Skript Mathe 2

15. Juli 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n: n-tes Folgenglied
n: Index

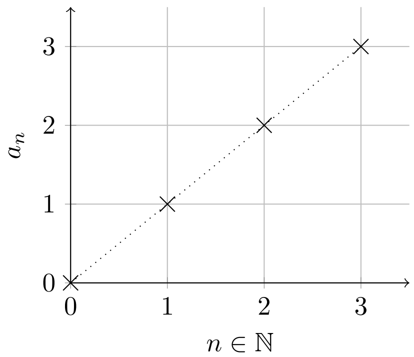
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B: a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n)

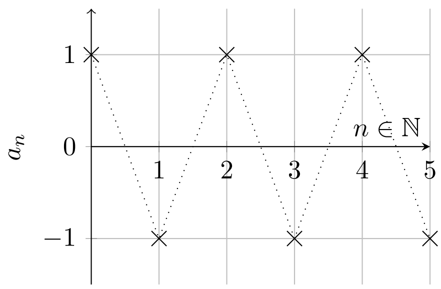
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \; \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

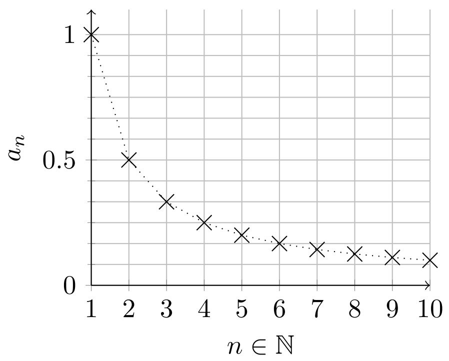
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



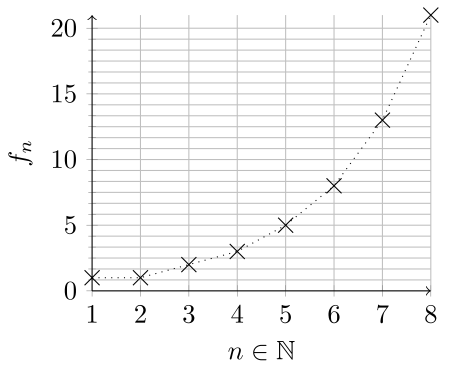
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, ...$



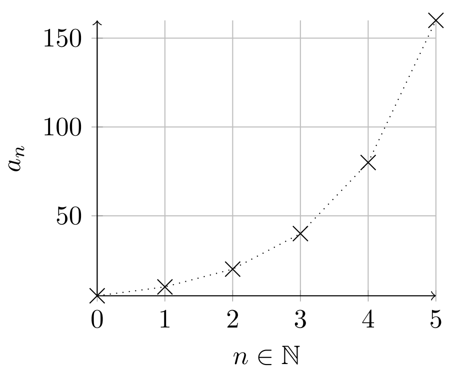
f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

q: Wachstumsfaktor
X_0: Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, ...$



g) Logistisches Wachstum

$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$

$r \in [0,4]$: Wachstums-/Sterbefaktor
$X_n \in [0,1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n+1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

Kurz:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

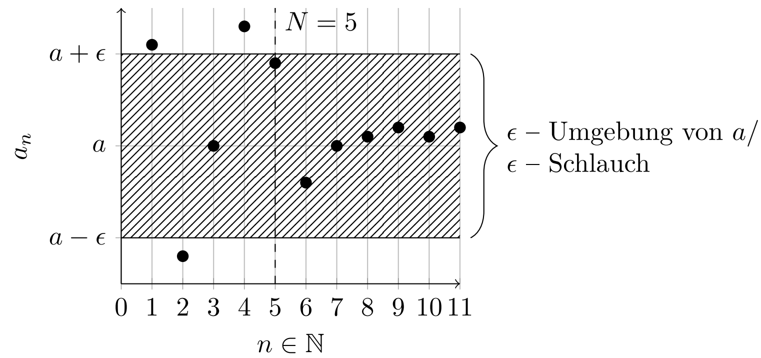
b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.

d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \ \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \ \forall n \geq N$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$\Rightarrow |a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

Für $N > \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$

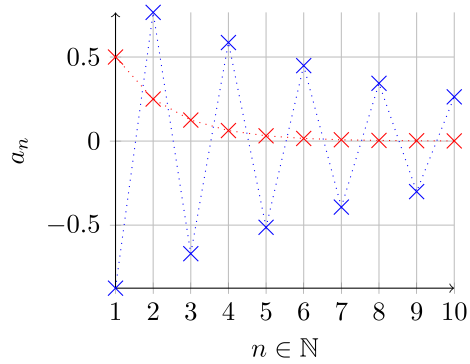
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

• $|a - b + b| \leq |a - b| + |b| \qquad \Big| \; |-b|$

$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

• $|b - a + a| \leq |b - a| + |a| \qquad \Big| \; |-a|$

$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$

$\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.) $b \neq 0 \Rightarrow$ • $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \; \forall n \geq k$

• $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k}$ konvergiert gegen $\dfrac{a}{b}$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$:

- $|a_n - a| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$
- $|b_n - b| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$

$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

2.)

- Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓
- Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$

$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \quad \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$

$|b_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \dfrac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.)

- Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

  Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}: \underbrace{|b_n - b|}_{\underset{1.12}{\geq} |b|-|b_n|} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

  Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

  Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b \cdot b_n}\right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)

$$\frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\cancel{n^2}(3 + \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(-1 + \frac{1}{n})}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann: kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

exponentielles Wachstum

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$
\begin{aligned}
|x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\geq 0} \\
&\underset{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\
&= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \ldots \\
\Rightarrow \left|\frac{n^k}{x^n}\right| &= \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{n^{\cancel{k}+1} t^{k+1} \pm \ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m + 1 > x$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\
&\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, } <1}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0
\end{aligned}
$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$
\begin{aligned}
\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : &\bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\
&\bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c
\end{aligned}
$$

Aus 1.:

$$
\begin{aligned}
&|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
&\forall n \geq k \\
\Rightarrow &|b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
\leq &\underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square
\end{aligned}
$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1-\epsilon \; \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1+\epsilon > \sqrt[n]{n} > 1-\epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q \; \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{(b_n) \;\middle|\; \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{beschränkt}\right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \;\middle|\; \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

$\mathcal{O}, o$ heißen <u>Landau-Symbole</u>

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

   $a_{n+1} \geq (>)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

   $a_{n+1} \leq (<)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

   und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.

   $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a kleinste obere Schranke

   $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.

   $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$

   $\underset{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} \quad |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$

   $\Rightarrow a_n \to a$

2. analog $\quad \square$

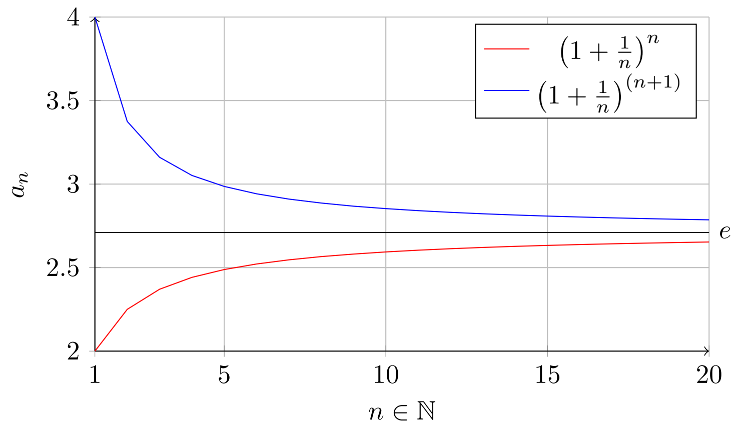
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \Big(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Big)$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \underset{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}{}_{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

$$\text{Zeige dazu: } b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right)$$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \underset{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (a_n) hat obere Schranke b_1
(b_n) hat untere Schranke a_1
$\underset{1.23}{\Rightarrow}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. $\square$

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot a_n \underset{1.13/3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\underset{1.8}{\Rightarrow}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**
z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1.

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$a_n = (-1)^n$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k+1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1.

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0,B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\underline{k=1}$: Halbiere $[A_0, B_0]$
  - Falls in der linken Folgenhälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

  Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.
- $\underline{k=2}$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \to 0$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} B_k$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} A_k \underset{1.15}{=} \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k}) \quad \square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

- $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{-\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty} \end{cases}$$
- $$\underline{\lim_{n\to\infty}} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{+\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} \end{cases}$$

1.37 Bemerkung

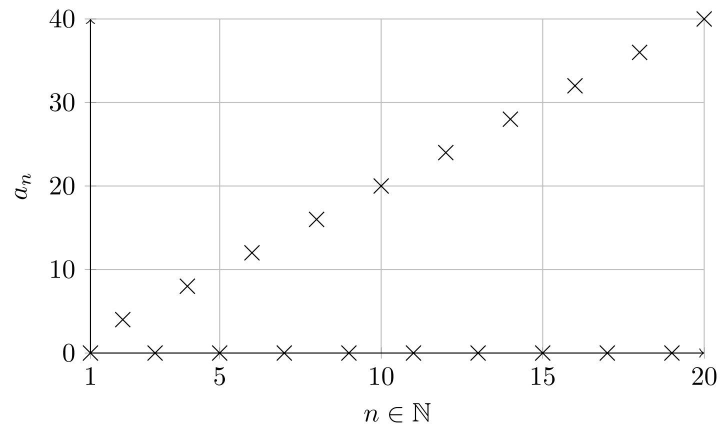
a) $a_n \to \pm\infty$ in obriger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)

z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
aber (a_n) mit $(a_n) = n$ divergiert bestimmt gegen ∞

b) $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl $\limsup$ als auch $\liminf$.

1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & \text{n gerade} \\ 2n+1, & \text{n ungerade} \end{cases}$$

$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)
$:\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon\ \forall n, k \geq M$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge <u>in $\mathbb{R}$</u>
(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

Beweis: $(\Rightarrow)$: klar
$(\Leftarrow)$:

1. Zeige (a_n) beschränkt

   Sei (a_n) C-F: $\Rightarrow \quad \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1$
   $\forall n, k \geq R$

   $\underset{k=R}{\Rightarrow} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq \mathbb{R}$
   $\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$
   $\Rightarrow \min\{a_r - 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \leq a_n \leq$
   $\max\{a_R + 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt und besitzt
   konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit
   $a = \lim\limits_{j \to \infty} a_{n_j}$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

   Sei $\epsilon > 0$

   $\Rightarrow$
   - $\exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M$
   - $\exists J \in \mathbb{N} : \left|a_{n_j} - a_k\right| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall j \geq J$

   Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

   $\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_j}\right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_j} - a\right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right|$
$= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1 \quad |a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a,b] \to [a,b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
   es git genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x} = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a,b]$ konvergiert
   die durch $X_n := f(X_n + 1)$ definierte Folge (X_n) gegen $\hat{x}$.

