

# Skript Mathe 2

30. April 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folgen</b>	<b>2</b>
1.1 Definition . . . . .	2
1.2 Beispiele . . . . .	2
1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen . . . . .	4
1.4 Beispiele . . . . .	4
1.5 Definition: Konvergente Folgen . . . . .	4
1.6 Bemerkung . . . . .	5
1.7 Beispiele . . . . .	5
1.8 Satz . . . . .	6
1.9 Bemerkung . . . . .	6
1.10 Beispiel: Geometrische Folge . . . . .	6
1.11 Beispiel . . . . .	7
1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung . . . . .	7
1.13 Rechenregeln für Folgen . . . . .	7
1.14 Beispiele: Rechenregeln . . . . .	9
1.15 Satz: Einschließungsregel . . . . .	10
1.16 Beispiele . . . . .	11
1.17 Satz . . . . .	11
1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation . . . . .	11
1.19 Beispiele . . . . .	12
1.20 Definition: Monotonie . . . . .	12
1.21 Beispiele . . . . .	12
1.22 Definition . . . . .	12
1.23 Satz: Monotone Konvergenz . . . . .	12
1.24 Bernoulli-Ungleichung . . . . .	13
1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$ . . . . .	13
1.26 Satz: Intervallschachtelung . . . . .	14
1.27 Beispiel . . . . .	15
1.28 Definition: Eulersche Zahl . . . . .	15
1.29 Bemerkung . . . . .	15
1.30 Definition: Teilfolge . . . . .	15
1.31 Beispiel . . . . .	15
1.32 Bemerkung . . . . .	15
1.33 Definition: Häufungspunkt (HP) . . . . .	15
1.34 Beispiel . . . . .	16
1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß . . . . .	16

# 1 Folgen

## 1.1 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen  $(\mathbb{N})$  in eine beliebige Menge  $M$  (oft  $M \subseteq \mathbb{R}$ ).

$a_n$ :  $n$ -tes Folgenglied

$n$ : Index

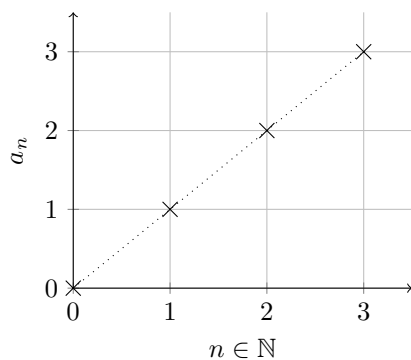
Oft ist das erste Folgenglied nicht  $a_1$ , sondern z.B:  $a_7$ .

**Schreibweise:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n \geq n_0}$  oder  $(a_n)$

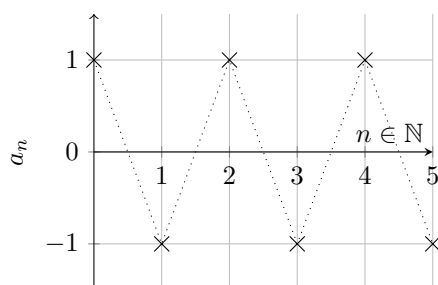
## 1.2 Beispiele

a)  $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$  (konstante Folge)

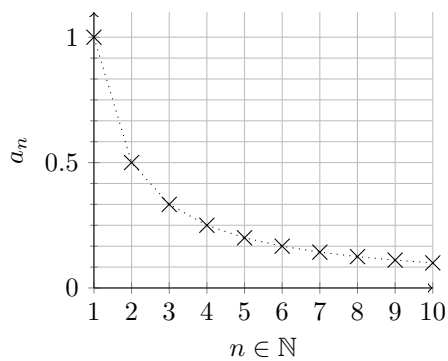
b)  $a_n = n$  (Ursprungsgerade)



c)  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  (alternierend)



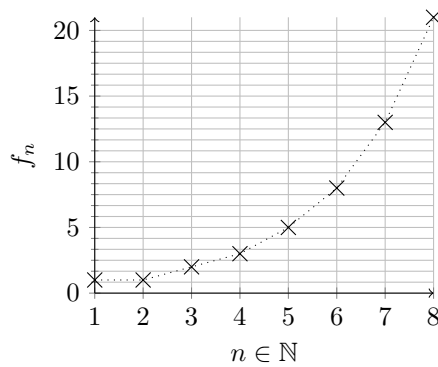
d)  $a_n = \frac{1}{n}$  (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

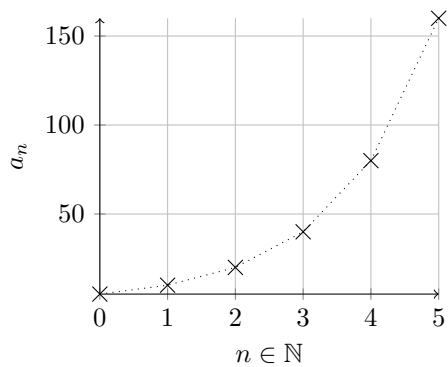
$q$ : Wachstumsfaktor

$X_0$ : Startpopulation

**Explizit:**  $X_n = q^n * X_0$

z.B:  $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$ : Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$ : Relative Anzahl der Individuen in Generation  $n$

