задание 1. Упростите алгебраическое выражение.*

> *#Упрощение выражения с помощью команды simplify*

> $$simplify\left(\frac{\dfrac{x^4 + x^3 - 7 \cdot x^2 - x + 6}{5 \cdot x^4 + 10 \cdot x^3 - 100 \cdot x^2 - 330 \cdot x - 225}}{\dfrac{x^2 - 3 \cdot x + 2}{x^3 - 2 \cdot x^2 - 15 \cdot x}}\right);$$

$$\frac{x}{5} \qquad (1)$$

>

> *#Задание 2. Приведите выражение к многочлену стандартного вида.*

> *#Приведение многочлена стандартного вида с помощью команды expand*

> $expand\left((2 \cdot x - 7) \cdot (5 \cdot x^2 + 6) \cdot (3 \cdot x + 4)\right);$

$$30\, x^4 - 65\, x^3 - 104\, x^2 - 78\, x - 168 \qquad (2)$$

> *#Задание 3. Разложите многочлен на множители.*

> *#Разложите многочлена на множители с помощью команды factor*

> $factor\left(x^4 + 6 \cdot x^3 + 4 \cdot x^2 - 30 \cdot x - 45\right);$

$$\left(x^2 - 5\right)\, (x + 3)^2 \qquad (3)$$

> *#Задание 4. Постройте график многочлена и найдите все его корни.*

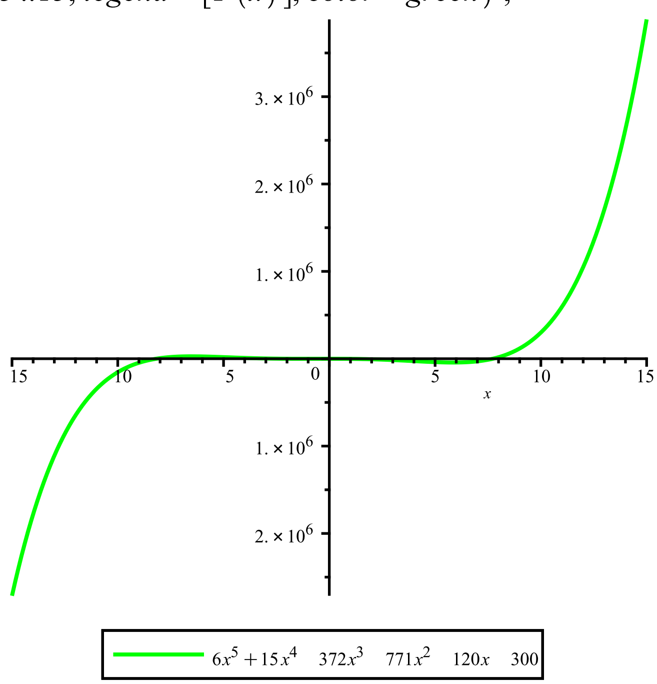
> *#4.1.Исходное уравнение*

> $P(x) := 6 \cdot x^5 + 15 \cdot x^4 - 372 \cdot x^3 - 771 \cdot x^2 - 120 \cdot x - 300;$

$$P := x \mapsto 6 \cdot x^5 + 15 \cdot x^4 - 372 \cdot x^3 - 771 \cdot x^2 - 120 \cdot x - 300 \qquad (4)$$

> *#4.2.Построение графика*

> $G := plot(P(x), x = -15..15, legend = [P(x)], color = green);$




> *#4.3.Поиск всех корней и отображение на графике*

> $solutions := evalf(solve(P(x), x));$

$solutions := 7.729437086, 0.01424444072 + 0.6170762177\,I, -2.074913207, -8.183012760, 0.01424444072 - 0.6170762177\,I$ **(5)**

