

Skript Mathe 2

8. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen	2
1.1 Definition	2
1.2 Beispiele	2
1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen	4
1.4 Beispiele	5
1.5 Definition: Konvergente Folgen	5
1.6 Bemerkung	5
1.7 Beispiele	6
1.8 Satz	6
1.9 Bemerkung	7
1.10 Beispiel: Geometrische Folge	7
1.11 Beispiel	7
1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung	8
1.13 Rechenregeln für Folgen	8
1.14 Beispiele: Rechenregeln	10
1.15 Satz: Einschließungsregel	11
1.16 Beispiele	11
1.17 Satz	12
1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation	12
1.19 Beispiele	12
1.20 Definition: Monotonie	12
1.21 Beispiele	13
1.22 Definition	13
1.23 Satz: Monotone Konvergenz	13
1.24 Bernoulli-Ungleichung	13
1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e	14
1.26 Satz: Intervallschachtelung	15
1.27 Beispiel	15
1.28 Definition: Eulersche Zahl	15
1.29 Bemerkung	15
1.30 Definition: Teilfolge	15
1.31 Beispiel	16
1.32 Bemerkung	16
1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)	16
1.34 Beispiel	16
1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß	16

1.36	Definition: Limes inferior/superior	17
1.37	Bemerkung	17
1.38	Beispiel	18
1.39	Definition: Cauchy-Folgen	18
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium	18
1.41	Beispiel	19
1.42	Definition: Kontraktion	19
1.43	Banachscher Fixpunktsatz	19
2	Reihen	20
2.1	Definition: Reihe	20
2.2	Bemerkung	20
2.3	Beispiele	20
2.4	Satz: Rechenregeln für Summen	22
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen	22
2.6	Cauchy-Kriterium	22
2.7	Satz: Absolute Konvergenz	22
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen	22
2.9	Satz: Divergenzkriterium	23
2.10	Majorantenkriterium	23

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen (\mathbb{N}) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

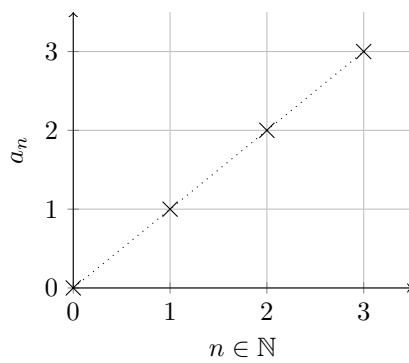
a_n : n -tes Folgenglied
 n : Index

Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1 , sondern z.B: a_7 .

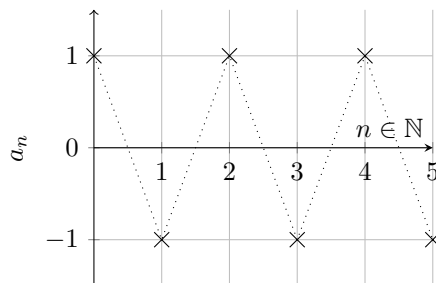
Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ oder (a_n)

1.2 Beispiele

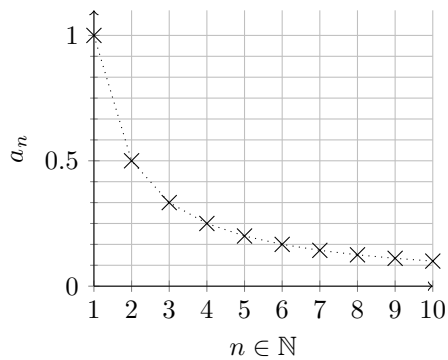
- a) $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)
- b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



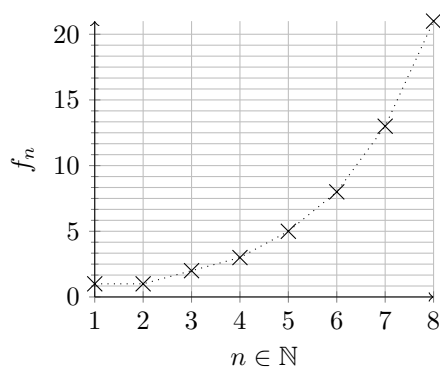
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B. von Bakterienstämmen)