Anzahl der Individuen in Generation  $n + 1$  hängt ab von der aktuellen Populationsgröße  $X_n$  und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch  $(1 - X_n)$

### 1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

- a)  $(a_n)$  heißt beschränkt  $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$  für ein  $K \geq 0$ .
- b)  $(a_n)$  heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

### 1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

### 1.5 Definition: Konvergente Folgen

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt (das von  $\epsilon$  abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

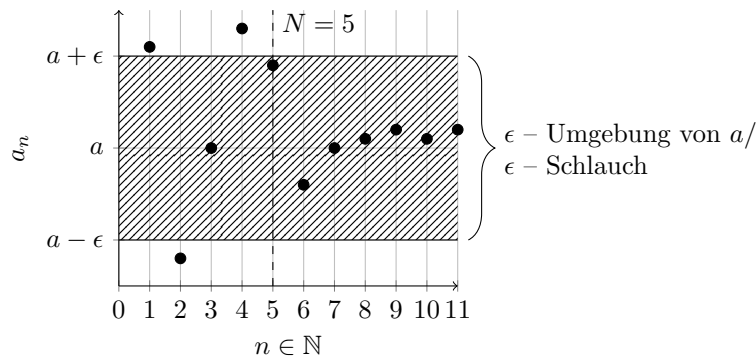
**Kurz:**

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .
- c) Eine Folge  $(a_n)$  mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

## 1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$  bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  vor, so sind ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder weniger als  $\epsilon$  von  $a$  entfernt. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen  $N$  gewählt werden.



Solch ein  $N$  muss sich für jedes noch so kleine  $\epsilon$  finden lassen. Ansonsten ist  $(a_n)$  divergent.

## 1.7 Beispiele

- a) Behauptung:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle  $\epsilon = \frac{1}{10}$ . Dann ist für  $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges  $\epsilon$ )

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

- b) Behauptung:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n+1}{3n}$  hat Limes  $a = \frac{1}{3}$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - \frac{1}{3}| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{3N} < \epsilon \quad \forall N \geq n$$

- c)  $N$  muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ , für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

## 1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Limes  $a \in \mathbb{R}$ .

Zu zeigen:  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , für ein  $K \geq 0$ .

Sei  $\epsilon = 1$ ,  $(a_n)$  konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze  $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

## 1.9 Bemerkung

Wegen 1.8:  $(a_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

## 1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für  $|q| > 1$  oder  $q = -1$  ist  $(q^n)$  divergent.

**Beweis:**

1.)  $|q| < 1$ . Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

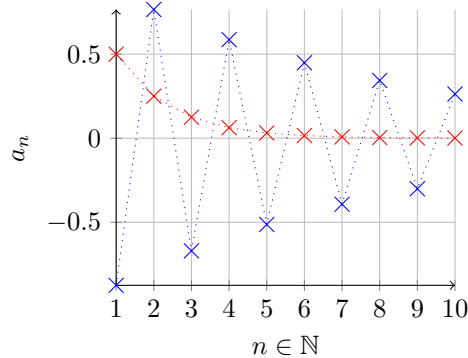
2.)  $q = 1$ .  $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.)  $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$  unbeschränkt  $\underset{1.9}{\Rightarrow} (q^n)$  divergent

4.)  $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$ . Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

### 1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $((\frac{-7}{8})^n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen.



### 1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der  $\Delta$ -Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 &||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ da:} \\
 &\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad | -b| \\
 &\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \\
 &\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad | -a| \\
 &\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a| \\
 &\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}
 \end{aligned}$$

### 1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$ .

Dann gilt:

- 1.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 2.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- 4.)

$$b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

- 5.)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

Seien weiter  $(d_n), (e_n)$  reelle Folgen,  $(d_n)$  ist Nullfolge

6.)  $(e_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$  ist Nullfolge

7.)  $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$  ist Nullfolge

**Beweis:**

1.)

Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.)  $\bullet$  Für  $\lambda = 0$  gilt auch  $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a$  ✓

$\bullet$  Für  $\lambda \neq 0$ : Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8  $\Rightarrow (b_n)$  beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow$

$$\exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.)  $\bullet$  Z.z:  $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist  $b \neq 0$  und  $|b| > 0$ .