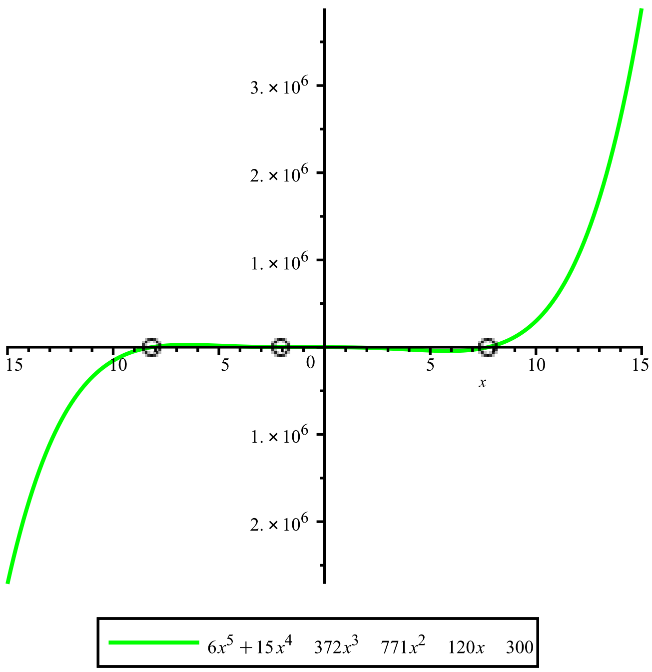
> $points := seq([sol, 0], sol \textbf{ in } solutions);$

$points := [7.729437086, 0], [0.01424444072 + 0.6170762177\,I, 0], [-2.074913207, 0], [-8.183012760, 0], [0.01424444072 - 0.6170762177\,I, 0]$ **(6)**

> $F := plots[pointplot]([points], axes = normal, symbolsize = 20, symbol = circle, color = black);$

>

> $display(\{F, G\});$




> *#Задание 5. Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.*

> $f := \dfrac{3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 + 5 \cdot x \quad 2}{(x^2+2)\cdot(x \quad 3)^2\cdot(x^2 \quad 4)};$

$$f := \frac{3\,x^4 + 4\,x^3 + 5\,x \quad 2}{(x^2+2)\,(x \quad 3)^2\,(x^2 \quad 4)}$$ **(7)**

>

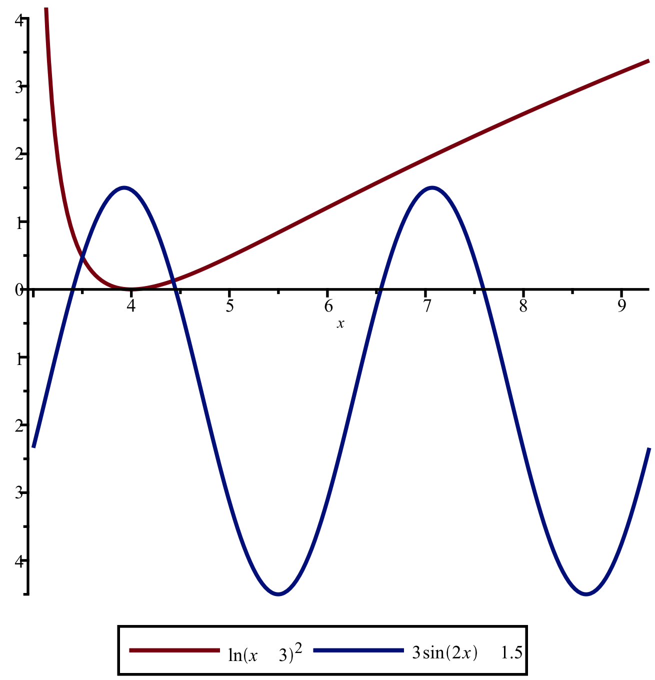
> $convert(f, parfrac);$

$$\frac{39\,x \quad 106}{726\,(x^2+2)} + \frac{11}{3\,(x \quad 2)} + \frac{364}{55\,(x \quad 3)^2} \quad \frac{10909}{3025\,(x \quad 3)} \quad \frac{1}{150\,(x+2)}$$ **(8)**

> *#Задание 6. Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10 $^{5}$.*

> *#6.1. Построение исходных графиков*

> $plot([\ln^2(x \quad 3), 3 \cdot \sin(2\cdot x) \quad 1.5], legend = [\ln^2(x \quad 3), 3 \cdot \sin(2\cdot x) \quad 1.5]);$



