

Skript Mathe 2

23. April 2018

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{\geq}{=} \sum_{j=k+1}^n \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{n^k (k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

0.1 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{2.} N_a, N_c : \bullet |a_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ \bullet |c_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned}
 |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
 \forall n \geq k & \quad \downarrow \\
 \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
 &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square
 \end{aligned}$$

0.2 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1+\epsilon > \sqrt[n]{n} > 1-\epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[x]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[x]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[x]{x} \rightarrow 1$$

0.3 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit $a_n \rightarrow a$. Dann:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

0.4 Definition: Landau Symbole, \mathcal{O} -Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\text{a) } \mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$$

b) $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left(\frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

\mathcal{O}, o heißen Landau-Symbole

0.5 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

0.6 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_n \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_n \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

0.7 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

0.8 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

0.9 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$