Skript Mathe 2

6. Mai 2018

1. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \to \infty} (S_k) = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

   Andernfalls heißt die Reihe divergent.

2. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n \geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.

3. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

0.1 Bemerkung

Falls die Folgen der Parialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\displaystyle\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

0.2 Beispiele

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ... = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & \text{n ungerade} \\ 1 & \text{n gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

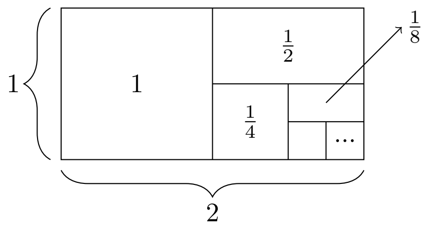
c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + ... + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ konvergent



und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) <u>Geometrische Reihe</u>

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \to \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

- In Beispiel d) is $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

  Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.
- $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}}_{3} = \frac{8}{9}$

  Achtung bei Index-Verschiebung!

0.3 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k) + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k) = a + b$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c - a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

0.4 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

0.5 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{|a_n + ... + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$$

$$\Big[= |S_k - S_{n-1}| = \Big| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Big| \Big]$$

(Folgt aus 1.40)

0.6 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty}$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0. \Rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}$: $|a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N$.

Da $|a_n| + ... + |a_k| \leq |a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

0.7 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\Big| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

- $\lim\limits_{k\to\infty}(S_k) \underset{2.1}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{K} a_i\right)$

Da $\lim\limits_{k\to\infty}|S_k| = \left|\lim\limits_{k\to\infty}\right| \quad \left[\begin{array}{c} C_i \to c \\ \Rightarrow |C_i| \to |c| \end{array} \; (1.13)\right]$,

ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \; (*)$

- $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}|a_i|\right) \underset{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \; (**)$

Insgesamt: $\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k}|a_i| \quad \Big| \lim\limits_{k\to\infty}$

$$\underset{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|a_i| \qquad \square$$

0.8 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.
D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\underset{2.6}{\Rightarrow} \forall\epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}:$

$|a_n + ... + a_k| < \epsilon \; \forall k \geq n \geq N.$

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \; \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. $\square$

0.9 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.
Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \underset{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n + ... + a_k|$

$\overbrace{\leq}^{0 \leq a_1 \leq b_i \; \forall i} |b_n + ... + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$