

Skript Mathe 2

30. Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen	4
1.1 Definition	4
1.2 Beispiele	4
1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen	6
1.4 Beispiele	6
1.5 Definition: Konvergente Folgen	6
1.6 Bemerkung	7
1.7 Beispiele	7
1.8 Satz	8
1.9 Bemerkung	8
1.10 Beispiel: Geometrische Folge	8
1.11 Beispiel	9
1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung	9
1.13 Rechenregeln für Folgen	10
1.14 Beispiele: Rechenregeln	11
1.15 Satz: Einschließungsregel	12
1.16 Beispiele	13
1.17 Satz	13
1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation	14
1.19 Beispiele	14
1.20 Definition: Monotonie	14
1.21 Beispiele	14
1.22 Definition	15
1.23 Satz: Monotone Konvergenz	15
1.24 Bernoulli-Ungleichung	15
1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e	16
1.26 Satz: Intervallschachtelung	17
1.27 Beispiel	17
1.28 Definition: Eulersche Zahl	17
1.29 Bemerkung	17
1.30 Definition: Teilfolge	17
1.31 Beispiel	18
1.32 Bemerkung	18
1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)	18
1.34 Beispiel	18
1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß	18

1.36	Definition: Limes inferior/superior	19
1.37	Bemerkung	19
1.38	Beispiel	20
1.39	Definition: Cauchy-Folgen	20
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium	20
1.41	Beispiel	21
1.42	Definition: Kontraktion	21
1.43	Banachscher Fixpunktsatz	21
2	Reihen	22
2.1	Definition: Reihe	22
2.2	Bemerkung	22
2.3	Beispiele	22
2.4	Satz: Rechenregeln für Reihen	24
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen	24
2.6	Cauchy-Kriterium	24
2.7	Satz: Absolute Konvergenz	24
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen	24
2.9	Satz: Divergenzkriterium	25
2.10	Majorantenkriterium	25
2.11	Bemerkung: Minorantenkriterium	25
2.12	Beispiele	26
2.13	Satz: Leibniz-Kriterium	26
2.14	Satz: Wurzelkriterium	26
2.15	Beispiele	27
2.16	Satz: Quotientenkriterium	27
2.17	Beispiele	28
2.18	Bemerkung	28
2.19	Umordnung von Reihen: Beispiel	28
2.20	Definition: Umordnung	29
2.21	Umordnungssatz	29
2.22	Riemannscher Umordnungssatz	29
3	Potenzreihen	29
3.1	Grundbegriffe und Beispiel	29
3.2	Definition: Potenzreihen	29
3.3	Bemerkung	30
3.4	Satz	30
3.5	Definition: Konvergenzradius und Intervall	30
3.6	Beispiel	31
3.7	Korollar	31
3.8	Satz: Formel von Cauchy-Hademard	31
3.9	Beispiel	32
3.10	Satz: Formel von Euler	32
3.11	Beispiel: Exponentialfunktion	32
3.12	Bemerkung	33
4	Reelle Funktionen	34
4.1	Definition: Abbildung	34
4.2	Definition: Reelle Funktion	34

4.3	Beispiel	35
4.4	Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv	35
4.5	Beispiele	35
4.6	Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild	35
4.7	Beispiel	35
4.8	Definition: Symmetrie	36
4.9	Definition: Monotonie	36
4.10	Elementare Funktionen	36
5	Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	41
5.1	Definition: Grundbegriffe und Beispiele	41
5.2	Beispiele	41
5.3	Bemerkung	41
5.4	Definition Grenzwert I	41
5.5	Beispiele	42
5.6	ϵ - φ -Kriterium	42
5.7	Beispiel	43
5.8	Definition: Grenzwert II	43
5.9	Beispiele	43
5.10	Definition: Rechts-/Linksseitiger Grenzwert	44
5.11	Beispiel	44
5.12	Bemerkung	44
5.13	Beispiele	44
5.14	Definition: Stetigkeit	45
5.15	Bemerkung	45
5.16	Beispiele	45
5.17	Satz	45
5.18	Bemerkung	46
5.19	Beispiel	46
5.20	Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen	47
5.21	Bemerkung	47
5.22	Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken	47
5.23	Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz)	49
5.24	Satz: Zwischenwertsatz allgemein	50
5.25	Satz	50
5.26	Satz	51
5.27	Bemerkung	52
5.28	Satz: $\exp(1) = e$	52
5.29	Bemerkung	53
5.30	Minimax-Theorem von Weierstraß	53
5.31	Beispiele	53
6	Differenzierbare Funktionen	54
6.1	Bemerkung: Tangenten	54
6.2	Definition: Ableitung	54
6.3	Bemerkung	54
6.4	Beispiele	55
6.5	Satz: Lineare Approximation	56
6.6	Satz	56
6.7	Bemerkung	57

6.8	Satz: Ableitungsregeln	57
6.9	Beispiele	58
6.10	Satz: Kettenregel	58
6.11	Beispiel	58
6.12	Veranschaulichung zur Ableitung der Umkehrfunktion	59
6.13	Satz: Ableitung der Umkehrfunktion	59
6.14	Beispiele	60
6.15	Logarithmische Ableitung	60
6.16	Satz: Ableitung elementarer Funktionen	61
6.17	Definition: Extremum	61
6.18	Notwendige Bedingung für lokale Extrema	62
6.19	Anmerkung	62
6.20	Mittelwertsätze, Satz von Rolle (1652–1719)	63

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen (\mathbb{N}) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n : n-tes Folgenglied
 n : Index

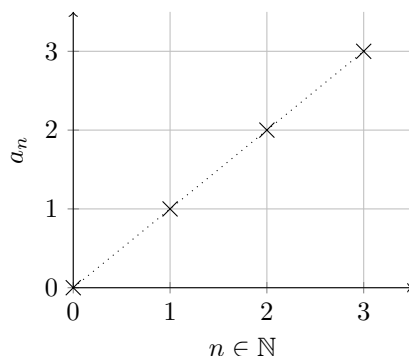
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1 , sondern z.B: a_7 .

Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ oder (a_n)

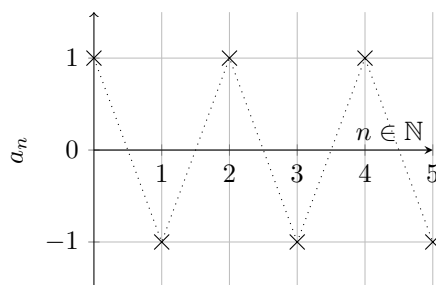
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

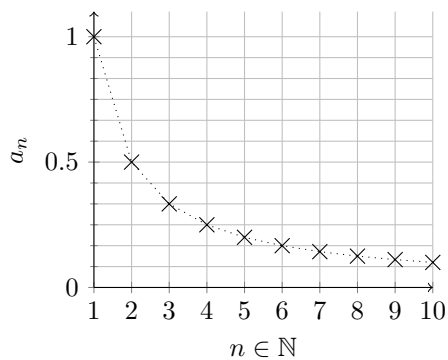
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



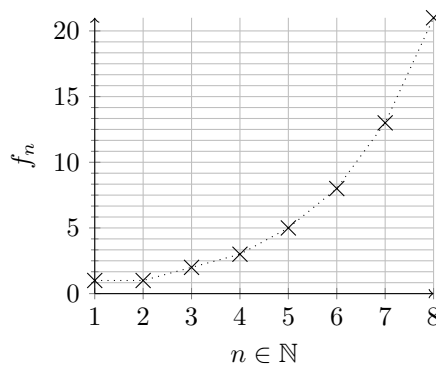
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

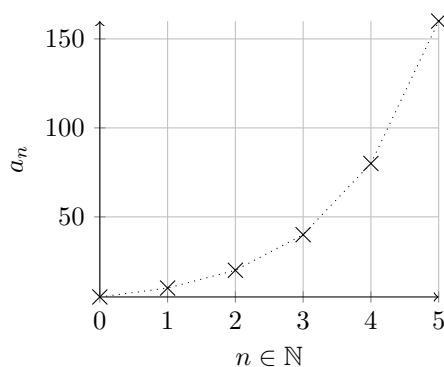
q : Wachstumsfaktor

X_0 : Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.
- (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

