Skript Mathe 2

23. April 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n: n-tes Folgenglied
n: Index

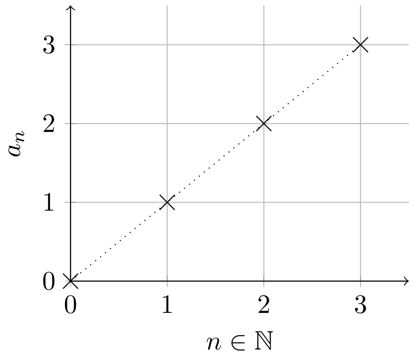
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B: a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n)

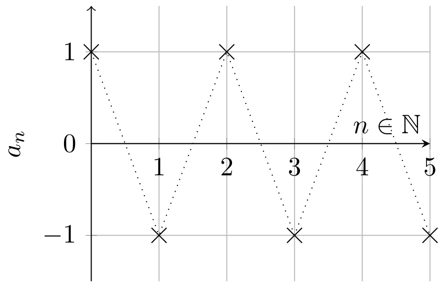
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \; \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

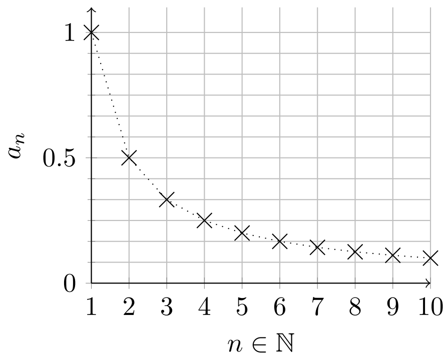
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



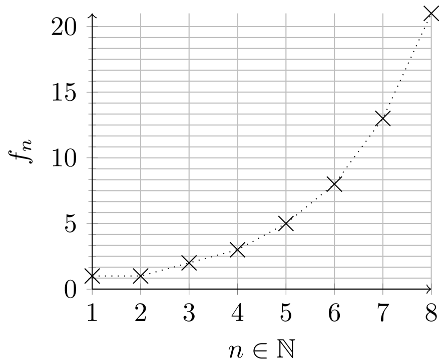
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) <u>Rekursive Folgen</u>, z.B: Fiboacci-Folge.

$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \ldots$



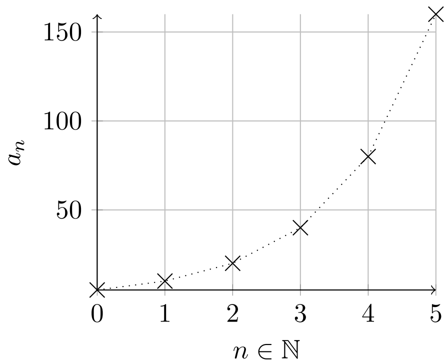
f) <u>Exponentielles Wachstum</u> (z.B von Bakterienstämmen)

q: Wachstumsfaktor
X_0: Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \ldots$



g) <u>Logistisches Wachstum</u>

$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor
$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

Kurz:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

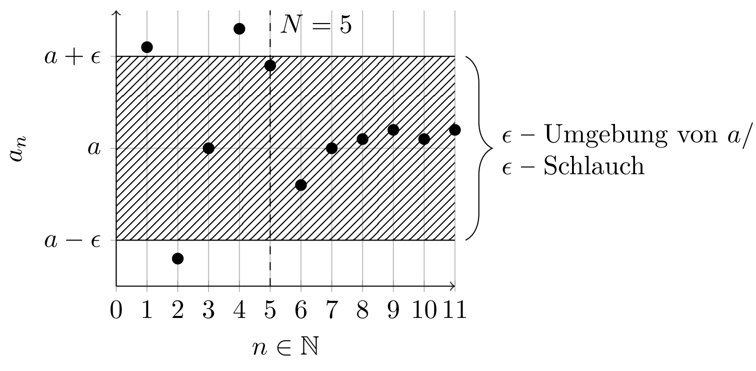
b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.

d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>\frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3+n+5} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3+n+5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3+N+5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \; \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \; \forall n \geq N$$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \; \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln\,|q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\,|q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln\,|q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

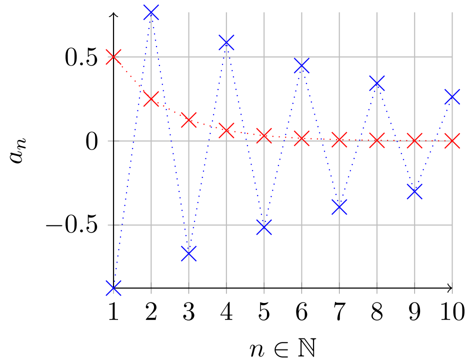
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ da:} \\
&\bullet\ |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \qquad\qquad |\ |{-b}| \\
&\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b| \\
&\bullet\ |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \qquad\qquad |\ |{-a}| \\
&\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a| \\
&\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}
\end{aligned}$$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.)
$$\begin{aligned}
b \neq 0 \Rightarrow &\bullet\ \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\, \forall n \geq k \\
&\bullet\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)
$$\begin{aligned}
&\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : \\
&\bullet\ |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a \\
&\bullet\ |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b \\
&\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \\
&\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}
\end{aligned}$$

2.)

- Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓
- Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.
$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$
$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow$ $\exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$

$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$
$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.)

- Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

  Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\underset{1.12}{\geq} |b| - |b_n|} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$
$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$
$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$
$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

  Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

  Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n+5}{n} = ((-1)^n+5)\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n+5| \le |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)

$$\frac{3n^2+1}{-n^2+n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{-n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(-1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3+\frac{1}{n^2}}{\lim -1+\frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3+\lim\frac{1}{n^2}}{-1+\lim\frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann:

kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

exponentielles Wachstum

Beweis: Es ist $|x| = 1+t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$|x|^n = (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\ge 0}$$

$$\underset{j=k+1}{\ge} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}$$

$$= n^{k+1}\cdot\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \ldots$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n^k}{x^n}\right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \le \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{n^{\cancel{k}+1}t^{k+1} \pm \ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-m}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0$$

$$\le c\cdot\frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, }<1}{}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : \bullet\ |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a$$
$$\bullet\ |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c$$

Aus 1.:

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n|$$
$$\forall n \geq k$$
$$\Rightarrow |b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a|$$
$$\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq\frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N-c\} \quad \square$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow 1 + \epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q \ \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, O-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $O(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ beschränkt}\right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

O, o heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $O(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$a_n \geq (>)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$a_n \leq (<)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$