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

   $$S_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \delta_1 + ... + \delta_k$$

   heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$.
   Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te <u>Partialsumme</u> der Reihe.
2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

   $$\lim_{k \to \infty} (S_k) = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

   Andernfalls heißt die Reihe divergent.
3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n \geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.
4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum\limits_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ... = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & \text{n ungerade} \\ 1 & \text{n gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

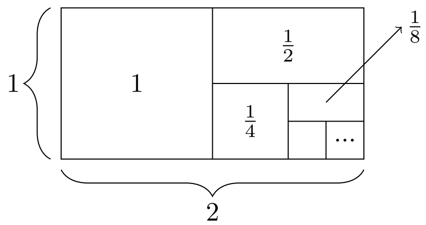
c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underset{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}}{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}} + \underset{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}}{\boxed{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}} + \underset{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}}{\boxed{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}} + ... + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ konvergent



und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) <u>Geometrische Reihe</u>

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \to \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

- In Beispiel d) is $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

  Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.
- $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_{3} = \frac{8}{9}$

  Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Reihen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k) = a + b$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} c - a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$

$$\underbrace{|a_n + ... + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$$

$$\left[= |S_k - S_{n-1}| = \Big| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Big| \right]$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty}$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0. \Rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}$: $|a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N$.

Da $|a_n| + ... + |a_k| \leq |a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i|a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

- $\lim\limits_{k\to\infty}(S_k) \underset{2.1}{=} \lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{K} a_i\right)$

Da $\lim\limits_{k\to\infty}|S_k| = \left|\lim\limits_{k\to\infty}\right| \quad \left[\begin{array}{c} C_i \to c \\ \Rightarrow |C_i| \to |c| \end{array} \ (1.13)\right]$,

ist $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \ (*)$

- $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|\right) \underset{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \ (**)$

Insgesamt: $\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \quad \Big| \lim\limits_{k\to\infty}$

$$\underset{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \qquad \square$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.
D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\underset{2.6}{\Rightarrow}$ $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$

$|a_n + ... + a_k| < \epsilon \ \forall k \geq n \geq N$.

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \ \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. $\square$

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.
Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \underset{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n + ... + a_k|$

$\overbrace{\leq}^{0 \leq a_1 \leq b_i \ \forall i} |b_n + ... + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$

2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

2.12 Beispiele

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}}$ ist divergent. (2.9)

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$ (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow$: $A_{n+1} - A_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^n a_i$
$$= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$$
$$= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0, \text{ da } (a_n) \searrow$$
- Analog: $(B_n) \searrow$ • $B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in N$
  • $B_n - A_n = a_{2n} \to 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i a_i$ konvergent.

2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq (a+\epsilon)^n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a+\epsilon)^n}_{<1} \text{ (geometrische Reihe)}$$

ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

Damit konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\boxed{\sum\limits_{k=1}^{N-1} |a_k|}}_{<\infty} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n|$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

$\Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\underset{2.9}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. $\square$

2.15 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{k^3}{3^k}}}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\left(\sqrt[n]{n}^3\right)}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harminische Reihe) liefert

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}^\alpha\right)} = 1 \quad (\alpha > 0) \to$ keine Aussage möglich.

2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq a \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq ... \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a^{n-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum\limits_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_N| > 0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\square$

2.17 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergiert, da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$

b) Wie in 2.15b ist für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0)$ keine Aussage möglich,

da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

und somit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.

2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kan Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

- $1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm ...$

  $$Sn = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{6} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{9} \pm ...$

  $$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls
eine bijektive Abbildung $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ohne Beweis)

2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem $s \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ (ohne Beweis)

3 Potenzreihen

3.1 Grundbegriffe und Beispiel

a) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist für $|x| < 1$ absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für $x \in \underbrace{(-1,1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$.

   Für $|x| > 1$ ist $P(x)$ divergent.

b) $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$ ist für $x \neq 1$ divergent:

   Quotientenkriterium liefert:

   $$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

3.2 Definition: Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ reelle Folge und seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten a_k

3.3 Bemerkung

a) In Bsp 3.1a) ist $x_0 = 0$ und $a_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
   In 3.1b) ist $x_0 = 1$ und $a_k = k!$

b) In 3.1a) konvergiert $P(x)$ für $x \in (-1, 1)$, in 3.1b) lediglich für $x = x_0 = 1$. Es wird sich heraussstellen, dass es für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Zentrum x_0 einen Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ gibt (3.5), so dass $P(x)$ absolut konvergent für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, (d.h. $|x - x_0| < \rho$) und divergent für $|x - x_0| > \rho$ ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

3.4 Satz

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_o\}$.

Dann:

1. $P(x_1)$ konvergent $\Rightarrow P(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. $P(x_1)$ divergent $\Rightarrow P(x)$ ist divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Beweis:

1. $P(x)$ konvergent $\underset{2.9}{\Rightarrow} (a_k (x_1 - x_0)^k)$ Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k (x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k (x - x_0)^k| = |a_k (x_1 - x_0)^k| \cdot \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k \leq K \cdot \underbrace{\left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k}_{\leq 1}$$

$\underset{2.10}{\Rightarrow} P(x)$ absolut konvergent für $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ (Majorantenkriterium)

2. Sei $P(x_1)$ divergent und $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$. Wäre $P(x)$ konvergent, so wäre wegen 1. auch $P(x_1)$ konvergent. ↯

   Also: $P(x)$ divergent $\square$

3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei $P(x)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0.

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von $P(x)$.

Für $\rho \in \mathbb{R}_+$ heißt $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ Konvergenzintervall von $P(x)$.
Ist $\rho = \infty$, so konvergiert $P(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (3.7)

3.6 Beispiel

a) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $\rho = 1$, denn $(-1, 1)$ ist Konvergenzintervall von $P(x), x_0 = 0$

b) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$ ist $\rho = 0$, denn $P(x)$ ist nur für $x = x_0 = 1$ konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

3.7 Korollar

Sei $P(X)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Konvergenzradius ρ.

Dann:

1. $P(X)$ absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$.
2. $P(X)$ divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$.
3. [Falls $|x - x_0| = \rho \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich]

Berechnung von Konvergenzradien

3.8 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ Folge in $\mathbb{R}$ und $\lambda := \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|a_k|}$. ρ sei der Konvergenzradius von $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

Beweis: Wurzelkriterium: $\lambda := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

- $\underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{\text{D.h. } P(x) \text{ konvergiert}} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$
- $\underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{\text{D.h. } P(x) \text{ divergiert}} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$

$\Rightarrow \rho$ Konvergenzradius von $P(x)$

3.9 Beispiel

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ konvergent?

- $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$

$\underset{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$

$\Rightarrow P(x)$ konvergent für $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$ und divergiert für $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für $x = \pm 1$

- $x = 1: \quad P(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe)
- $x = -1: \quad P(-1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1})}{k+1}$

$$= -\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$ konvergent

Insgesamt: $P(x)$ konvergent für $[-1, 1)$, divergent für $|x| > 1$ und $x = 1$.

3.10 Satz: Formel von Euler

Sei $(a_k)_{k>0}$ Folge in $\mathbb{R}, a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$,
ρ Konvergenzradius von $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$.

Ist $\left(\left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right|\right)_{k\geq 0}$ konvergent oder bestimmt gegen $+\infty$ divergent, so ist $\rho = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

Beweis: Wende auf $P(x)$ das Quotientenkriterium 2.16 an. $\square$

3.11 Beispiel: Exponentialfunktion

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{1}{\cancel{k!}} \cdot \frac{(k+1)\cancel{!}}{1} = k+1 \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$\underset{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$

Man definiert: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1. $\exp(x+y) = \exp(x)+\exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2. $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$ (Eulersche Zahl)

Aus 2.: $\qquad e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$

Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$?

1. Definiere: $\quad e := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (1.28)
2. Zeige: $\quad \exp(1) = e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für $\exp(x)$ gelten:

   $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (hier nicht)
4. Definiere: $\quad e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzen überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = exp(n) = e^n \qquad \Big| \sqrt[n]{\ }$

  $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird e^x dann mit Hilfe von $e^x = \exp(x)$ berechnet.

So kann auch ein Computer z.B: e^π berechnen, indem $\exp(\pi)$ ermittelt wird.

3.12 Bemerkung

a) Außer der Funktion e^x gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B wird in Mathe III gezeigt, dass

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für $\rho \neq \infty$ müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.

4 Reelle Funktionen

Grundbegriffe und Beispiele

4.1 Definition: Abbildung

Eine Abbildung $f : A \to B$ besteht aus

- Dem Definitionsbereich A (Menge A)
- Dem Bildbereich B (Menge B)
- Einer Zuordnungsvorschrift f, die jedem $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Man schreibt $b = f(a)$, nennt b Bild/Funktionswert von a und a (ein) Urbild von b.

Notation: $f : A \to B, a \mapsto f(a)$

A = Menge aller Studenten von Mathe II
B = {Raucher, Nichtraucher}
f = Zuordnungsvorschrift, die jedem Studenten zuordnet, ob er/sie raucht/nicht raucht

4.2 Definition: Reelle Funktion

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine
Abbildung $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

a) $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$
Summe/Differenz von f und g

b) $(f \cdot g) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$
Produkt von f und g

c) Für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ heißt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

Quotient von f und g

d) Komposition/Verknüpfung

$f : D_f \to \mathbb{R}, g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subseteq D_g$
$f \circ g : D_f \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) := g(f(x))$

$$\begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rrrr, bend right, "g \circ f\ (\text{“g nach f”})"'] & f(D_f) \subseteq D_g \arrow[r, "g"] & g(f(D_f)) \subseteq \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

4.3 Beispiel

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x - 1$
$(f + g)(x) = x^2 + x - 1, (f \cdot g)(x) = x^2(x - 1)$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1}$ für $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$ Definitionsbereich von $\frac{f}{g}$.
$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 \neq$
$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$

4.4 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt:

1. Surjektiv $\Leftrightarrow \; \forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$
2. Injektiv $\Leftrightarrow \; (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
3. Bijektiv $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv

4.5 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist
   - nicht surjektiv: z.B gibt es für $y = -1$ kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$, da $f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   - nicht injektiv: $f(-1) = f(1)$ aber $-1 \neq 1$

b) Jedoch ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) = x^2$ bijektiv, wie man leicht prüfen kann.

4.6 Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung

1. Für $X_0 \subseteq X$ heißt $f(X_0) := \{f(x)|x \in X_0\}$ Bild von X_0
2. Für $Y_0 \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(Y_0) := \{x \in X|f(x) \in Y_0\}$ Urbild von Y_0
3. Ist f bijektiv, so heißt $f^{-1} : Y \to X$ Umkehrfunktion von f, falls $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_x$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_y$

4.7 Beispiel

a) $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$ ist bijektiv (4.6b)

Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

da: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = \underbrace{x}_{=\mathrm{id}\ \mathbb{R}_{\geq 0}}$

$= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = (f^{-1} \circ f)(x)$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden

b) Achtung: Das Urbild existiert immer, auch wenn f^{-1} als Umkehrfunktion nicht existiert.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

4.8 Definition: Symmetrie

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt:

- Achsensymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (zur y-Achse)
- Punktsymmetrisch $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4.9 Definition: Monotonie

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. f heißt (streng) monoton wachsend, falls $f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2$.

Falls $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(>)}{\geq} x_2$, so heißt f (streng) monoton fallend.