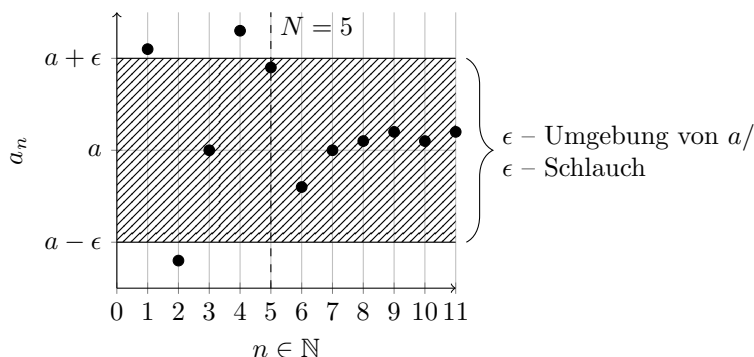
Kurz:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $a_n \rightarrow a$.
- c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

- a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

- b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left| \frac{n+1}{3n} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

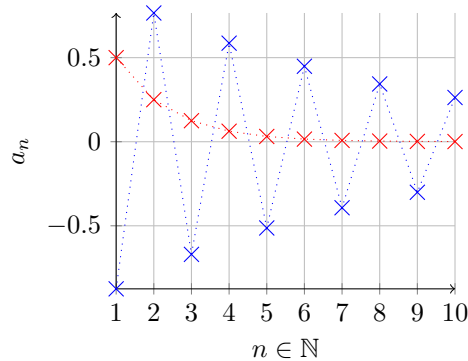
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\xrightarrow{1.9} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $((-\frac{7}{8})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Bigg| \quad |-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \Bigg| \quad |-a|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$.

Dann gilt:

- 1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- 4.) $b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \forall n \geq k$
 $\bullet \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- 5.) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

- 6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge
- 7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.) \bullet Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a \checkmark$

\bullet Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

$$4.) \quad \bullet \text{ Z.z: } \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \text{ Z.z: } \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ hat } \frac{a}{b} \text{ als Limes.}$$

Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

$$\bullet \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\bullet |(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$$

$$\Rightarrow (-1)^n + 5 \text{ beschränkt}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann: kte Potenz \swarrow
 $\boxed{n^k}$
 \searrow
exponentielles Wachstum \nearrow $\boxed{X^n}$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\mathcal{N}(k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_a, N_c : \bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ \bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\ \forall n \geq k & \quad \downarrow \\ \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square \end{aligned}$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+\epsilon)^n &> n \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow 1+\epsilon &> \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \stackrel{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow a$. Dann:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$

b) $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

\mathcal{O}, o heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_{n+1} \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_{n+1} \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt
und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 a kleinste obere Schranke
 $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$
 $\stackrel{a_n \geq a_N}{\forall n \geq N} \Rightarrow |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog \square

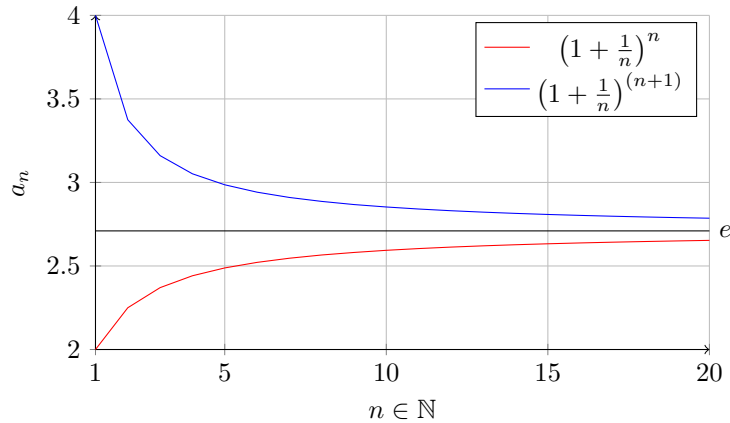
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{n+1}{n})$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

Zeige dazu: $b_n \leq b_{n-1} \Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- \Rightarrow (a_n) hat obere Schranke b_1
 (b_n) hat untere Schranke a_1
 $\xRightarrow{1.23}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. \square

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\xRightarrow{1.8} (a_n)$ beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1 .

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1 .

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$: Halbiere $[A_0, B_0]$
 - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgenglieder liegen, wähle eines davon aus.
 - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n_1} , die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.

- $k=2$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

$$\bullet A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{nk}) \quad \square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \forall n \geq N \end{cases}$$

d.h. $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

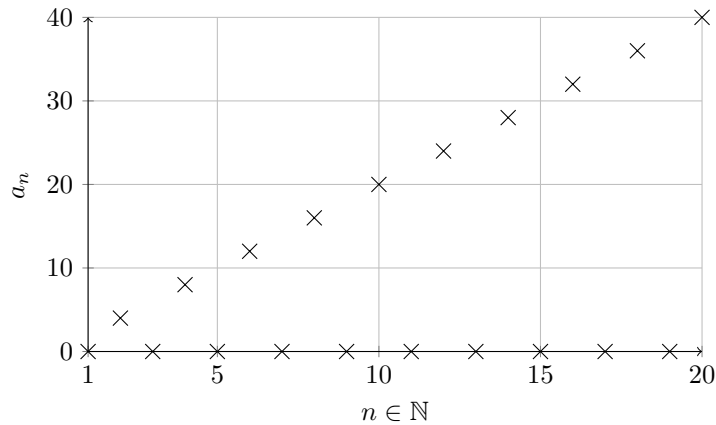
$$\bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \forall n \geq N \end{cases}$$

d.h. $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

1.37 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$ in obiger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)
z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
aber (a_n) mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen ∞
- $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl \limsup als auch \liminf .

1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R}

(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge

Beweis: (\Rightarrow) : klar

(\Leftarrow) :

1. Zeige (a_n) beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ ist beschränkt und besitzt}$$

konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1$ $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
es gibt genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
die durch $X_n := f(X_{n-1})$ definierte Folge (X_n) gegen \hat{x} .

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n \geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.
4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

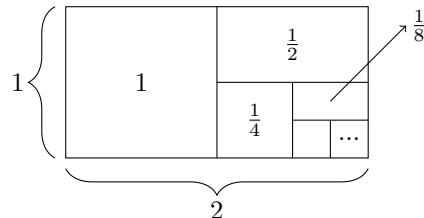
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ konvergent



$$\text{und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

e) Geometrische Reihe

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

• In Beispiel d) ist $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

• $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

• $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Reihen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} &\underbrace{|a_n + \dots + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \\ &\left[= |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right] \end{aligned}$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$.

Da $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) \stackrel{2.1}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[\begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \right. (1.13) \Big],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \right) \stackrel{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*), (**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.

D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. \square

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in \mathbb{R} mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.

Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\leq \underbrace{|b_n + \dots + b_k|}_{0 \leq a_1 \leq b_i \quad \forall i} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

2.12 Beispiele

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}}$ ist divergent. (2.9)

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$ (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow$: $A_{n+1} - A_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i$
 $= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$
 $= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$, da $(a_n) \searrow$
- Analog: $(B_n) \searrow$ • $B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $B_n - A_n = a_{2n} \rightarrow 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq (a + \epsilon)^n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a + \epsilon)^k}_{< 1} \text{ (geometrische Reihe)}$$

ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

$$\text{Damit konvergiert auch } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} |a_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$$

$< \infty$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

$$\Rightarrow |a_n| > 1 \text{ unendlich oft}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ keine Nullfolge} \xrightarrow{2.9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent. } \square$$

2.15 Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{k^3}{3^k} \right]}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n^3})}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harmonische Reihe) liefert

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n^\alpha})} = 1 \quad (\alpha > 0) \rightarrow \text{keine Aussage möglich.}$$

2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathbb{R} mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ und $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq a \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \dots \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq N$$

Da $\sum_{n=N}^{\infty} a^{n-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit

Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge \square

2.17 Beispiele

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \text{ konvergiert, da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

$$\text{b) Wie in 2.15b ist für } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ keine Aussage möglich,}$$

$$\text{da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{und somit } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.

2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kann Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

$$\bullet 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls eine bijektive Abbildung $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in \mathbb{R} ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ohne Beweis)

2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ (ohne Beweis)

3 Potenzreihen

3.1 Grundbegriffe und Beispiel

- a) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist für $|x| < 1$ absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$.

Konvergenzintervall (3.5)

Für $|x| > 1$ ist $P(x)$ divergent.

