Skript Mathe 2

25. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n: n-tes Folgenglied
n: Index

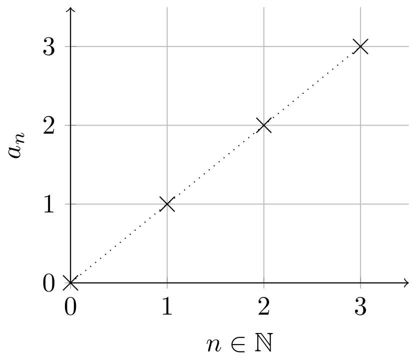
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B: a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n)

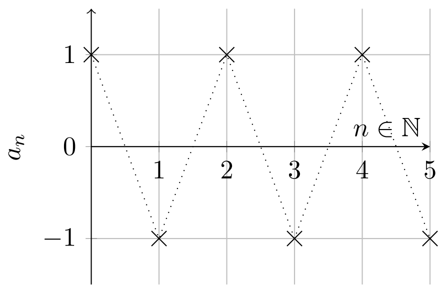
1.2 Beispiele

a) $a_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

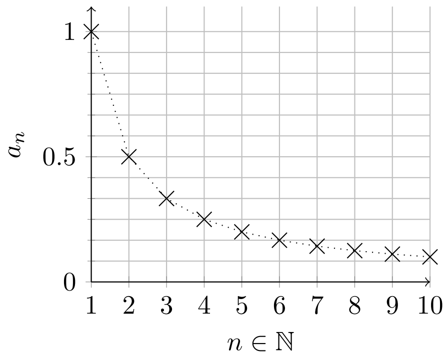
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



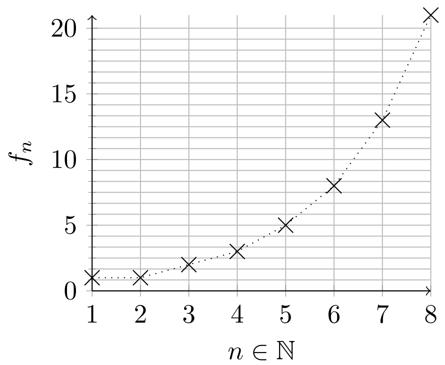
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, ...$



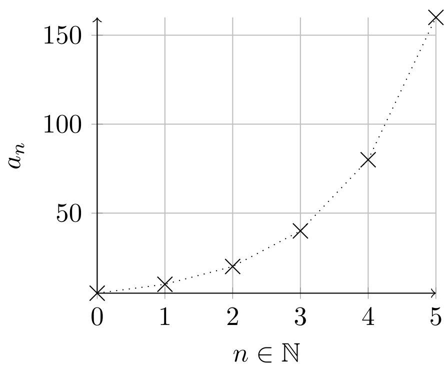
f) Exponentielles Wachstum (z.B von Bakterienstämmen)

q: Wachstumsfaktor
X_0: Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, ...$



g) Logistisches Wachstum

$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$

$r \in [0,4]$: Wachstums-/Sterbefaktor
$X_n \in [0,1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n+1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

Kurz:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

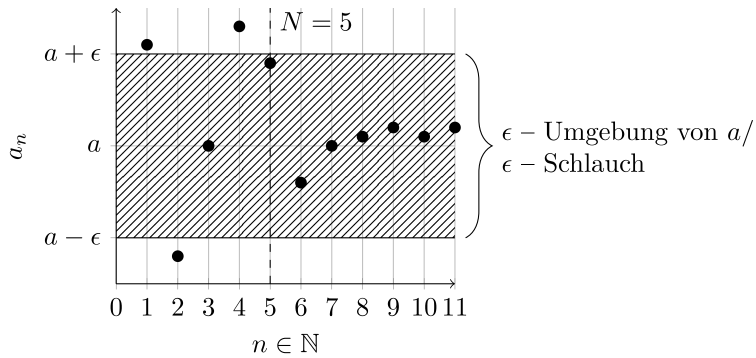
b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.

d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>\frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3+n+5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3+N+5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \ \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \ \forall n \geq N$$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln|q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln|q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln|q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

