

# Skript Mathe 2

23. Mai 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Folgen</b>	<b>3</b>
1.1 Definition	3
1.2 Beispiele	3
1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen	5
1.4 Beispiele	5
1.5 Definition: Konvergente Folgen	5
1.6 Bemerkung	6
1.7 Beispiele	6
1.8 Satz	7
1.9 Bemerkung	7
1.10 Beispiel: Geometrische Folge	7
1.11 Beispiel	8
1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung	8
1.13 Rechenregeln für Folgen	8
1.14 Beispiele: Rechenregeln	10
1.15 Satz: Einschließungsregel	11
1.16 Beispiele	12
1.17 Satz	12
1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation	12
1.19 Beispiele	13
1.20 Definition: Monotonie	13
1.21 Beispiele	13
1.22 Definition	13
1.23 Satz: Monotone Konvergenz	13
1.24 Bernoulli-Ungleichung	14
1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$	14
1.26 Satz: Intervallschachtelung	15
1.27 Beispiel	16
1.28 Definition: Eulersche Zahl	16
1.29 Bemerkung	16
1.30 Definition: Teilfolge	16
1.31 Beispiel	16
1.32 Bemerkung	16
1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)	16
1.34 Beispiel	17
1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß	17

1.36	Definition: Limes inferior/superior . . . . .	17
1.37	Bemerkung . . . . .	18
1.38	Beispiel . . . . .	18
1.39	Definition: Cauchy-Folgen . . . . .	18
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium . . . . .	19
1.41	Beispiel . . . . .	19
1.42	Definition: Kontraktion . . . . .	19
1.43	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Reihen</b>	<b>20</b>
2.1	Definition: Reihe . . . . .	20
2.2	Bemerkung . . . . .	20
2.3	Beispiele . . . . .	21
2.4	Satz: Rechenregeln für Summen . . . . .	22
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen . . . . .	22
2.6	Cauchy-Kriterium . . . . .	22
2.7	Satz: Absolute Konvergenz . . . . .	22
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen . . . . .	23
2.9	Satz: Divergenzkriterium . . . . .	23
2.10	Majorantenkriterium . . . . .	23
2.11	Bemerkung: Minorantenkriterium . . . . .	24
2.12	Beispiele . . . . .	24
2.13	Satz: Leibniz-Kriterium . . . . .	24
2.14	Satz: Wurzelkriterium . . . . .	24
2.15	Beispiele . . . . .	25
2.16	Satz: Quotientenkriterium . . . . .	25
2.17	Beispiele . . . . .	26
2.18	Bemerkung . . . . .	26
2.19	Umordnung von Reihen: Beispiel . . . . .	27
2.20	Definition: Umordnung . . . . .	27
2.21	Umordnungssatz . . . . .	27
2.22	Riemannscher Umordnungssatz . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>27</b>
3.1	Grundbegriffe und Beispiel . . . . .	27
3.2	Definition: Potenzreihen . . . . .	28
3.3	Bemerkung . . . . .	28
3.4	Satz . . . . .	28
3.5	Definition: Konvergenzradius und Intervall . . . . .	29
3.6	Beispiel . . . . .	29
3.7	Korollar . . . . .	29
3.8	Satz: Formel von Cauchy-Hademard . . . . .	29
3.9	Beispiel . . . . .	30
3.10	Satz: Formel von Euler . . . . .	30
3.11	Beispiel: Exponentialfunktion . . . . .	31
3.12	Bemerkung . . . . .	32

# 1 Folgen

## 1.1 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen  $(\mathbb{N})$  in eine beliebige Menge  $M$  (oft  $M \subseteq \mathbb{R}$ ).

$a_n$ :  $n$ -tes Folgenglied

$n$ : Index

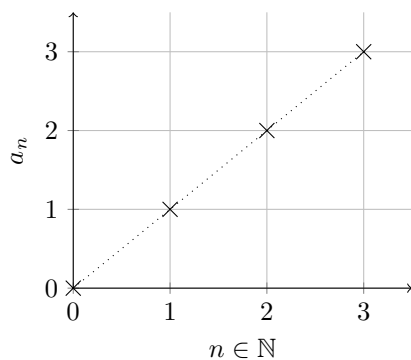
Oft ist das erste Folgenglied nicht  $a_1$ , sondern z.B:  $a_7$ .