- b) $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$ ist für $x \neq 1$ divergent:

Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

3.2 Definition: Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ reelle Folge und seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten a_k

3.3 Bemerkung

- a) In Bsp 3.1a) ist $x_0 = 0$ und $a_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
In 3.1b) ist $x_0 = 1$ und $a_k = k!$
- b) In 3.1a) konvergiert $P(x)$ für $x \in (-1, 1)$, in 3.1b) lediglich für $x = x_0 = 1$.
Es wird sich herausstellen, dass es für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Zentrum x_0 einen Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ gibt (3.5), so dass $P(x)$ absolut konvergent für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, (d.h. $|x - x_0| < \rho$) und divergent für $|x - x_0| > \rho$ ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

3.4 Satz

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Dann:

1. $P(x_1)$ konvergent $\Rightarrow P(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. $P(x_1)$ divergent $\Rightarrow P(x)$ ist divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Beweis:

1. $P(x)$ konvergent $\xRightarrow{2.9} (a_k(x_1 - x_0)^k)$ Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k(x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1} \leq K \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1}$$

$$\xRightarrow{2.10} P(x) \text{ absolut konvergent für } |x - x_0| < |x_1 - x_0| \text{ (Majorantenkriterium)}$$

2. Sei $P(x_1)$ divergent und $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$. Wäre $P(x)$ konvergent, so wäre wegen 1. auch $P(x_1)$ konvergent. \nmid

Also: $P(x)$ divergent \square

3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei $P(x)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 .

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von $P(x)$.

Für $\rho \in \mathbb{R}_+$ heißt $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ Konvergenzintervall von $P(x)$.

Ist $\rho = \infty$, so konvergiert $P(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$ (3.7)

3.6 Beispiel

- a) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $\rho = 1$, denn $(-1, 1)$ ist Konvergenzintervall von $P(x)$, $x_0 = 0$
- b) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$ ist $\rho = 0$, denn $P(x)$ ist nur für $x = x_0 = 1$ konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

3.7 Korollar

Sei $P(X)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Konvergenzradius ρ .

Dann:

1. $P(X)$ absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$.
2. $P(X)$ divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$.
3. [Falls $|x - x_0| = \rho \leadsto$ keine allgemeine Aussage möglich]

Berechnung von Konvergenzradien

3.8 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ Folge in \mathbb{R} und $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. ρ sei der Konvergenzradius von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

Beweis: Wurzelkriterium: $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{< 1} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h. $P(x)$ konvergiert

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{> 1} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h. $P(x)$ divergiert

$\Rightarrow \rho$ Konvergenzradius von $P(x)$

3.9 Beispiel

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergent?

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$\Rightarrow P(x)$ konvergent für $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$ und divergiert für $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für $x = \pm 1$

$$\bullet x = 1 : \quad P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent (harmonische Reihe)}$$

$$\bullet x = -1 : \quad P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$ konvergent

Insgesamt: $P(x)$ konvergent für $[-1, 1)$, divergent für $|x| > 1$ und $x = 1$.

3.10 Satz: Formel von Euler

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ Folge in \mathbb{R} , $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$,

ρ Konvergenzradius von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Ist $\left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right)_{k \geq 0}$ konvergent oder bestimmt gegen $+\infty$

divergent, so ist $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

Beweis: Wende auf $P(x)$ das Quotientenkriterium 2.16 an. \square

3.11 Beispiel: Exponentialfunktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ konvergent } \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$$

Man definiert: $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1. $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2. $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl)

Aus 2.: $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$?

1. Definiere: $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (1.28)
2. Zeige: $\exp(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für $\exp(x)$ gelten:
 $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (hier nicht)
4. Definiere: $e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \exp(n) = e^n \quad \bigg| \sqrt[m]{}$
 $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird e^x dann mit Hilfe von $e^x = \exp(x)$ berechnet.

So kann auch ein Computer z.B. e^π berechnen, indem $\exp(\pi)$ ermittelt wird.

3.12 Bemerkung

- a) Außer der Funktion e^x gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B. wird in Mathe III gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für $\rho \neq \infty$ müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.

4 Reelle Funktionen

Grundbegriffe und Beispiele

4.1 Definition: Abbildung

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ besteht aus

- Dem Definitionsbereich A (Menge A)
- Dem Bildbereich B (Menge B)
- Einer Zuordnungsvorschrift f , die jedem $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Man schreibt $b = f(a)$, nennt b Bild/Funktionswert von a und a (ein) Urbild von b .

Notation: $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$

A = Menge aller Studenten von Mathe II

B = {Raucher, Nichtraucher}

f = Zuordnungsvorschrift, die jedem Studenten zuordnet,
ob er/sie raucht/nicht raucht

4.2 Definition: Reelle Funktion

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

a) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$
Summe/Differenz von f und g

b) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
Produkt von f und g

c) Für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ heißt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

Quotient von f und g


d) Komposition/Verknüpfung

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(D_f) \subseteq D_g$$

$$f \circ g : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \xrightarrow{g} g(f(D_f)) \subseteq \mathbb{R}$$


$$g \circ f \text{ ("g nach f")}$$

4.3 Beispiel

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x - 1$$

$$(f + g)(x) = x^2 + x - 1, (f \cdot g)(x) = x^2(x - 1)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ für } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \text{ Definitionsbereich von } \frac{f}{g}.$$

$$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 \neq$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$$

4.4 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt:

1. Surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
2. Injektiv $\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
3. Bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

4.5 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist

- nicht surjektiv: z.B. gibt es für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$, da $f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- nicht injektiv: $f(-1) = f(1)$ aber $-1 \neq 1$

b) Jedoch ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ bijektiv, wie man leicht prüfen kann.

4.6 Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung

1. Für $X_0 \subseteq X$ heißt $f(X_0) := \{f(x) \mid x \in X_0\}$ Bild von X_0
2. Für $Y_0 \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(Y_0) := \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\}$ Urbild von Y_0
3. Ist f bijektiv, so heißt $f^{-1} : Y \rightarrow X$ Umkehrfunktion von f , falls $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$

4.7 Beispiel

a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ ist bijektiv (4.6b)

Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{da: } (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = \underbrace{x}_{=\text{id } \mathbb{R}_{\geq 0}} \\ &= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = (f^{-1} \circ f)(x) \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden

- b) Achtung: Das Urbild existiert immer, auch wenn f^{-1} als Umkehrfunktion nicht existiert.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

4.8 Definition: Symmetrie

Sei $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt:

- Achsensymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (zur y-Achse)
- Punktsymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4.9 Definition: Monotonie

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. f heißt (streng) monoton wachsend, falls $f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2$.

Falls $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(>)}{\geq} x_2$, so heißt f (streng) monoton fallend.

4.10 Elementare Funktionen

- Konstante Funktion: Sei $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$
- Identität: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$
- Betragsfunktion: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
 f ist achsensymmetrisch
- Monome/Potenzen: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
 - n gerade: f achsensymmetrisch, weder injektiv noch surjektiv, nicht monoton, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - n ungerade: f punktsymmetrisch, bijektiv, streng monoton steigend
- Wurzelfunktion: Sind Umkehrfunktion von Monomen
 - n ungerade $\Rightarrow f(x) = x^n$ bijektiv
 \Rightarrow Umkehrfunktion existiert und hat die Form
4.7/3
 $\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$

- n gerade $\Rightarrow f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^n$ bijektiv

In diesem Fall hat die Umkehrfunktion die Vorschrift

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\geq 0}$$

Achtung: Wenn n gerade, dann hat $x^n = a$ für gegebenes $a \in \mathbb{R}$

- keine Lösung, falls $a < 0$
- genau eine Lösung, falls $a = 0$ und zwar $x = 0$
- genau zwei Lösungen, falls $a > 0$ und zwar

$$x_1 = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{>0} \quad x_2 = -\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{<0}$$

- f) Polynome: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten

Falls $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p , man schreibt $\text{grad}(p) = n$

Für ein Polynom p von Grad n kann man zeigen:

1. p besitzt höchstens n Nullstellen
2. Falls n ungerade, ist p surjektiv und besitzt mindestens eine Nullstelle
3. Falls n gerade, ist p nicht surjektiv und kann daher auch keine Nullstelle haben

Bekannte Verfahren zur Berechnung von Nullstellen:

- $\text{grad}(p) = 2$: Mitternachtsformel/pq-Formel
- $\text{grad}(p) \geq 3$: Polynomdivision (Mathe III), numerische Verfahren (z.B. Newton-Verfahren)

- g) Rationale Funktionen:

Quotienten von Polynomen p, q mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

- h) Logarithmen und Exponentialfunktion:

1. der natürliche Logarithmus:

Man kann zeigen, dass für die Exponentialreihe unter 3.11 gilt:

