

Skript Mathe 2

28. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen	3
1.1 Definition	3
1.2 Beispiele	3
1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen	5
1.4 Beispiele	5
1.5 Definition: Konvergente Folgen	5
1.6 Bemerkung	6
1.7 Beispiele	6
1.8 Satz	7
1.9 Bemerkung	7
1.10 Beispiel: Geometrische Folge	7
1.11 Beispiel	8
1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung	8
1.13 Rechenregeln für Folgen	9
1.14 Beispiele: Rechenregeln	10
1.15 Satz: Einschließungsregel	11
1.16 Beispiele	12
1.17 Satz	12
1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation	13
1.19 Beispiele	13
1.20 Definition: Monotonie	13
1.21 Beispiele	13
1.22 Definition	14
1.23 Satz: Monotone Konvergenz	14
1.24 Bernoulli-Ungleichung	14
1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e	15
1.26 Satz: Intervallschachtelung	16
1.27 Beispiel	16
1.28 Definition: Eulersche Zahl	16
1.29 Bemerkung	16
1.30 Definition: Teilfolge	16
1.31 Beispiel	17
1.32 Bemerkung	17
1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)	17
1.34 Beispiel	17
1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß	17

1.36	Definition: Limes inferior/superior	18
1.37	Bemerkung	18
1.38	Beispiel	19
1.39	Definition: Cauchy-Folgen	19
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium	19
1.41	Beispiel	20
1.42	Definition: Kontraktion	20
1.43	Banachscher Fixpunktsatz	20
2	Reihen	21
2.1	Definition: Reihe	21
2.2	Bemerkung	21
2.3	Beispiele	21
2.4	Satz: Rechenregeln für Reihen	23
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen	23
2.6	Cauchy-Kriterium	23
2.7	Satz: Absolute Konvergenz	23
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen	23
2.9	Satz: Divergenzkriterium	24
2.10	Majorantenkriterium	24
2.11	Bemerkung: Minorantenkriterium	24
2.12	Beispiele	25
2.13	Satz: Leibniz-Kriterium	25
2.14	Satz: Wurzelkriterium	25
2.15	Beispiele	26
2.16	Satz: Quotientenkriterium	26
2.17	Beispiele	27
2.18	Bemerkung	27
2.19	Umordnung von Reihen: Beispiel	27
2.20	Definition: Umordnung	28
2.21	Umordnungssatz	28
2.22	Riemannscher Umordnungssatz	28
3	Potenzreihen	28
3.1	Grundbegriffe und Beispiel	28
3.2	Definition: Potenzreihen	28
3.3	Bemerkung	29
3.4	Satz	29
3.5	Definition: Konvergenzradius und Intervall	29
3.6	Beispiel	30
3.7	Korollar	30
3.8	Satz: Formel von Cauchy-Hademard	30
3.9	Beispiel	31
3.10	Satz: Formel von Euler	31
3.11	Beispiel: Exponentialfunktion	31
3.12	Bemerkung	32
4	Reelle Funktionen	33
4.1	Definition: Abbildung	33
4.2	Definition: Reelle Funktion	33

4.3	Beispiel	34
4.4	Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv	34
4.5	Beispiele	34
4.6	Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild	34
4.7	Beispiel	34
4.8	Definition: Symmetrie	35
4.9	Definition: Monotonie	35
4.10	Elementare Funktionen	35

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen (\mathbb{N}) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

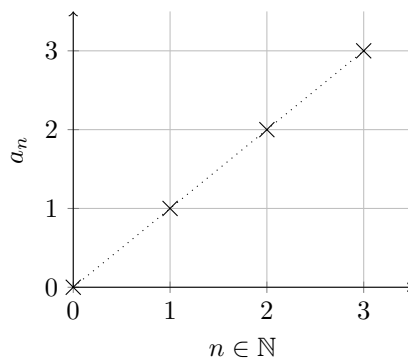
a_n : n-tes Folgenglied
 n : Index

Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1 , sondern z.B: a_7 .