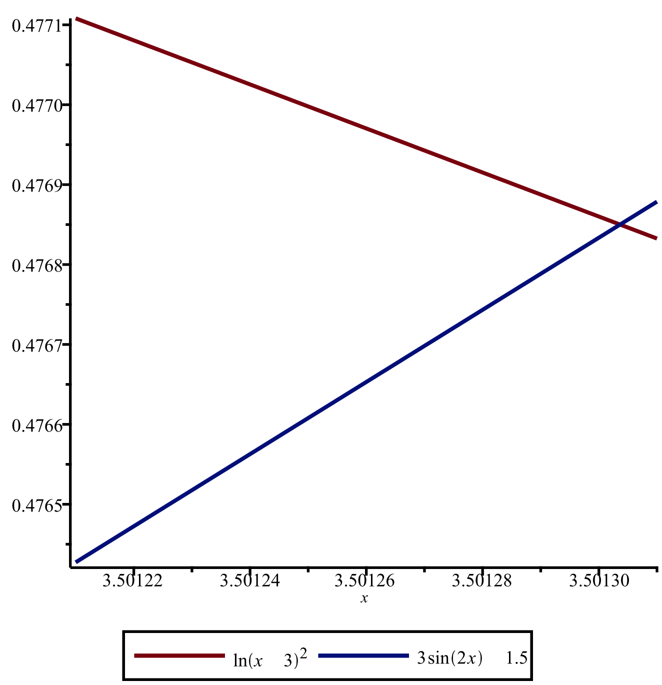

> *#6.2.Нахождение точек пересечения графиков функций*

> $evalf\left(fsolve\left(\left\{\ln^2(x\quad 3)=3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right\}, x=3\,..6\right), 6\right);\ evalf\left(fsolve\left(\left\{\ln^2(x\quad 3)=3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right\}, x=0\,..4\right), 6\right);$

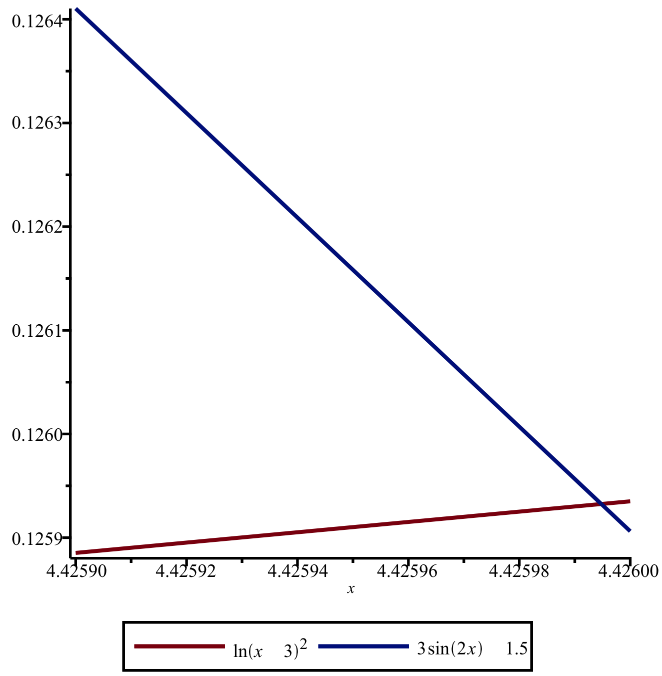
$$\{x=4.42599\}$$

$$\{x=3.50130\} \qquad \mathbf{(9)}$$

> $plot\left(\left[\ln^2(x\quad 3), 3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right], x=3.50121\,..\,3.50131, legend=\left[\ln^2(x\quad 3), 3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right]\right);$




> $plot\left(\left[\ln^2(x\quad 3), 3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right], x=4.42590\,..4.42600, legend=\left[\ln^2(x\quad 3), 3\ \cdot\sin(2\cdot x)\quad 1.5\right]\right);$




> *#Задание 7. Докажите, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *, определив номер n ,*
*начиная* с *которого все члены последовательности* $a_n$ *попадут* $\varepsilon$
*окрестность точки*
*. Проиллюстрируйте полученный результат* с *помощью чертежа, положив* $\varepsilon = 0.1$

