Skript Mathe 2

18. April 2018

0.1 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \ \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \ \forall n \geq N$$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

0.2 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

0.3 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R}: \lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

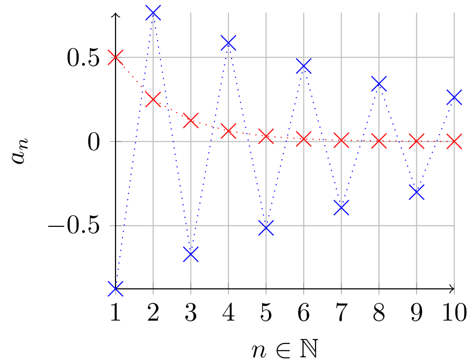
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow}$ (q^n) divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

0.4 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



0.5 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ da:} \\
&\bullet\ |a - b + b| \leq |a - b| + |b| && |\ |-b| \\
&\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \\
&\bullet\ |b - a + a| \leq |b - a| + |a| && |\ |-a| \\
&\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a| \\
&\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}
\end{aligned}
$$

0.6 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\Lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.)

$$b \neq 0 \Rightarrow \bullet\ \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\, \forall n \geq k$$
$$\bullet \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

5.) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$$
$$\bullet\ |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$
$$\bullet\ |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$
$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$
$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.)
- Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓
- Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N ✓$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.
$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$
$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow$
$$\exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$
$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$
$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.)
- Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

  Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b|-|b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

  Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

  Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

0.7 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)

$$\frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(-1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann:

kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

exponentielles Wachstum