- $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ ist der natürliche Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$

2. Exponentialfunktion:

Sei $q > 0, q \neq 0$. Für $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}$ ist $q^x = \sqrt[b]{q^a} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

Mit Hilfe der Funktion $\exp(x), \ln(x)$ kann man Exponentialfunktionen zu einer beliebigen gegebenen Basis q und $x \in \mathbb{R}$ definieren:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto q^x := \exp(x \cdot \ln(q))$$

3. Aus 2. ergibt sich die Regel:

$$\ln(q^x) = x \cdot \ln(q) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Man kann wegen 2. eine Basis q durch eine beliebige andere Basis ausdrücken, z.B: $q^x = e^{x \cdot \ln(q)}$ (da $\exp(x) = e^x$ (3.11))

5. Logarithmus zur Basis $q > 0, q \neq 1$: Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = q^x$ (unter 2.)

$$\log_q: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$$

6. \log_q lässt sich analog zu 4. durch jeden anderen Logarithmus ausdrücken, z.B ist

$$\ln(x) = \ln(q^{\log_q(x)}) \underset{3.}{=} \log_q(x) \Leftrightarrow \log_q(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(q)}$$

7. Rechenregeln:

– für $f(x) = q^x$ ergeben sich aus 2. und den Regeln für $\exp(x)$ (3.11):

- $q^{x+y} = q^x \cdot q^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$, da $1 = q^{x-x} = q^x \cdot q^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

– für $\log_q(x)$ ergeben sich aus denen für q^x :

- $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y) \quad \forall x, y > 0$

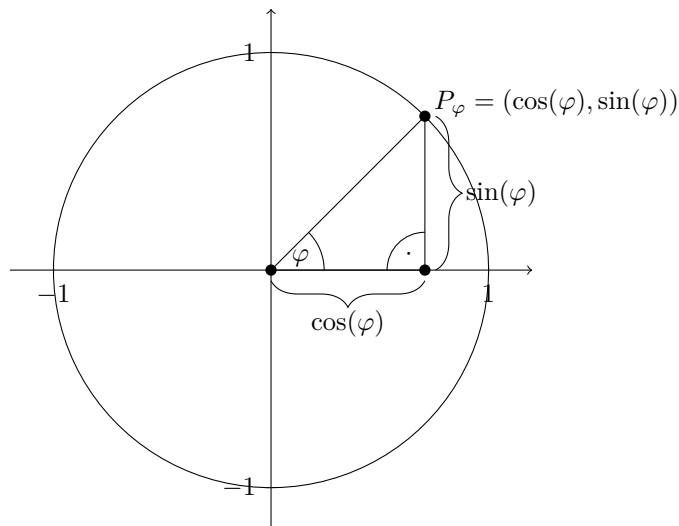
denn für $x = q^u, y = q^v$ ist

$$\log_q(xy) = \log_q(q^{u+v}) = u + v = \log_q(x) + \log_q(y)$$

- $\log_q\left(\frac{q}{x}\right) = -\log_q(x) \quad \forall x > 0$

$$[\text{mit } q^v = \log_q(x^\alpha) \underset{3./6.}{=} \alpha \cdot \log_q(x) \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}]$$

i) Trigonometrische Funktionen:



φ : Winkel zwischen x-Achse und Strecke $\overline{0 P_\varphi}$
 $\cos \varphi$: Ankathete an φ in $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$
 $\sin \varphi$: Gegenkathete an φ in $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$

Daraus ergeben sich die Winkelfunktionen:

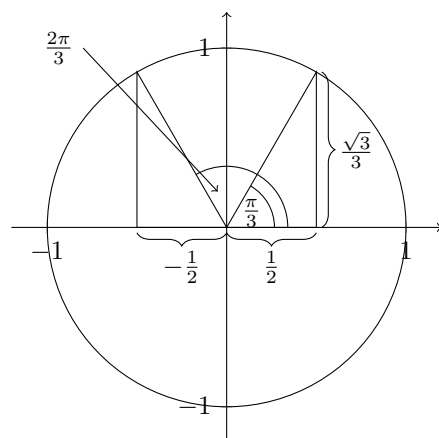
$$\begin{aligned}\cos &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos(x) \\ \sin &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x) \\ \tan &: \mathbb{R} \setminus \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cotan &: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\end{aligned}$$

1. Dabei wird der Winkel φ meistens im Bogenmaß angegeben, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Einige wichtige Werte:

Gradmaß:	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Bogenmaß:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos:	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Daraus können weitere Werte mit Hilfe des Einheitskreises abgeleitet werden:



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2. \sin und \cos sind nicht bijektiv. Jedoch ist $\sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ und $\cos[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv. Die Umkehrfunktionen sind:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Entsprechend erhält man:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arccotan}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

3. • Es ist $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- \sin, \cos sind 2π -periodisch, d.h.
 $\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- \tan, \cotan sind π -periodisch

4. Symmetrien

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = -\sin(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cotan(x) = -\cotan(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5. Rechenregeln

a) $\sin x + \cos x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

5.1 Definition: Grundbegriffe und Beispiele

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

- a) $X_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M
: \Leftrightarrow Es gibt eine Folge (X_n) in $M \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \mapsto X_0$
- b) $X_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M
: $\Leftrightarrow X_0$ ist kein Häufungspunkt von M

5.2 Beispiele

- a) $M = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4)$
 - Menge der Häufungspunkte von M :
 $H = [0, 1] \cup [3, 4]$ denn z.B. für $X_0 = \frac{1}{2}$ hat die Folge $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})_{n \geq 3}$ den Limes X_0 und liegt in $M \setminus \{X_0\}$.
Auf analoge Weise können für jedes andere $X_0 \in M$ Folgen in $M \setminus \{X_0\}$ konstruiert werden.
 - Einziger isolierter Punkt in M ist 2, denn es gibt in $M \setminus \{2\} = (0, 1) \cup (3, 4)$ keine Folge mit Grenzwert 2.
- b) $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - Menge der HP von M : $\{0\}$
 - Menge der isolierten Punkte: M

5.3 Bemerkung

Ein isolierter Punkt X_0 von M liegt vor, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $|X - X_0| \geq \epsilon \quad \forall x \in M \setminus \{X_0\}$, z.B. ist in 5.2a $|X - 2| \geq 1 \quad \forall x \in M \setminus \{2\}$

5.4 Definition Grenzwert I

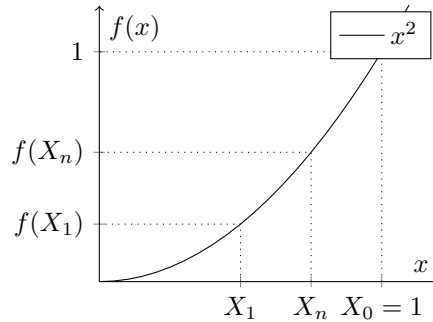
Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Ist X_0 ein Häufungspunkt von D , so sagt man f hat in X_0 den Grenzwert a , oder $f(x)$ konvergiert gegen a für $x \rightarrow a$: $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = a$, für jede beliebige Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a$ oder $f(x) \rightarrow a$ für $x \rightarrow X_0$

5.5 Beispiele

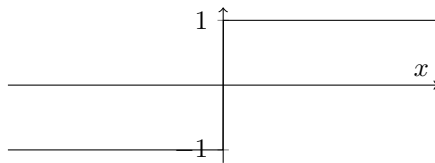
a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, X_0 = 1$

Für (X_n) in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $X_n \rightarrow 1$ ist $f(X_n) = X_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (1.13/3)



b) Es muss für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \rightarrow X_0$ gelten: $f(X_n) \rightarrow a$

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$



Grenzwert in $X_0 = 0$ existiert nicht, denn

$$f(-\frac{1}{n}) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \text{ und}$$

$$f(\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ obwohl } -\frac{1}{n} \rightarrow X_0 \text{ und } \frac{1}{n} \rightarrow X_0$$

5.6 ϵ - φ -Kriterium

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktion, X_0 HP in D , $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \forall x \in D \setminus \{X_0\} :$$

$$\underbrace{|x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon}_{(*)}$$

Existenz von a bedeutet: Wenn x nahe genug bei X_0 ist, so ist auch $f(x)$ sehr nahe an a .