**Schreibweise:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n \geq n_0}$  oder  $(a_n)$

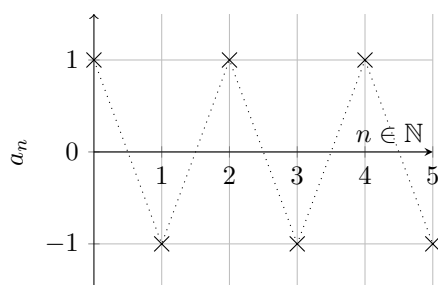
## 1.2 Beispiele

a)  $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$  (konstante Folge)

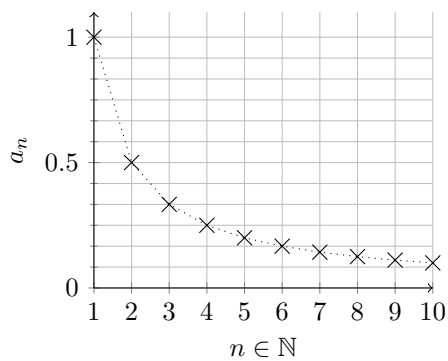
b)  $a_n = n$  (Ursprungsgerade)



c)  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  (alternierend)



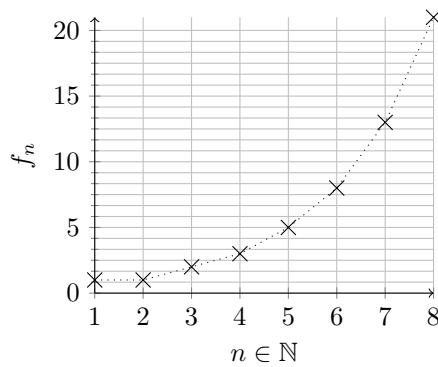
d)  $a_n = \frac{1}{n}$  (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

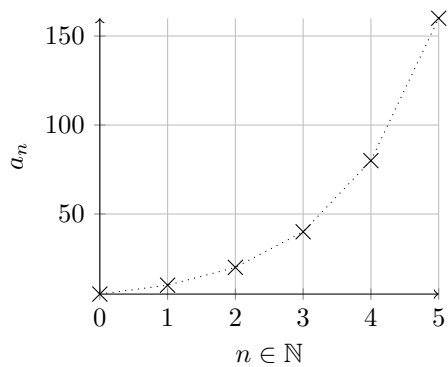
$q$ : Wachstumsfaktor

$X_0$ : Startpopulation

**Explizit:**  $X_n = q^n * X_0$

z.B:  $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$ : Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$ : Relative Anzahl der Individuen in Generation  $n$

Anzahl der Individuen in Generation  $n + 1$  hängt ab von der aktuellen Populationsgröße  $X_n$  und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch  $(1 - X_n)$

### 1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

- a)  $(a_n)$  heißt beschränkt  $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$  für ein  $K \geq 0$ .
- b)  $(a_n)$  heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

### 1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

### 1.5 Definition: Konvergente Folgen

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt (das von  $\epsilon$  abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

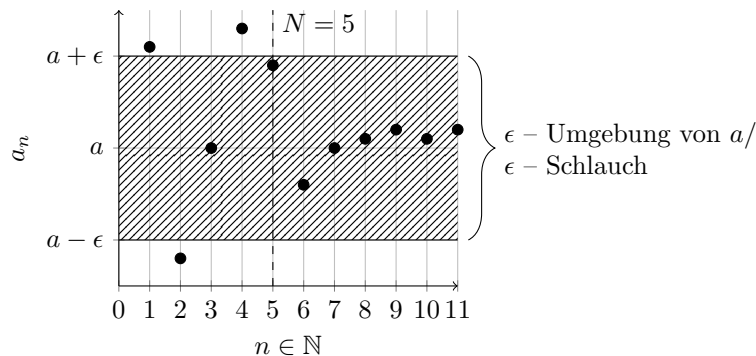
**Kurz:**

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .
- c) Eine Folge  $(a_n)$  mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

## 1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$  bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  vor, so sind ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder weniger als  $\epsilon$  von  $a$  entfernt. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen  $N$  gewählt werden.



Solch ein  $N$  muss sich für jedes noch so kleine  $\epsilon$  finden lassen. Ansonsten ist  $(a_n)$  divergent.