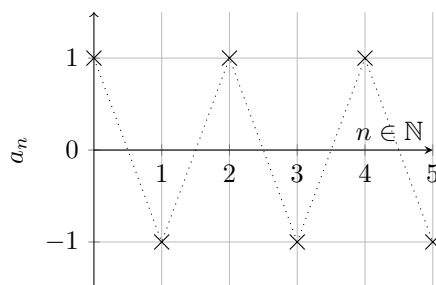
Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ oder (a_n)

1.2 Beispiele

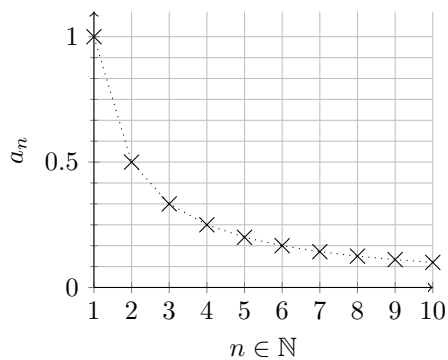
- a) $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)
- b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



- c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



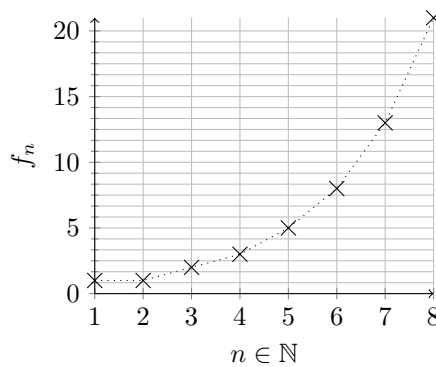
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

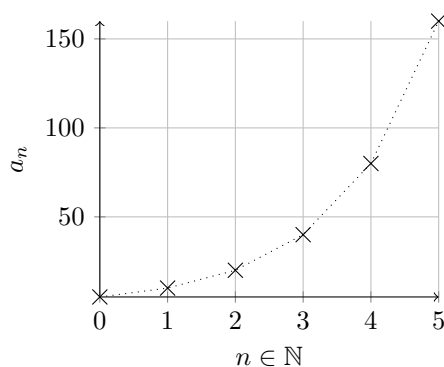
q : Wachstumsfaktor

X_0 : Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.
- (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

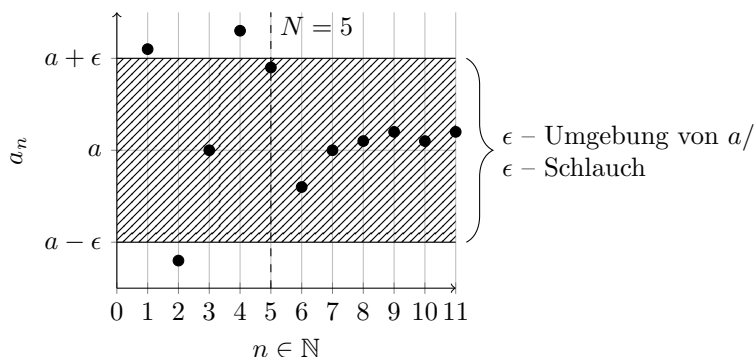
Kurz:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $a_n \rightarrow a$.
- c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

- a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

- b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left| \frac{n+1}{3n} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

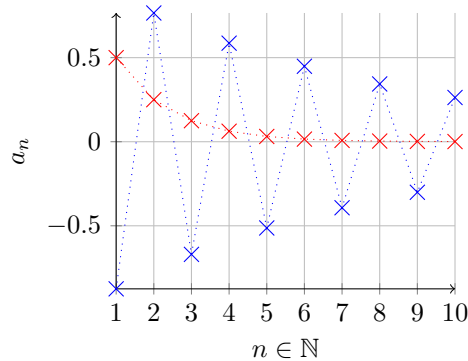
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\xrightarrow{1.9} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \left| \begin{array}{l} \\ -b \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \left| \begin{array}{l} \\ -a \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$.