> $restart:$

> $an := \dfrac{7\cdot n+4}{4\cdot n \quad 1};\ a := \dfrac{7}{4};\ \text{epsilon} := 0.1;$

$$an := \frac{7\,n+4}{4\,n \quad 1}$$

$$a := \frac{7}{4}$$

$$\epsilon := 0.1 \tag{10}$$

>

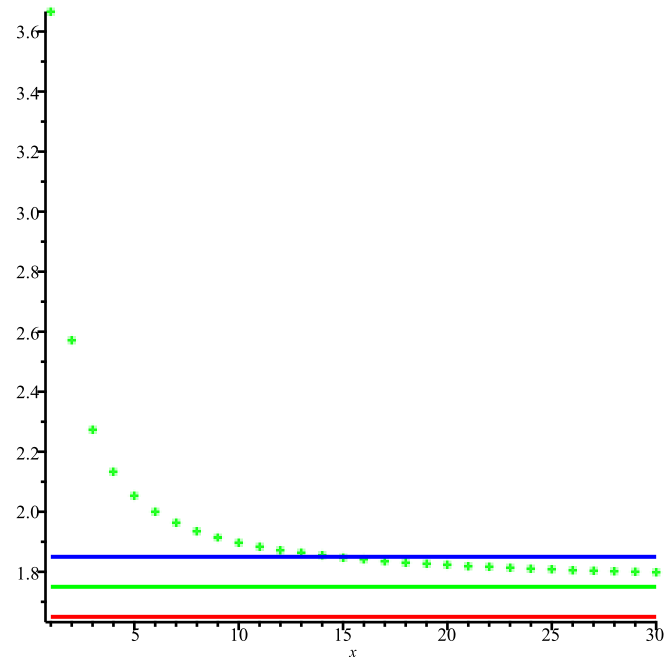
> $solve(a \quad \text{epsilon} < an < a + \text{epsilon}, n);$

$$(\quad \infty, -14.12500000), (14.62500000, \infty) \tag{11}$$

> $y\_1 := plots[pointplot](\{seq([n, an], n = 1 ..30)\}, color = green);$

> $y\_2 := plot([a \quad \text{epsilon}, a, a + \text{epsilon}], x = 1 ..30, color = [red, green, blue]);$

> $plots[display](y\_1, y\_2);$




> *#Задание 8. Вычислите пределы числовых последовательностей.*

> *#8.1.Вычисление предела*

> $\lim\limits_{n \to \text{infinity}} (\mathrm{sqrt}(n \cdot (n+5)) - n)$ ;

$$\frac{5}{2} \tag{12}$$

> *#8.2.Вычисление предела*

> $\lim\limits_{n \to \text{infinity}} \left( \left( \frac{2 \cdot n^2 + 5 \cdot n + 7}{2 \cdot n^2 + 5 \cdot n + 3} \right)^n \right)$ ;

$$1 \tag{13}$$

> *#Задание 9. Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:*

> *#1. Определите ее через функциональный оператор и постройте график.*

> *#2. В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.*

> *#3. Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности.*

> *#4. Постройте в одной системе координат графики функции, производной* и *какой -нибудь первообразной.*

>

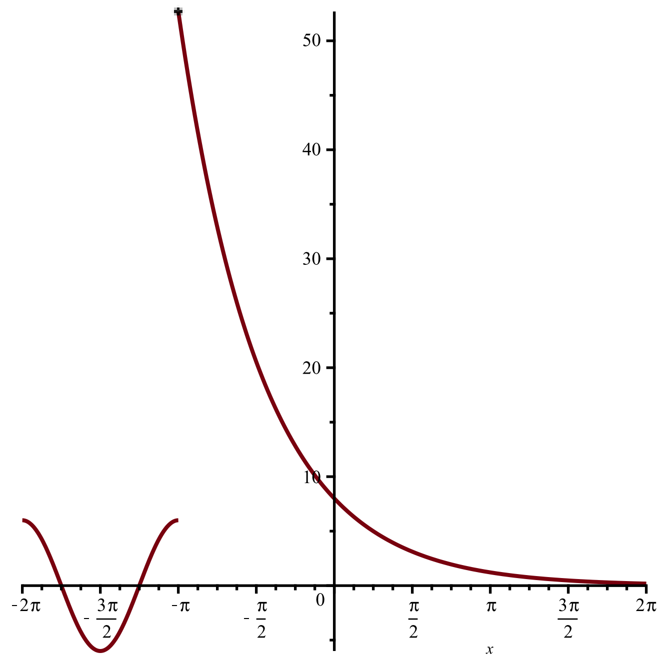
*#5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми x = 1, x = 5, y = 0. Сделайте чертеж.*