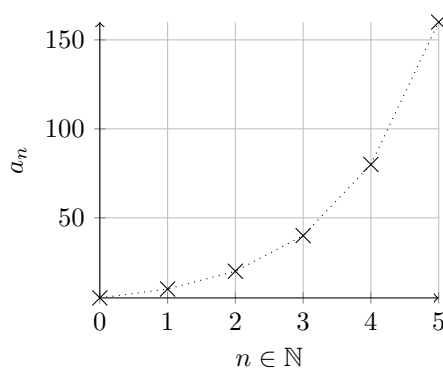
q : Wachstumsfaktor

X_0 : Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n \cdot X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

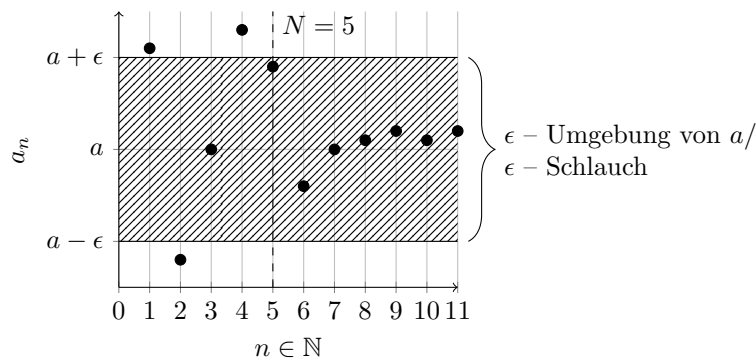
Kurz:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $a_n \rightarrow a$.
- c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \quad \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

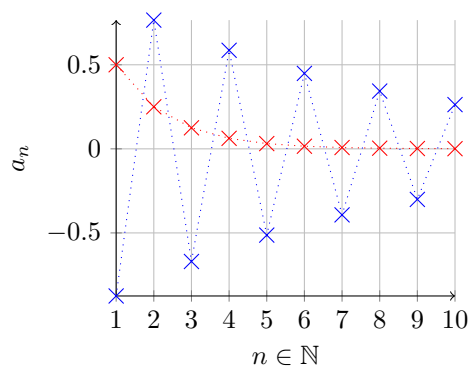
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\xrightarrow{1.9} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Bigg| \quad |-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \Bigg| \quad |-a|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$.

Dann gilt:

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$4.) b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

$$5.) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

$$6.) (e_n) \text{ beschränkt} \Rightarrow (d_n \cdot e_n) \text{ ist Nullfolge}$$

$$7.) |e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n| \text{ ist Nullfolge}$$

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.) • Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a$ ✓

• Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.) • Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ \text{1.12}}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

• Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \stackrel{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| \stackrel{\downarrow}{<} \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

- $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann:

$$\begin{array}{ccc} \text{kte Potenz} & \searrow & \boxed{n^k} \\ & & \downarrow \\ \text{exponentielles Wachstum} & \nearrow & \boxed{X^n} \end{array} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{j \geq k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\mathcal{N}^k(k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{2.} N_a, N_c : & \bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ & \bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\ \forall n \geq k & \quad \downarrow \\ \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square \end{aligned}$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+\epsilon)^n &> n \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow 1+\epsilon &> \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x > 0 &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow a$. Dann:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0 \text{ (ohne Beweis)}$

1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

- a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$
- b) $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

- c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

\mathcal{O}, o heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

- a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_{n+1} \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

- b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_{n+1} \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt
und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 a kleinste obere Schranke
 $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N \end{matrix} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog \square

