Skript Mathe 2

07. Juli 2018

0.1 Definition: Ober–/Untersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists K > 0 : |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$)
und sei $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a, b]$.

Setze $m_i := \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ und $M_i := \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$.

Dann heißt $U(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ Untersumme von f zur Zerlengung Z und $U(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ Obersumme.

0.2 Definition: Bestimmtes Riemann-Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) f heißt (Riemann–) integrierbar $:\Leftrightarrow$
   1. f ist beschränkt
   2. Für jede beliebige Folge $(Zn) \in \mathfrak{Z}[a, b]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ konvergieren $U(Z_n, f)$ und $O(Z_n, f)$ gegen den selben Wert $A \in \mathbb{R}$.

b) Der Grenzwert A heißt bestimmtes Integral oder (Riemann–) Integral von f über $[a, b]$. Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = A$$

c) Festlegungen:
   - $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
   - $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)$

0.3 Beispiele

a) $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow m_i = M_i = c$$

$$\Rightarrow U(Z,f) = O(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} c \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (\underbrace{x_n - x_0}_{b-a})$$

b) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Sei $Z = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a,b]$.
In $[X_{i-1}, x_i]$ gibt es sowohl irrationale als auch rationale Zahlen.

$$\Rightarrow m_i = 0, M_i = 1$$

$$\Rightarrow U(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$O(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

$\Rightarrow$ Für eine Folge (Z_n) in $\mathfrak{Z}[0,1]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n, f) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} 0(Z_n, f) = 1$$

c) $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$

Sei $Z_n = \{\underset{x_0}{\tfrac{0}{n}}, \underset{x_1}{\tfrac{1}{n}}, \underset{x_1}{\tfrac{2}{n}}, ..., \underset{x_n}{\tfrac{n}{n}}\}$

$$= (Z_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(1 - \frac{1}{n})}{n^2 \cdot 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Analog: $U(Z_n, f) \to \frac{1}{2}$

Problem: Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \dfrac{1}{2}$

auch für jede andere Folge (Z_n) mit $\mu(Z_n) \to 0$?

$\to$ Ja, wegen

0.4 Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Dann ist f integrierbar.

Beweis: Sei f monoton wachsend und $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a, b]$

$\Rightarrow m_i = f(x_i - 1) \quad M_i = f(x_i)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow O(Z, f) - U(Z, f) &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(\underbrace{x_i - X_{i-1}}_{\leq \mu(Z)}) \\ &\leq \mu(Z)\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \quad \text{(Teleskopsumme)} \\ &= \mu(Z)(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Für jede Folge (Z_n) in $\mathfrak{Z}[a, b]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ gilt daher

$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) \to 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f$ $\square$

0.5 Satz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar. (Ohne Beweis)

0.6 Bemerkung

a) Eine beschränkte Funktion f ist Riemann-integrierbar, wenn f endlich viele Sprungstellen besitzt (wegen 7.22b). Vgl auch Bsp 7.18b, wo jedes $x \in [0, 1]$ eine Sprungstelle ist.

b) Wenn f negativ auf $[a, b]$ ist, so wird auch $\int_a^b f(x)\,dx$ negativ.

0.7 Satz: Rechenregeln

a) $$\int_a^b \lambda f(x) + g(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in [a, b]$$

c) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

d) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

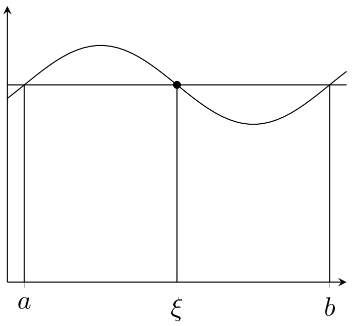
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Beweis anhand von 7.16 und 7.17 $\square$

0.8 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \xi(b - a)$$



Beweis: f stetig auf $[a, b]$

$$\underset{5.30}{\Rightarrow} \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \int [a, b]$$

$$\underset{7.22d}{\Rightarrow} m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a) \quad \Big| : \underbrace{(b - a)}_{>0}$$

$$\Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx}_{y} \leq M$$

$$\underset{5.24}{\Rightarrow} \exists \xi \in [a, b] : f(\xi)y = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \quad \square$$