Skript Mathe 2

13. Juni 2018

0.1 Bemerkung

Wegen 5.28 ist $e \approx 2,718$ die Basis zur Exponentialfunktion $\exp(x)$.
Man erhält $e^x = \underset{4.11a2}{\exp}(x \cdot \ln(\underset{=\exp(1)}{e})) = \exp(x)$

Siehe auch 4.11 Exkurs

0.2 Minimax-Theorem von Weierstraß

Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ besitzt sowohl ein Minimum als auch ein Maximum, d.h:

$\exists x_*, x^* \in [a,b] : f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a,b]$

Beweis: Genügt z.Z: f hat Maximum (Minimum analog).

Sei $s := \sup f([a,b])$ (kleinste obere Schranke des Bildes von f).

Zeige: $s < \infty$ und $s \in f([a,b])$.

Sei (X_n) Folge in $[a,b]$ mit $f(X_n) \to s$.

(X_n) beschränkt $\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge (X_{n_j}) mit $\lim\limits_{i\to\infty} X_{n_j} = \tilde{x}, \tilde{x} \in [a,b]$, da $[a,b]$ abgeschlossen, ist f stetig.

$\Rightarrow \lim\limits_{j\to\infty} f(X_{n_j}) = s = f(\tilde{x})$
$\Rightarrow s$ Funktionswert von $\tilde{x}$ und somit $f < \infty$
$\Rightarrow s \in f([a,b])$ und somit $f(x) \leq s \quad \forall x \in [a,b]$

0.3 Beispiele

a) $f(x) = x^2$ auf $[0,1]$
   $f(x_*) = 0, f(x^*) = 1$

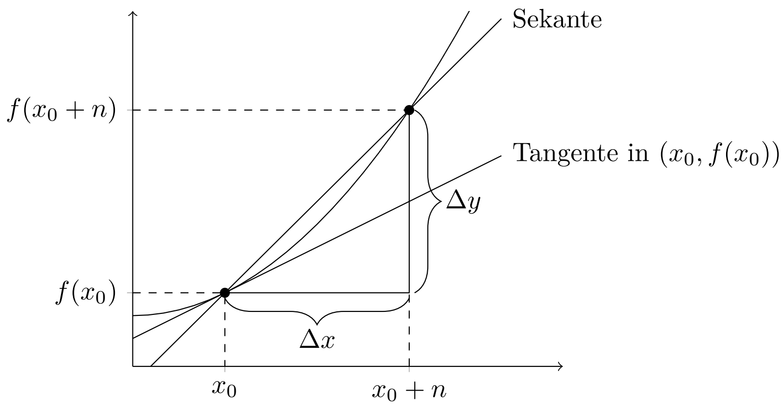
b) Falls der Definitionsbereich nicht abgeschlossen ist:
   - $f(x) = x^2$ besitzt auf $(0,1)$ weder Minimum noch Maximum.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt auf $(0,1)$ weder Minimum noch Maximum, jedoch ist $f(\underbrace{x_*}_{1}) = 1$

c) $f(x) = \sin(x)$ hat je nach Größe des festgelegten Definitionsbereiches mehrere Minimal/-Maximalstellen

1 Differenzierbare Funktionen

1.1 Bemerkung: Tangenten



Die Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ hat die Steigung

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \mathrel{\widehat{=}} \text{Differenzenquotient}$$

Je kleiner h, desto besser nähert sich die Sekante an die Tangente $(x_0, f(x_0))$ an. Daraus ergibt sich die Tangentensteigung: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, falls der Grenzwert existiert.

In diesem Kapitel sei I immer offenes Intervall.

1.2 Definition: Ableitung

Sei $f : I \to \mathbb{R}, x \in I$

1. f heißt differenzierbar in x_0, falls $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt die Ableitung von f in x_0 und wird mit $f'(x_0)$ oder $\dfrac{d}{dx} f(x_0)$ bezeichnet.
2. Ist f differenzierbar in jedem $x_0 \in I$, so heißt f differenzierbar (auf I) und man nennet $f' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die Abbildung von f.

1.3 Bemerkung

Setzt man in 6.2/1 $x = x_0 + h$, so erhält man für den Grenzwert des Differenzenquotienten $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1.4 Beispiele

a) $f(x) = c$ für $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 = f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) $(x^2)' = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}:$

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\cancel{h} + h^2 - \cancel{x^2}}{\cancel{h}} = 2x + h \to 2x$$

c) $(x^n)' = nx^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^k\right) - x^n}{h}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1}\right) - \underbrace{x^n}_{\substack{\to 0 \text{ für} \\ h \to 0,\ k \neq 1}}$$

$$\to nx^{n-1} \text{ für } h \to 0$$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \neq 0:$

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - (x+h)}{(x+h)x \cdot h} = \frac{-1}{x \cdot (x+h)}$$

$$\to -\frac{1}{x^2} \text{ für } h \to 0$$

e) Analog zu c) erhält man

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad \forall x \neq 0$$

f) $(e^x)' = e^x$.

Es ist $e^x = \exp(x)$ (5.29). Wir benutzen in Beweis von 5.28 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\exp(h) - 1}{h} = 1$. Damit gilt:

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{\exp(x)\exp(h) - \exp(x)}{h}$$

$$= \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \exp(x)$$

g) $(\sin x)' = \cos(x), \ (\cos x)' = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ohne Beweis. Man zeigt dies, indem man sin und cos mit Hilfe von exp darstellt ($\rightarrow$ Mathe III)

1.5 Satz: Lineare Approximation

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$.

Dann sind äquivalent:

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es gibt eine Funktion $R : I \rightarrow \mathbb{R}$, stetig in x_0, $R(x_0) = 0$ und ein $m \in \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{m(x - x_0)}_{\text{Tangente an } f \text{ in } x_0} + R(x)(x - x_0) \quad (*)$$

Bemerkung:

- In $\mathbb{R} : m = f'(x_0)$
- 2. heißt: f ist in x_0 durch eine Gerade (Tangente) approximierbar.