Skript Mathe 2

9. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n: n-tes Folgenglied
n: Index

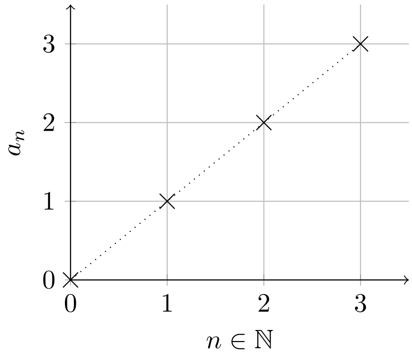
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B: a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n)

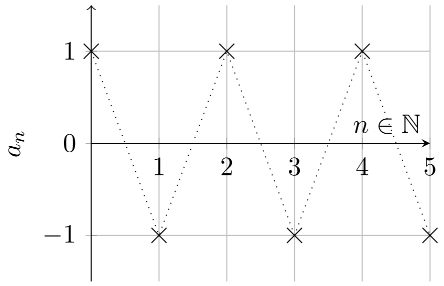
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

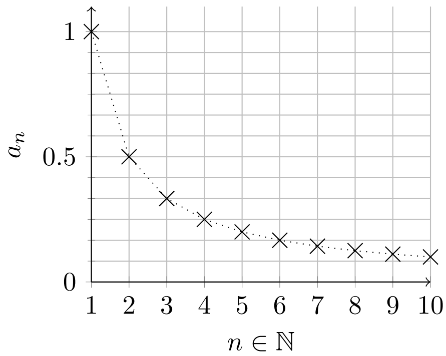
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



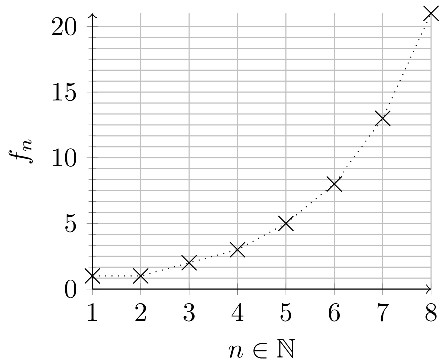
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) <u>Rekursive Folgen</u>, z.B: Fiboacci-Folge.

$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, ...$



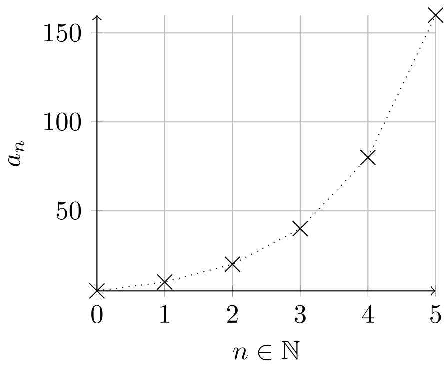
f) <u>Exponentielles Wachstum</u> (z.B von Bakterienstämmen)

q: Wachstumsfaktor
X_0: Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, ...$



g) <u>Logistisches Wachstum</u>

$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$

$r \in [0,4]$: Wachstums-/Sterbefaktor
$X_n \in [0,1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n+1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

   $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

   Kurz:

   $$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

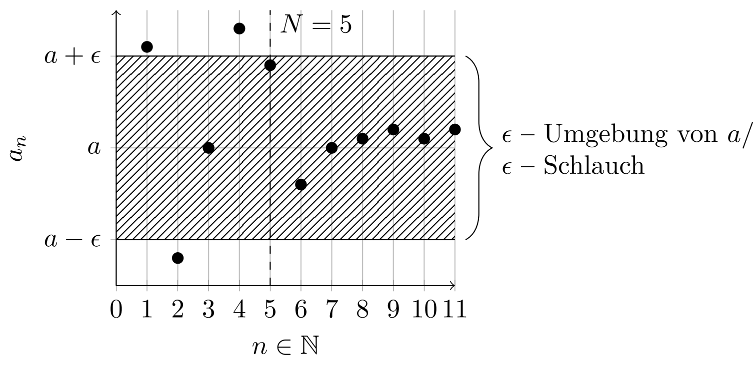
b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt Nullfolge.

d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{N\geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N\geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N>\frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N\geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3+n+5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3+n+5} \underset{N\geq n}{\leq} \frac{1}{N^3+N+5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \; \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \; \forall n \geq N$$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$\Rightarrow |a_n| \leq K \; \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

