Skript Mathe 2

4. Juni 2018

Existenz von a bedeutet: Wenn x nahe genug bei X_0 ist, so ist auch $f(x)$ sehr nahe an a.

Beweis:

$(\Leftarrow)$: Gelte (*). Sei (X_n) in $D \setminus \{X_0\}, X_n \to X_0$. Z.z.: $f(X_n) \to a$

Da $X_n \to X_0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|X_n - X_0| < \delta \quad \forall n \geq N$ (1.5)
$(*) \Rightarrow |f(X_n) - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$
$\underset{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$

$(\Rightarrow)$: Mit Kontraposition: Gelte (*) nicht.
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $X_n \in D \setminus \{X_0\}$ existiert mit $|X_n - X_0| < \delta$ und $|f(X_n) - a| \geq \epsilon$.
$\underset{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \not\to n$ für $X_n \to X_0$. $\square$

0.1 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es ist $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = f(X_0)$.

Prüfe mit ϵ–δ–Kriterium:

Sei $\epsilon > 0$. Für $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$ ist

$|f(x) - f(X_0)| = ax + b - aX_0 - b = |a| \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{<\delta} < |a| \cdot \dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$

0.2 Definition: Grenzwert II

Sei X_0 HP von $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

1. f hat in X_0 den Grenzwert $+\infty$ $(-\infty)$ $:\Leftrightarrow f(X_n) \to +\infty(-\infty)$ für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$

2. Ist $\sup D = \infty$ $(\inf D = -\infty)$, so hat $f(x)$
   Limes $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ $:\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge in D mit $X_n \to \infty$ $(X_n \to -\infty)$

0.3 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, da für jede Nullfolge (X_n) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\dfrac{1}{\underbrace{{X_n}^2}_{=0}} \xrightarrow[n \to 0]{} +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, da für jedes (X_n) in $\mathbb{R}$ mit $X_n \to \infty$: $\dfrac{1}{{X_n}^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

b) Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^m} = \infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \exp(x) = 0$

Beweis:

1. $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{X^{m+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \geq 0$
   $\Rightarrow \dfrac{\exp(x)}{x^m} \geq \dfrac{x^{\cancel{m}+1}}{(k+1)x^{\cancel{m}}} = \dfrac{x}{(k+1)!} \to \infty$
   für $x \to \infty$
2. $x^m \cdot \exp(x) = \dfrac{(-1)^m (-x)^m}{\exp(-x)} = (-1)^m \cdot \dfrac{1}{\boxed{\dfrac{\exp(-x)}{(-x)^m}} \underset{1.}{\to} \infty}$
   für $x \to -\infty$

0.4 Definition: Rechts–/Linksseitiger Grenzwert

1. Ist X_0 HP von $D \cap (X_0, \infty)$, so hat f in X_0 den rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (X_0, \infty)$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to {X_0}^+} f(x) = a$

2. Ist X_0 HP von $D \cap (-\infty, X_0)$, so hat f in X_0 den linksseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (-\infty, X_0)$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to {X_0}^-} f(x) = a$

0.5 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, da $f(X_n) = 1 \to 1$
  für (X_n) in $(0, \infty)$ und $(X_n) \to 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, da $f(X_n) = -1 \to -1$
  für (X_n) in $(-\infty, 0)$ und $(X_n) \to 0$

0.6 Bemerkung

Aus 5.11 ist ersichtlich: Der Grenzwert einer Funktion f in X_0 existiert $\Leftrightarrow$ Der Links– und Rechtsseitige Grenzwert von f in X_0 existieren und übereinstimmen.

0.7 Beispiele

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$, aber $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht,
   da $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim_{x \to \infty} x = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$

0.8 Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

a) f heißt stetig in $X_0 \in D$, falls

$$\underbrace{\lim_{x \to X_0} f(x)}_{A} \underbrace{= f(X_0)}_{B}$$

b) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $X_0 \in D$ stetig ist.

0.9 Bemerkung

a) In 5.15a prüft man zwei Bedingungen: A) Der Grenzwert von f in X_0 existiert und B) ist gleich $f(X_0)$.

b) Wegen 5.6 ist f in $X_0 \in D$ stetigt $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D : |x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(X_0)| < \epsilon$$

0.10 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist in jedem $X_0 \in D$ stetig:

$\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = f(X_0)$, da für (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ gilt:

$$\underbrace{f(X_n) = X_n^2 \to {X_n}^2 \to {X_0}^2}_{A} \underbrace{= f(x)}_{B}$$

b) Wegen 5.4 ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ stetig.

0.11 Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

Gibt es ein k > 0 mit $|f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |x - X_0| \quad \forall x \in D$,
so ist f stetig in X_0.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{\delta}$

$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |\underbrace{x - X_0}_{<\delta}| < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$