## 1.7 Beispiele

- a) Behauptung:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle  $\epsilon = \frac{1}{10}$ . Dann ist für  $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges  $\epsilon$ )

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

- b) Behauptung:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n+1}{3n}$  hat Limes  $a = \frac{1}{3}$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - \frac{1}{3}| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{3N} < \epsilon \quad \forall N \geq n$$

- c)  $N$  muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ , für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

## 1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Limes  $a \in \mathbb{R}$ .

Zu zeigen:  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , für ein  $K \geq 0$ .

Sei  $\epsilon = 1$ ,  $(a_n)$  konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze  $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

## 1.9 Bemerkung

Wegen 1.8:  $(a_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

## 1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für  $|q| > 1$  oder  $q = -1$  ist  $(q^n)$  divergent.

**Beweis:**

1.)  $|q| < 1$ . Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

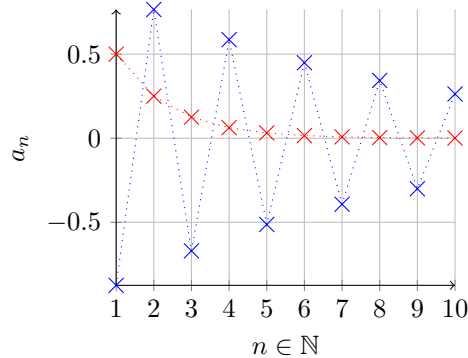
2.)  $q = 1$ .  $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.)  $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$  unbeschränkt  $\xRightarrow{1.9} (q^n)$  divergent

4.)  $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$ . Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

### 1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen.



### 1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der  $\Delta$ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ da:}$

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Bigg| \quad |-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \Bigg| \quad |-a|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

### 1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$ .

Dann gilt:

$$1.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$4.) \quad b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

$$5.) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Seien weiter  $(d_n), (e_n)$  reelle Folgen,  $(d_n)$  ist Nullfolge



6.)  $(e_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$  ist Nullfolge

7.)  $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$  ist Nullfolge

**Beweis:**

1.)

Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$ :

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.)  $\bullet$  Für  $\lambda = 0$  gilt auch  $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a$  ✓

$\bullet$  Für  $\lambda \neq 0$ : Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8  $\Rightarrow (b_n)$  beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.)  $\bullet$  Z.z:  $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist  $b \neq 0$  und  $|b| > 0$ .

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z:  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$  hat  $\frac{a}{b}$  als Limes.

Da  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

## 1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

$$\bullet \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\bullet |(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$$

$$\Rightarrow (-1)^n + 5 \text{ beschränkt}$$

b)

$$\frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} \rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})}$$

$$\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Dann: kte Potenz ↘  $n^k$

↗  $X^n$   $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

exponentielles Wachstum

**Beweis:** Es ist  $|x| = 1 + t$  für  $t > 0$ .

Für  $n > k$ :

$$\begin{aligned}
 |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\geq 0} \\
 &\stackrel{j \geq k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\
 &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\
 \Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| &= \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{n^k (k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

d) Sei  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$  ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\
 &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6} 0
 \end{aligned}$$

## 1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

1.  $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2.  $(a_n), (c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow N_a, N_c : \bullet |a_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\
 \bullet |c_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c
 \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned}
 |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
 \forall n \geq k &\quad \downarrow \\
 \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
 &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square
 \end{aligned}$$

### 1.16 Beispiele

a)  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , denn:

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$  (1.14/c),

gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits  $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1-\epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , ist

$$1+\epsilon > \sqrt[n]{n} > 1-\epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b)  $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

Sei  $x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1$$

### 1.17 Satz

Sei  $(a_n)$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow a$ . Dann:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$  mit  $q > 0$  (ohne Beweis)

### 1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

a)  $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$

b)  $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

c)  $a_n \sim b_n$ , falls  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

$\mathcal{O}, o$  heißen Landau-Symbole

### 1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$  – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$  – Menge aller Nullfolgen

### 1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)$  heißt

- a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_{n+1} \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$  (monoton wachsend)

- b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_{n+1} \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \searrow$  (monoton fallend)

### 1.21 Beispiele

- $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  streng monoton fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = 1$  monoton steigend und fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton

### 1.22 Definition

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  von oben (unten) beschränkt ist.