4.10 Elementare Funktionen

a) Konstante Funktion: Sei $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$

b) Identität: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

c) Betragsfunktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$
f ist achsensymmetrisch

d) Monome/Potenzen: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

- n gerade: f achsensymmetrisch, weder injektiv noch surjektiv, nicht monoton, $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- n ungerade: f punktsymmetrisch, bijektiv, streng monoton steigend

e) Wurzelfunktion: Sind Umkehrfunktion von Monomen

- n ungerade $\Rightarrow f(x) = x^n$ bijektiv
  $\underset{4.7/3}{\Rightarrow}$ Umkehrfunktion existiert und hat die Form

  $\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$
- n gerade $\Rightarrow f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^n$ bijektiv

  In diesem Fall hat die Umkehrfunktion die Vorschrift

  $\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\geq 0}$

  Achtung: Wenn n gerade, dann hat $x^n = a$ für gegebenes $a \in \mathbb{R}$

  - keine Lösung, falls $a < 0$
  - genaue eine Lösung, falls $a = 0$ und zwar $x = 0$
  - genau zwei Lösungen, falls $a > 0$ und zwar

    $x_1 = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{>0} \quad x_2 = \underbrace{-\sqrt[n]{a}}_{<0}$

f) Polynome: $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ heißen Koeffizienten

Falls $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p, man schreibt $\text{grad}(p) = n$

Für ein Polynom p von Grad n kann man zeigen:

1. p besitzt höchstens n Nullstellen
2. Falls n ungerade, ist p surjektiv und besitzt mindestens eine Nullstelle
3. Falls n gerade, ist p nicht surjektiv und kann daher auch keine Nullstelle haben

Bekannte Verfahren zur Berechnung von Nullstellen:

- $\text{grad}(p) = 2$: Mitternachtsformel/pq-Formel
- $\text{grad}(p) \geq 3$: Polynomdivision (Mathe III), numerische Verfahren (z.B Newton-Verfahren)

g) Rationale Funktionen:

Quotienten von Polyonmen p, q mit $f : D \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

h) Logarithmen und Exponentialfunktion:

1. der natürliche Logarithmus:

   Man kann zeigen, dass für die Exponentialreihe unter 3.11 gilt:

   - $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
   - $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv

   Die Umkehrfunktion von $\exp(x)$ ist der natürliche Logarithmus:

   $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$

2. Exponentialfunktion:

   Sei $q > 0, q \neq 0$. Für $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}$ ist $q^x = \sqrt[b]{q^a} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

   Mit Hilfe der Funktion $\exp(x), \ln(x)$ kann man Exponentialfunktionen zu einer beliebigen gegebenen Basis q und $x \in \mathbb{R}$ definieren:

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto q^x := \exp(x \cdot \ln(q))$

3. Aus 2. ergibt sich die Regel:

   $\ln(q^x) = x \cdot \ln(q) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4. Man kann wegen 2. eine Basis q durch eine beliebige andere Basis ausdrücken, z.B: $q^x = e^{x \cdot \ln(q)}$ (da $\exp(x) = e^x$ (3.11))

5. Logarithmus zur Basis $q > 0, q \neq 1$: Bilde die Umkehrfunktion von $f(x) = q^x$ (unter 2.)

   $\log_q : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$

6. log_q lässt sich analog zu 4. durch jeden anderen Logarithmus ausdrücken, z.B ist

   $\ln(x) = \ln(q^{\log_q(x)}) \underset{3.}{=} \log_q(x) \Leftrightarrow \log_q(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(y)}$

7. Rechenregeln:

   – für $f(x) = q^x$ ergeben sich aus 2. und den Regeln für $\exp(x)$ (3.11):

   - $q^{x+y} = q^x \cdot q^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
   - $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$, da $1 = q^{x-x} - q^x \cdot q^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   - $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
   - $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

   – für $\log_q(x)$ ergeben sich aus denen für q^x:

- $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y) \quad \forall x, y > 0$

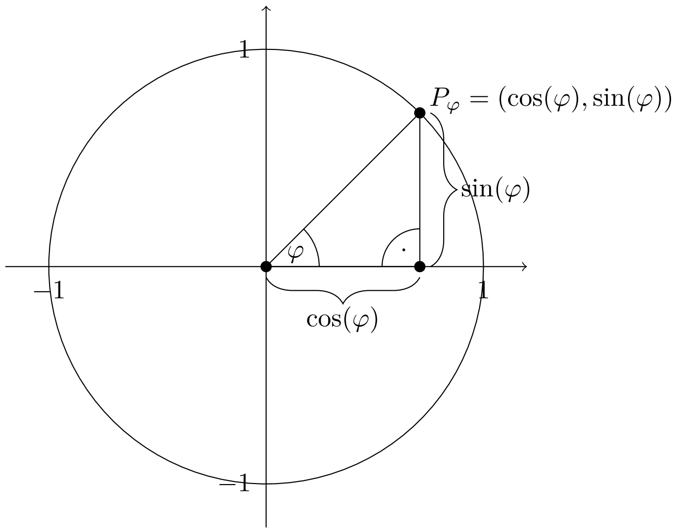
  denn für $x = q^u, y = q^v$ ist

  $\log_q(xy) = \log_q(q^{u+v}) = u + v = \log_q(x) + \log_q(y)$

- $\log_q\left(\frac{q}{x}\right) = -\log_q(x) \quad \forall x > 0$

  [mit $q^v = \log_q(x^\alpha) \underset{3./6.}{=} \alpha \cdot \log_q(x) \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$]

i) Trigonometrische Funktionen:



φ:	Winkel zwischen x-Achse und Strecke $\overline{0\ P_\varphi}$
$\cos\varphi$:	Ankathete an φ in $\Delta(0\ A_\varphi\ P_\varphi)$
$\sin\varphi$:	Gegenkathete an φ in $\Delta(0\ A_\varphi\ P_\varphi)$

Daraus ergeben sich die Winkelfunktionen:

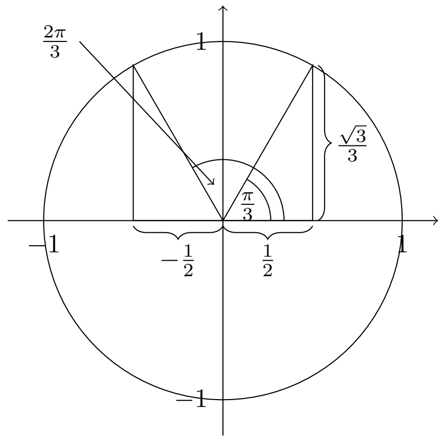
$$\begin{aligned}
\cos:&\quad \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos(x)\\
\sin:&\quad \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin(x)\\
\tan:&\quad \mathbb{R} \setminus \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
\text{cotan}:&\quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

1. Dabei wird der Winkel φ meistens im Bogenmaß angegeben, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi]$.

   Einige wichtige Werte:

Gradmaß:	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
Bogenmaß:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos:	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Daraus können weitere Werte mit Hilfe des Einheitskreises abgeleitet werden:



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2. sin und cos sind nicht bijektiv. Jedoch ist $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ und $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv. Die Umkehrfunktionen sind:

   $$\begin{aligned} \text{arcsin:} &\quad [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ \text{arccos:} &\quad [-1, 1] \to [0, \pi] \end{aligned}$$

   Entsprechend erhält man:

   $$\begin{aligned} \text{arctan:} &\quad \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ \text{arccotan:} &\quad \mathbb{R} \to (0, \pi) \end{aligned}$$

3. - Es ist $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   - $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch, d.h. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
   - $\tan, \text{cotan}$ sind π-periodisch

4. Symmetrien

   $$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) &= -\sin(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \tan(x) &= -\tan(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{cotan}(x) &= -\text{cotan}(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5. Rechenregeln

   a) $\sin x + \cos x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   b) Additionstheoreme

      - $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$
      - $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

5.1 Definition: Grundbegriffe und Beispiele

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

a) $X_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M
:⇔ Es gibt eie Folge (X_n) in $M \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \mapsto X_0$

b) $X_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M
:⇔ X_0 ist kein Häufungspunkt von M

5.2 Beispiele

a) $M = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)$

- Menge der Häufungspunkte von M:
$H = [0,1] \cup [3,4]$ denn z.B für $X_0 = \frac{1}{2}$ hat die Folge $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})_{n \geq 3}$ den Limes X_0 und liegt in $M \setminus \{X_0\}$.

  Auf analoge Weise können für jedes andere $X_0 \in M$
Folgen in $M \setminus \{X_0\}$ konstruiert werden.

- Einziger isolierter Punkt in M ist 2, denn es gibt in
$M \setminus \{2\} = (0,1) \cup (3,4)$ keine Folge mit Grenzwert 2.

b) $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

- Menge der HP von M: $\{0\}$
- Menge der isolierten Punkte: M

5.3 Bemerkung

Ein isolierter Punkt X_0 von M liegt vor, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $|X - X_0| \geq \epsilon \quad \forall x \in M \setminus \{X_0\}$, z.B ist in 5.2a $|X - 2| \geq 1 \quad \forall x \in M \setminus \{2\}$

5.4 Definition Grenzwert I

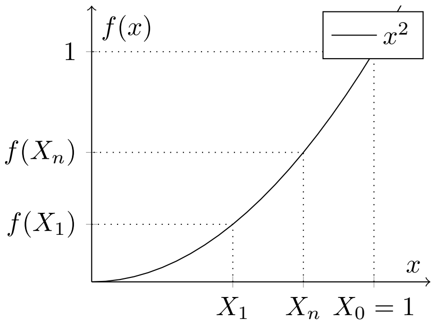
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Ist X_0 ein Häufungspunkt von D, so sagt man f hat in X_0 den Grenzwert a, oder $f(x)$ konvergiert gegen a für $x \to a$:⇔ $\lim\limits_{n \to \infty} f(X_n) = a$, für jede beliebige Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to X_0$

5.5 Beispiele

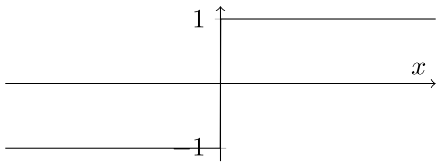
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2, X_0 = 1$

Für (X_n) in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $X_n \to 1$ ist $f(X_n) = {X_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (1.13/3)



b) Es muss für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$ gelten: $f(X_n) \to a$

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$



Grenzwert in $X_0 = 0$ existiert nicht, denn
$f(-\frac{1}{n}) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ und
$f(\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, obwohl $\frac{-1}{n} \to X_0$ und $\frac{1}{n} \to X_0$

5.6 ϵ–φ–Kriterium

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion, X_0 HP in D, $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lim_{x\to X_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \forall x \in D \setminus \{X_0\} : \underbrace{|x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon}_{(*)}$$

Existenz von a bedeutet: Wenn x nahe genug bei X_0 ist, so ist auch $f(x)$ sehr nahe an a.

Beweis:

$(\Leftarrow)$: Gelte (*). Sei (X_n) in $D \setminus \{X_0\}, X_n \to X_0$. Z.z.: $f(X_n) \to a$

Da $X_n \to X_0$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|X_n - X_0| < \delta \quad \forall n \geq N$ (1.5)
$(*) \Rightarrow |f(X_n) - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$
$\underset{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$

$(\Rightarrow)$: Mit Kontraposition: Gelte (*) nicht.
$\Rightarrow \exists \epsilon > 0$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $X_n \in D \setminus \{X_0\}$ existiert mit $|X_n - X_0| < \delta$ und $|f(X_n) - a| \geq \epsilon$.
$\underset{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \not\to n$ für $X_n \to X_0$. $\square$

5.7 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Es ist $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = f(X_0)$.

