Skript Mathe 2

25. Juni 2018

<u>1. Fall</u>: Beide Extrema werden auf dem Rand angenommen:
$f(a) = f(b) \Rightarrow m = M$
$\Rightarrow f$ konstant $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$

<u>2. Fall:</u> Ein Extremum wird auf dem Rand angenommen:
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(\xi)$ Extremum $\underset{6.18}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0.$

3. Es ist $g(b) \neq g(a)$, denn sonst gäbe es ein $x \in (a,b)$ mit $g'(x) = 0$ (Rolle)

   Hilfsfunktion: $h(x) = f(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$

   Es ist $h(b) - h(a) = 0$. h stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b).

   $$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0$$
   $$\Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

1. Folgt aus 3. für $g(x) = x$.

0.1 Monotoniekriterium

Sei $f : [a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

1. $f'(x) \underset{(\le)}{\ge} 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ monoton $\underset{\text{(fallend)}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$
2. $f'(x) \underset{(<)}{>} 0 \quad \forall x \in (a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ streng monoton $\underset{\text{(fallend)}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$
3. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ konstant auf $[a,b]$

Beweis:

1. $(\Rightarrow)$: Sei $a \le x_1 < x_2 \le b$

   $$\underset{6.20.1}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\ge 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \ge 0$$

   $$\Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

$(\Leftarrow)$: Sei f monoton wachsend auf $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b)

$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Da $\dfrac{(f(x+h) - f(x)) \geq 0}{h > 0} \geq 0$ für $h < 0$ und
$\dfrac{(f(x+h) - f(x)) \leq 0}{h < 0} \leq 0$ ist $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

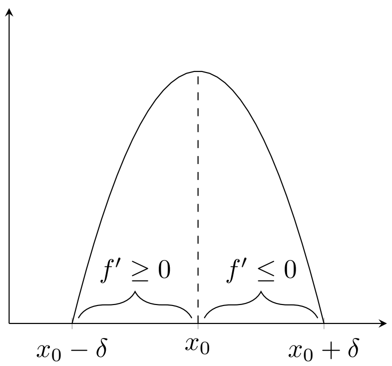
2. + 3. analog $\square$

Bemerkung zu 2.: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend aber $f'(0) = 0$

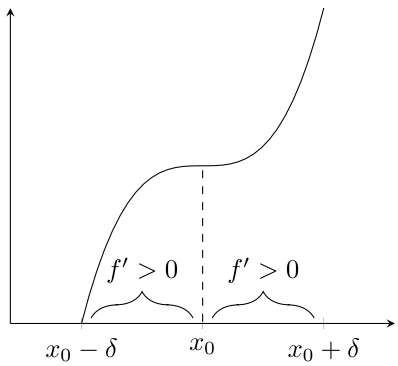
0.2 Satz: Hinreichende Bedingung für lokale Extrema I

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I, f'(x_0) = 0$

1.



2.



1. $f'(y) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall (x_0 - \delta, x_0)$ und
   $f'(y) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall (x_0, x_0 + \delta)$ für ein $\delta < 0$

   $\Rightarrow f$ hat ein lokales Minimum (Maximum) in x_0.
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

   [1. hat einen Vorzeichenwechsel, 2. nicht]

Beweis: Für lokales Minimum in x_0:

Z.z: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Da $x \in U \setminus x_0 \underset{6.20.1}{\Rightarrow} \exists \xi$ zwischen x und x_0;
$\xi \neq x_0$, so dass $f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0)$ (*)

<u>1. Fall</u>: $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\Rightarrow x - x_0 < 0, f'(\xi) \leq 0$
$\underset{(*)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

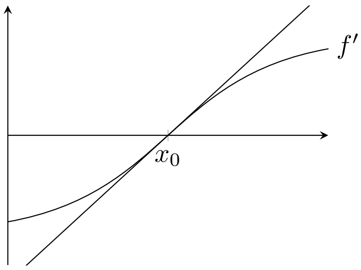
2. Fall: $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\Rightarrow x - x_0 > 0, f'(\xi) \geq 0$$
$$\underset{(*)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

Insgesamt: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U$

(Rest analog) $\square$

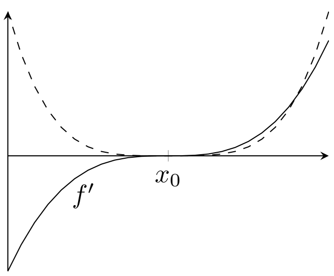
0.3 Bemerkung



Vorzeichenwechsel von - nach +
$\Rightarrow f$ hat Minimum in x_0

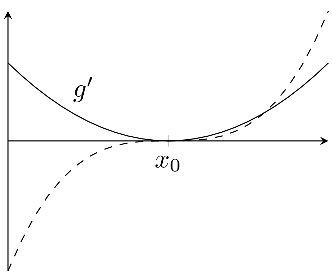
f' weist in x_0 einen Vorzeichenwechsel auf, wenn die Steigung von f' in x_0 positiv (negativ) ist, d.h. wenn $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Wenn $f''(x) = 0$, ist über einen Vorzeichenwechsel keine Aussage möglich.



$f''(x_0) = 0$ und VZW

$$f(x) = x^4$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = 0$$



$g''(x_0) = 0$ und kein VZW

$$g(x) = x^3$$
$$g'(0) = 0$$
$$g''(0) = 0$$

0.4 Satz: Hinreichende Bedingung für Extrema II

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$ 2-mal differenzierbar.

$(f'(x_0) = 0, f''(x_0) \underset{(<)}{>} 0) \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum (Maximum)

Beweis: Für Minimum:

Es ist $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h} = f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow \exists \delta < 0 : \dfrac{f'(x_0+h)}{h} > 0 \quad \forall\ |h| < \delta, h \neq 0 \qquad (*)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Fall}: & -\delta < h < 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0+h) < 0 \\ \text{2. Fall}: & 0 < h < \delta \underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0+h) > 0 \end{array}\right\} \text{Vorzeichenwechsel}$$

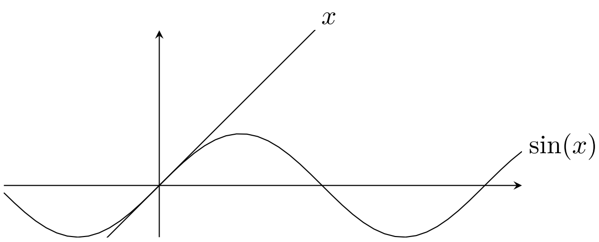
$f'(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel $\underset{6.22}{\Rightarrow} f$ hat ein lokales Minimum in x_0.

Rest analog $\square$

Die Regeln von L'Hospital (1661–1704)

Problem: Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0$ usw...

Beispiel: $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} ?$



$f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ haben in $x = 0$
die selbe Tangente $(t(x) = x) \Rightarrow f, g$ konvergieren
mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0, wenn $x \to 0$.

$\Rightarrow \dfrac{\sin(x)}{x} \to 1$ für $x \to 0$.