> *#9.1.Построение графика кусочно-непрерывной функции*

> $F(x) := piecewise\left(x < -\pi, 6 \cdot \cos(2 \cdot x), x \geq -\pi, 8 \cdot \mathrm{e}^{-0.6 \cdot x}\right)$ ;

$$F := x \mapsto \begin{cases} 6 \cdot \cos(2 \cdot x) & x < -\pi \\ 8 \cdot \mathrm{e}^{-0.6 \cdot x} & -\pi \leq x \end{cases} \tag{14}$$

> $plot(F(x), discont = true)$ ;




> #9.2.Нахождение односторонних пределов

> $limit\left(F(x), x=-\pi, left\right);$

$$6. \tag{15}$$

> $limit\left(F(x), x=-\pi, right\right);$

$$52.68849570 \tag{16}$$

> $limit(F(x), x=-\text{infinity});$

$$-6. .. 6. \tag{17}$$

> $limit(F(x), x=+\text{infinity});$

$$0. \tag{18}$$

> #9.3.Нахождение производной

> $derivative := diff(F(x), x);$

$$derivative := \begin{cases} -12.\ \sin(2.\ x) & x < -3.141592654 \\ \text{Float(undefined)} & x = -3.141592654 \\ -4.800000000\ \mathrm{e}^{-0.6000000000\,x} & -3.141592654 < x \end{cases} \tag{19}$$

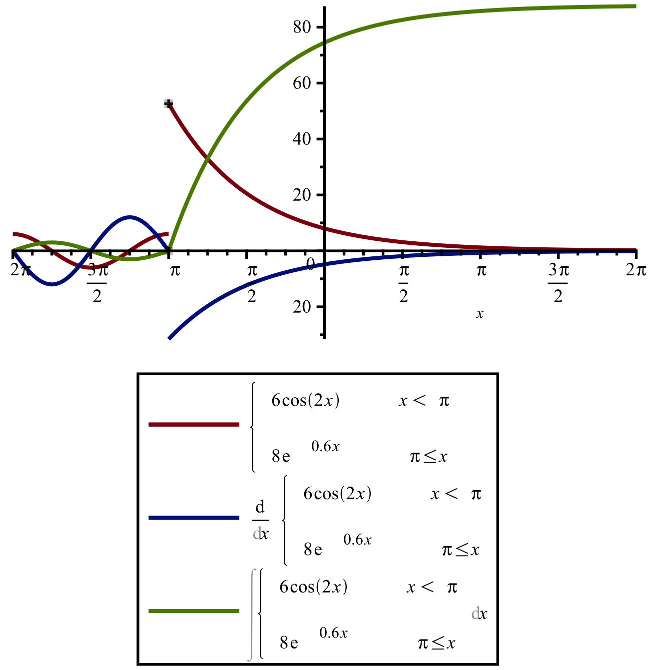
> #9.4.Нахождение первообразной

> $integral := int(F(x), x);$

$$integral := \begin{cases} 3.\ \sin(2.\ x) & x \le -3.141592654 \\ -13.33333333\ \mathrm{e}^{-0.6000000000\,x} + 87.81415950 & -3.141592654 < x \end{cases} \tag{20}$$