Prüfe mit ϵ–δ–Kriterium:
Sei $\epsilon > 0$. Für $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$ ist
$|f(x) - f(X_0)| = ax + b - aX_0 - b = |a| \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{<\delta} < |a| \cdot \dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$

5.8 Definition: Grenzwert II

Sei X_0 HP von $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

1. f hat in X_0 den Grenzwert $+\infty$ $(-\infty)$ $:\Leftrightarrow f(X_n) \to +\infty(-\infty)$ für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$
2. Ist $\sup D = \infty$ $(\inf D = -\infty)$, so hat $f(x)$
   Limes $a \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ $:\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge in D mit $X_n \to \infty$ $(X_n \to -\infty)$

5.9 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, da für jede Nullfolge (X_n)
      in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $\dfrac{1}{\underbrace{{X_n}^2}_{=0}} \xrightarrow[n \to 0]{} +\infty$
   2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, da für jedes (X_n)
      in $\mathbb{R}$ mit $X_n \to \infty$: $\dfrac{1}{{X_n}^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

b) Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$:

   1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\exp(x)}{x^m} = \infty$
   2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \exp(x) = 0$

Beweis:

1. $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{X^{m+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \geq 0$

   $\Rightarrow \frac{\exp(x)}{x^m} \geq \frac{x^{\cancel{m}+1}}{(k+1)x^{\cancel{m}}} = \frac{x}{(k+1)!} \to \infty$

   für $x \to \infty$

2. $x^m \cdot \exp(x) = \frac{(-1)^m(-x)^m}{\exp(-x)} = (-1)^m \cdot \frac{1}{\boxed{\frac{\exp(-x)}{(-x)^m}} \underset{1.}{\to} \infty}$

   für $x \to -\infty$

5.10 Definition: Rechts–/Linksseitiger Grenzwert

1. Ist X_0 HP von $D \cap (X_0, \infty)$, so hat f in X_0 den rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (X_0, \infty)$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to X_0^+} f(x) = a$

2. Ist X_0 HP von $D \cap (-\infty, X_0)$, so hat f in X_0 den linksseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{R} :\Leftrightarrow f(X_n) \to a$ für jede Folge (X_n) in $D \cap (-\infty, X_0)$ mit $X_n \to X_0$.

   Schreibweise: $\lim\limits_{x \to X_0^-} f(x) = a$

5.11 Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, da $f(X_n) = 1 \to 1$
  für (X_n) in $(0, \infty)$ und $(X_n) \to 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$, da $f(X_n) = -1 \to -1$
  für (X_n) in $(-\infty, 0)$ und $(X_n) \to 0$

5.12 Bemerkung

Aus 5.11 ist ersichtlich: Der Grenzwert einer Funktion f in X_0 existiert $\Leftrightarrow$ Der Links– und Rechtsseitige Grenzwert von f in X_0 existieren und übereinstimmen.

5.13 Beispiele

a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$, aber $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ existiert nicht,
   da $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim_{x\to\infty} x = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$

5.14 Definition: Stetigkeit

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

a) f heißt stetig in $X_0 \in D$, falls

$$\underbrace{\lim_{x\to X_0} f(x)}_{A} \underbrace{= f(X_0)}_{B}$$

b) f heißt stetig, falls f in jedem Punkt $X_0 \in D$ stetig ist.

5.15 Bemerkung

a) In 5.15a prüft man zwei Bedingungen: A) Der Grenzwert von f in X_0 existiert und B) ist gleich $f(X_0)$.

b) Wegen 5.6 ist f in $X_0 \in D$ stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D : |x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(X_0)| < \epsilon$$

5.16 Beispiele

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist in jedem $X_0 \in D$ stetig:

$\lim\limits_{x\to X_0} f(x) = f(X_0)$, da für (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ gilt:

$$\underbrace{f(X_n) = X_n^2 \to {X_n}^2 \to {X_0}^2}_{A} \underbrace{= f(x)}_{B}$$

b) Wegen 5.4 ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ stetig.

5.17 Satz

Sei $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$.

Gibt es ein k > 0 mit $|f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |x - X_0| \quad \forall x \in D$, so ist f stetig in X_0.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{\delta}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |\underbrace{x - X_0}_{<\delta}| < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$

5.18 Bemerkung

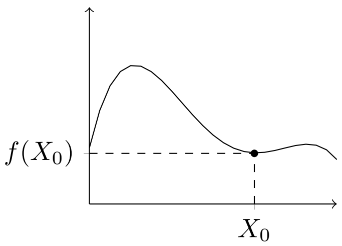
Wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$

$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |\underbrace{x - X_0}_{<\delta}| < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$

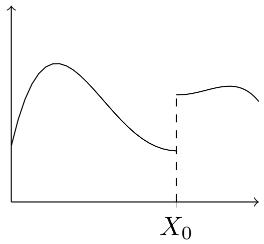
5.19 Beispiel

a) Anschauung zu 5.14a

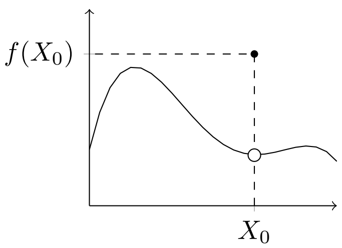
Es gibt 4 Fälle:



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert
und ist gleich $f(x)$



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert nicht



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert
und ist ungleich $f(X_0)$

b) Schule: f ist stetig, wenn man f “ohne Absetzen” zeichnen kann.

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Dirichlet–Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

unstetig in jedem $X_0 \in \mathbb{R}$.

Mit ϵ–δ–Kriterium:

Sei $\delta > 0$.

1. $X_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |x - X_0| < \delta$
2. $X_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \ \exists x \in \mathbb{R} : |x - X_0| < \delta$

Eigenschaften stetiger Funktionen

5.20 Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen

a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $X_0 \in D, D \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch $c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$) stetig.

b) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to IR, g : D' \to \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$.
f, g stetig $\Rightarrow g \circ f$ stetig.

Beweis:

a) Folgt direkt aus 5.14

b) Mit 1.14 $\quad \square$

5.21 Bemerkung

Wegen 5.16b und 5.20

a) sind Monome und Polynome stetig

b) Wegen a und 5.20a sind rationale Funktionen stetig

c) Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall stetig (zeigen wir hier nicht). Daher sind $\exp, \sin, \cos, \tan, \mathrm{cotan}$ (vgl. 3.11, 3.12) auch stetig.

5.22 Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken

a) Hebbare Definitionslücke:

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und X_0 HP von $X_0 \notin D$. Ist $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = a$, so heißt X_0 stetig hebbare Definitionslücke von f.

$$f : D \cup \{X_0\} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ a & x = X_0 \end{cases}$$

heißt Fortsetzung von f auf $D \cup \{X_0\}$.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = 2$$

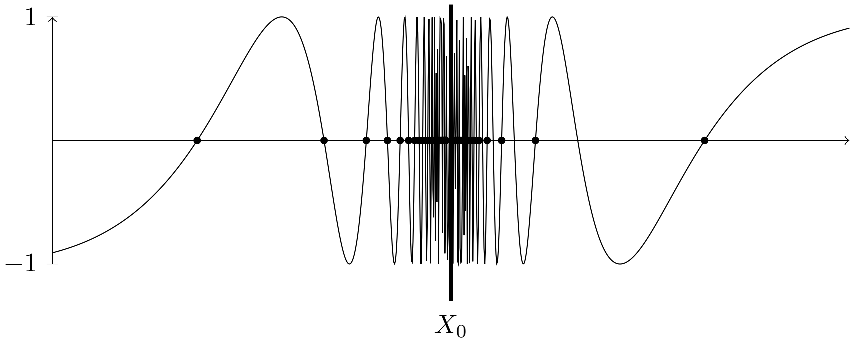
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} = x + 1$$

b) Polstelle:

Gilt für die Nullstelle X_0 des Nenners einer rationalen Funktion, dass $f(x) \to \pm\infty$, für $x \to X_0^-$ oder $x \to X_0^+$, so heißt X_0 Polstelle.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hat Polstelle bei $X_0 = 0$.

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$ keinen Grenzwert.



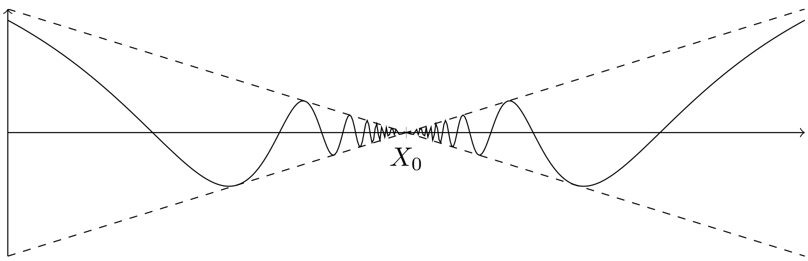
Man nennt X_0 Oszillationsstelle:

- $X_n = \dfrac{1}{n\pi} \to 0$ und $f(X_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $Y_n = \dfrac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ und $f(Y_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow f(Y_n) \to 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$
eine hebbare Definitionslücke



$$f(X_n) = \underbrace{X_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{X_n}\right)}_{\text{beschränkt}} \text{ für jede Nullfolge } (X_n) \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ stetige Fortsetzung.}$$

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$

Wir zeigen später mit L'Hopital, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

5.23 Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann: Es gibt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis: $f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet, dass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

Beweis für $f(a) < 0, f(b) > 0$ (Anderer Fall analog)

Anschaulich klar, da f keine Sprungstelle hat.

Bisektionsverfahren:

Start $[a_1, b_1] := [a, b]$

1. Schritt: Halbiere $[a_1, b_1]$

- Berechne $y_1 = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$
- Fallunterscheidung:
  - $y_1 = 0$: Fertig
  - $y_1 > 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
  - $y_1 < 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [fraca_1 + b_1 2, b_1]$
- Es gilt:
  - $[a_2, b_2]$ halb so groß wie $[a_1, b_1]$
  - $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$

2. Schritt: Wende Schritt 1 auf $[a_2, b_2]$ an, erhalte y_2 und $[a_3, b_3]$

Usw...

Erhalte Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit

- $a_n \nearrow, b_n \searrow$
- $b_n - a_n \to 0$
- $a_n \leq b_n$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = c$

Es ist $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Da f stetig, gilt:

$\underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n)}_{\leq 0} = f(c)$

$\underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)}_{\geq 0} = f(c)$

$\Rightarrow f(c) = 0 \quad \square$

Dieses Verfahren verwendet man auch zur Nullstellenberechnung.

5.24 Satz: Zwischenwertsatz allgemein

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, y sei eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Dann gibt es $\overline{x} \in [a, b]$ mit $f(\overline{x}) = y$.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A)

$f(a) \geq y \geq f(b)$

Setze $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \to f(x) - y \Rightarrow$

- $g(a) = f(a) - y \geq 0$
- $g(b) = f(b) - y \geq 0$
- g stetig

$\Rightarrow \exists\ \overline{x} \in [a, b] : y(\overline{x}) = 0 \Rightarrow f(\overline{x}) = g \quad \square$

5.25 Satz

Sei D ein Intevall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. $f(D)$ Intervall oder enthält genau ein Element
2. f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton

Beweis:

1. Falls $f(D)$ nur ein Element enthält: fertig ✓

   Enthalte $f(D)$ mindestens 2 Elemente $y_1 < y_2$.

   $$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D : \quad \begin{aligned} f(x_1) &= y_1 \\ f(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

   $$\Rightarrow x_1 \neq x_2$$

   Zeige: Jedes $y \in [y_1, y_2]$ ist in $f(D)$:

   Falls $x_1 < x_2$, gibt es wegen 5.24 ein $x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{\subseteq D}$ mit $f(x) = y$.

