Skript Mathe 2

11. Juni 2018

Erhalte Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$ mit

- $a_n \nearrow, b_n \searrow$
- $b_n - a_n \to 0$
- $a_n \leq b_n$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$

Es ist $f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Da f stetig, gilt:

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{\leq 0} = f(c)$

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{\geq 0} = f(c)$

$\Rightarrow f(c) = 0 \quad \square$

Dieses Verfahren verwendet man auch zur Nullstellenberechnung.

0.1 Satz: Zwischenwertsatz allgemein

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, y sei eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Dann gibt es $\overline{x} \in [a, b]$ mit $f(\overline{x}) = y$.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A)

$f(a) \geq y \geq f(b)$

Setze $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \to f(x) - y \Rightarrow$

- $g(a) = f(a) - y \geq 0$
- $g(b) = f(b) - y \geq 0$
- g stetig

$\Rightarrow \exists\, \overline{x} \in [a, b] : y(\overline{x}) = 0 \Rightarrow f(\overline{x}) = g \quad \square$

0.2 Satz

Sei D ein Intevall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1. $f(D)$ Intervall oder enthält genau ein Element
2. f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton

Beweis:

1. Falls $f(D)$ nur ein Element enthält: fertig ✓

   Enthalte $f(D)$ mindestens 2 Elemente $y_1 < y_2$.

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in D : \quad f(x_1) = y_1 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\; f(x_2) = y_2 \\ &\Rightarrow x_1 \neq x_2 \end{aligned}$$

   Zeige: Jedes $y \in [y_1, y_2]$ ist in $f(D)$:

   Falls $x_1 < x_2$, gibt es wegen 5.24 ein $x \in \underbrace{[x_1, x_2]}_{\subseteq D}$ mit $f(x) = y$.

   Analog für $x_2 < x_1$.

   $\Rightarrow y \in f(D) \Rightarrow f(D)$ Intervall.

2. $(\Leftarrow)$: Hierzu braucht man die Stetigkeit nicht:

   f streng monoton wachsend (fallend). Sei $x = y$.
   O.B.d.A: $x < y$

   $$\Rightarrow f(x) \underset{(>)}{<} f(y) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

   $(\Rightarrow)$: Hierzu braucht man die Stetigkeit:

   Kontraposition: Sei f nicht streng monoton.

   $\Rightarrow \exists x < y < z \in D : f(x) < f(y)$ und $f(y) \geq f(z)$
   (oder $f(x) \geq f(y)$ und $f(y) \leq f(z)$).

   $\underset{5.24}{\Rightarrow}$

   - f nimmt in $[x, y]$ jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an.
   - f nimmt in $[y, z]$ jeden Wert zwischen $f(y)$ und $f(z)$ an.

   $\Rightarrow$ Mindestens ein Wert wird doppelt getroffen. $\square$

0.3 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f : D \to f(D)$ bijektiv und stetig.

Dann gilt für die Umkehrfunktion f^{-1}

1. f^{-1} ist im selben Sinne streng monoton wie f

2. f^{-1} ist stetig

Beweis:

1. f stetig und injektiv $\underset{5.25/2.}{\Rightarrow}$ f streng monoton.

   Zeige Aussage für f streng monoton wachsend:

   Für $y_1 < y_2;\ y_1, y_2 \in f(D)$ gibt es $x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

   Es gilt: $\underbrace{y_1}_{=f(x_1)} < \underbrace{y_2}_{=f(x_2)} \underset{\substack{f \text{ streng monoton} \\ \text{wachsend}}}{\Leftrightarrow} x_1 < x_2$

   $\Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$
   $\Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

2. f stetig und injektiv $\underset{5.25}{\Rightarrow}$ $f(D)$ Intervall, f streng monoton.

Annahme: f streng monoton waschend.

Sei $y_0 \in f(D)$. z.Z: f^{-1} stetig in y_0. Setze $x_0 := f^{-1}(y_0)$.

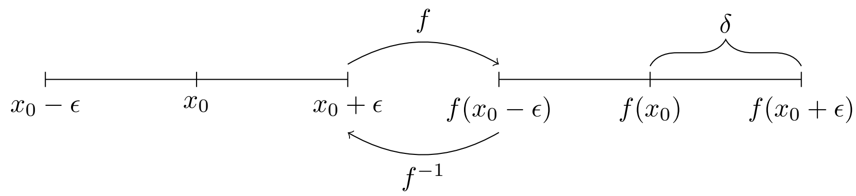
1. Fall: x_0 kein Randpunkt von D.

Mit ϵ–δ–Kriterium: Sei $\epsilon > 0$, so dass $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq D$.

f streng monoton wachsend

$\Rightarrow f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$
$\Rightarrow (f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)) \subseteq f(D)$

da $f(D)$ Intevall.



Sei $\delta := \min\{|y_0 - f(x_0 + \delta)|, |y_0 - f(x_0 - \epsilon)|\}$

$\Rightarrow f^{-1}((y_0 - \delta, y_0 + \delta)) \subseteq (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

D.h.: $|y - y_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f^{-1}(y)}_{x} - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}| < \epsilon$

Analog für streng monoton fallend.

2. Fall: x_0 linker Randpunkt von D:
Analog zu Fall 1 mit $[x_0, x_0 + \epsilon] \subseteq D$

3. Fall: x_0 rechter Randpunkt von D:
Analog zu Fall 2. $\square$

0.4 Bemerkung

Wegen 5.26 und 5.21 sind Wurzelfunktionen, $\arcsin, \arccos, \operatorname{arccotan}$ und Logarithmen stetig.

0.5 Satz: $\exp(1) = e$

Beweis: Es ist $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$
(Beweis der Gleichung zeigen wir nicht)

Substitution:

$$y = \exp(x) - 1 \Leftrightarrow$$
$$x = \ln(y+1)$$
$$\underset{\substack{\text{weil exp} \\ \text{stetig ist}}}{\Rightarrow} \lim_{y \to 0} \ln((y+1)^{\frac{1}{y}}) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \ln(y+1)$$
$$[y \to 0 \Leftrightarrow x \to y]$$
$$= \lim \frac{x}{\exp(x) - 1} = 1$$

Wende auf Gleichung exp an

Da exp stetig: $\lim\limits_{y \to 0} (y+1)^{\frac{1}{y}} = \exp(1)$

Insbesondere für $Y_n = \frac{1}{n}$: $\underbrace{\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=e \ (1.28)} = \exp(1) \quad \square$