Skript Mathe 2

25. April 2018

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

   und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.

   $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a kleinste obere Schranke

   $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.

   $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$

   $\underset{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$

   $\Rightarrow a_n \to a$
2. analog $\quad \square$

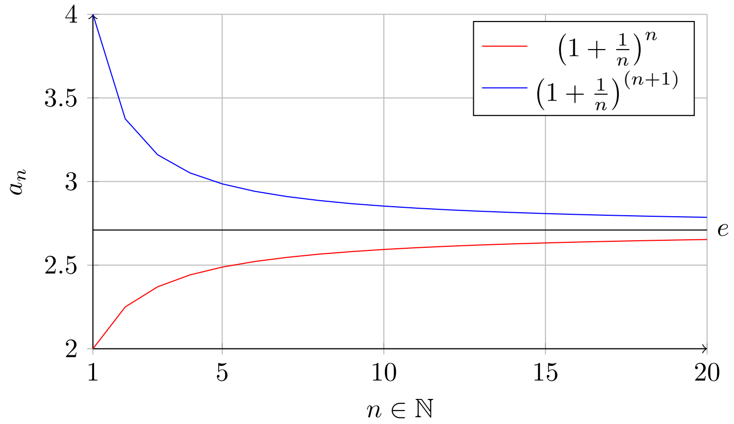
0.1 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

0.2 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

  Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1\right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \underset{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}{}_{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

$$\text{Zeige dazu: } b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1\right)$$

$$\text{Analog: } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \underset{1.24}{\geq} 1+\frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \geq \frac{1+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \quad (?)$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

0.3 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (a_n) hat obere Schranke b_1
(b_n) hat untere Schranke a_1
$\underset{1.23}{\Rightarrow}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. $\square$

0.4 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underline{\leq} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot a_n \underset{1.13/3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

0.5 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)$$

0.6 Bemerkung

(a_n) konvergent $\underset{1.8}{\Rightarrow}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**
z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1.

0.7 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0.8 Beispiel

$a_n = (-1)^n$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k+1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

0.9 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

0.10 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

0.11 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1.

0.12 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\underline{k=1}$: Halbiere $[A_0, B_0]$
  - Falls in der linken Folgenhälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

  Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.
- $\underline{k=2}$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \to 0$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim_{n\to\infty} A_k \underset{1.15}{=} \lim_{k\to\infty} (a_{n_k})$ $\square$