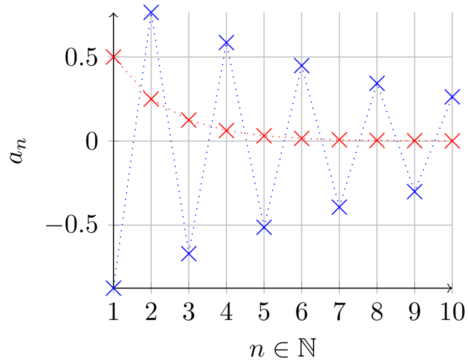
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow}$ (q^n) divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
&||a|-|b|| \leq |a-b| \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \text{ da:} \\
&\bullet\ |a-b+b| \leq |a-b|+|b| && |\ |-b| \\
&\Leftrightarrow |a|-|b| \leq |a-b| \\
&\bullet\ |b-a+a| \leq |b-a|+|a| && |\ |-a| \\
&\Leftrightarrow |b|-|a| \leq |b-a| \\
&\boxed{\Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a-b|}
\end{aligned}
$$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n),(b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda\cdot a_n)=\lambda\cdot a \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

4.)
$$
\begin{aligned}
b\neq 0 \Rightarrow &\bullet\ \exists k\in\mathbb{N}: b_n\neq 0\,\forall n\geq k \\
&\bullet\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$

Seien weiter $(d_n),(e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N}:$$
$$\bullet\ |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$
$$\bullet\ |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$
$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$
$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.)
- Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓
- Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N ✓$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.
$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$
$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow$
$$\exists N_a, N_b \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$
$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$
$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.)
- Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

  Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}: \underbrace{|b_n - b|}_{\underset{1.12}{\geq} |b| - |b_n|} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$
$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$
$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$
$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

  a $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

  Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

  $$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b \cdot b_n}\right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)
$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)
$$\frac{3n^2+1}{-n^2+n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{-n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(-1 + \frac{1}{n}\right)}$$
$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

ann: kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

exponentielles Wachstum

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$
\begin{aligned}
|x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\geq 0} \\
&\underset{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\
&= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \ldots \\
&\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{n^{\cancel{k}+1} t^{k+1} \pm \ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\
&\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, } <1}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0
\end{aligned}
$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$
\begin{aligned}
\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : &\bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\
&\bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c
\end{aligned}
$$

us 1.:

$$
\begin{aligned}
&|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
&\forall n \geq k \\
\Rightarrow &|b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
\leq &\underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N-c\} \quad \square
\end{aligned}
$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \; \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} &\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1 \end{aligned}$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q \; \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, O-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $O(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{beschränkt}\right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

O, o heißen <u>Landau-Symbole</u>

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $O(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

   $a_n \geq (>)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

   $a_n \leq (<)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

   und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.

   $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a kleinste obere Schranke

   $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.

   $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$

   $\underset{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} \quad |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$

   $\Rightarrow a_n \to a$

2. analog $\square$

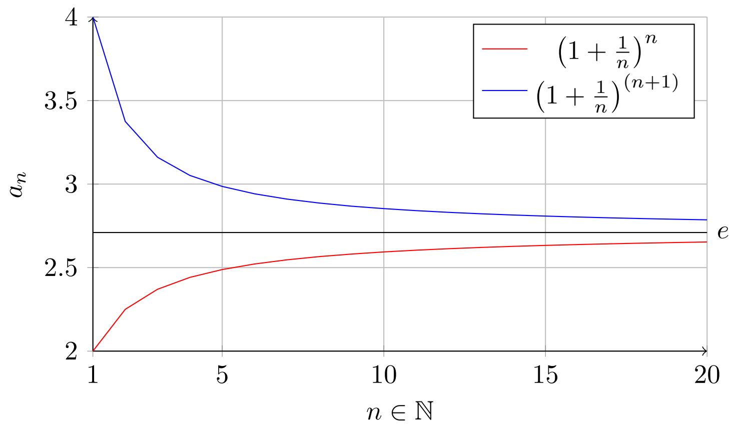
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1\right)$

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \underset{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}
$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}_{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

$$\text{Zeige dazu: } b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1\right)$$

$$\text{Analog: } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \underset{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \geq \frac{1+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \quad (?)$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & (a_n) \text{ hat obere Schranke } b_1 \\
& (b_n) \text{ hat untere Schranke } a_1 \\
\underset{1.23}{\Rightarrow} \quad & (a_n), (b_n) \text{ konvergent.}
\end{aligned}
$$

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. $\square$

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot a_n \underset{1.13/3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\underset{1.8}{\Rightarrow}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**
z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1.

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$a_n = (-1)^n$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k+1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1.

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0,B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\underline{k=1}$: Halbiere $[A_0, B_0]$
  - Falls in der linken Folgenhälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

  Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.
- $\underline{k=2}$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \to 0$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} B_k$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} A_k \underset{1.15}{=} \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k}) \quad \square$