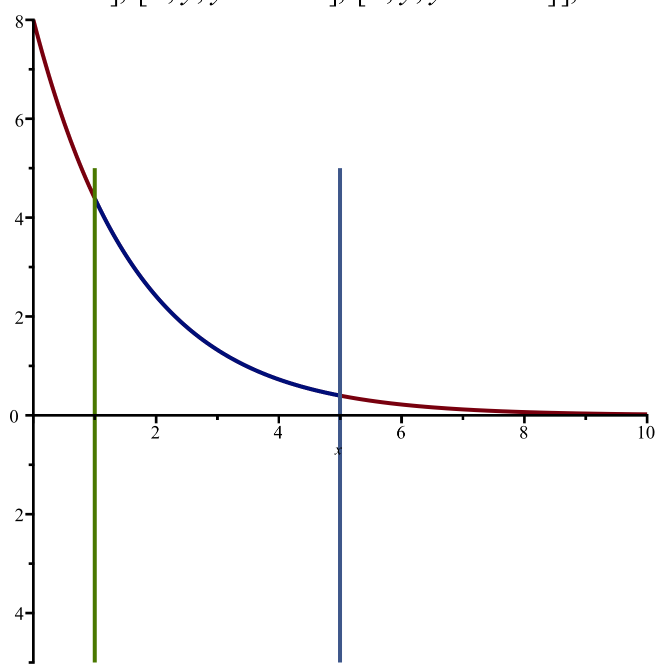
> #9.5.Построение графика исходной функции, производной и первообразной

> $plot([F(x), derivative, integral], legend=[F(x), Diff(F(x), x), Int(F(x), x)], discont=true);$




> *#Построение криволинейной трапеции и нахождение площади под графиком*

> $plot([F(x), [x, F(x), x = 1\ ..\ 5], [1, y, y = \ 5\ ..5], [5, y, y = \ 5\ ..5]], x = 0\ ..\ 10, discont = true)$ ;




> $S := int(F(x), x = 1\ ..\ 5)$ ;

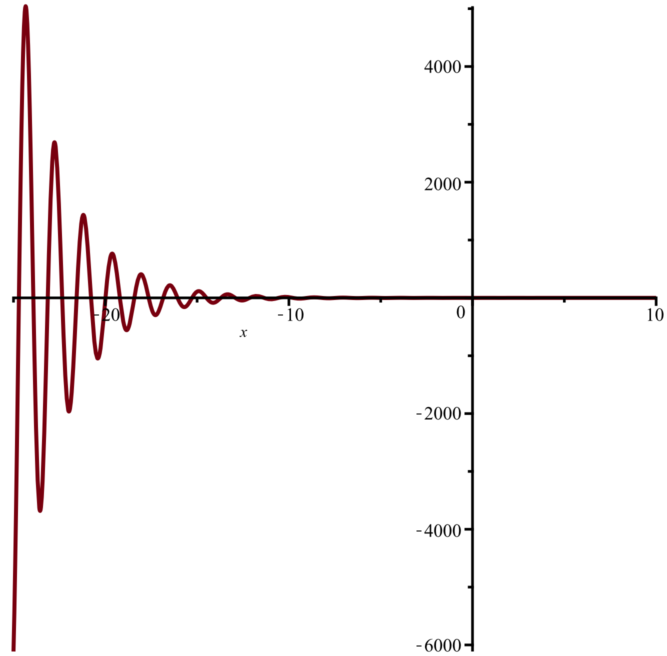
$$S := 6.653660903 \tag{21}$$

> *#Задание 10. Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2-го порядка (пункт 2) найдите каноническое уравнение* с *помощью ортогонального преобразования.*

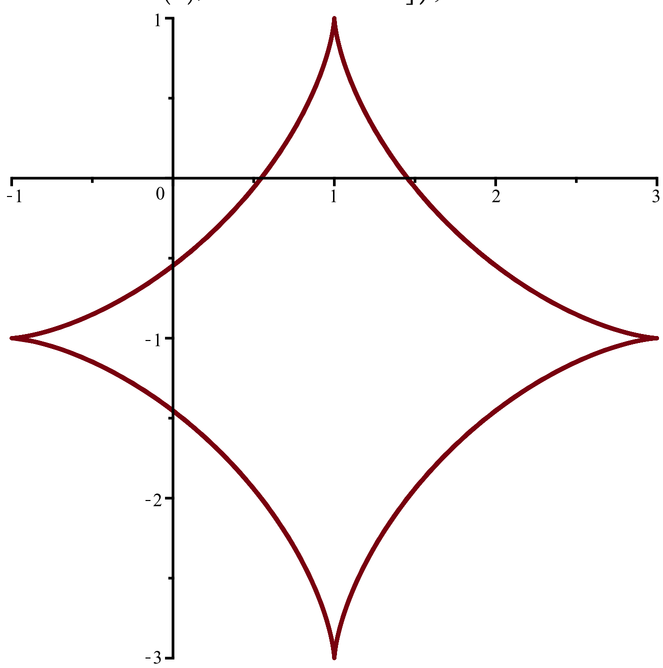
> $f(x) := 0.3 \cdot e^{0.4 \cdot x} \cdot \cos(4 \cdot x + 3)$;