Dann gilt:

- 1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- 4.) $b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \forall n \geq k$
 $\bullet \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$
- 5.) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

- 6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge
- 7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.) \bullet Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a \checkmark$

\bullet Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

$$4.) \quad \bullet \text{ Z.z: } \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \text{ Z.z: } \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ hat } \frac{a}{b} \text{ als Limes.}$$

Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

$$\bullet \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\bullet |(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$$

$$\Rightarrow (-1)^n + 5 \text{ beschränkt}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann: kte Potenz \swarrow
 $\boxed{n^k}$
 \searrow
 $\boxed{X^n}$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
exponentielles Wachstum \nearrow

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\mathcal{N}(k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_a, N_c : \bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ \bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\ \forall n \geq k & \quad \downarrow \\ \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square \end{aligned}$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+\epsilon)^n &> n \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow 1+\epsilon &> \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \stackrel{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow a$. Dann:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$

b) $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

\mathcal{O}, o heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_{n+1} \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_{n+1} \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt
und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 a kleinste obere Schranke
 $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$
 $\stackrel{a_n \geq a_N}{\forall n \geq N} \Rightarrow |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog \square

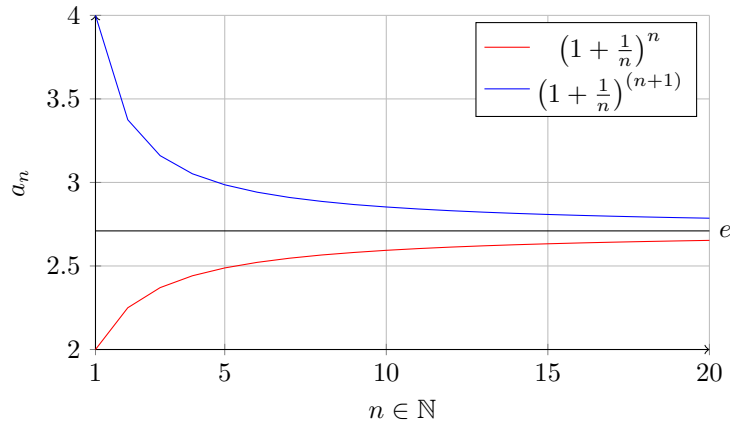
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

Zeige dazu: $b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- \Rightarrow (a_n) hat obere Schranke b_1
 (b_n) hat untere Schranke a_1
 $\xRightarrow{1.23}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. \square

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\xRightarrow{1.8}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1 .

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1 .

1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$: Halbiere $[A_0, B_0]$
 - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
 - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n_1} , die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.

- $k=2$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

$$\bullet A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{nk}) \quad \square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

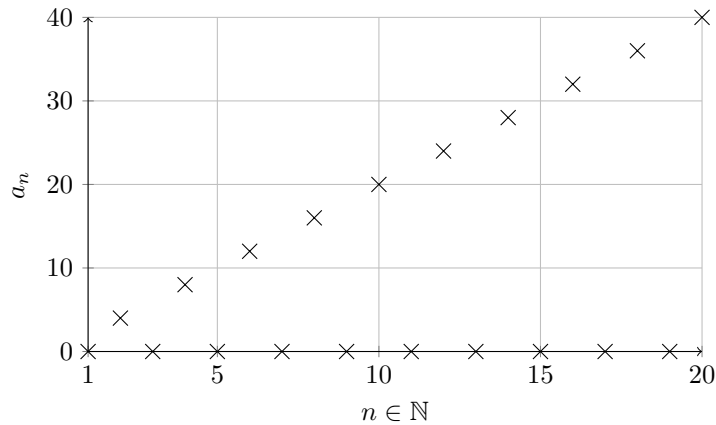
$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \end{cases}$$

1.37 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$ in obiger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)
z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
aber (a_n) mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen ∞
- $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl \limsup als auch \liminf .

