

Skript Mathe 2

16. April 2018

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen (\mathbb{N}) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n : n -tes Folgenglied

n : Index

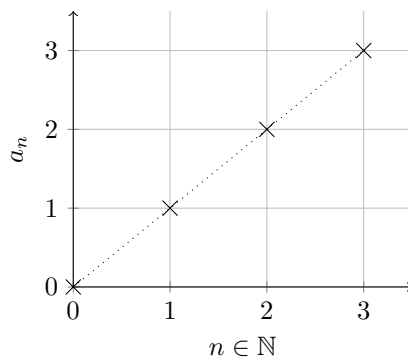
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1 , sondern z.B: a_7 .

Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ oder (a_n)

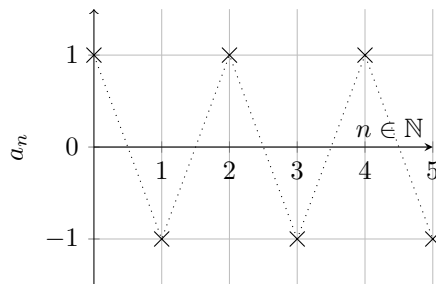
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

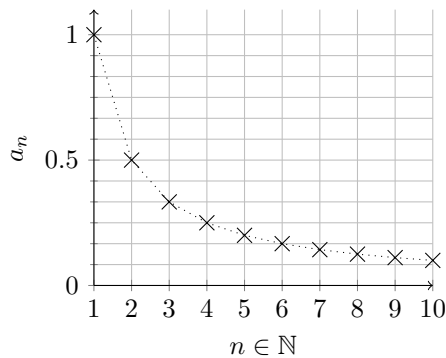
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



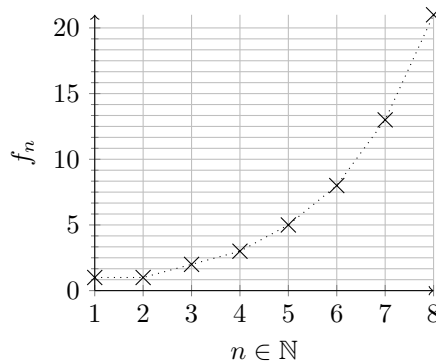
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$

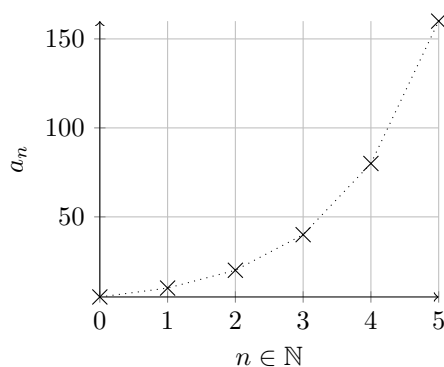


f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen) q : Wachstumsfaktor
 X_0 : Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n \cdot X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

- (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.
- (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

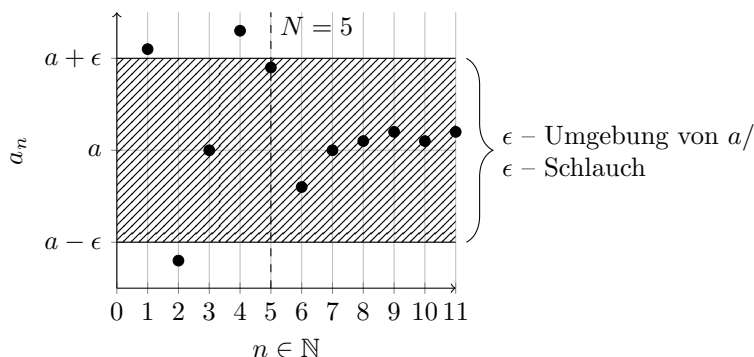
Kurz:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ oder $a_n \rightarrow a$.
- c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

- a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

- b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left| \frac{n+1}{3n} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$