Skript Mathe 2

9. Mai 2018

0.1 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kan Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

- $1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm ...$

$$Sn = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{6} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{9} \pm ...$

$$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

0.2 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls
eine bijektive Abbildung $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

0.3 Umordnungssatz

Jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ohne Beweis)

0.4 Riemannscher Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ (ohne Beweis)

1 Potenzreihen

1.1 Grundbegriffe und Beispiel

a) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist für $|x| < 1$ absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für $x \in \underbrace{(-1,1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$.

   Für $|x| > 1$ ist $P(x)$ divergent.

b) $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$ ist für $x \neq 1$ divergent:

   Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

1.2 Definition: Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ reelle Folge und seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten a_k

1.3 Bemerkung

a) In Bsp 3.1a) ist $x_0 = 0$ und $a_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
   In 3.1b) ist $x_0 = 1$ und $a_k = k!$

b) In 3.1a) konvergiert $P(x)$ für $x \in (-1,1)$, in 3.1b) lediglich für $x = x_0 = 1$. Es wird sich heraussstellen, dass es für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Zentrum x_0 einen Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty) \cup \{\infty\}$ gibt (3.5), so dass $P(x)$ absolut konvergent für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, (d.h. $|x - x_0| < \rho$) und divergent für $|x - x_0| > \rho$ ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

1.4 Satz

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_o\}$.

Dann:

1. $P(x_1)$ konvergent $\Rightarrow$ $P(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit
   $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. $P(x_1)$ divergent $\Rightarrow$ $P(x)$ ist divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit
   $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Beweis:

1. $P(x)$ konvergent $\underset{2.9}{\Rightarrow}$ $(a_k(x_1 - x_0)^k)$ Nullfolge

$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k(x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow |a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k \leq K \cdot \underbrace{\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k}_{\leq 1}$$

$\underset{2.10}{\Rightarrow}$ $P(x)$ absolut konvergent für $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ (Majorantenkriterium)

2. Sei $P(x_1)$ divergent und $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$. Wäre $P(x)$ konvergent, so wäre wegen 1. auch $P(x_1)$ konvergent. $\lightning$

   Also: $P(x)$ divergent $\square$

1.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei $P(x)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0.

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von $P(x)$.

Für $\rho \in \mathbb{R}_+$ heißt $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ Konvergenzintervall von $P(x)$.
Ist $\rho = \infty$, so konvergiert $P(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (3.7)

1.6 Beispiel

a) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $\rho = 1$, denn $(-1, 1)$ ist Konvergenzintervall von $P(x), x_0 = 0$

b) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$ ist $\rho = 0$, denn $P(x)$ ist nur für $x = x_0 = 1$ konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

1.7 Korollar

Sei $P(X)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Konvergenzradius ρ.

Dann:

1. $P(X)$ absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$.
2. $P(X)$ divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$.
3. [Falls $|x - x_0| = \rho \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich]