Skript Mathe 2

30. April 2018

0.1 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von $(a_n) : \limsup_{n\to\infty}(a_n),\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$
- Limes inferior von $(a_n) : \liminf_{n\to\infty}(a_n),\ \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

- $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{-\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty} \end{cases}$$
- $$\underline{\lim_{n\to\infty}} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{+\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} \end{cases}$$

0.2 Bemerkung

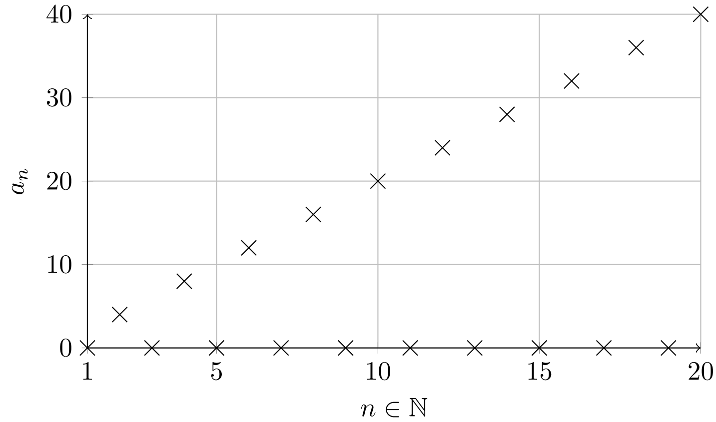
a) $a_n \to \pm\infty$ in obriger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)

   z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
   aber (a_n) mit $(a_n) = n$ divergiert bestimmt gegen ∞

b) $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
   mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl $\limsup$ als auch $\liminf$.

0.3 Beispiel



$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & \text{n gerade} \\ 2n + 1, & \text{n ungerade} \end{cases}$

$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$

0.4 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)
$:\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \ \forall n, k \geq M$

0.5 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge <u>in $\mathbb{R}$</u>
(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge

Beweis: $(\Rightarrow)$: klar
$(\Leftarrow)$:

1. Zeige (a_n) beschränkt

   Sei (a_n) C-F: $\Rightarrow \quad \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1$
   $\forall n, k \geq R$

   $\underset{k=R}{\Rightarrow} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq \mathbb{R}$
   $\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$
   $\Rightarrow \min\{a_r - 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \leq a_n \leq$
   $\max\{a_R + 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt und besitzt
   konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit
   $a = \lim\limits_{j \to \infty} a_{n_j}$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

   Sei $\epsilon > 0$

   $\Rightarrow$
   - $\exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M$
   - $\exists J \in \mathbb{N} : \left|a_{n_j} - a_k\right| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall j \geq J$

   Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

   $\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_j}\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_j} - a\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$

0.6 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right|$
$= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1 \quad |a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

0.7 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ heißt Kontradiktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

0.8 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \to [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
   es git genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x} = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
   die durch $X_n := f(X_n + 1)$ definierte Folge (X_n) gegen $\hat{x}$.

(Ohne Beweis)

1 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

1.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \delta_1 + ... + \delta_k$$

heißt (undendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$.
Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.