

Skript Mathe 2

4. Juni 2018

Existenz von a bedeutet: Wenn x nahe genug bei X_0 ist, so ist auch $f(x)$ sehr nahe an a .

Beweis:

(\Leftarrow) : Gelte (*). Sei (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$, $X_n \rightarrow X_0$. Z.z.: $f(X_n) \rightarrow a$

Da $X_n \rightarrow X_0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|X_n - X_0| < \delta \quad \forall n \geq N$ (1.5)

$(*) \Rightarrow |f(X_n) - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

$\xRightarrow[1.5]{\Rightarrow} f(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

(\Rightarrow) : Mit Kontraposition: Gelte (*) nicht.

$\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $X_n \in D \setminus \{X_0\}$ existiert mit $|X_n - X_0| < \delta$ und $|f(X_n) - a| \geq \epsilon$.

$\xRightarrow[1.5]{\Rightarrow} f(X_n) \not\rightarrow a$ für $X_n \rightarrow X_0$. \square

0.1 Beispiel

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es ist $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0)$.

Prüfe mit ϵ - δ -Kriterium:

Sei $\epsilon > 0$. Für $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$ ist

$$|f(x) - f(X_0)| = ax + b - aX_0 - b = |a| \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

0.2 Definition: Grenzwert II

Sei X_0 HP von $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f hat in X_0 den Grenzwert $+\infty$ ($-\infty$) $:\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow +\infty$ ($-\infty$) für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$)

2. Ist $\sup D = \infty$ ($\inf D = -\infty$), so hat $f(x)$ Limes $a \in \mathbb{R}$ für $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow -\infty$) $:\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge in D mit $X_n \rightarrow \infty$ ($X_n \rightarrow -\infty$)

0.3 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, da für jede Nullfolge (X_n)
in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\underbrace{\frac{1}{X_n^2}}_{=0} \xrightarrow{n \rightarrow 0} +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, da für jedes (X_n)
in \mathbb{R} mit $X_n \rightarrow \infty$: $\frac{1}{X_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

b) Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp(x) = 0$

Beweis:

1. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \quad \forall x \geq 0$
 $\Rightarrow \frac{\exp(x)}{x^m} \geq \frac{x^{m+1}}{(m+1)x^m} = \frac{x}{(m+1)!} \rightarrow \infty$
für $x \rightarrow \infty$

2. $x^m \cdot \exp(x) = \frac{(-1)^m (-x)^m}{\exp(-x)} = (-1)^m \cdot \frac{1}{\boxed{\frac{\exp(-x)}{(-x)^m}} \xrightarrow{1.} \infty}$
für $x \rightarrow -\infty$

0.4 Definition: Rechts-/Linksseitiger Grenzwert

1. Ist X_0 HP von $D \cap (X_0, \infty)$, so hat f in X_0 den rechtsseitigen Grenzwert
 $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (X_0, \infty)$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0^+} f(x) = a$

2. Ist X_0 HP von $D \cap (-\infty, X_0)$, so hat f in X_0 den linksseitigen Grenzwert
 $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (-\infty, X_0)$ mit $X_n \rightarrow X_0$.

Schreibweise: $\lim_{x \rightarrow X_0^-} f(x) = a$

0.5 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, da $f(X_n) = 1 \rightarrow 1$
für (X_n) in $(0, \infty)$ und $(X_n) \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, da $f(X_n) = -1 \rightarrow -1$
für (X_n) in $(-\infty, 0)$ und $(X_n) \rightarrow 0$

0.6 Bemerkung

Aus 5.11 ist ersichtlich: Der Grenzwert einer Funktion f in X_0 existiert \Leftrightarrow Der Links- und Rechtsseitige Grenzwert von f in X_0 existieren und übereinstimmen.

0.7 Beispiele

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$, aber $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht,
da $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

0.8 Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

- a) f heißt stetig in $X_0 \in D$, falls

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

- b) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $X_0 \in D$ stetig ist.

0.9 Bemerkung

- a) In 5.15a prüft man zwei Bedingungen: A) Der Grenzwert von f in X_0 existiert und B) ist gleich $f(X_0)$.
- b) Wegen 5.6 ist f in $X_0 \in D$ stetig \Leftrightarrow

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(X_0)| < \epsilon$$

0.10 Beispiele

- a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist in jedem $X_0 \in D$ stetig:

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0), \text{ da für } (X_n) \text{ in } D \setminus \{X_0\} \text{ gilt:}$$

$$\underbrace{f(X_n) = X_n^2 \rightarrow X_n^2 \rightarrow X_0^2}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

b) Wegen 5.4 ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ stetig.

0.11 Satz

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

Gibt es ein $k > 0$ mit $|f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |x - X_0| \quad \forall x \in D$,
so ist f stetig in X_0 .

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\epsilon}{k}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$