### 1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei  $(a_n)$  reelle Folge:

- Falls  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls  $(a_n) \searrow$  und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

**Beweis:**

- Sei  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt  
 und seien  $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  und  $\epsilon > 0$ .  
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $a$  kleinste obere Schranke  
 $\Rightarrow a - \epsilon$  keine obere Schranke.  
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$   
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N \end{matrix} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$   
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
- analog  $\square$

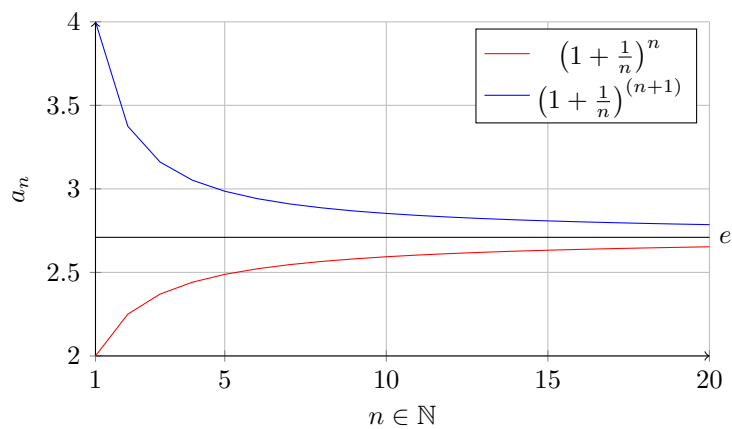
## 1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

## 1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$



- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{n+1}{n})$  ist monoton.

Zeigen dazu:  $a_n \geq a_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n-1} \\ &= \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left( \frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \left( \frac{n}{n-1} \right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1+n} = \binom{n+1}{n+1}$  ist monoton fallend.

Zeige dazu:  $b_n \leq b_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left( 1 + \frac{1}{n^2-1} \right)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$\text{Wegen } \left( 1 + \frac{1}{n^2-1} \right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl  $e$  bezeichnet. Dazu zunächst:

## 1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind  $(a_n), (b_n)$  konvergent und besitzen den selben Limes.

**Beweis:** Es ist  $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &(a_n) \text{ hat obere Schranke } b_1 \\ &(b_n) \text{ hat untere Schranke } a_1 \end{aligned}$$

$$\stackrel{1.23}{\Rightarrow} (a_n), (b_n) \text{ konvergent.}$$

Da  $(b_n - a_n)$  Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich.  $\square$

### 1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$  (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

### 1.29 Bemerkung

$(a_n)$  konvergent  $\stackrel{1.8}{\Rightarrow} (a_n)$  beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B. besitzt jedoch  $a_n = (-1)^n$  zwei konvergente Teilfolgen mit Limes  $+1$  und  $-1$ .

### 1.30 Definition: Teilfolge

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 1.32 Bemerkung

$(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  Jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

### 1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.



### 1.34 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat zwei Häufungspunkte:  $-1$  und  $1$ .

### 1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  besitzt konvergente Teilfolge

**Beweis:** Konstruiere konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ( $K$  geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$ : Halbiere  $[A_0, B_0]$ 
  - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir  $a_{n_1}$ , die Intervallhälfte aus der es stammt  $[A_1, B_1]$ .

- $k=2$ : Halbiere  $[A_1, B_1]$ . Wende obiges Verfahren an, um  $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$  zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da  $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \lim_{1.15 \quad k \rightarrow \infty} (a_{n_k}) \quad \square$

### 1.36 Definition: Limes inferior/superior

$(a_n)$  reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von  $(a_n)$  :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von  $(a_n)$  :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