Beweis:

(\Leftarrow) : Gelte $(*)$. Sei (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$, $X_n \rightarrow X_0$. Z.z.: $f(X_n) \rightarrow a$

Da $X_n \rightarrow X_0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|X_n - X_0| < \delta \quad \forall n \geq N$ (1.5)

$$(*) \Rightarrow |f(X_n) - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\stackrel{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

(\Rightarrow) : Mit Kontraposition: Gelte (*) nicht.
 $\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $X_n \in D \setminus \{X_0\}$ existiert mit
 $|X_n - X_0| < \delta$ und $|f(X_n) - a| \geq \epsilon$.
 $\Rightarrow f(X_n) \not\rightarrow a$ für $X_n \rightarrow X_0$. \square
1.5

5.7 Beispiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es ist $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0)$.

Prüfe mit ϵ - δ -Kriterium:

Sei $\epsilon > 0$. Für $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ ist

$$|f(x) - f(X_0)| = ax + b - aX_0 - b = |a| \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

5.8 Definition: Grenzwert II

Sei X_0 HP von $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f hat in X_0 den Grenzwert $+\infty$ ($-\infty$) : $\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$)

2. Ist $\sup D = \infty$ ($\inf D = -\infty$), so hat $f(x)$ Limes $a \in \mathbb{R}$ für $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) : $\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge in D mit $X_n \rightarrow \infty$ ($X_n \rightarrow -\infty$)

5.9 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, da für jede Nullfolge (X_n)

in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\underbrace{\frac{1}{X_n^2}}_{=0} \xrightarrow{n \rightarrow 0} +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, da für jedes (X_n)

in \mathbb{R} mit $X_n \rightarrow \infty$: $\frac{1}{X_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- b) Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp(x) = 0$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{m+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \geq 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\exp(x)}{x^m} \geq \frac{x^{m+1}}{(k+1)x^m} = \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \\
 &\text{für } x \rightarrow \infty \\
 2. \quad x^m \cdot \exp(x) &= \frac{(-1)^m (-x)^m}{\exp(-x)} = (-1)^m \cdot \frac{1}{\frac{\exp(-x)}{(-x)^m}} \xrightarrow{1.} \infty \\
 &\text{für } x \rightarrow -\infty
 \end{aligned}$$

5.10 Definition: Rechts-/Linksseitiger Grenzwert

1. Ist X_0 HP von $D \cap (X_0, \infty)$, so hat f in X_0 den rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (X_0, \infty)$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0^+} f(x) = a$

2. Ist X_0 HP von $D \cap (-\infty, X_0)$, so hat f in X_0 den linksseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (-\infty, X_0)$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0^-} f(x) = a$

5.11 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, da $f(X_n) = 1 \rightarrow 1$
für (X_n) in $(0, \infty)$ und $(X_n) \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, da $f(X_n) = -1 \rightarrow -1$
für (X_n) in $(-\infty, 0)$ und $(X_n) \rightarrow 0$

5.12 Bemerkung

Aus 5.11 ist ersichtlich: Der Grenzwert einer Funktion f in X_0 existiert \Leftrightarrow Der Links- und Rechtsseitige Grenzwert von f in X_0 existieren und übereinstimmen.

5.13 Beispiele

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$, aber $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht,
da $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

5.14 Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

a) f heißt stetig in $X_0 \in D$, falls

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

b) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $X_0 \in D$ stetig ist.

5.15 Bemerkung

a) In 5.15a prüft man zwei Bedingungen: A) Der Grenzwert von f in X_0 existiert und B) ist gleich $f(X_0)$.

b) Wegen 5.6 ist f in $X_0 \in D$ stetig \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(X_0)| < \epsilon$$

5.16 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist in jedem $X_0 \in D$ stetig:

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0), \text{ da für } (X_n) \text{ in } D \setminus \{X_0\} \text{ gilt:}$$

$$\underbrace{f(X_n) = X_n^2 \rightarrow X_n^2 \rightarrow X_0^2}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

b) Wegen 5.4 ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ stetig.

5.17 Satz

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

Gibt es ein $k > 0$ mit $|f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |x - X_0| \quad \forall x \in D$,
so ist f stetig in X_0 .

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{k}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$

5.18 Bemerkung

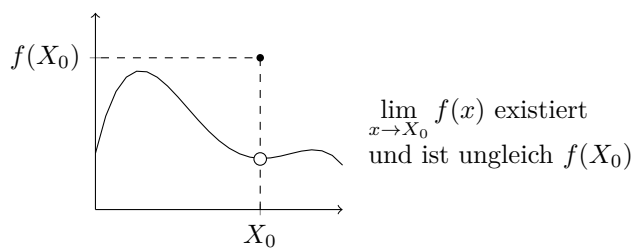
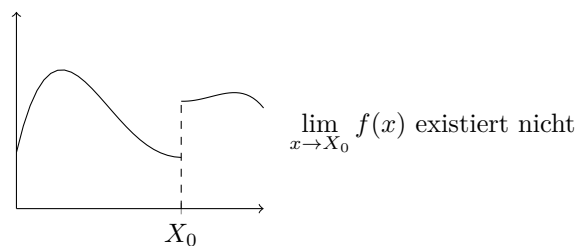
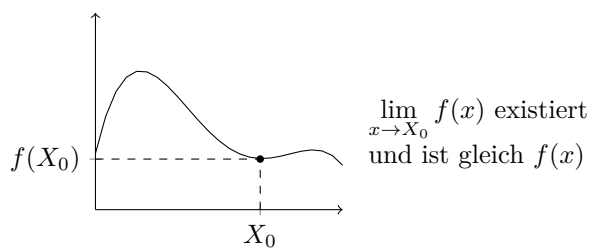
Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{k}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$

5.19 Beispiel

a) Anschauung zu 5.14a

Es gibt 4 Fälle:



b) Schule: f ist stetig, wenn man f “ohne Absetzen” zeichnen kann.

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Dirichlet-Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

unstetig in jedem $X_0 \in \mathbb{R}$.

Mit ϵ - δ -Kriterium:

Sei $\delta > 0$.

1. $X_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |x - X_0| < \delta$
2. $X_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x - X_0| < \delta$

Eigenschaften stetiger Funktionen

5.20 Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen

- a) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $X_0 \in D, D \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch $c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0 \forall x \in D$) stetig.
- b) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$.
 f, g stetig $\Rightarrow g \circ f$ stetig.

Beweis:

- a) Folgt direkt aus 5.14
b) Mit 1.14 \square

5.21 Bemerkung

Wegen 5.16b und 5.20

- a) sind Monome und Polynome stetig
b) Wegen a und 5.20a sind rationale Funktionen stetig
c) Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall stetig (zeigen wir hier nicht). Daher sind $\exp, \sin, \cos, \tan, \cotan$ (vgl. 3.11, 3.12) auch stetig.

5.22 Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken

- a) Hebbare Definitionslücke:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und X_0 HP von $X_0 \notin D$. Ist $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a$, so heißt X_0 stetig hebbare Definitionslücke von f .

$$f : D \cup \{X_0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ a & x = X_0 \end{cases}$$

heißt Fortsetzung von f auf $D \cup \{X_0\}$.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = 2$$

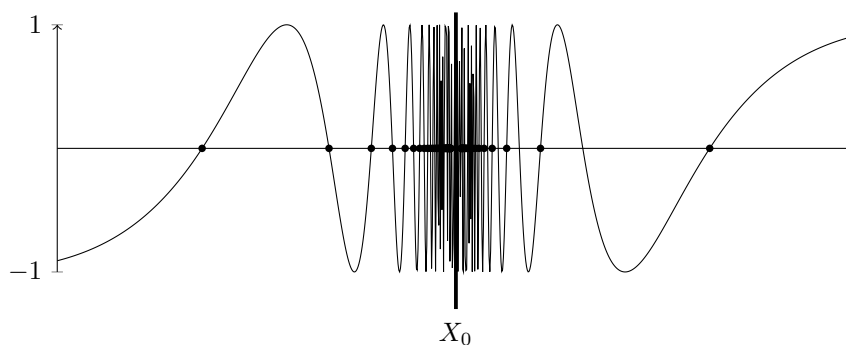
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} = x + 1$$

b) Polstelle:

Gilt für die Nullstelle X_0 des Nenners einer rationalen Funktion, dass $f(x) \rightarrow \pm\infty$, für $x \rightarrow X_0^-$ oder $x \rightarrow X_0^+$, so heißt X_0 Polstelle.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$ hat Polstelle bei $X_0 = 0$.

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$ keinen Grenzwert.