1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R}

(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge

Beweis: (\Rightarrow) : klar

(\Leftarrow) :

1. Zeige (a_n) beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ ist beschränkt und besitzt}$$

konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1$ $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
es gibt genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
die durch $X_n := f(X_{n-1})$ definierte Folge (X_n) gegen \hat{x} .

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n \geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.
4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

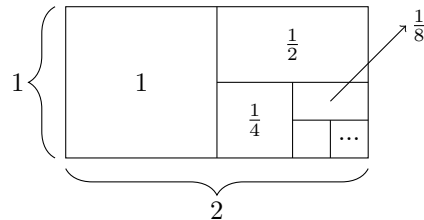
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ konvergent



$$\text{und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

e) Geometrische Reihe

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

• In Beispiel d) ist $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

• $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

• $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Reihen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} &\underbrace{|a_n + \dots + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \\ &\left[= |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right] \end{aligned}$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$.

Da $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) \stackrel{2.1}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[\begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \right. (1.13) \Bigg],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k |a_i| \right) \stackrel{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*), (**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.

D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. \square

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in \mathbb{R} mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.

Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\leq |b_n + \dots + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

$\underbrace{0 \leq a_1 \leq b_i}_{\forall i}$

2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

2.12 Beispiele

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}} \text{ ist divergent. (2.9)}$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$ (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow: A_{n+1} - A_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i$
 $= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$
 $= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$, da $(a_n) \searrow$
- Analog: $(B_n) \searrow: B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $B_n - A_n = a_{2n} \rightarrow 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq (a + \epsilon)^n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a + \epsilon)^k}_{< 1} \text{ (geometrische Reihe)}$$

ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

$$\text{Damit konvergiert auch } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} |a_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$$

$< \infty$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

$$\Rightarrow |a_n| > 1 \text{ unendlich oft}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ keine Nullfolge} \xrightarrow{2.9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent. } \square$$

2.15 Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{k^3}{3^k} \right]}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n^3})}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harmonische Reihe) liefert

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n^\alpha})} = 1 \quad (\alpha > 0) \rightarrow \text{keine Aussage möglich.}$$

2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in \mathbb{R} mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ und $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq a \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \dots \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq N$$

Da $\sum_{n=N}^{\infty} a^{n-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit

Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge \square

2.17 Beispiele

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \text{ konvergiert, da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

$$\text{b) Wie in 2.15b ist für } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ keine Aussage möglich,}$$

$$\text{da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{und somit } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.

2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kann Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

$$\bullet 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls eine bijektive Abbildung $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in \mathbb{R} ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ohne Beweis)

2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ (ohne Beweis)

3 Potenzreihen

3.1 Grundbegriffe und Beispiel

- a) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist für $|x| < 1$ absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$.

Konvergenzintervall (3.5)

Für $|x| > 1$ ist $P(x)$ divergent.

- b) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$ ist für $x \neq 1$ divergent:

Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

3.2 Definition: Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ reelle Folge und seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten a_k

3.3 Bemerkung

- a) In Bsp 3.1a) ist $x_0 = 0$ und $a_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$.
In 3.1b) ist $x_0 = 1$ und $a_k = k!$
- b) In 3.1a) konvergiert $P(x)$ für $x \in (-1, 1)$, in 3.1b) lediglich für $x = x_0 = 1$.
Es wird sich herausstellen, dass es für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Zentrum x_0 einen Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ gibt (3.5), so dass $P(x)$ absolut konvergent für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, (d.h. $|x - x_0| < \rho$) und divergent für $|x - x_0| > \rho$ ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

3.4 Satz

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

Dann:

1. $P(x_1)$ konvergent $\Rightarrow P(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. $P(x_1)$ divergent $\Rightarrow P(x)$ ist divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Beweis:

1. $P(x)$ konvergent $\xRightarrow{2.9} (a_k(x_1 - x_0)^k)$ Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k(x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1} \leq K \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1}$$

$$\xRightarrow{2.10} P(x) \text{ absolut konvergent für } |x - x_0| < |x_1 - x_0| \text{ (Majorantenkriterium)}$$

2. Sei $P(x_1)$ divergent und $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$. Wäre $P(x)$ konvergent, so wäre wegen 1. auch $P(x_1)$ konvergent. \nexists

Also: $P(x)$ divergent \square

3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei $P(x)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 .