$$f := x \mapsto 0.3 \cdot e^{(-1) \cdot 0.4 \cdot x} \cdot \cos(4 \cdot x + 3) \tag{22}$$

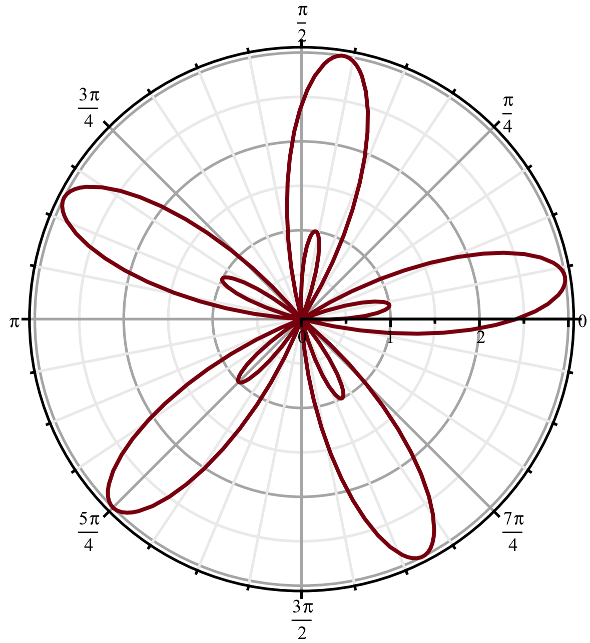
> $plot(f(x), x = \ 25\ ..10)$ ;




> $plot\left(\left[1+2\cdot\cos^3(t), -1+2\cdot\sin^3(t), t=-7\cdot\pi..7\cdot\pi\right]\right);$



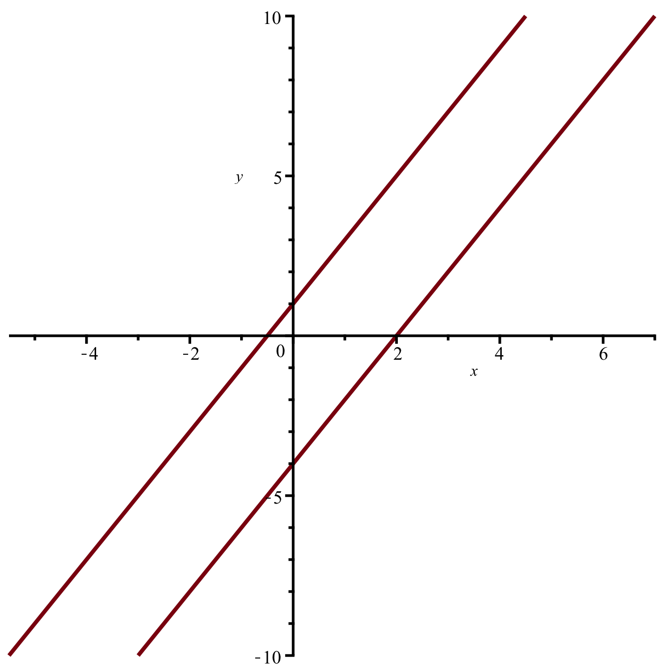

> $plots[polarplot]\left(1+2\cdot\sin\left(5\cdot\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right);$




> $with(plots):$
$with(LinearAlgebra):$

> $func(x, y) := 4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 - 6 \cdot x + 3 \cdot y - 4 = 0;$
$implicitplot\left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 - 6 \cdot x + 3 \cdot y - 4 = 0, x = -10..10, y = -10..10\right);$

$$func := (x, y) \mapsto 4 \cdot x^2 - 4 \cdot y \cdot x + y^2 - 6 \cdot x + 3 \cdot y - 4 = 0$$




