Skript Mathe 2

28. Mai 2018

- n gerade $\Rightarrow f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^n$ bijektiv

  In diesem Fall hat die Umkehrfunktion die Vorschrift

  $\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\geq 0}$

  Achtung: Wenn n gerade, dann hat $x^n = a$ für gegebenes $a \in \mathbb{R}$

  - keine Lösung, falls $a < 0$
  - genaue eine Lösung, falls $a = 0$ und zwar $x = 0$
  - genau zwei Lösungen, falls $a > 0$ und zwar

    $x_1 = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{>0} \quad x_2 = \underbrace{-\sqrt[n]{a}}_{<0}$

f) Polynome: $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten

Falls $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p, man schreibt $\text{grad}(p) = n$

Für ein Polynom p von Grad n kann man zeigen:

1. p besitzt höchstens n Nullstellen
2. Falls n ungerade, ist p surjektiv und besitzt mindestens eine Nullstelle
3. Falls n gerade, ist p nicht surjektiv und kann daher auch keine Nullstelle haben

Bekannte Verfahren zur Berechnung von Nullstellen:

- $\text{grad}(p) = 2$: Mitternachtsformel/pq-Formel
- $\text{grad}(p) \geq 3$: Polynomdivision (Mathe III), numerische Verfahren (z.B Newton-Verfahren)

g) Rationale Funktionen:

Quotienten von Polyonmen p, q mit $f : D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

h) Logarithmen und Exponentialfunktion:

1. der natürliche Logarithmus:

   Man kann zeigen, dass für die Exponentialreihe unter 3.11 gilt:

   - $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
   - $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv

   Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ ist der natürliche Logarithmus:

   $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$

2. Exponentialfunktion:

   Sei $q > 0, q \neq 0$. Für $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}$ ist $q^x = \sqrt[b]{q^a} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

   Mit Hilfe der Funktion $\exp(x), \ln(x)$ kann man Exponentialfunktionen zu einer beliebigen gegebenen Basis q und $x \in \mathbb{R}$ definieren:

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto q^x := \exp(x \cdot \ln(q))$

3. Aus 2. ergibt sich die Regel:

   $\ln(q^x) = x \cdot \ln(q) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. Man kann wegen 2. eine Basis q durch eine beliebige andere Basis ausdrücken, z.B: $q^x = e^{x \cdot \ln(q)}$ (da $\exp(x) = e^x$ (3.11))

5. Logarithmus zur Basis $q > 0, q \neq 1$: Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = q^x$ (unter 2.)

   $\log_q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$

6. log_q lässt sich analog zu 4. durch jeden anderen Logarithmus ausdrücken, z.B ist

   $\ln(x) = \ln(q^{\log_q(x)}) \underset{3.}{=} \log_q(x) \Leftrightarrow \log_q(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(y)}$

7. Rechenregeln:

   – für $f(x) = q^x$ ergeben sich aus 2. und den Regeln für $\exp(x)$ (3.11):

     - $q^{x+y} = q^x \cdot q^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
     - $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$, da $1 = q^{x-x} - q^x \cdot q^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
     - $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
     - $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

   – für $\log_q(x)$ ergeben sich aus denen für q^x:

- $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y) \quad \forall x, y > 0$

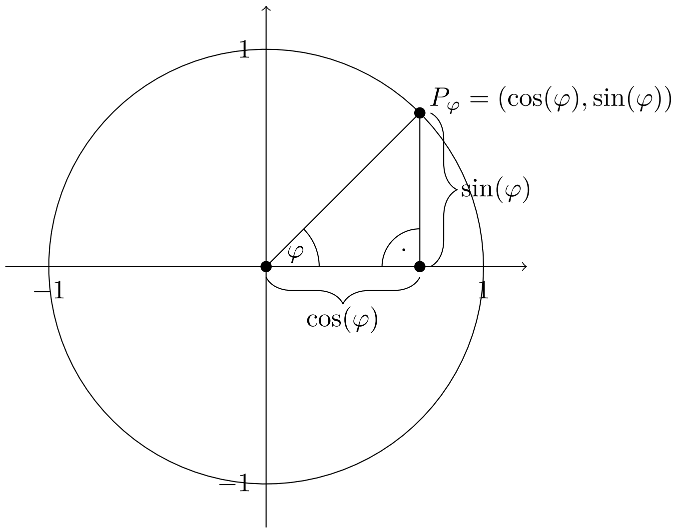
  denn für $x = q^u, y = q^v$ ist

  $\log_q(xy) = \log_q(q^{u+v}) = u + v = \log_q(x) + \log_q(y)$

- $\log_q\left(\frac{q}{x}\right) = -\log_q(x) \quad \forall x > 0$

  [mit $q^v = \log_q(x^\alpha) \underset{3./6.}{=} \alpha \cdot \log_q(x) \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$]

i) Trigonometrische Funktionen:



$$\begin{aligned} \varphi&: \quad \text{Winkel zwischen x-Achse und Strecke } \overline{0\ P_\varphi} \\ \cos\varphi&: \quad \text{Ankathete an } \varphi \text{ in } \Delta(0\ A_\varphi\ P_\varphi) \\ \sin\varphi&: \quad \text{Gegenkathete an } \varphi \text{ in } \Delta(0\ A_\varphi\ P_\varphi) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} \cos :& \quad \mathbb{R} \to [-1,1], x \mapsto \cos(x) \\ \sin :& \quad \mathbb{R} \to [-1,1], x \mapsto \sin(x) \\ \tan :& \quad \mathbb{R} \setminus \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \text{cotan} :& \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$