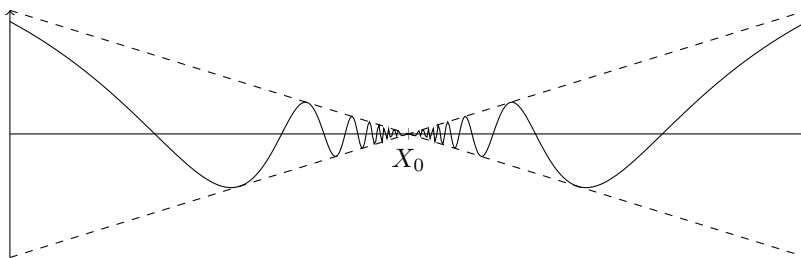
Man nennt X_0 Oszillationsstelle:

- $X_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$ und $f(X_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $Y_n = \frac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$ und $f(Y_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow f(Y_n) \rightarrow 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht.

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$
eine hebbare Definitionslücke



$f(X_n) = \underbrace{X_n}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{X_n}\right)}_{\text{beschränkt}}$ für jede Nullfolge (X_n) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ stetige Fortsetzung.

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$

Wir zeigen später mit L'Hopital, dass $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

5.23 Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann: Es gibt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis: $f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet, dass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

Beweis für $f(a) < 0, f(b) > 0$ (Anderer Fall analog)

Anschaulich klar, da f keine Sprungstelle hat.

Bisektionsverfahren:

Start $[a_1, b_1] := [a, b]$

1. Schritt: Halbiere $[a_1, b_1]$

- Berechne $y_1 = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$
- Fallunterscheidung:
 - $y_1 = 0$: Fertig
 - $y_1 > 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
 - $y_1 < 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
- Es gilt:
 - $[a_2, b_2]$ halb so groß wie $[a_1, b_1]$
 - $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$

2. Schritt: Wende Schritt 1 auf $[a_2, b_2]$ an, erhalte y_2 und $[a_3, b_3]$

Usw...

Erhalte Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit

- $a_n \nearrow, b_n \searrow$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$
- $a_n \leq b_n$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Es ist $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Da f stetig, gilt:

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)}_{\leq 0} = f(c)$$

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)}_{\geq 0} = f(c)$$

$$\Rightarrow f(c) = 0 \quad \square$$

Dieses Verfahren verwendet man auch zur Nullstellenberechnung.

5.24 Satz: Zwischenwertsatz allgemein

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, y sei eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Dann gibt es $\bar{x} \in [a, b]$ mit $f(\bar{x}) = y$.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A)

$$f(a) \geq y \geq f(b)$$

Setze $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - y \Rightarrow$

- $g(a) = f(a) - y \geq 0$
- $g(b) = f(b) - y \leq 0$
- g stetig

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in [a, b] : g(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = y \quad \square$$

5.25 Satz

Sei D ein Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. $f(D)$ Intervall oder enthält genau ein Element
2. f injektiv $\Leftrightarrow f$ streng monoton

Beweis:

1. Falls $f(D)$ nur ein Element enthält: fertig ✓

Enthalte $f(D)$ mindestens 2 Elemente $y_1 < y_2$.

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D : \begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 \neq x_2$$

Zeige: Jedes $y \in [y_1, y_2]$ ist in $f(D)$:

Falls $x_1 < x_2$, gibt es wegen 5.24 ein $x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{\subseteq D}$ mit $f(x) = y$.

Analog für $x_2 < x_1$.

$$\Rightarrow y \in f(D) \Rightarrow f(D) \text{ Intervall.}$$

2. (\Leftarrow): Hierzu braucht man die Stetigkeit nicht:

f streng monoton wachsend (fallend). Sei $x < y$.

O.B.d.A: $x < y$

$$\Rightarrow f(x) \underset{(>)}{<} f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

(\Rightarrow): Hierzu braucht man die Stetigkeit:

Kontraposition: Sei f nicht streng monoton.

$\Rightarrow \exists x < y < z \in D : f(x) < f(y)$ und $f(y) \geq f(z)$
(oder $f(x) \geq f(y)$ und $f(y) \leq f(z)$).

$\xRightarrow{5.24}$

- f nimmt in $[x, y]$ jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.
- f nimmt in $[y, z]$ jeden Wert zwischen $f(y)$ und $f(z)$ an.

\Rightarrow Mindestens ein Wert wird doppelt getroffen. \square

5.26 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : D \rightarrow f(D)$ bijektiv und stetig.

Dann gilt für die Umkehrfunktion f^{-1}

1. f^{-1} ist im selben Sinne streng monoton wie f
2. f^{-1} ist stetig

Beweis:

1. f stetig und injektiv $\xRightarrow{5.25/2.}$ f streng monoton.

Zeige Aussage für f streng monoton wachsend:

Für $y_1 < y_2$; $y_1, y_2 \in f(D)$ gibt es $x_1 \neq x_2$ mit
 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

Es gilt: $\underbrace{y_1}_{=f(x_1)} < \underbrace{y_2}_{=f(x_2)} \xLeftrightarrow[f \text{ streng monoton wachsend}] x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ streng monoton wachsend}$$

2. f stetig und injektiv $\xRightarrow{5.25}$ $f(D)$ Intervall, f streng monoton.

Annahme: f streng monoton waschend.

Sei $y_0 \in f(D)$. z.Z: f^{-1} stetig in y_0 . Setze $x_0 := f^{-1}(y_0)$.

1. Fall: x_0 kein Randpunkt von D .

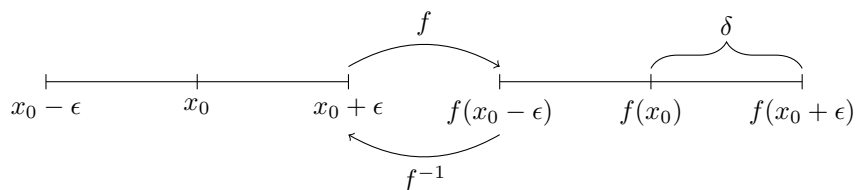
Mit ϵ - δ -Kriterium: Sei $\epsilon > 0$, so dass $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$.

f streng monoton wachsend

$$\Rightarrow f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$$

$$\Rightarrow (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)) \subseteq f(D)$$

da $f(D)$ Intervall.



Sei $\delta := \min\{|y_0 - f(x_0 + \delta)|, |y_0 - f(x_0 - \epsilon)|\}$

$\Rightarrow f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subseteq (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

D.h.: $|y - y_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|}_{x} < \epsilon$

Analog für streng monoton fallend.

2. Fall: x_0 linker Randpunkt von D :

Analog zu Fall 1 mit $[x_0, x_0 + \epsilon] \subseteq D$

3. Fall: x_0 rechter Randpunkt von D :

Analog zu Fall 2. \square

5.27 Bemerkung

Wegen 5.26 und 5.21 sind Wurzelfunktionen, arcsin, arccos, arccotan und Logarithmen stetig.

5.28 Satz: $\exp(1) = e$

Beweis: Es ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$

(Beweis der Gleichung zeigen wir nicht)

Substitution:

$$y = \exp(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \ln(y + 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \ln((y + 1)^{\frac{1}{y}}) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(y + 1)$$

weil \exp stetig ist

$$[y \rightarrow 0 \Leftrightarrow x \rightarrow y]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\exp(x) - 1} = 1$$

Wende auf Gleichung \exp an

Da \exp stetig: $\lim_{y \rightarrow 0} (y + 1)^{\frac{1}{y}} = \exp(1)$

Insbesondere für $Y_n = \frac{1}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=e \text{ (1.28)}} = \exp(1) \quad \square$

5.29 Bemerkung

Wegen 5.28 ist $e \approx 2,718$ die Basis zur Exponentialfunktion $\exp(x)$.

Man erhält $e^x = \underset{4.11a2}{\exp} \left(x \cdot \ln \left(\underset{=\exp(1)}{e} \right) \right) = \exp(x)$

Siehe auch 4.11 Exkurs

5.30 Minimax-Theorem von Weierstraß

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum, d.h.:

$$\exists x_*, x^* \in [a, b] : f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a, b]$$

Beweis: Genügt z.Z. f hat Maximum (Minimum analog).

Sei $s := \sup f([a, b])$ (kleinste obere Schranke des Bildes von f).

Zeige: $s < \infty$ und $s \in f([a, b])$.

Sei (X_n) Folge in $[a, b]$ mit $f(X_n) \rightarrow s$.