> #*Нахождение матрицы из квадратичной формы* $\left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2\right)$

> $M := Matrix([[4,-2], [-2, 1]]);$

$$M := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

>

> #Нахождение собственных значений и векторов

> $vecs\_vals := Eigenvectors(M);$

$$vecs\_vals := \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

>

> #Нормирование первого вектора для ортонормированного базиса

> $e1 := Normalize(Column(vecs\_vals[2], [2]), Euclidean);$

$$e1 := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{25}$$

> #Нормирование второго вектора для ортонормированного базиса

> $e2 := Normalize(Column(vecs\_vals[2], [1]), Euclidean);$

$$e2 := \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{26}$$

>

> #Матрица перехода от старой к новой

> $T := Matrix([e1, e2]);$

$$T := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \tag{27}$$

> #Определитель равен 1, значит базис правый и матрица соответствует ортогональному преобразованию

> $Determinant(T, method = algnum);$

$$1 \tag{28}$$

>

> #Преобразование линейной части кривой 2-го порядка через формулу базисов разных координат

> $new\_form := simplify(subs(x = e1[1]\cdot x1 + e2[1]\cdot y1, y = e1[2]\cdot x1 + e2[2]\cdot y1, 4\cdot x^2 - 4\cdot x\cdot y + y^2 - 6\cdot x + 3\cdot y - 4));$

$$new\_form := 5\,y1^2 + 3\,y1\sqrt{5} - 4 \tag{29}$$

> #Приведение к завершенной квадратной форме.

> $pseudocanon\_form := Student[Precalculus][CompleteSquare](new\_form);$

$$pseudocanon\_form := 5\left(y1+\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2-\frac{25}{4} \tag{30}$$

> $simplify(pseudocanon\_form);$

$$5\,y1^2+3\,y1\sqrt{5}-4 \tag{31}$$

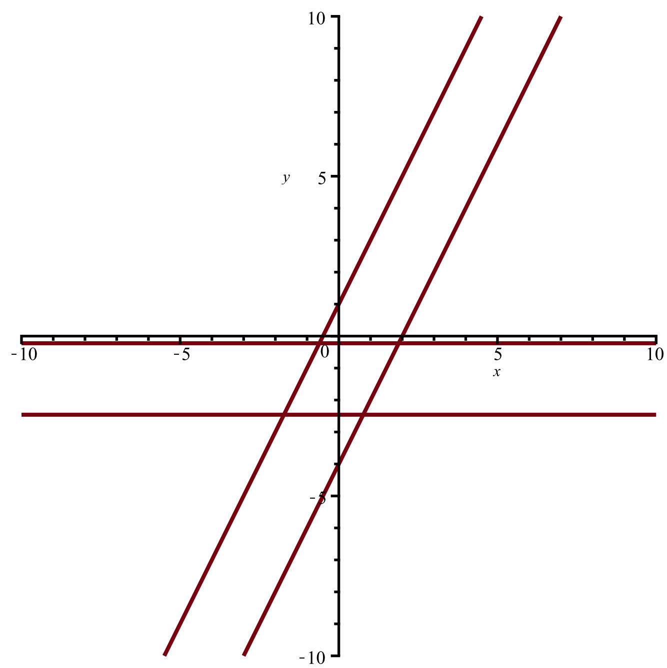
> *#Каноническое уравнение*

> $canon\_form := subs\left(y1=y2+\frac{3}{10}\cdot \mathrm{sqrt}(5),\,pseudocanon\_form\right);$

$$canon\_form := 5\left(y2+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{25}{4} \tag{32}$$

> *#Графики канонического уравнения(в нашем случае это параллельные прямые, где уравнение имеет вид:* $y^2-b^2=0$) и *исходное уравнение* $2-$ *го порядка*

> $f1 := implicitplot(canon\_form, x2=-10..10, y2=-10..10);$
$f2 := implicitplot\left(4\cdot x^2-4\cdot x\cdot y+y^2-6\cdot x+3\cdot y-4=0, x=-10..10, y=-10..10\right);$
$display(\{f1, f2\});$




>