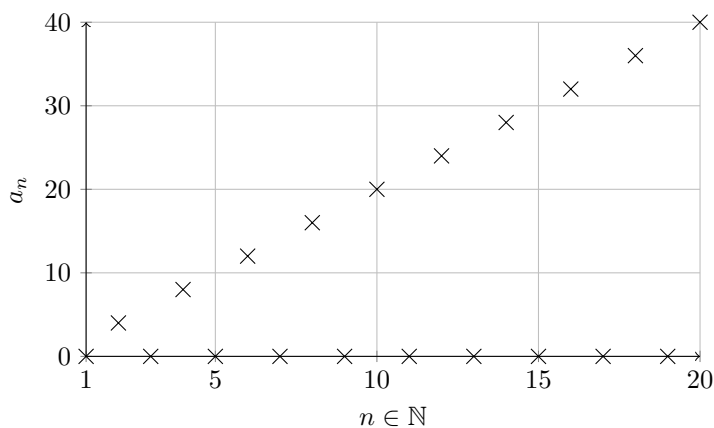
Ist  $(a_n)$  nicht beschränkt, setzt man

$$\begin{aligned} \bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} & \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \forall n \geq N \end{cases} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty} \\ \bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} & \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \forall n \geq N \end{cases} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty} \end{aligned}$$

### 1.37 Bemerkung

- a)  $a_n \rightarrow \pm\infty$  in obiger Definition bedeutet, dass  $(a_n)$  (bestimmt) gegen  $\pm\infty$  divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)
- z.B. divergiert  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht bestimmt,  
aber  $(a_n)$  mit  $a_n = n$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$
- b)  $-\infty, \infty$  sind keine reellen Zahlen. Man setzt  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$   
mit  $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- c) In  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt jede Folge sowohl  $\limsup$  als auch  $\liminf$ .

### 1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

### 1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei  $(a_n)$  eine Folge.  $(a_n)$  heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

## 1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$   
 $(a_n)$  konvergiert  $\Leftrightarrow (a_n)$  ist Cauchy-Folge

**Beweis:**  $(\Rightarrow)$  : klar

$(\Leftarrow)$  :

1. Zeige  $(a_n)$  beschränkt

Sei  $(a_n)$  C-F:  $\Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1$   
 $\forall n, k \geq R$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt und besitzt

konvergente Teilfolge  $(a_{n_j})$  (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2.  $(a_n)$  ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, k \geq M$$

$$\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall j \geq J$$

Wähle  $a_{n_j}$  so, dass  $j \geq J$  und  $n_j \geq M$ .

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

## 1.41 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  ist divergent,

denn  $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$

$$= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$$

z.B ist für  $\epsilon = 1$   $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

was im Widerspruch zu 1.39 steht.

## 1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  heißt Kontraktion, falls  $\alpha \in (0, 1)$  existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B:  $f(x) = \frac{1}{2}x$  ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{2}$ .

### 1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $f[a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Kontraktion. Dann:

1.  $f$  hat genau einen Fixpunkt  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ , d.h.  
es gilt genau ein  $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert  $X_0 \in [a, b]$  konvergiert  
die durch  $X_n := f(X_{n-1})$  definierte Folge  $(X_n)$  gegen  $\hat{x}$ .

(Ohne Beweis)

## 2 Reihen

### Grundbegriffe und Beispiele

#### 2.1 Definition: Reihe

1. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge. Die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ .

Die Zahl  $S_k \in \mathbb{R}$  heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls  $(S_k)$  gegen  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen  $s$ .  
Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Ansonsten heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_0}$  die Reihe  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  definieren.
4.  $\sum_{i=1}^{\infty}$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

#### 2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$  bestimmt gegen  $+\infty(-\infty)$  divergiert, so schreiben wir:  $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

## 2.3 Beispiele

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  ist divergent.

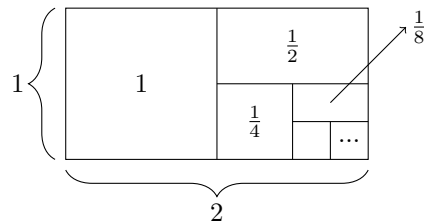
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion:  $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$  divergent.

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  konvergent



und  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) Geometrische Reihe

Für  $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$  gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ,

denn  $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da  $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für  $|q| < 1$  (1.10), folgt  $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ .

Andererseits ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergent für  $|q| \geq 1$  (2.9)

- In Beispiel d) ist  $q = \frac{1}{2}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

- $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

**Achtung bei Index-Verschiebung!**

## 2.4 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b$

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

## 2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist  $(S_n)$  mit  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  nach oben beschränkt und  $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

## 2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\underbrace{|a_n + \dots + a_k|}_{< \epsilon} \quad \forall k \geq n \geq N$$

$$\left[ = |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right]$$

(Folgt aus 1.40)

## 2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  auch konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0$ .  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N$ .