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von $P(x)$.

Für $\rho \in \mathbb{R}_+$ heißt $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ Konvergenzintervall von $P(x)$.
Ist $\rho = \infty$, so konvergiert $P(x) \forall x \in \mathbb{R}$ (3.7)

3.6 Beispiel

- a) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $\rho = 1$, denn $(-1, 1)$ ist Konvergenzintervall von $P(x)$, $x_0 = 0$
- b) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$ ist $\rho = 0$, denn $P(x)$ ist nur für $x = x_0 = 1$ konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

3.7 Korollar

Sei $P(X)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Konvergenzradius ρ .

Dann:

1. $P(X)$ absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$.
2. $P(X)$ divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$.
3. [Falls $|x - x_0| = \rho \leadsto$ keine allgemeine Aussage möglich]

Berechnung von Konvergenzradien

3.8 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ Folge in \mathbb{R} und $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$. ρ sei der Konvergenzradius von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$.

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

Beweis: Wurzelkriterium: $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{< 1} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h. $P(x)$ konvergiert

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{> 1} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h. $P(x)$ divergiert

$\Rightarrow \rho$ Konvergenzradius von $P(x)$

3.9 Beispiel

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergent?

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$\Rightarrow P(x)$ konvergent für $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$ und divergiert für $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für $x = \pm 1$

$$\bullet x = 1 : \quad P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent (harmonische Reihe)}$$

$$\bullet x = -1 : \quad P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= - \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$ konvergent

Insgesamt: $P(x)$ konvergent für $[-1, 1)$, divergent für $|x| > 1$ und $x = 1$.

3.10 Satz: Formel von Euler

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ Folge in \mathbb{R} , $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$,

ρ Konvergenzradius von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Ist $\left(\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right)_{k \geq 0}$ konvergent oder bestimmt gegen $+\infty$

divergent, so ist $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

Beweis: Wende auf $P(x)$ das Quotientenkriterium 2.16 an. \square

3.11 Beispiel: Exponentialfunktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ konvergent } \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$$

Man definiert: $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1. $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2. $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl)

Aus 2.: $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$?

1. Definiere: $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (1.28)
2. Zeige: $\exp(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für $\exp(x)$ gelten:
 $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (hier nicht)
4. Definiere: $e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \exp(n) = e^n \quad \mid \sqrt[m]{}$
 $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird e^x dann mit Hilfe von $e^x = \exp(x)$ berechnet.

So kann auch ein Computer z.B. e^π berechnen, indem $\exp(\pi)$ ermittelt wird.

3.12 Bemerkung

- a) Außer der Funktion e^x gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B. wird in Mathe III gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für $\rho \neq \infty$ müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.

4 Reelle Funktionen

Grundbegriffe und Beispiele

4.1 Definition: Abbildung

Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ besteht aus

- Dem Definitionsbereich A (Menge A)
- Dem Bildbereich B (Menge B)
- Einer Zuordnungsvorschrift f , die jedem $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Man schreibt $b = f(a)$, nennt b Bild/Funktionswert von a und a (ein) Urbild von b .