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$



- Z.z:  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$  hat  $\frac{a}{b}$  als Limes.

a  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| &< \underbrace{\frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}_{\downarrow} \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

## 1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

$$\bullet \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\bullet |(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$$

$$\Rightarrow (-1)^n + 5 \text{ beschränkt}$$

b)

$$\frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} \rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}^2(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}^2(-1 + \frac{1}{n})}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

ann:

kte Potenz

$$\boxed{n^k}$$

$$\boxed{X^n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

exponentielles Wachstum

**Beweis:** Es ist  $|x| = 1 + t$  für  $t > 0$ .

Für  $n > k$ :

$$\begin{aligned}
 |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\
 &\geq_{j=k+1} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\
 &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\
 &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{n^k (k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

d) Sei  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$  ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\
 &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6} 0
 \end{aligned}$$

### 1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

1.  $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2.  $(a_n), (c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow_{2.} N_a, N_c : & \bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\
 & \bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c
 \end{aligned}$$

us 1.:

$$\begin{aligned}
 |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
 \forall n \geq k & \quad \downarrow \\
 \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
 &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N_c\} \quad \square
 \end{aligned}$$

### 1.16 Beispiele

a)  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , denn:

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$  (1.14/c),

gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits  $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1-\epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , ist

$$1+\epsilon > \sqrt[n]{n} > 1-\epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b)  $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1$$

### 1.17 Satz

Sei  $(a_n)$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow a$ . Dann:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$  mit  $q > 0$  (ohne Beweis)

### 1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\text{a) } \mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$$

$$\text{b) } o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

$$\text{c) } a_n \sim b_n, \text{ falls } \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$$

$\mathcal{O}, o$  heißen Landau-Symbole

### 1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$  – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$  – Menge aller Nullfolgen

### 1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)$  heißt

- a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_n \geq (>) a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$  (monoton wachsend)

- b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_n \leq (<) a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \searrow$  (monoton fallend)

### 1.21 Beispiele

- $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  streng monoton fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = 1$  monoton steigend und fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton

### 1.22 Definition

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  von oben (unten) beschränkt ist.

### 1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei  $(a_n)$  reelle Folge:

- Falls  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls  $(a_n) \searrow$  und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

**Beweis:**

- Sei  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt  
 und seien  $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  und  $\epsilon > 0$ .  
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $a$  kleinste obere Schranke  
 $\Rightarrow a - \epsilon$  keine obere Schranke.  
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$   
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N \end{matrix} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$   
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
- analog  $\square$

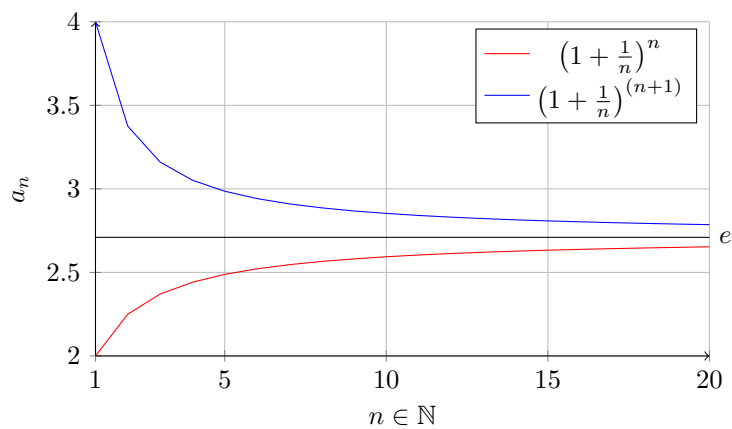
## 1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

## 1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$



- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{n+1}{n})$  ist monoton.

Zeigen dazu:  $a_n \geq a_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \\ &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left( \frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \left( \frac{n}{n-1} \right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1+n} = \binom{n+1}{n+1}$  ist monoton fallend.

Zeige dazu:  $b_n \leq b_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \left( 1 + \frac{1}{n^2-1} \right)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$\text{Wegen } \left( 1 + \frac{1}{n^2-1} \right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \geq \frac{1+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \quad (?)$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl  $e$  bezeichnet. Dazu zunächst:

## 1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind  $(a_n), (b_n)$  konvergent und besitzen den selben Limes.

**Beweis:** Es ist  $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$   $(a_n)$  hat obere Schranke  $b_1$   
 $(b_n)$  hat untere Schranke  $a_1$

$\stackrel{1.23}{\Rightarrow} (a_n), (b_n)$  konvergent.

Da  $(b_n - a_n)$  Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich.  $\square$

### 1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$  (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

### 1.29 Bemerkung

$(a_n)$  konvergent  $\stackrel{1.8}{\Rightarrow} (a_n)$  beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch  $a_n = (-1)^n$  zwei konvergente Teilfolgen mit Limes  $+1$  und  $-1$ .

### 1.30 Definition: Teilfolge

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 1.32 Bemerkung

$(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  Jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

### 1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.

### 1.34 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat zwei Häufungspunkte:  $-1$  und  $1$ .

### 1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  besitzt konvergente Teilfolge

**Beweis:** Konstruiere konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ( $K$  geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$ : Halbiere  $[A_0, B_0]$ 
  - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgenglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir  $a_{n_1}$ , die Intervallhälfte aus der es stammt  $[A_1, B_1]$ .

- $k=2$ : Halbiere  $[A_1, B_1]$ . Wende obiges Verfahren an, um  $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$  zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da  $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \lim_{1.15 \quad k \rightarrow \infty} (a_{n_k}) \quad \square$