   Analog für $x_2 < x_1$.

   $\Rightarrow y \in f(D) \Rightarrow f(D)$ Intervall.

2. $(\Leftarrow)$: Hierzu braucht man die Stetigkeit nicht:

   f streng monoton wachsend (fallend). Sei $x = y$.
   O.B.d.A: $x < y$

   $\Rightarrow f(x) \underset{(>)}{<} f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

($\Rightarrow$): Hierzu braucht man die Stetigkeit:

Kontraposition: Sei f nicht streng monoton.

$$\Rightarrow \exists x < y < z \in D : f(x) < f(y) \text{ und } f(y) \geq f(z)$$
$$(\text{oder } f(x) \geq f(y) \text{ und } f(y) \leq f(z)).$$

$\underset{5.24}{\Rightarrow}$

- f nimmt in $[x, y]$ jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.
- f nimmt in $[y, z]$ jeden Wert zwischen $f(y)$ und $f(z)$ an.

$\Rightarrow$ Mindestens ein Wert wird doppelt getroffen. $\square$

5.26 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : D \to f(D)$ bijektiv und stetig.

Dann gilt für die Umkehrfunktion f^{-1}

1. f^{-1} ist im selben Sinne streng monoton wie f
2. f^{-1} ist stetig

Beweis:

1. f stetig und injektiv $\underset{5.25/2.}{\Rightarrow}$ f streng monoton.

   Zeige Aussage für f streng monoton wachsend:

   Für $y_1 < y_2$; $y_1, y_2 \in f(D)$ gibt es $x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

   Es gilt: $\underbrace{y_1}_{=f(x_1)} < \underbrace{y_2}_{=f(x_2)} \underset{\substack{f \text{ streng monoton} \\ \text{wachsend}}}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$

   $$\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$
   $$\Rightarrow f^{-1} \text{ streng monoton wachsend}$$

2. f stetig und injektiv $\underset{5.25}{\Rightarrow}$ $f(D)$ Intervall, f streng monoton.

Annahme: f streng monoton waschend.

Sei $y_0 \in f(D)$. z.Z: f^{-1} stetig in y_0. Setze $x_0 := f^{-1}(y_0)$.

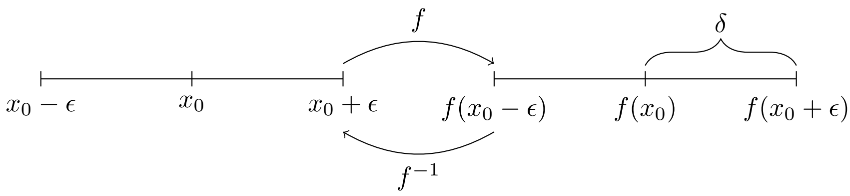
1. Fall: x_0 kein Randpunkt von D.

Mit ϵ–δ–Kriterium: Sei $\epsilon > 0$, so dass $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$.

f streng monoton wachsend

$$\Rightarrow f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$$
$$\Rightarrow (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)) \subseteq f(D)$$

da $f(D)$ Intevall.



Sei $\delta := \min\{|y_0 - f(x_0 + \delta)|, |y_0 - f(x_0 - \epsilon)|\}$

$\Rightarrow f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subseteq (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

D.h.: $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}| < \epsilon$

Analog für streng monoton fallend.

2. Fall: x_0 linker Randpunkt von D:
Analog zu Fall 1 mit $[x_0, x_0 + \epsilon] \subseteq D$

3. Fall: x_0 rechter Randpunkt von D:
Analog zu Fall 2. $\square$

5.27 Bemerkung

Wegen 5.26 und 5.21 sind Wurzelfunktionen, $\arcsin, \arccos, \operatorname{arccotan}$ und Logarithmen stetig.

5.28 Satz: $\exp(1) = e$

Beweis: Es ist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$
(Beweis der Gleichung zeigen wir nicht)

Substitution:

$$y = \exp(x) - 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \ln(y+1)$$
$$\underset{\substack{\text{weil exp}\\ \text{stetig ist}}}{\Rightarrow} \lim_{y\to 0} \ln((y+1)^{\frac{1}{y}}) = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}\ln(y+1)$$
$$[y \to 0 \Leftrightarrow x \to y]$$
$$= \lim \frac{x}{\exp(x) - 1} = 1$$

Wende auf Gleichung exp an

Da exp stetig: $\lim\limits_{y\to 0}(y+1)^{\frac{1}{y}} = \exp(1)$

Insbesondere für $Y_n = \frac{1}{n}$: $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=e\ (1.28)} = \exp(1)$ $\square$

5.29 Bemerkung

Wegen 5.28 ist $e \approx 2,718$ die Basis zur Exponentialfunktion $\exp(x)$.
Man erhält $e^x \underset{4.11a2}{=} \exp(x \cdot \ln(\underbrace{e}_{=\exp(1)})) = \exp(x)$

Siehe auch 4.11 Exkurs

5.30 Minimax-Theorem von Weierstraß

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum, d.h:

$\exists x_*, x^* \in [a,b] : f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a,b]$

Beweis: Genügt z.Z: f hat Maximum (Minimum analog).

Sei $s := \sup f([a,b])$ (kleinste obere Schranke des Bildes von f).

Zeige: $s < \infty$ und $s \in f([a,b])$.

Sei (X_n) Folge in $[a,b]$ mit $f(X_n) \to s$.

(X_n) beschränkt $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge (X_{n_j}) mit $\lim\limits_{i\to\infty} X_{n_j} = \tilde{x}, \tilde{x} \in [a,b]$, da $[a,b]$ abgeschlossen, ist f stetig.

$\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} f(X_{n_j}) = s = f(\tilde{x})$
$\Rightarrow s$ Funktionswert von $\tilde{x}$ und somit $f < \infty$
$\Rightarrow s \in f([a,b])$ und somit $f(x) \leq s \quad \forall x \in [a,b]$

5.31 Beispiele

a) $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$
$f(x_*) = 0, f(x^*) = 1$

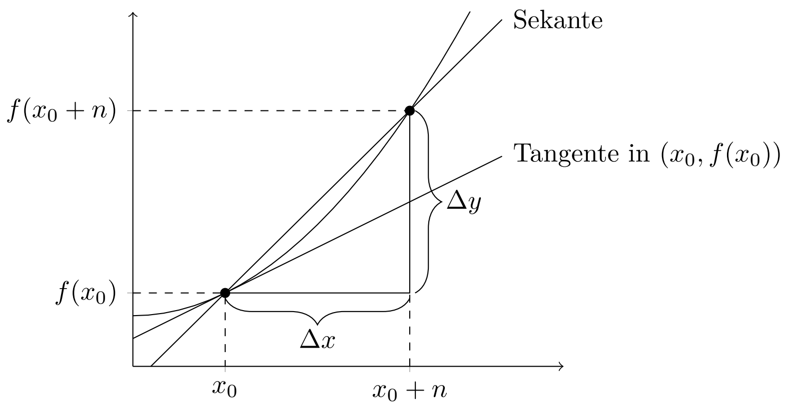
b) Falls der Definitionsbereich nicht abgeschlossen ist:

- $f(x) = x^2$ besitzt auf $(0,1)$ weder Minimum noch Maximum.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt auf $(0,1)$ weder Minimum noch Maximum, jedoch ist $f(\underbrace{x_*}_{1}) = 1$

c) $f(x) = \sin(x)$ hat je nach Größe des festgelegten Definitionsbereiches mehrere Minimal/-Maximalstellen

6 Differenzierbare Funktionen

6.1 Bemerkung: Tangenten



Die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ hat die Steigung

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \mathrel{\widehat{=}} \text{Differenzenquotient}$$

Je kleiner h, desto besser nähert sich die Sekante an die Tangente $(x_0, f(x_0))$ an. Daraus ergibt sich die Tangentensteigung: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, falls der Grenzwert existiert.

In diesem Kapitel sei I immer offenes Intervall.

6.2 Definition: Ableitung

Sei $f : I \to \mathbb{R}, x \in I$

1. f heißt differenzierbar in x_0, falls $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\dfrac{d}{dx} f(x_0)$ bezeichnet.
2. Ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in I$, so heißt f differenzierbar (auf I) und man nennet $f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Abbildung von f.

6.3 Bemerkung

Setzt man in 6.2/1 $x = x_0 + h$, so erhält man für den Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

6.4 Beispiele

a) $f(x) = c$ für $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0 = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}:$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^2 - \cancel{x^2}}{\cancel{h}} = 2x + h \to 2x$$

c) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right) - \underbrace{x^n}_{\substack{\to 0 \text{ für} \\ h\to 0,\ k\neq 1}}$$

$$\to nx^{n-1} \text{ für } h \to 0$$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0:$

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x \cdot h} = \frac{-1}{x \cdot (x+h)}$$

$$\to -\frac{1}{x^2} \text{ für } h \to 0$$

e) Analog zu c) erhält man

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad \forall x \neq 0$$

f) $(e^x)' = e^x$.

Es ist $e^x = \exp(x)$ (5.29). Wir benutzen in Beweis von 5.28 $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Damit gilt:

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h}$$

$$= \exp(x) \cdot \frac{\exp(h)-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \exp(x)$$

g) $(\sin x)' = \cos(x),\ (\cos x)' = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ohne Beweis. Man zeigt dies, indem man sin und cos mit Hilfe von exp darstellt ($\to$ Mathe III)

6.5 Satz: Lineare Approximation

Sei $f : I \to \mathbb{R}, x_0 \in I$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es gibt eine Funktion $R : I \to \mathbb{R}$, stetig in x_0, $R(x_0) = 0$ und ein $m \in \mathbb{R}$, so dass

   $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{m(x - x_0)}_{\text{Tangente an } f \text{ in } x_0} + R(x)(x - x_0) \quad (*)$$

Bemerkung:

- In $\mathbb{R} : m = f'(x_0)$
- 2. heißt: f ist in x_0 durch eine Gerade (Tangente) approximierbar.

Beweis: $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Sei f in x_0 differenzierbar.

$$\text{Setze } R(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to 0} R(x_0 + h) = \lim_{n \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$
$$= R(x_0) = 0$$

$\Rightarrow R$ stetig in $x_0, R(x_0) = 0$ und (*) ist erfüllt für $m = f'(x_0)$.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Gelte (*) für ein $m \in \mathbb{R}$ und eine in x_0 stetige Funktion $R : I \to \mathbb{R}, R(x_0) = 0$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + R(x_0 + h) \cdot h$$
$$\underset{h \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + R(x_0 + h)$$
$$\xrightarrow[h \to 0]{} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = m + \underbrace{R(x_0)}_{=0}$$

da $R(x_0) = 0$ und stetig in x_0 $\square$

6.6 Satz

Wenn f differenzierbar in $x_0 \in I \Rightarrow f$ stetig.

Beweis: Folge aus 6.5/2 (*), da f Summe in x_0 stetiger Funktionen.

6.7 Bemerkung

Die Umkehrung von 6.6 gilt nicht. In $x_0 = 0$ hat $f'(x_0) = |x|$ einen Knick:

- $\lim\limits_{n \to 0^-} \frac{|0+h| - h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$
- $\lim\limits_{n \to 0^+} \frac{|0+h| - h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$

$\underset{5.12}{\Rightarrow}$ In $x_0 = 0$ existiert keine Ableitung.