Notation: $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$

A = Menge aller Studenten von Mathe II

B = {Raucher, Nichtraucher}

f = Zuordnungsvorschrift, die jedem Studenten zuordnet,
ob er/sie raucht/nicht raucht

4.2 Definition: Reelle Funktion

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

a) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$
Summe/Differenz von f und g

b) $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
Produkt von f und g

c) Für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ heißt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

Quotient von f und g


d) Komposition/Verknüpfung

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(D_f) \subseteq D_g$$

$$f \circ g : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \xrightarrow{g} g(f(D_f)) \subseteq \mathbb{R}$$


$$g \circ f \text{ ("g nach f")}$$

4.3 Beispiel

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x - 1$$

$$(f + g)(x) = x^2 + x - 1, (f \cdot g)(x) = x^2(x - 1)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ für } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \text{ Definitionsbereich von } \frac{f}{g}.$$

$$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 \neq$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$$

4.4 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt:

1. Surjektiv $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
2. Injektiv $\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
3. Bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

4.5 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist

- nicht surjektiv: z.B. gibt es für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$, da $f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- nicht injektiv: $f(-1) = f(1)$ aber $-1 \neq 1$

b) Jedoch ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ bijektiv, wie man leicht prüfen kann.

4.6 Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung

1. Für $X_0 \subseteq X$ heißt $f(X_0) := \{f(x) \mid x \in X_0\}$ Bild von X_0
2. Für $Y_0 \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(Y_0) := \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\}$ Urbild von Y_0
3. Ist f bijektiv, so heißt $f^{-1} : Y \rightarrow X$ Umkehrfunktion von f , falls $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$

4.7 Beispiel

a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ ist bijektiv (4.6b)

Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{da: } (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = \underbrace{x}_{=\text{id } \mathbb{R}_{\geq 0}} \\ &= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = (f^{-1} \circ f)(x) \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden

- b) Achtung: Das Urbild existiert immer, auch wenn f^{-1} als Umkehrfunktion nicht existiert.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

4.8 Definition: Symmetrie

Sei $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt:

- Achsensymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (zur y-Achse)
- Punktsymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4.9 Definition: Monotonie

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. f heißt (streng) monoton wachsend, falls $f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2$.

Falls $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(>)}{\geq} x_2$, so heißt f (streng) monoton fallend.

4.10 Elementare Funktionen

- Konstante Funktion: Sei $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$
- Identität: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$
- Betragsfunktion: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
 f ist achsensymmetrisch
- Monome/Potenzen: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$
 - n gerade: f achsensymmetrisch, weder injektiv noch surjektiv, nicht monoton, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 - n ungerade: f punktsymmetrisch, bijektiv, streng monoton steigend
- Wurzelfunktion: Sind Umkehrfunktion von Monomen
 - n ungerade $\Rightarrow f(x) = x^n$ bijektiv
 \Rightarrow Umkehrfunktion existiert und hat die Form
4.7/3
 $\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$

- n gerade $\Rightarrow f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^n$ bijektiv

In diesem Fall hat die Umkehrfunktion die Vorschrift

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\geq 0}$$

Achtung: Wenn n gerade, dann hat $x^n = a$ für gegebenes $a \in \mathbb{R}$

- keine Lösung, falls $a < 0$
- genau eine Lösung, falls $a = 0$ und zwar $x = 0$
- genau zwei Lösungen, falls $a > 0$ und zwar

$$x_1 = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{>0} \quad x_2 = -\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{<0}$$

- f) Polynome: $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten

Falls $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p , man schreibt $\text{grad}(p) = n$

Für ein Polynom p von Grad n kann man zeigen:

1. p besitzt höchstens n Nullstellen
2. Falls n ungerade, ist p surjektiv und besitzt mindestens eine Nullstelle
3. Falls n gerade, ist p nicht surjektiv und kann daher auch keine Nullstelle haben

Bekannte Verfahren zur Berechnung von Nullstellen:

- $\text{grad}(p) = 2$: Mitternachtsformel/pq-Formel
- $\text{grad}(p) \geq 3$: Polynomdivision (Mathe III), numerische Verfahren (z.B. Newton-Verfahren)