Da  $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$ ,  
 ist 2.6 für  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  erfüllt.

## 2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

**Beweis:** Sei  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{2.1} \left( \sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[ \begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \quad (1.13) \right],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \quad (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k |a_i| \right) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

## 2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent, so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.  
 D.h. Ist  $(a_i)$  keine Nullfolge, so divergiert  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .

**Beweis:**  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle  $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$  Nullfolge.  $\square$

## 2.10 Majorantenkriterium

Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$ .  
 Ist dann  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\underbrace{\leq |b_n + \dots + b_k|}_{0 \leq a_1 \leq b_i \quad \forall i} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

## 2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  divergent, so ist auch  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  divergent.

## 2.12 Beispiele

$$\text{a) } \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}} \text{ ist divergent. (2.9)}$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} \text{ ist divergent, da } 0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}} \text{ und } \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}} \text{ divergent. (2.11)}$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} \text{ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)}$$

$$\text{d) } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \text{ (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit}$$

## 2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)$  monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$  konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

$$\begin{aligned} \bullet (A_n) \nearrow: A_{n+1} - A_n &= \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} \\ &= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0, \text{ da } (a_n) \searrow \\ \bullet \text{ Analog: } (B_n) \searrow \bullet B_n - A_n &= a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \bullet B_n - A_n &= a_{2n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$(A_n), (B_n) \text{ konvergiert mit } \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i \text{ konvergent.}$$

## 2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$ . Dann:



- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$  keine allgemeine Aussage für  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  möglich.

**Beweis:**

Sei  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$   
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$   
da  $a$  größter HP von  $\sqrt[n]{|a_n|}$   
 $\Rightarrow |a_n| \leq (a + \epsilon)^n \quad \forall n \geq N$   
 $\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a + \epsilon)^n}_{< 1}$  (geometrische Reihe)  
ist konvergente Majorante der Reihe  $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ .  
Damit konvergiert auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} |a_k|}_{< \infty} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$
- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  unendlich oft  
 $\Rightarrow |a_n| > 1$  unendlich oft  
 $\Rightarrow (a_n)$  keine Nullfolge  $\xrightarrow{2.9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.  $\square$

## 2.15 Beispiele

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{k^3}{3^k}}_{a_k}$  konvergent, da  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n^3})}{3} = \frac{1}{3} < 1$
- b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  (allgemeine harmonische Reihe) liefert  
 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n^\alpha})} = 1 \quad (\alpha > 0) \rightarrow$  keine Aussage möglich.

## 2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leadsto$  keine allgemeine Aussage möglich

**Beweis:**

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq a \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \dots \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq N$$

Da  $\sum_{n=N}^{\infty} a^{n-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum_{n=N}^{\infty} a^n$  konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit

Majorantenkriterium, dass  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$  und somit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergent ist.

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ keine Nullfolge} \quad \square$$

## 2.17 Beispiele

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \text{ konvergiert, da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1 \end{aligned}$$

$$\text{b) Wie in 2.15b ist für } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ keine Aussage möglich,}$$

$$\text{da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{und somit } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

## 2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  für  $0 < \alpha < 1$  divergiert und für  $\alpha > 1$  konvergiert.

## 2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kann Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

$$\bullet 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_6 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_9 \pm \dots$$

$$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

## 2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , falls eine bijektive Abbildung  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

## 2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  einer absolut konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  in  $\mathbb{R}$  ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  (ohne Beweis)

## 2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , mit  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$  (ohne Beweis)

# 3 Potenzreihen

## 3.1 Grundbegriffe und Beispiel

- a)  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist für  $|x| < 1$  absolut konvergent (geometrische Reihe),  
d.h. für  $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$ .

Konvergenzintervall (3.5)

Für  $|x| > 1$  ist  $P(x)$  divergent.