Rechenregeln

6.8 Satz: Ableitungsregeln

$f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in I$.

Dann sind auch $c \cdot f$ (für $c \in \mathbb{R}$), $f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0$) differenzierbar in x mit:

a) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

c) Produktregel:

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

d) Quotientenregel:

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Beweis:

a, b) Übung

c)

$$\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}^{=0} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{(f(x+h) - f(x)) \cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} f'(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x) \quad \text{(da } g \text{ stetig)}$$

d)

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x) - f(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

Schiebe wie in c) im Zähler $-f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x+h)$ ein und erhalte mit $h \to 0$ die Behauptung. $\square$

6.9 Beispiele

a) Wegen 6.8a,d) ist jedes Polynom und jede rationale Funktion differenzierbar.

b) $(4x^3 + 7x + 5)' = 12x^2 + 7$

c) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2} \quad (x \neq 0)$

d) $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

6.10 Satz: Kettenregel

Die Verknüpfung $f \circ g$ zweier differenzierbarer Funktionen f, g ist differenzierbar und es gibt $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$ bzw $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Beweis: Mit Substitution:

$\tilde{x} = g(x),\ \tilde{h} = g(x+h) - g(x)$

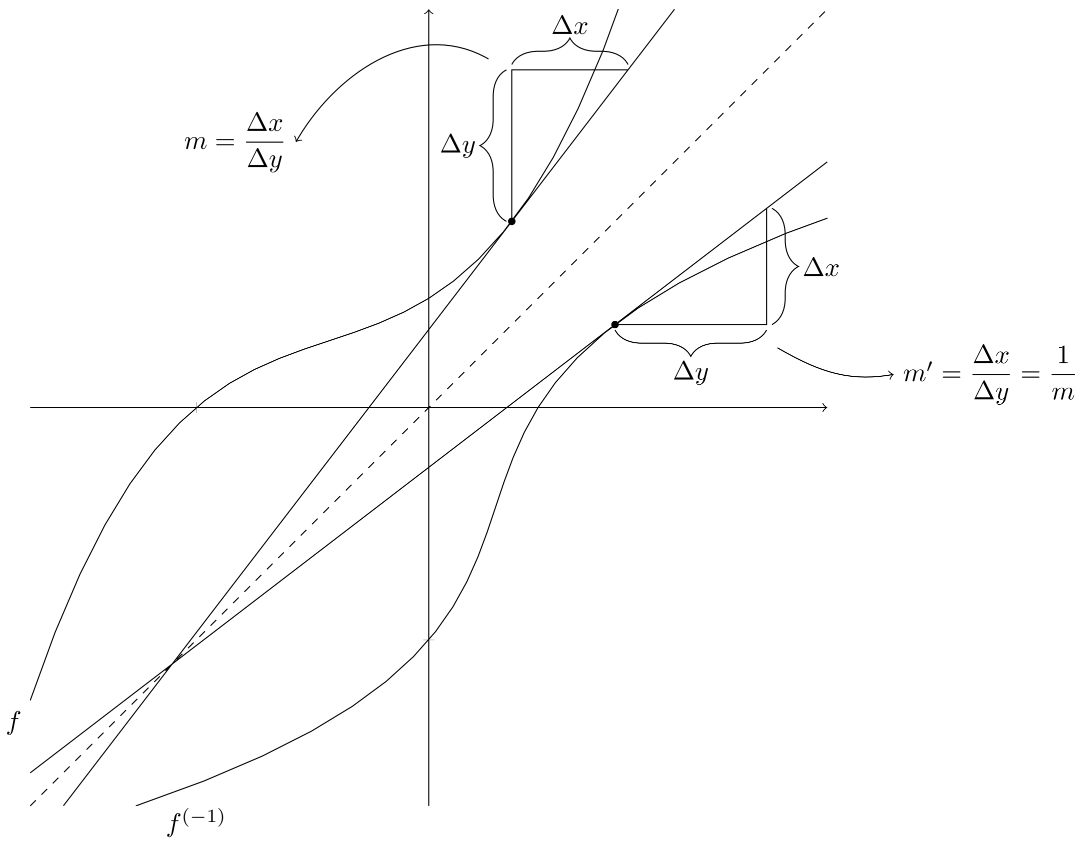
Es gilt: $h \to 0 \Rightarrow \tilde{h} \to 0$ da g stetig. Damit ist

$$
\begin{aligned}
&\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \frac{f(g(x+h) - g(x) + g(x)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \frac{f(\tilde{x} + \tilde{h}) - f(\tilde{x})}{\tilde{h}} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&\xrightarrow[h \to 0]{} f'(\tilde{x}) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \square
\end{aligned}
$$

6.11 Beispiel

$$\Big(\overbrace{\sin(\underbrace{5x^2}_{g})}^{f \circ g}\Big)' = \underbrace{10x}_{g'} \cdot \underbrace{\cos(5x^2)}_{f' \circ g}$$

6.12 Veranschaulichung zur Ableitung der Umkehrfunktion



$m = f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow (f^{-1}(y_0))' = m' = \dfrac{1}{m}$

$= \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

6.13 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

I, J offene Intervalle, $f : I \to J$ differenzierbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann:

$f^{-1} : y \to I$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ mit $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$

Beweis: Sei $t = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (*)$

Es gilt: $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

$$\frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \overset{(*)}{=} \frac{x_0+h-x_0}{t}$$
$$= \frac{f^{-1}(f(x_0+h)) - f^{-1}(f(x_0))}{t} \overset{(*)}{=} \frac{f^{-1}(f(x)+t) - f^{-1}(f(x))}{t}$$
$$\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \square$$

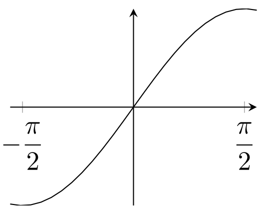
6.14 Beispiele

a) Für $f(x) = x^n$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$
$\Rightarrow$ Ableitung von f^{-1} wird in $y = f(0) = 0$ unendlich groß, da $f'(0) = 0$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n+1}} = \frac{1}{n\sqrt{y^{n-1}}} \quad \text{Für } y \neq 0$$

b) $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$
Sei $y = \sin x,\ y \in (-1, 1)$

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



Analog:

- $\arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in (-1, 1)$
- $\arctan' y = \frac{1}{1+y^2} \qquad y \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccotan}' y = \frac{1}{1+y^2} \qquad y \in \mathbb{R}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) = e^x$
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(y) = \ln y$

$$\Rightarrow \ln' y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \ln(|y|)' = \begin{cases} \frac{1}{y} & y > 0 \\ (-1) \cdot \frac{1}{-y} & y < 0 \text{ (Kettenregel)} \end{cases}$$
$$= \frac{1}{y} \text{ für } y \neq 0$$

6.15 Logarithmische Ableitung

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, f$ differenzierbar, ist

$$(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{(6.14c + Kettenregel)}$$

Beispiel: $f'(x) = e^x \cdot (\sin x + 2) \cdot x^5 \quad x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
&\ln(|f(x)|) = x + \ln(\sin x + 2) + 5 \cdot \ln|x| \\
&\Rightarrow (\ln|f(x)|)' = 1 + \frac{\cos x}{\sin x + 2} + \frac{5}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
&\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x + 2} + \frac{5}{x}\right)(e^x(\sin x + 2)x^5) \\
&= x^4 e^x (x(\sin x + 2)) + x \cdot \cos x + 5\sin(x+2) \text{ für } x \neq 0
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Ableitung auch auf Funktionen mit Werten in ganz $\mathbb{R}$ anwendbar ist. Dazu bildet man die stetige Fortsetzung von $f'(x)$ auf $\{x \mid f(x) = 0\}$

$\Rightarrow$ Beispiel gilt auch für $x = 0$. Dann ist $f'(0) = 0$.

6.16 Satz: Ableitung elementarer Funktionen

- $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
- $(x^x)' = (\ln x + 1) \cdot x^x, x > 0$

Beweis:

$$(a^x)' = (e^{\ln(a^x)})' = (e^{x \cdot \ln a})' \underset{\text{innere} \cdot \text{äußere Ableitung}}{=} (\ln a) \cdot (e^{x \cdot \ln(a)}) = (\ln a) \cdot a^x$$

Rest analog $\square$

Kurvendiskussion

6.17 Definition: Extremum

$f : D \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in D$ ein lokales $\underbrace{\text{Maxmimum (Minimum)}}_{\text{Extremum}}$,

wenn es ein Intervall $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D, \delta > 0$ gibt, so dass

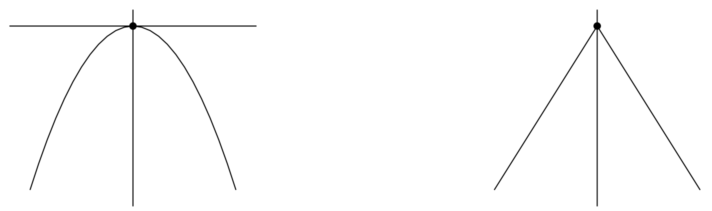
$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in U$ ($\leftarrow$ Umgebung von x)

f besitzt in $x_0 \in D$ ein globales Maxmimum (Minimum),

wenn $f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in D$

6.18 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.



Differenzierbar Nicht differenzierbar

Beweis: Sei $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ und

$\underbrace{f(x_0) \geq f(x)}_{\text{Maxmimum}} \quad \forall x \in U.$

- $f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h < s.$
- f differenzierbar $\Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\boxed{h} > 0} \leq 0 \text{ und}$$

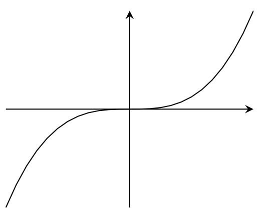
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\boxed{h} < 0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Für Minimum Analog $\square$

6.19 Anmerkung

$f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung aber keine hinreichende Bedingung.

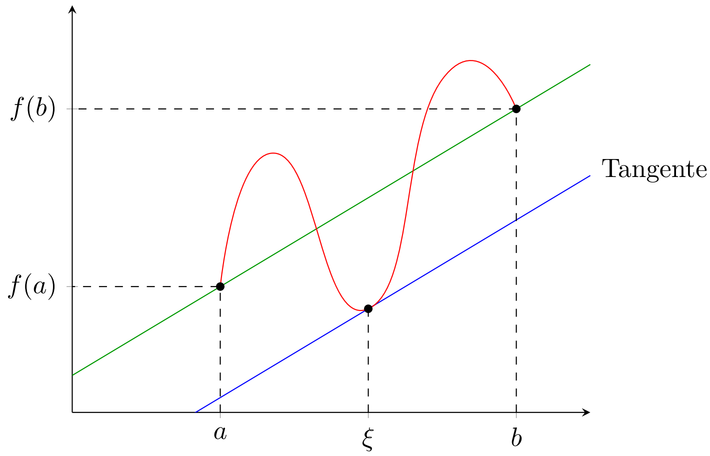
Beispiel: $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ einen Sattelpunkt mit Steigung 0.



