Skript Mathe 2

15. Mai 2018

1 Reelle Funktionen

Grundbegriffe und Beispiele

1.1 Definition: Abbildung

Eine Abbildung $f : A \to B$ besteht aus

- Dem Definitionsbereich A (Menge A)
- Dem Bildbereich B (Menge B)
- Einer Zuordnungsvorschrift f, die jedem $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Man schreibt $b = f(a)$, nennt b Bild/Funktionswert von a und a (ein) Urbild von b.

Notation: $f : A \to B, a \mapsto f(a)$

$$\begin{aligned} A &= \text{Menge aller Studenten von Mathe II} \\ B &= \{\text{Raucher, Nichtraucher}\} \\ f &= \text{Zuordnungsvorschrift, die jedem Studenten zuordnet,} \\ &\quad\ \text{ob er/sie raucht/nicht raucht} \end{aligned}$$

1.2 Definition: Reelle Funktion

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine
Abbildung $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

a) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$
Summe/Differenz von f und g

b) $(f \cdot g) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
Produkt von f und g

c) Für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ heißt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

Quotient von f und g

d) Komposition/Verknüpfung

$f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$
$f \circ g : D_f \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) := g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(D_f) \subseteq D_g \arrow[r, "g"] & g(f(D_f)) \subseteq \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g \circ f$ ("g nach f")

1.3 Beispiel

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x - 1$
$(f + g)(x) = x^2 + x - 1, (f \cdot g)(x) = x^2(x - 1)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1}$ für $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$ Definitionsbereich von $\frac{f}{g}$.
$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 \neq$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$

1.4 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt:

1. Surjektiv $\Leftrightarrow \ \forall y \in Y \ \exists x \in X : f(x) = y$
2. Injektiv $\Leftrightarrow \ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
3. Bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

1.5 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist
   - nicht surjektiv: z.B gibt es für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$, da $f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   - nicht injektiv: $f(-1) = f(1)$ aber $-1 \neq 1$

b) Jedoch ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ bijektiv, wie man leicht prüfen kann.

1.6 Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

1. Für $X_0 \subseteq X$ heißt $f(X_0) := \{f(x) | x \in X_0\}$ Bild von X_0

2. Für $Y_0 \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(Y_0) := \{x \in X | f(x) \in Y_0\}$ Urbild von Y_0
3. Ist f bijektiv, so heißt $f^{-1} : Y \to X$ Umkehrfunktion von f,
falls $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_y$

1.7 Beispiel

a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ ist bijektiv (4.6b)

Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

da: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = \underbrace{x}_{=\mathrm{id}\ \mathbb{R}_{\geq 0}}$

$= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = (f^{-1} \circ f)(x)$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden

b) Achtung: Das Urbild existiert immer, auch wenn f^{-1} als Umkehrfunktion nicht existiert.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

1.8 Definition: Symmetrie

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt:

- Achsensymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (zur y-Achse)
- Punktsymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1.9 Definition: Monotonie

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. f heißt (streng) monoton wachsend,
falls $f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2$.

Falls $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(>)}{\geq} x_2$, so heißt f (streng) monoton fallend.

1.10 Elementare Funktionen

a) Konstante Funktion: Sei $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$

b) Identität: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

c) Betragsfunktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
f ist achsensymmetrisch

d) Monome/Potenzen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

- n gerade: f achsensymmetrisch, weder injektiv noch surjektiv, nicht monoton, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- n ungerade: f punktsymmetrisch, bijektiv, streng monoton steigend

e) Wurzenlfunktion Sind Umkehrfunktion von Monomen

- n ungerade $\Rightarrow f(x) = x^n$ bijektiv
  $\underset{4.7/3}{\Rightarrow}$ Umkehrfunktion existiert und hat die Form

  $\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$