Skript Mathe 2

14. Mai 2018

Berechnung von Konvergenzradien

0.1 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}$ und $\lambda := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. ρ sei der Konvergenzradius von $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{, falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & \text{, falls } \lambda = \infty \\ \infty & \text{, falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

Beweis: Wurzelkriterium: $\lambda := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x-x_0|^k} = \lambda \cdot |x-x_0|$

- $\underbrace{\lambda \cdot |x-x_0}_{\text{D.h. } P(x) \text{ konvergiert}}| < 1 \Leftrightarrow |x-x_0| < \dfrac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$
- $\underbrace{\lambda \cdot |x-x_0}_{\text{D.h. } P(x) \text{ divergiert}}| > 1 \Leftrightarrow |x-x_0| > \dfrac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$

$\Rightarrow \rho$ Konvergenzradius von $P(x)$

0.2 Beispiel

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergent?

- $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\dfrac{1}{k}\right|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$

  $\underset{3.8}{\Rightarrow} \rho = \dfrac{1}{\lambda} = 1$

  $\Rightarrow P(x)$ konvergent für $x \in \overbrace{(-1,1)}^{x_0-\rho, x_0+\rho}$ und divergiert für $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für $x = \pm 1$

- $x = 1:$ $\quad P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe)
- $x = -1:$ $\quad P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1})}{k+1}$

$$= -\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$ konvergent

Insgesamt: $P(x)$ konvergent für $[-1, 1)$, divergent für $|x| > 1$ und $x = 1$.

0.3 Satz: Formel von Euler

Sei $(a_k)_{k>0}$ Folge in $\mathbb{R}, a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$,
ρ Konvergenzradius von $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Ist $\left(\left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \right)_{k \geq 0}$ konvergent oder bestimmt gegen $+\infty$
divergent, so ist $\rho = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

Beweis: Wende auf $P(x)$ das Quotientenkriterium 2.16 an. $\square$

0.4 Beispiel: Exponentialfunktion

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergent $\forall x \in \mathbb{R}:$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{\cancel{k!}} \cdot \frac{(k+1)\cancel{!}}{1} = k + 1 \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$$

$\underset{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$

Man definiert: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1. $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2. $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl)

Aus 2.: $\qquad e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$

Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$?

1. Definiere: $\quad e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (1.28)
2. Zeige: $\quad \exp(1) = e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für $\exp(x)$ gelten:

   $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (hier nicht)
4. Definiere: $\quad e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzen überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = exp(n) = e^n \quad \Big|\ \sqrt[n]{\ }$

  $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird e^x dann mit Hilfe von $e^x = \exp(x)$ berechnet.

So kann auch ein Computer z.B: e^π berechnen, indem $\exp(\pi)$ ermittelt wird.

0.5 Bemerkung

a) Außer der Funktion e^x gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B wird in Mathe III gezeigt, dass

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für $\rho \neq \infty$ müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.