Skript Mathe 2

27. Juni 2018

$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{1} 1$

Grundidee: $f(a) = g(a) = 0$; f, g differenzierbar, $g'(x) \neq 0$

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

0.1 Satz: Regeln von l'Hospital

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und es sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Gilt $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ \infty \end{cases}$ und existert $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

so existiert auch $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entsprechendes gilt auch für $x \to b$.

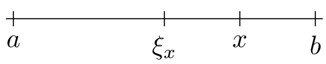
Beweis: <u>Fall 1:</u> $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$

f, g differenzierbar auf $(a,b) \Rightarrow f, g$ stetig auf (a,b).

Setze f, g zu stetiger Funktion auf $[a,b)$ fort, d.h. $f(a) = g(a) = 0$.

$\underset{6.20.3}{\Rightarrow}$ Für $x \in (a,b)$ gibt es $\xi_x \in (a,x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$



Es gilt: $x \to a^+ \Rightarrow \xi_x \to a^+$. Daraus folgt die Behauptung.

<u>Fall 2:</u> $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \infty$.

Sei $\beta = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und sei $\epsilon > 0$.

a) $$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : \left|\frac{f'(x)}{g(x)} - \beta\right| < \epsilon \quad \forall x \in (a,c)$$

$$\underset{6.20.3}{\Rightarrow} \left|\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} - \beta\right| < \epsilon \quad \forall x \in (a,c)$$

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt:

$f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ für $x \in (a,]$

da $f(x)$, $g(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \infty$.

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}}_{\text{beschränkt für } x \in (a,c)} - \left(\underbrace{\frac{1-\frac{g(c)}{g(x)}}{1-\frac{f(x)}{g(x)}}}_{\to 1 \text{ für } x \to a^+} - 1 \right) \xrightarrow[x \to a^+]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad \exists d \in (a,c) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \underbrace{\frac{f(x)-c(x)}{g(x)-g(c)}}_{(*)} \right| < \epsilon \quad \forall x \in (a,d)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \beta\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - (*) + (*) - \beta\right|$$

$$\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - (*)\right| + \left|(*) - \beta\right| \underset{\text{a), b)}}{<} 2\epsilon$$

<u>Fall 3:</u> $b = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Substituiere: $x = \dfrac{1}{t} \quad x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+$

D.h.: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{t \to 0^+} f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Analog für $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ und $\dfrac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$.

$$\underset{\text{Fall } 1/2}{\Rightarrow} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \to 0^+} \frac{(f'(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})}$$

Durch Resubstitution folgt die Behauptung $\square$

0.2 Beispiele

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b) Sei $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

D.h.: $\ln(x)$ wächst langsamer als jede Potenz von x.

c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

D.h.: e^x wächst schneller als jede Potenz von x.

d) $$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x \to \infty}{\frac{1}{x} \to \infty}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{-x^{\cancel{2}}}{1} = 0$$

1 Integralrechnung

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

1.1 Bemerkung: links–/rechtsseitige Ableitung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (falls existent)}$$

heißt rechtsseitige Ableitung von f in a und

$$f'(b) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \text{ (falls existent)}$$

heißt linksseitige Ableitung von f in b.

1.2 Definition: Stammfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Dan heißt $F : D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f \Leftrightarrow$

1. F ist differenzierbar
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

1.3 Beispiel

Stammfunktionen von $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$:

- $F(x) = \frac{1}{2}x^2$
- $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

1.4 Satz

a) Ist F Stammfunktion von f, so auch $F + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

b) Sind F, G Stammfunktionen von f, so existert $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$.

Beweis:

a) $(F + c)'(x) = F'(x) = f(x)$

b) $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow \; \exists c \in \mathbb{R} : G(x) - F(x) = c \quad \square$

1.5 Bemerkung: Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\, dx$ Sei Bezeichnung für eine beliebige Stammfunktion von f, falls eine solche existiert. Ist F Stammfunktion, so gilt $\int f(x)\, dx = F(x) + c$.

$\int f(x)\, dx$ heißt unbestimmtes Integral.

1.6 Beispiele

a) Für $\alpha \neq -1 : \displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$

Einschränkungen:

- $\alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \leq -2 \Rightarrow x \neq 0$
- $\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow D \subseteq \mathbb{R}_{>0}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \quad x \neq 0$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx = \arctan x + c \quad x \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin x + c \quad x \in (-1, 1)$

1.7 Satz

Seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\int \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\, dx = \lambda_1 \int f_1(dx) + \lambda_2 \int f_2(x)\, dx$$

sofern f_1, f_2 Stammfunktionen haben.

Beweis: Folgt aus 6.8a+b, 7.1 $\quad \square$

1.8 Beispiel

$$\int 4x^2 + 3 - \frac{2}{x}\,dx \underset{\substack{7.6\\7.7}}{=} \frac{4}{3}x^3 + 3x - \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$