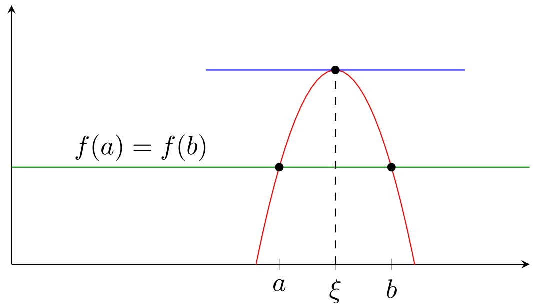
f hat lokales Extremum $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$

6.20 Mittelwertsätze, Satz von Rolle (1652–1719)

1.



2.



Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

stetig und differenzierbar in (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

1. $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

   1. Mittelwertsatz

2. $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

   Satz von Rolle

3. $\exists \xi \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

   2. Mittelwertsatz

Beweis:

2. f stetig in $[a, b]$

   $\underset{3.36}{\Rightarrow}$ f besitzt Maxmimum M und Minimum m in $[a, b]$.

   D.h: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

1. Fall: Beide Extrema werden auf dem Rand angenommen:
$f(a) = f(b) \Rightarrow m = M$
$\Rightarrow f$ konstant $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a,b)$

2. Fall: Ein Extremum wird auf dem Rand angenommen:
$\Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f(\xi)$ Extremum $\underset{6.18}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$.

3. Es ist $g(b) \neq g(a)$, denn sonst gäbe es ein $x \in (a,b)$ mit $g'(x) = 0$ (Rolle)

   Hilfsfunktion: $h(x) = f(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$

   Es ist $h(b) - h(a) = 0$. h stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b).

   $\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a,b) : h'(\xi) = 0$

   $\Rightarrow \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

1. Folgt aus 3. für $g(x) = x$.

6.21 Monotoniekriterium

Sei $f : [a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar.

1. $f'(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ monoton $\underset{\text{(fallend)}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$
2. $f'(x) \underset{(<)}{>} 0 \quad \forall x \in (a,b) \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ streng monoton $\underset{\text{(fallend)}}{\text{wachsend}}$ auf $[a,b]$
3. $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ konstant auf $[a,b]$

Beweis:

1. $(\Rightarrow)$: Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$

   $\underset{6.20.1}{\Rightarrow} \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0$

   $\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

   $(\Leftarrow)$: Sei f monoton wachsend auf $[a,b]$ und differenzierbar in (a,b)

   $\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

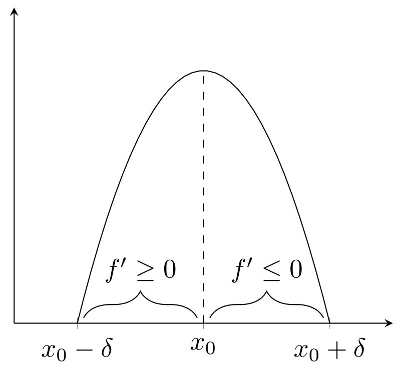
   Da $\dfrac{(f(x+h) - f(x)) \geq 0}{h > 0} \geq 0$ für $h < 0$ und
   $\dfrac{(f(x+h) - f(x)) \leq 0}{h < 0} \leq 0$ ist $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

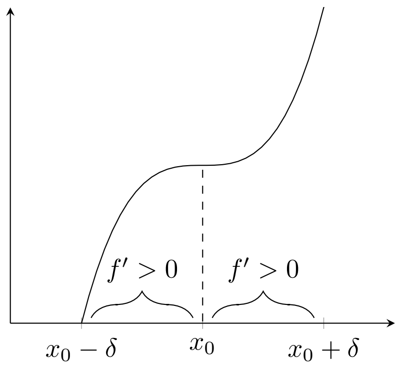
2. + 3. analog $\square$

Bemerkung zu 2.: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend aber $f'(0) = 0$

6.22 Satz: Hinreichende Bedingung für lokale Extrema I

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I, f'(x_0) = 0$

1. 

2. 

1. $f'(y) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall (x_0 - \delta, x_0)$ und
   $f'(y) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall (x_0, x_0 + \delta)$ für ein $\delta < 0$

   $\Rightarrow f$ hat ein lokales Minimum (Maximum) in x_0.
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

   [1. hat einen Vorzeichenwechsel, 2. nicht]

Beweis: Für lokales Minimum in x_0:

Z.z: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Da $x \in U \setminus x_0 \underset{6.20.1}{\Rightarrow} \exists \xi$ zwischen x und x_0;
$\xi \neq x_0$, so dass $f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0)$ (*)

1. Fall: $x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$$\Rightarrow x - x_0 < 0, f'(\xi) \leq 0$$
$$\underset{(*)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

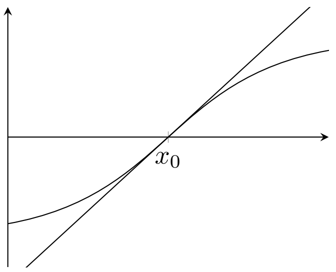
2. Fall: $x \in (x_0, x_0 + \delta)$

$$\Rightarrow x - x_0 > 0, f'(\xi) \geq 0$$
$$\underset{(*)}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

Insgesamt: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U$

(Rest analog) $\square$

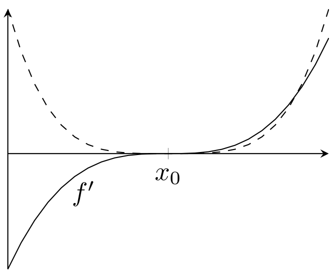
6.23 Bemerkung



Vorzeichenwechsel von - nach +
$\Rightarrow f$ hat Minimum in x_0

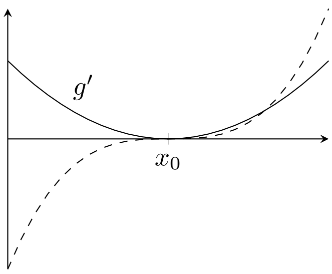
f' weist in x_0 einen Vorzeichenwechsel auf, wenn die Steigung von f' in x_0 positiv (negativ) ist, d.h. wenn $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$).

Wenn $f''(x) = 0$, ist über einen Vorzeichenwechsel keine Aussage möglich.



$f''(x_0) = 0$ und VZW

$f(x) = x^4$
$f'(0) = 0$
$f''(0) = 0$



$g''(x_0) = 0$ und kein VZW

$g(x) = x^3$
$g'(0) = 0$
$g''(0) = 0$

6.24 Satz: Hinreichende Bedingung für Extrema II

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$ 2-mal differenzierbar.

$(f'(x_0) = 0, f''(x_0) \underset{(<)}{>} 0) \Rightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Minimum (Maximum)

Beweis: Für Minimum:

Es ist $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)}{h} = f''(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \exists \delta < 0 : \frac{f'(x_0+h)}{h} > 0 \quad \forall \; |h| < \delta, h \neq 0 \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Fall}: & -\delta < h < 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0+h) < 0 \\ \text{2. Fall}: & 0 < h < \delta \underset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0+h) > 0 \end{array}\right\} \text{Vorzeichenwechsel}$$

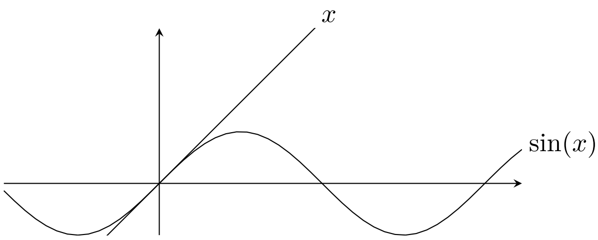
$f'(x_0) = 0$ und Vorzeichenwechsel $\underset{6.22}{\Rightarrow}$ f hat ein lokales Minimum in x_0.

Rest analog $\square$

Die Regeln von L'Hospital (1661–1704)

Problem: Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 0^0 usw...

Beispiel: $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} ?$



$f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ haben in $x = 0$
die selbe Tangente ($t(x) = x$) $\Rightarrow f, g$ konvergieren
mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0, wenn $x \to 0$.

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \to 1 \text{ für } x \to 0.$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{1} 1$$

Grundidee: $f(a) = g(a) = 0; f, g$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

6.25 Satz: Regeln von l'Hospital

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und es sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

Gilt $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ \infty \end{cases}$ und existert $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
so existiert auch $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Entsprechendes gilt auch für $x \to b$.

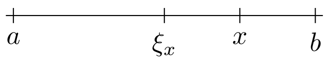
Beweis: <u>Fall 1:</u> $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = 0$

f, g differenzierbar auf $(a, b) \Rightarrow f, g$ stetig auf (a, b).

Setze f, g zu stetiger Funktion auf $[a, b)$ fort, d.h. $f(a) = g(a) = 0$.

$\underset{6.20.3}{\Rightarrow}$ Für $x \in (a, b)$ gibt es $\xi_x \in (a, x)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$



Es gilt: $x \to a^+ \Rightarrow \xi_x \to a^+$. Daraus folgt die Behauptung.

<u>Fall 2:</u> $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} g(x) = \infty$.

Sei $\beta = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ und sei $\epsilon > 0$.

a)
$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : \left| \frac{f'(x)}{g(x)} - \beta \right| < \epsilon \quad \forall x \in (a, c)$$
$$\underset{6.20.3}{\Rightarrow} \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \beta \right| < \epsilon \quad \forall x \in (a, c)$$

b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt:

$f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ für $x \in (a,]$

da $f(x)$, $g(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \infty$.

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}$$
$$= \underbrace{\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)}}_{\text{beschränkt für } x \in (a, c)} - \left(\frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{\underbrace{1 - \frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 1 \text{ für } x \to a^+}} - 1 \right) \xrightarrow[x \to a^+]{} 0$$
$$\Rightarrow \ \exists d \in (a, c) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \underbrace{\frac{f(x) - c(x)}{g(x) - g(c)}}_{(*)} \right| < \epsilon \quad \forall x \in (a, d)$$
$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \beta \right| = \left| \frac{f(x)}{g(x)} - (*) + (*) - \beta \right|$$
$$\leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - (*) \right| + \left| (*) - \beta \right| \underset{\text{a), b)}}{<} 2\epsilon$$

<u>Fall 3:</u> $b = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Substituiere: $x = \frac{1}{t} \quad x \to \infty \Leftrightarrow t \to 0^+$

D.h.: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right)$. Analog für $g\left(\frac{1}{t}\right)$ und $\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$.

$$\underset{\text{Fall 1/2}}{\Rightarrow} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(f'(\frac{1}{t}))'}{(g(\frac{1}{t}))'} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})}$$

Durch Resubstitution folgt die Behauptung $\square$

6.26 Beispiele

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) Sei $\alpha > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

D.h.: $\ln(x)$ wächst langsamer als jede Potenz von x.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = ... = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$

D.h.: e^x wächst schneller als jede Potenz von x.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x \to \infty}{\frac{1}{x} \to \infty}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{-x^{\cancel{2}}}{1} = 0$$

7 Integralrechnung

Im Folgenden sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

7.1 Bemerkung: links–/rechtsseitige Ableitung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Der Grenzwert

$f'(a) := \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (falls existent)

heißt rechtsseitige Ableitung von f in a und

$f'(b) := \lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ (falls existent)

heißt linksseitige Ableitung von f in b.

7.2 Definition: Stammfunktion

Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Dan heißt $F : D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f \Leftrightarrow$

1. F ist differenzierbar
2. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$

7.3 Beispiel

Stammfunktionen von $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$:

- $F(x) = \frac{1}{2}x^2$
- $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

7.4 Satz

a) Ist F Stammfunktion von f, so auch $F + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

b) Sind F, G Stammfunktionen von f, so existert $c \in \mathbb{R}$ mit $G = F + c$.