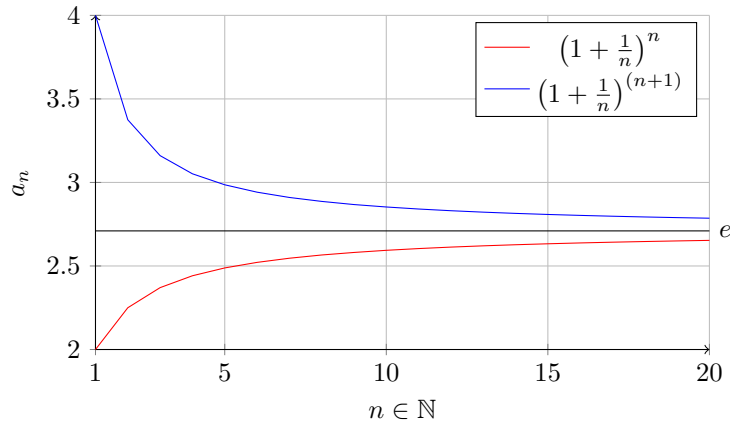
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

Zeige dazu: $b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{n}{n^2-1}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- \Rightarrow (a_n) hat obere Schranke b_1
 (b_n) hat untere Schranke a_1
 $\xRightarrow{1.23}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. \square

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\xRightarrow{1.8} (a_n)$ beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1 .

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1 .

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$: Halbiere $[A_0, B_0]$
 - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
 - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n_1} , die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.

- $k=2$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

$$\bullet A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{nk}) \quad \square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

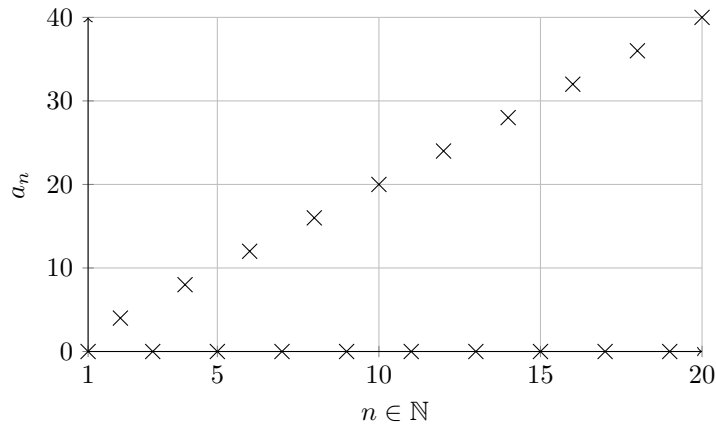
$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \quad \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \end{cases}$$

1.37 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$ in obiger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)
z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
aber (a_n) mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen ∞
- $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl \limsup als auch \liminf .

1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R}

(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge

Beweis: (\Rightarrow) : klar

(\Leftarrow) :

1. Zeige (a_n) beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ ist beschränkt und besitzt}$$

konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1$ $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
es gibt genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
die durch $X_n := f(X_{n-1})$ definierte Folge (X_n) gegen \hat{x} .

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n \geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.
4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

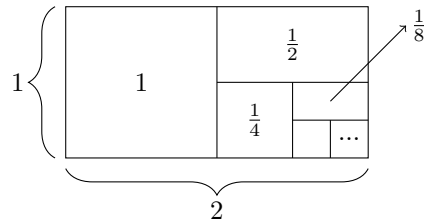
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ konvergent



$$\text{und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

e) Geometrische Reihe

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

- In Beispiel d) ist $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

- $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} &\underbrace{|a_n + \dots + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \\ &\left[= |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right] \end{aligned}$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$.

Da $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) \stackrel{2.1}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[\begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \right. \quad (1.13) \Bigg],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \quad (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \right) \stackrel{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*), (**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.

D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. \square

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in \mathbb{R} mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.

Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\leq |b_n + \dots + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

$\overbrace{0 \leq a_1 \leq b_i \quad \forall i}$