- b)  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$  ist für  $x \neq 1$  divergent:

Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

### 3.2 Definition: Potenzreihen

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  reelle Folge und seien  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$  und Koeffizienten  $a_k$

### 3.3 Bemerkung

- a) In Bsp 3.1a) ist  $x_0 = 0$  und  $a_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$ .  
In 3.1b) ist  $x_0 = 1$  und  $a_k = k!$
- b) In 3.1a) konvergiert  $P(x)$  für  $x \in (-1, 1)$ , in 3.1b) lediglich für  $x = x_0 = 1$ .  
Es wird sich herausstellen, dass es für eine Potenzreihe  $P(x)$  mit Zentrum  $x_0$  einen Konvergenzradius  $\rho \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$  gibt (3.5), so dass  $P(x)$  absolut konvergent für  $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ , (d.h.  $|x - x_0| < \rho$ ) und divergent für  $|x - x_0| > \rho$  ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

### 3.4 Satz

Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ .

Dann:

- 1.  $P(x_1)$  konvergent  $\Rightarrow P(x)$  ist absolut konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
- 2.  $P(x_1)$  divergent  $\Rightarrow P(x)$  ist divergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

**Beweis:**

- 1.  $P(x)$  konvergent  $\xRightarrow{2.9} (a_k(x_1 - x_0)^k)$  Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k(x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq K \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1}$$

$$\xRightarrow{2.10} P(x) \text{ absolut konvergent für } |x - x_0| < |x_1 - x_0| \text{ (Majorantenkriterium)}$$

- 2. Sei  $P(x_1)$  divergent und  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ . Wäre  $P(x)$  konvergent, so wäre wegen 1. auch  $P(x_1)$  konvergent.  $\nmid$

Also:  $P(x)$  divergent  $\square$

### 3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei  $P(x)$  Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$ .

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von  $P(x)$ .

Für  $\rho \in \mathbb{R}_+$  heißt  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  Konvergenzintervall von  $P(x)$ .

Ist  $\rho = \infty$ , so konvergiert  $P(x) \forall x \in \mathbb{R}$  (3.7)

### 3.6 Beispiel

- a) Für  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist  $\rho = 1$ , denn  $(-1, 1)$  ist Konvergenzintervall von  $P(x)$ ,  $x_0 = 0$
- b) Für  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$  ist  $\rho = 0$ , denn  $P(x)$  ist nur für  $x = x_0 = 1$  konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

### 3.7 Korollar

Sei  $P(X)$  Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$  und Konvergenzradius  $\rho$ .

Dann:

1.  $P(X)$  absolut konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \rho$ .
2.  $P(X)$  divergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > \rho$ .
3. [Falls  $|x - x_0| = \rho \leadsto$  keine allgemeine Aussage möglich]

## Berechnung von Konvergenzradien

### 3.8 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ .  $\rho$  sei der Konvergenzradius von

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

**Beweis:** Wurzelkriterium:  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{< 1} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  konvergiert

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{> 1} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  divergiert

$\Rightarrow \rho$  Konvergenzradius von  $P(x)$

### 3.9 Beispiel

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  konvergent?

$$\bullet \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$\Rightarrow P(x)$  konvergent für  $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$  und divergiert für  $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für  $x = \pm 1$

$$\bullet x = 1: \quad P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent (harmonische Reihe)}$$

$$\bullet x = -1: \quad P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= - \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$  konvergent

Insgesamt:  $P(x)$  konvergent für  $[-1, 1)$ , divergent für  $|x| > 1$  und  $x = 1$ .

### 3.10 Satz: Formel von Euler

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ ,

$\rho$  Konvergenzradius von  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

Ist  $\left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right)_{k \geq 0}$  konvergent oder bestimmt gegen  $+\infty$

divergent, so ist  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

**Beweis:** Wende auf  $P(x)$  das Quotientenkriterium 2.16 an.  $\square$

### 3.11 Beispiel: Exponentialfunktion

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$$

Man definiert:  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1.  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2.  $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$  (Eulersche Zahl)

Aus 2.:  $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

#### Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$ ?

1. Definiere:  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (1.28)
2. Zeige:  $\exp(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für  $\exp(x)$  gelten:  
 $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (hier nicht)
4. Definiere:  $e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \exp(n) = e^n \quad | \sqrt[m]{\phantom{x}}$   
 $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird  $e^x$  dann mit Hilfe von  $e^x = \exp(x)$  berechnet.

So kann auch ein Computer z.B.  $e^\pi$  berechnen, indem  $\exp(\pi)$  ermittelt wird.

### 3.12 Bemerkung

- a) Außer der Funktion  $e^x$  gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B wird in Mathe III gezeigt, dass

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für  $\rho \neq \infty$  müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.