Beweis:

a) $(F + c)'(x) = F'(x) = f(x)$

b) $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow \; \exists c \in \mathbb{R} : G(x) - F(x) = c \quad \square$

7.5 Bemerkung: Unbestimmtes Integral

$\int f(x)\,dx$ Sei Bezeichnung für eine beliebige Stammfunktion von f, falls eine solche existiert. Ist F Stammfunktion, so gilt $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

$\int f(x)\,dx$ heißt unbestimmtes Integral.

7.6 Beispiele

a) Für $\alpha \neq -1 : \displaystyle\int x^\alpha \,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Einschränkungen:

- $\alpha \in \mathbb{Z},\; \alpha \leq -2 \Rightarrow x \neq 0$
- $\alpha \notin \mathbb{Z} \Rightarrow D \subseteq \mathbb{R}_{>0}$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad x \neq 0$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c \quad x \in \mathbb{R}$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \quad x \in (-1,1)$

7.7 Satz

Seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\int \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\,dx = \lambda_1 \int f_1(dx) + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx$$

sofern f_1, f_2 Stammfunktionen haben.

Beweis: Folgt aus 6.8a+b, 7.1 $\square$

7.8 Beispiel

$$\int 4x^2 + 3 - \frac{2}{x}\,dx \underset{\substack{7.6\\7.7}}{=} \frac{4}{3}x^3 + 3x - \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$$

7.9 Satz: Partielle Integration

Für $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar gilt:

$$\int f_1'(x) f_2(x)\,dx = f_1(x) f_2(x) - \int f_1(x) f_2'(x)\,dx$$

sofern $f_1 \cdot f_2'$ eine Stammfunktion besitzt.

Beweis:

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) - \int f_1(x) \cdot f_2'(x)\,dx)'$$
$$\underset{6.8}{=} f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)$$
$$= f_1'(x) \cdot f_2'(x) \quad \square$$

7.10 Beispiele

a) $$\int \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)}\,dx$$
$$= (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x)\,dx$$
$$= (-\cos x) \cdot x + \sin x + c$$

b) $$\int \ln x\,dx = \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)}\,dx = x \cdot \ln x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1}\,dx$$
$$= x \cdot \ln x - x + c, \quad x > 0$$

c) $\displaystyle\int \underbrace{e^x}_{f'} \cdot \underbrace{\cos x}_{g}\, dx = e^x \cos x + \int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g}\, dx$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int e^x \cos x\, dx} = I$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^x(\cos x + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + c$$

7.11 Satz: Substitutionsregel

Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $\varphi : D_1 \to D_2$ differenzierbar und $f : D_2 \to \mathbb{R}$ mit Stammfunktion F.

Dann:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \qquad \Big|\, y = \varphi(x)$$

Beweis: Kettenregel

$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \quad \square$

7.12 Beispiele

a) $\varphi : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\varphi(x) \neq 0$

$$\forall x \in D \underset{7.11}{\Rightarrow} \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy \quad \Big|\, y = \varphi(x)$$

$$= \ln|y| + c = \ln|\varphi(x)| + c \quad \text{(vgl. 6.15)}$$

z.B.:

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$
- $\displaystyle\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx$

  $\displaystyle= -\ln|\cos x| + c, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

b) $f : D \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$

$$\Rightarrow \int f(\underbrace{ax+b}_{\varphi(x)})\, dx = \frac{1}{a} \int f(\underbrace{\varphi(x)}_{ax+b}) \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{a}\, dx$$

$$\underset{7.11}{=} \frac{1}{a} \int f(y)\, dy \quad \Big|\, y = ax + b$$

z.B.:

- $$\int \frac{1}{(3x+2)^5}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y^5}\,dy \quad \Big|\, y = 3x+2$$
  $$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{y^4} + c = \frac{1}{-12(3x+2)^4} + c$$

7.13 Bemerkung

a) $$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

d.h.: $y = \varphi(x),\ dy = \varphi'(x)\,dx \quad \Big|\, :\ dx$

$$\frac{dx}{dy} = \varphi'(x) \quad \text{(vgl. 6.2.1)}$$

z.B.: $$\int \frac{x}{2x+1}\,dyx \quad \Big|\, y = 2x+1$$

$dy = 2dx$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x+1-1}{2x+1}\cdot 2\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \underbrace{\frac{y-1}{y}}_{1-\frac{1}{y}}\,dy = \frac{1}{4}(y - \ln|y|) + c$$

$$-\frac{1}{4}(2x+1-\ln(2x+1)) + c$$

b) Falls $y = \varphi(x)$ bijektiv, so ist

$x = \varphi^{-1}(y)$ und $dx = (\varphi^{-1}(y))'\,dy$

Daraus ergibt sich ein alternativer Lösungsweg:

$$\int \frac{x}{2x+1}\,dx \quad \Big|\, y = 2x+1 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{1}{2}(y-1)}_{\varphi^{-1}(y)}$$

$$dx = \frac{1}{2}\,dy$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(y-1)}{y}\cdot\frac{1}{2}\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{y-1}{y}\,dy = \ldots \quad \text{(a)}$$

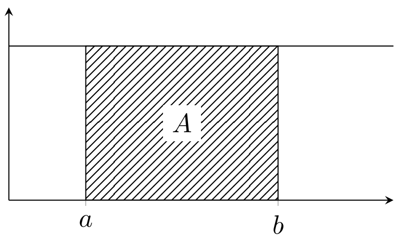
c) Auf komplizierte Brüche wendet man <u>Partialbruchzerlegung</u> an.

Hier nur ein Beispiel (muss man nicht wissen):

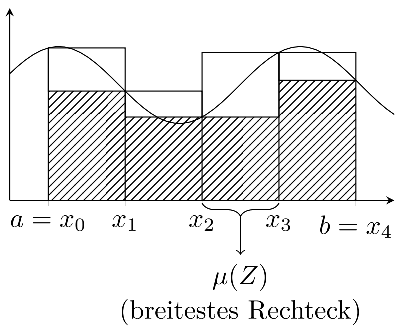
$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+c)x}{x(x^2+1)}$$
$$\Rightarrow (A+B)x^2 + Cx + A = 1$$
$$\Rightarrow A+B=0, \quad A=1 \Rightarrow B=-1$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}\,dx$$
$$= \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Bestimmte Integrale

7.14 Motivation: Flächenberechnung



$f(x) = c$
$A = (b-a) \cdot c$



Unterteilung in Rechtecke, die die Fläche nach oben und unten annähern.

Bilde Grenzwerte für $\mu(Z) \to 0$, d.h. man verfeinert die Unterteilung sukzessive.

7.15 Definition: Zerlegung

Eine Zerlegung von $[a,b]$ ist eine Menge $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \subseteq [a,b]$
mit $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

$\mathfrak{Z}[a,b]$ heißt die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$.

Die Länge des größten Teilintervalls in $\{[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, ..., n\}$ heißt Feinheit der Zerlegung. Bezeichnung: $\mu(Z)$.

7.16 Definition: Ober–/Untersumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists K > 0 : |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b]$)
und sei $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a, b]$.

Setze $m_i := \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ und $M_i := \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$.

Dann heißt $U(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ Untersumme von f zur Zerlengung Z
und $U(Z, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ Obersumme.

7.17 Definition: Bestimmtes Riemann-Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) f heißt (Riemann–) integrierbar $:\Leftrightarrow$

   1. f ist beschränkt
   2. Für jede beliebige Folge $(Zn) \in \mathfrak{Z}[a, b]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ konvergieren $U(Z_n, f)$ und $O(Z_n, f)$ gegen den selben Wert $A \in \mathbb{R}$.

b) Der Grenzwert A heißt bestimmtes Integral oder (Riemann–) Integral von f über $[a, b]$. Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = A$$

c) Festlegungen:

   - $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$
   - $\displaystyle\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)$

7.18 Beispiele

a) $f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow m_i = M_i = c$$

$$\Rightarrow U(Z, f) = O(Z, f) = \sum_{i=1}^{n} c \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c \cdot (\underbrace{x_n - x_0}_{b-a})$$

b) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Sei $Z = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a,b]$.
In $[X_{i-1}, x_i]$ gibt es sowohl irrationale als auch rationale Zahlen.

$\Rightarrow m_i = 0, M_i = 1$

$$\Rightarrow U(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

$$O(Z,f) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

$\Rightarrow$ Für eine Folge (Z_n) in $\mathfrak{Z}[0,1]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ ist

$\lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} 0(Z_n, f) = 1$

c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

Sei $Z_n = \{\underset{x_0}{\frac{0}{n}}, \underset{x_1}{\frac{1}{n}}, \underset{x_1}{\frac{2}{n}}, ..., \underset{x_n}{\frac{n}{n}}\}$

$$= (Z_n, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(1 - \frac{1}{n})}{n^2 \cdot 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

Analog: $U(Z_n, f) \to \frac{1}{2}$

Problem: Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f) = \frac{1}{2}$

auch für jede andere Folge (Z_n) mit $\mu(Z_n) \to 0$?

$\to$ Ja, wegen

7.19 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und monoton. Dann ist f integrierbar.

Beweis: Sei f monoton wachsend und $Z = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in \mathfrak{Z}[a,b]$

$\Rightarrow m_i = f(x_i - 1) \quad M_i = f(x_i)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow O(Z,f) - U(Z,f) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(\underbrace{x_i - X_{i-1}}_{\leq \mu(Z)}) \\ &\leq \mu(Z) \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \quad \text{(Teleskopsumme)} \\ &= \mu(Z)(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Für jede Folge (Z_n) in $\mathfrak{Z}[a,b]$ mit $\mu(Z_n) \to 0$ gilt daher

$O(Z_n, f) - U(Z_n, f) \to 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} O(Z_n, f) = \lim\limits_{n\to\infty} U(Z_n, f \quad \square$

7.20 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar. (Ohne Beweis)

7.21 Bemerkung

a) Eine beschränkte Funktion f ist Riemann-integrierbar, wenn f endlich viele Sprungstellen besitzt (wegen 7.22b). Vgl auch Bsp 7.18b, wo jedes $x \in [0,1]$ eine Sprungstelle ist.

b) Wenn f negativ auf $[a,b]$ ist, so wird auch $\int_a^b f(x)\,dx$ negativ.

7.22 Satz: Rechenregeln

a) $$\int_a^b \lambda f(x) + g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall c \in [a,b]$$

c) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

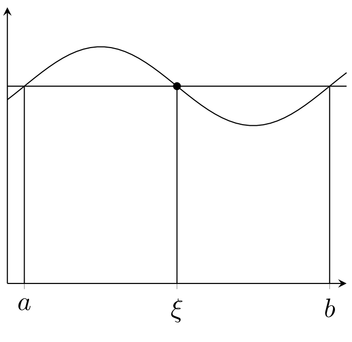
d) $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Beweis anhand von 7.16 und 7.17 $\square$

7.23 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \xi(b-a)$$



Beweis: f stetig auf $[a,b]$

$$\underset{5.30}{\Rightarrow} \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \int [a,b]$$

$$\underset{7.22d}{\Rightarrow} m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \Big| : \underbrace{(b-a)}_{>0}$$

$$\Rightarrow m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{y} \leq M$$

$$\underset{5.24}{\Rightarrow} \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad \square$$