- g) Rationale Funktionen:

Quotienten von Polynomen p, q mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

- h) Logarithmen und Exponentialfunktion:

1. der natürliche Logarithmus:

Man kann zeigen, dass für die Exponentialreihe unter 3.11 gilt:

- $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv

Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ ist der natürliche Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$

2. Exponentialfunktion:

Sei $q > 0, q \neq 0$. Für $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}$ ist $q^x = \sqrt[b]{q^a} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

Mit Hilfe der Funktion $\exp(x), \ln(x)$ kann man Exponentialfunktionen zu einer beliebigen gegebenen Basis q und $x \in \mathbb{R}$ definieren:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto q^x := \exp(x \cdot \ln(q))$$

3. Aus 2. ergibt sich die Regel:

$$\ln(q^x) = x \cdot \ln(q) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Man kann wegen 2. eine Basis q durch eine beliebige andere Basis ausdrücken, z.B: $q^x = e^{x \cdot \ln(q)}$ (da $\exp(x) = e^x$ (3.11))

5. Logarithmus zur Basis $q > 0, q \neq 1$: Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = q^x$ (unter 2.)

$$\log_q: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$$

6. \log_q lässt sich analog zu 4. durch jeden anderen Logarithmus ausdrücken, z.B ist

$$\ln(x) = \ln(q^{\log_q(x)}) \underset{3.}{=} \log_q(x) \Leftrightarrow \log_q(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(q)}$$

7. Rechenregeln:

– für $f(x) = q^x$ ergeben sich aus 2. und den Regeln für $\exp(x)$ (3.11):

- $q^{x+y} = q^x \cdot q^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$, da $1 = q^{x-x} = q^x \cdot q^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

– für $\log_q(x)$ ergeben sich aus denen für q^x :

- $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y) \quad \forall x, y > 0$

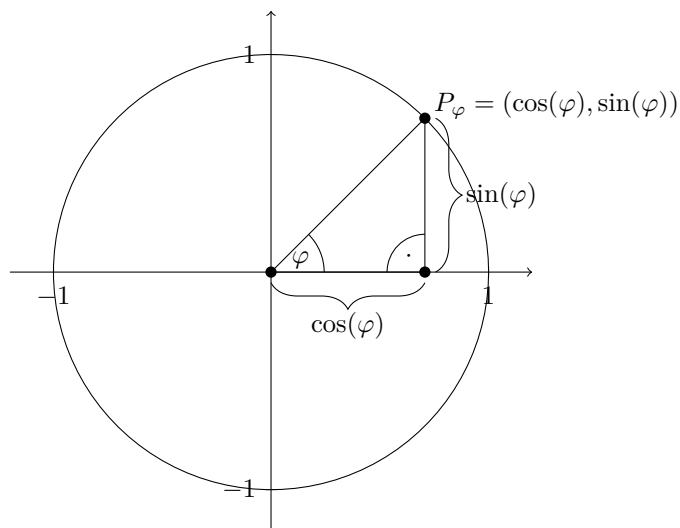
denn für $x = q^u, y = q^v$ ist

$$\log_q(xy) = \log_q(q^{u+v}) = u + v = \log_q(x) + \log_q(y)$$

- $\log_q\left(\frac{q}{x}\right) = -\log_q(x) \quad \forall x > 0$

$$[\text{mit } q^v = \log_q(x^\alpha) \underset{3./6.}{=} \alpha \cdot \log_q(x) \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}]$$

i) Trigonometrische Funktionen:



- φ : Winkel zwischen x-Achse und Strecke $\overline{0 P_\varphi}$
- $\cos \varphi$: Ankathete an φ in $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$
- $\sin \varphi$: Gegenkathete an φ in $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$

Daraus ergeben sich die Winkelfunktionen:

$$\begin{aligned} \cos : \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos(x) \\ \sin : \quad \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x) \\ \tan : \quad \mathbb{R} \setminus \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cotan : \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$