(X_n) beschränkt $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge (X_{n_j}) mit $\lim_{j \rightarrow \infty} X_{n_j} = \tilde{x}, \tilde{x} \in [a, b]$,
da $[a, b]$ abgeschlossen, ist f stetig.

$$\Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} f(X_{n_j}) = s = f(\tilde{x})$$

$\Rightarrow s$ Funktionswert von \tilde{x} und somit $f < \infty$

$\Rightarrow s \in f([a, b])$ und somit $f(x) \leq s \quad \forall x \in [a, b]$

5.31 Beispiele

a) $f(x) = x^2$ auf $[0, 1]$
 $f(x_*) = 0, f(x^*) = 1$

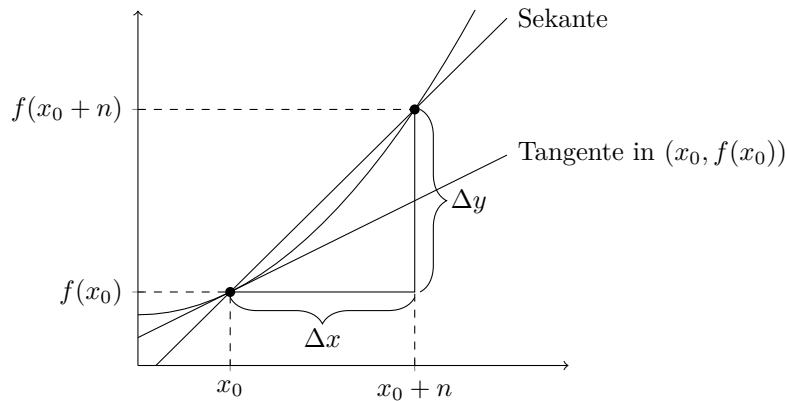
b) Falls der Definitionsbereich nicht abgeschlossen ist:

- $f(x) = x^2$ besitzt auf $(0, 1)$ weder Minimum noch Maximum.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt auf $(0, 1)$ weder Minimum noch Maximum, jedoch ist $f(\underbrace{x_*}_1) = 1$

c) $f(x) = \sin(x)$ hat je nach Größe des festgelegten Definitionsbereiches mehrere Minimal/-Maximalstellen

6 Differenzierbare Funktionen

6.1 Bemerkung: Tangenten



Die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ hat die Steigung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cong \text{Differenzenquotient}$$

Je kleiner h , desto besser nähert sich die Sekante an die Tangente $(x_0, f(x_0))$ an. Daraus ergibt sich die Tangentensteigung: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, falls der Grenzwert existiert.

In diesem Kapitel sei I immer offenes Intervall.

6.2 Definition: Ableitung

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \in I$

1. f heißt differenzierbar in x_0 , falls $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{d}{dx} f(x_0)$ bezeichnet.
2. Ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in I$, so heißt f differenzierbar (auf I) und man nennt $f' : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Abbildung von f .

6.3 Bemerkung

Setzt man in 6.2/1 $x = x_0 + h$, so erhält man für den Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

6.4 Beispiele

a) $f(x) = c$ für $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0 = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x$$

c) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} - \underbrace{x^n}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0, k \neq 1} \\ &\rightarrow nx^{n-1} \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} &= \frac{x - (x+h)}{(x+h)x \cdot h} = \frac{-1}{x \cdot (x+h)} \\ &\rightarrow -\frac{1}{x^2} \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e) Analog zu c) erhält man

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad \forall x \neq 0$$

f) $(e^x)' = e^x$.

Es ist $e^x = \exp(x)$ (5.29). Wir benutzen in Beweis von 5.28

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h} \\ &= \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \exp(x) \end{aligned}$$

g) $(\sin x)' = \cos(x), (\cos x)' = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ohne Beweis. Man zeigt dies, indem man \sin und \cos mit Hilfe von \exp darstellt (\rightarrow Mathe III)

6.5 Satz: Linear Approximation

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es gibt eine Funktion $R : I \rightarrow \mathbb{R}$, stetig in x_0 , $R(x_0) = 0$ und ein $m \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{m(x - x_0)}_{\text{Tangente an } f \text{ in } x_0} + R(x)(x - x_0) \quad (*)$$

Bemerkung:

- In $\mathbb{R} : m = f'(x_0)$
- 2. heißt: f ist in x_0 durch eine Gerade (Tangente) approximierbar.

Beweis: 1. \Rightarrow 2. Sei f in x_0 differenzierbar.

$$\text{Setze } R(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} R(x_0 + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \\ &= R(x_0) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow R$ stetig in x_0 , $R(x_0) = 0$ und $(*)$ ist erfüllt für $m = f'(x_0)$.

2. \Rightarrow 1. Gelte $(*)$ für ein $m \in \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion

$R : I \rightarrow \mathbb{R}, R(x_0) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + m \cdot h + R(x_0 + h) \cdot h \\ &\stackrel{h \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + R(x_0 + h) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \underbrace{R(x_0)}_{=0} \end{aligned}$$

da $R(x_0) = 0$ und stetig in x_0 \square

6.6 Satz

Wenn f differenzierbar in $x_0 \in I \Rightarrow f$ stetig.

Beweis: Folge aus 6.5/2 $(*)$, da f Summe in x_0 stetiger Funktionen.

6.7 Bemerkung

Die Umkehrung von 6.6 gilt nicht. In $x_0 = 0$ hat $f'(x_0) = |x|$ einen Knick:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \bullet \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

\Rightarrow In $x_0 = 0$ existiert keine Ableitung.
5.12

Rechenregeln

6.8 Satz: Ableitungsregeln

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in I$.

Dann sind auch $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$), $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0$) differenzierbar in x mit:

a) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

c) Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

d) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis:

a, b) Übung

c)

$$\begin{aligned} & \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - \overbrace{f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}^{=0} - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (\text{da } g \text{ stetig}) \end{aligned}$$

d)

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

Schiebe wie in c) im Zähler $-f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x+h)$ ein und erhalte mit $h \rightarrow 0$ die Behauptung. \square

6.9 Beispiele

- a) Wegen 6.8a,d) ist jedes Polynom und jede rationale Funktion differenzierbar.
- b) $(4x^3 + 7x + 5)' = 12x^2 + 7$
- c) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \quad (x \neq 0)$
- d) $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

6.10 Satz: Kettenregel

Die Verknüpfung $f \circ g$ zweier differenzierbarer Funktionen f, g ist differenzierbar und es gilt $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ bzw. $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Beweis: Mit Substitution:

$$\tilde{x} = g(x), \quad \tilde{h} = g(x+h) - g(x)$$

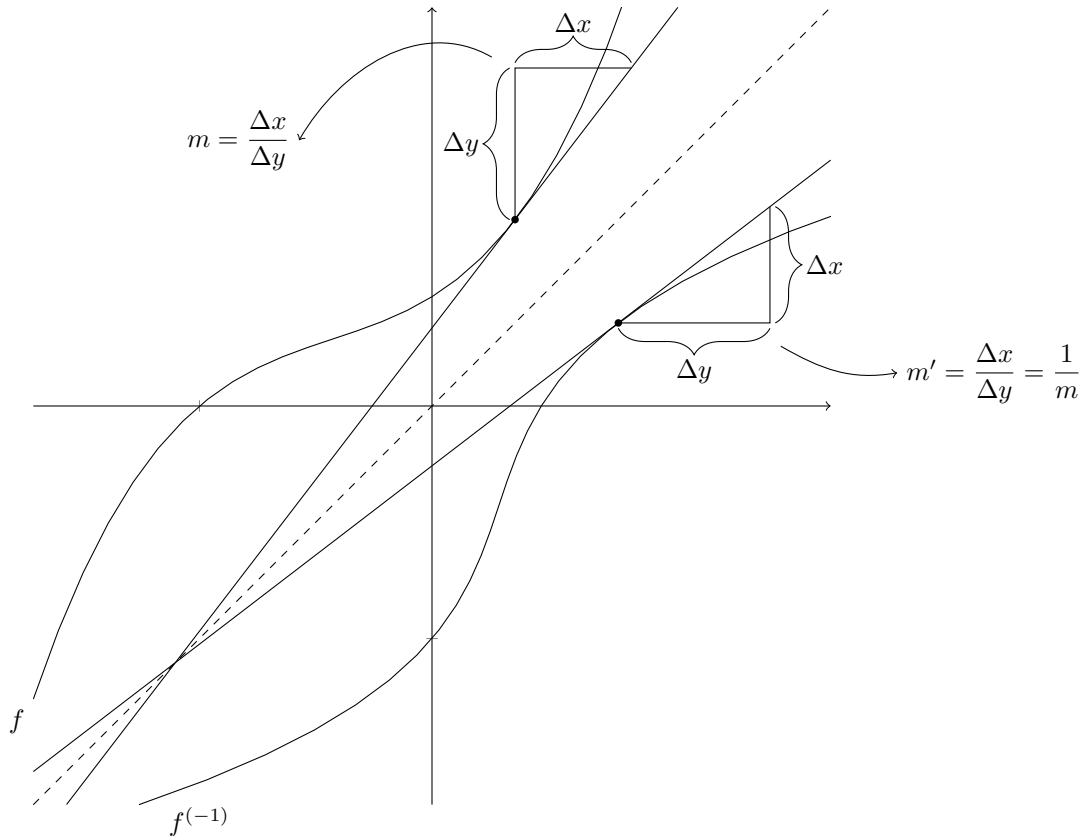
Es gilt: $h \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{h} \rightarrow 0$ da g stetig. Damit ist

$$\begin{aligned} & \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \frac{f(g(x+h) - g(x) + g(x)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \frac{f(\tilde{x} + \tilde{h}) - f(\tilde{x})}{\tilde{h}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(\tilde{x}) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \square \end{aligned}$$

