Skript Mathe 2

2. Juli 2018

0.1 Satz: Partielle Integration

Für $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar gilt:

$$\int f_1'(x) f_2(x)\,dx = f_1(x) f_2(x) - \int f_1(x) f_2'(x)\,dx$$

sofern $f_1 \cdot f_2'$ eine Stammfunktion besitzt.

Beweis:

$$\left(f_1(x) \cdot f_2(x) - \int f_1(x) \cdot f_2'(x)\,dx\right)'$$

$$\underset{6.8}{=} f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)$$

$$= f_1'(x) \cdot f_2'(x) \quad \square$$

0.2 Beispiele

a) $$\int \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$

$$= (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= (-\cos x) \cdot x + \sin x + c$$

b) $$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx = x \cdot \ln x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}\,dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + c, \quad x > 0$$

c) $$\int \underbrace{e^x}_{f'} \cdot \underbrace{\cos x}_{g}\,dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g}\,dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int e^x \cos x\,dx} = I$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + c$$

0.3 Satz: Substitutionsregel

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $\varphi : D_1 \to D_2$ differenzierbar und $f : D_2 \to \mathbb{R}$ mit Stammfunktion F.

Dann:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \qquad \Big|\ y = \varphi(x)$$

Beweis: Kettenregel

$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad \square$

0.4 Beispiele

a) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\varphi(x) \neq 0$

$$\forall x \in D \underset{7.11}{\Rightarrow} \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy \quad \Big|\ y = \varphi(x)$$

$$= \ln|y| + c = \ln|\varphi(x)| + c \quad \text{(vgl. 6.15)}$$

z.B.:

- $$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$
- $$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx$$
  $$= -\ln|\cos x| + c, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

b) $f : D \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

$$\Rightarrow \int f(\underbrace{ax+b}_{\varphi(x)})\, dx = \frac{1}{a} \int f(\underbrace{\varphi(x)}_{ax+b}) \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{a}\, dx$$

$$\underset{7.11}{=} \frac{1}{a} \int f(y)\, dy \quad \Big|\ y = ax+b$$

z.B.:

- $$\int \frac{1}{(3x+2)^5}\, dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^5}\, dy \quad \Big|\ y = 3x+2$$
  $$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{y^4} + c = \frac{1}{-12(3x+2)^4} + c$$

0.5 Bemerkung

a) $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy$$

d.h.: $y = \varphi(x),\ dy = \varphi'(x)\, dx \quad \Big|\ : dx$

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(x) \quad \text{(vgl. 6.2.1)}$$

z.B.: $\int \frac{x}{2x+1}\, dyx \quad \Big|\, y = 2x+1$

$dy = 2dx$

$\Rightarrow \int \frac{x}{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}\cdot 2\, dx$

$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{y-1}{y}}_{1-\frac{1}{y}}\, dy = \frac{1}{4}(y - \ln|y|) + c$

$$-\frac{1}{4}(2x+1-\ln(2x+1)) + c$$

b) Falls $y = \varphi(x)$ bijektiv, so ist

$x = \varphi^{-1}(y)$ und $dx = (\varphi^{-1}(y))'\, dy$

Daraus ergibt sich ein alternativer Lösungsweg:

$$\int \frac{x}{2x+1}\, dx \quad \Big|\, y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{1}{2}(y-1)}_{\varphi^{-1}(y)}$$

$dx = \frac{1}{2}\, dy$

$= \int \frac{\frac{1}{2}(y-1)}{y}\cdot\frac{1}{2}\, dy$

$= \frac{1}{4}\int \frac{y-1}{y}\, dy = \ldots \quad$ (a)

c) Auf komplizierte Brüche wendet man Partialbruchzerlegung an.

Hier nur ein Beispiel (muss man nicht wissen):

$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+c)x}{x(x^2+1)}$

$\Rightarrow (A+B)x^2 + Cx + A = 1$

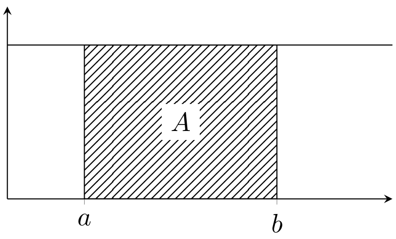
$\Rightarrow A+B = 0, \quad A = 1 \Rightarrow B = -1$

$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\, dx$

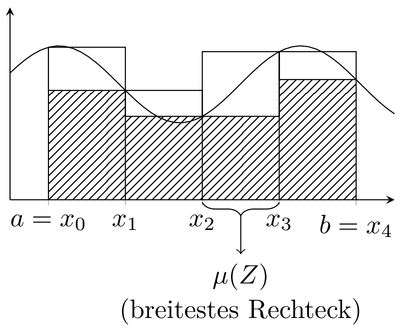
$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

Bestimmte Integrale

0.6 Motivation: Flächenberechnung



$f(x) = c$
$A = (b - a) \cdot c$



Unterteilung in Rechtecke, die die Fläche nach oben und unten annähern.

Bilde Grenzwerte für $\mu(Z) \to 0$, d.h. man verfeinert die Unterteilung sukzessive.

0.7 Definition: Zerlegung

Eine Zerlegung von $[a, b]$ ist eine Menge $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq [a, b]$
mit $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$\mathfrak{Z}[a, b]$ heißt die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

Die Länge des größten Teilintervalls in $\{[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, ..., n\}$ heißt Feinheit der Zerlegung. Bezeichnung: $\mu(Z)$.