6.11 Beispiel

$$\overbrace{(\sin(5x^2))'}^{f \circ g} = \underbrace{10x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos(5x^2)}_{f' \circ g}$$

6.12 Veranschaulichung zur Ableitung der Umkehrfunktion



$$\begin{aligned}
 m = f'(x_0) \neq 0 &\Rightarrow (f^{-1}(y_0))' = m' = \frac{1}{m} \\
 &= \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}
 \end{aligned}$$

6.13 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

I, J offene Intervalle, $f : I \rightarrow J$ differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$.
Dann:

$$f^{-1} : y \rightarrow I \text{ differenzierbar in } y_0 = f(x_0) \text{ mit } (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Beweis: Sei $t = f(x_0 + h) - f(x_0)$ (*)

Es gilt: $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(x_0+h) - f(x_0)} \stackrel{(*)}{=} \frac{x_0+h-x_0}{t} \\ & = \frac{h}{f^{-1}(f(x_0+h)) - f^{-1}(f(x_0))} \stackrel{(*)}{=} \frac{f^{-1}(f(x_0)+t) - f^{-1}(f(x_0))}{t} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \square \end{aligned}$$

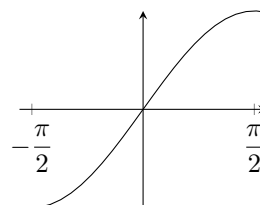
6.14 Beispiele

- a) Für $f(x) = x^n$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$
 \Rightarrow Ableitung von f^{-1} wird in $y = f(0) = 0$ unendlich groß, da $f'(0) = 0$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n+1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n+1}}} \quad \text{Für } y \neq 0$$

- b) $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$
 Sei $y = \sin x$, $y \in (-1, 1)$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$



Analog:

- $\arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad y \in (-1, 1)$
- $\arctan' y = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccot}' y = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}$

- c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) = e^x$
 $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(y) = \ln y$

$$\Rightarrow \ln' y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln(|y|)' &= \begin{cases} \frac{1}{y} & y > 0 \\ (-1) \cdot \frac{1}{-y} & y < 0 \end{cases} \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \frac{1}{y} \quad \text{für } y \neq 0 \end{aligned}$$

6.15 Logarithmische Ableitung

Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f differenzierbar, ist

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (6.14c + \text{Kettenregel})$$

Beispiel: $f'(x) = e^x \cdot (\sin x + 2) \cdot x^5 \quad x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

$$\ln(|f(x)|) = x + \ln(\sin x + 2) + 5 \cdot \ln|x|$$

$$\Rightarrow (\ln|f(x)|)' = 1 + \frac{\cos x}{\sin x + 2} + \frac{5}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x + 2} + \frac{5}{x}\right)(e^x(\sin x + 2)x^5)$$

$$= x^4 e^x (x(\sin x + 2)) + x \cdot \cos x + 5 \sin(x + 2) \text{ für } x \neq 0$$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Ableitung auch auf Funktionen mit Werten in ganz \mathbb{R} anwendbar ist. Dazu bildet man die stetige Fortsetzung von $f'(x)$ auf $\{x \mid f(x) = 0\}$

\Rightarrow Beispiel gilt auch für $x = 0$. Dann ist $f'(0) = 0$.

6.16 Satz: Ableitung elementarer Funktionen

- $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$

- $(x^x)' = (\ln x + 1) \cdot x^x, x > 0$

Beweis:

$$(a^x)' = (e^{\ln(a^x)})' = (e^{x \cdot \ln a})' = (\ln a) \cdot (e^{x \cdot \ln a}) = (\ln a) \cdot a^x$$

innere · äußere Ableitung

Rest analog \square

Kurvendiskussion

6.17 Definition: Extremum

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (Minimum),
Extremum

wenn es ein Intervall $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D, \delta > 0$ gibt, so dass

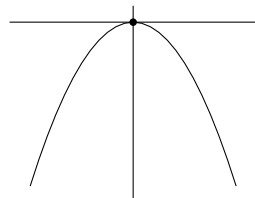
$$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in U \quad (\leftarrow \text{Umgebung von } x)$$

f besitzt in $x_0 \in D$ ein globales Maximum (Minimum),

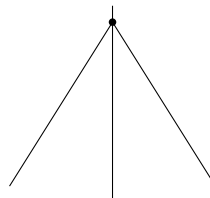
$$\text{wenn } f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in D$$

6.18 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.



Differenzierbar



Nicht differenzierbar

Beweis: Sei $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ und

$$\underbrace{f(x_0) \geq f(x)}_{\text{Maximum}} \quad \forall x \in U.$$

$$\bullet f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h < \delta.$$

$$\bullet f \text{ differenzierbar} \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{> 0}} \leq 0 \text{ und}$$

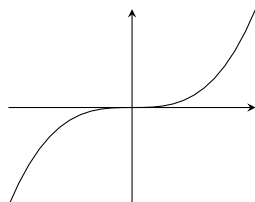
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{< 0}} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Für Minimum Analog \square

6.19 Anmerkung

$f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung aber keine hinreichende Bedingung.

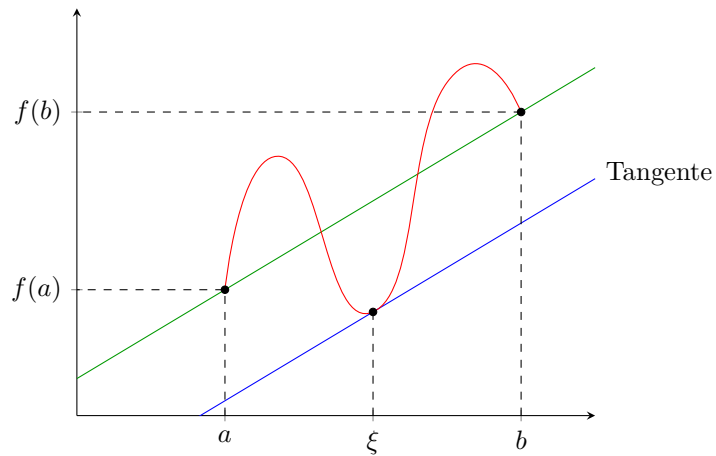
Beispiel: $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ einen Sattelpunkt mit Steigung 0.



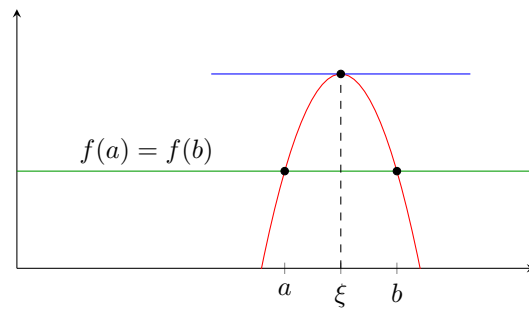
f hat lokales Extremum $\nLeftrightarrow f'(x_0) = 0$

6.20 Mittelwertsätze, Satz von Rolle (1652–1719)

1.



2.



Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

stetig und differenzierbar in (a, b) , $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

$$1. \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

1. Mittelwertsatz

$$2. f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$$

Satz von Rolle

$$3. \exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. Mittelwertsatz

Beweis:

2. f stetig in $[a, b]$

$\xRightarrow{3.36}$ f besitzt Maximum M und Minimum m in $[a, b]$.

$$\text{D.h.: } m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$