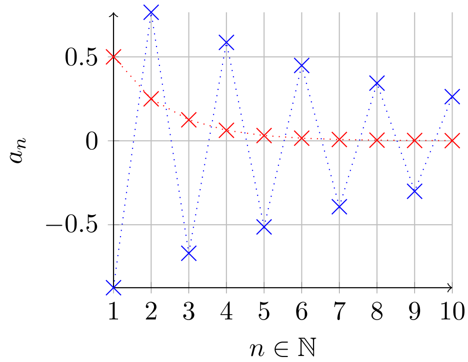
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow} (q^n)$ divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

$\bullet\ |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \qquad \Big|\ |-b|$

$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

$\bullet\ |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \qquad \Big|\ |-a|$

$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$

$\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.) $b \neq 0 \Rightarrow \bullet\ \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0\ \forall n \geq k$

$\bullet\ \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ konvergiert gegen $\dfrac{a}{b}$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$:

$\bullet\ |a_n - a| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$

$\bullet\ |b_n - b| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$

$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

2.) • Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓

• Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$

$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \quad \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$

$|b_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.) • Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\underset{1.12}{\geq} |b| - |b_n|} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

• Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n+5}{n} = ((-1)^n+5)\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n+5| \leq |(-1)|^n+5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n+5$ beschränkt

b)

$$\frac{3n^2+1}{-n^2+n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{-n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}(3+\frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(-1+\frac{1}{n})}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3+\frac{1}{n^2}}{\lim -1+\frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3+\lim\frac{1}{n^2}}{-1+\lim\frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|>1$ und $k\in\mathbb{N}_0$.

Dann:

kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

exponentielles Wachstum

Beweis: Es ist $|x| = 1+t$ für $t>0$.

Für $n>k$:

$$|x|^n = (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{j}1^{n-j}t^j}_{\geq 0}$$

$$\underset{j=k+1}{\geq}\binom{n}{k+1}t^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}$$

$$= n^{k+1}\cdot\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \ldots$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n^k}{x^n}\right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{n^{\cancel{k}+1}t^{k+1}\pm\ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d) Sei $x\in\mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m\in\mathbb{N}$ und $n>m+1>x$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-m}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(m+1)}\cdot\boxed{\frac{x^m}{m!}} = c>0$$

$$\leq c\cdot\frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, }<1}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : \bullet\ |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a$$
$$\bullet\ |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c$$

Aus 1.:

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n|$$
$$\forall n \geq k$$
$$\Rightarrow |b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a|$$
$$\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N-c\} \quad \square$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow 1 + \epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q \ \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{beschränkt}\right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

$\mathcal{O}, o$ heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$a_{n+1} \geq (>) \ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$a_{n+1} \leq (<) \ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

   und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.

   $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a kleinste obere Schranke

   $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.

   $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$

   $\underset{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$

   $\Rightarrow a_n \to a$

2. analog $\quad \square$

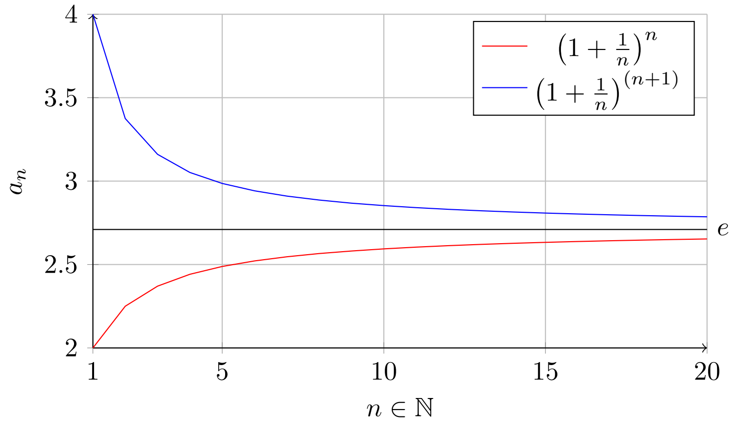
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

  Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1\right)$

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \underset{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1\end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}{}_{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

$$\text{Zeige dazu: } b_n \leq b_{n-1} \left(\Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1\right)$$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \underset{1.24}{\geq} 1+\frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (a_n) hat obere Schranke b_1
(b_n) hat untere Schranke a_1
$\underset{1.23}{\Rightarrow}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. $\square$

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underline{\leq} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot a_n \underset{1.13/3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\underset{1.8}{\Rightarrow}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**
z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1.

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$a_n = (-1)^n$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k+1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1.

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0,B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\underline{k=1}$: Halbiere $[A_0, B_0]$
  - Falls in der linken Folgenhälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

  Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.
- $\underline{k=2}$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \to 0$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} B_k$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} A_k \underset{1.15}{=} \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k})$ $\square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{-\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty} \end{cases}$
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{+\infty : (a_n)\ \forall K > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K\ \forall n \geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} \end{cases}$

1.37 Bemerkung

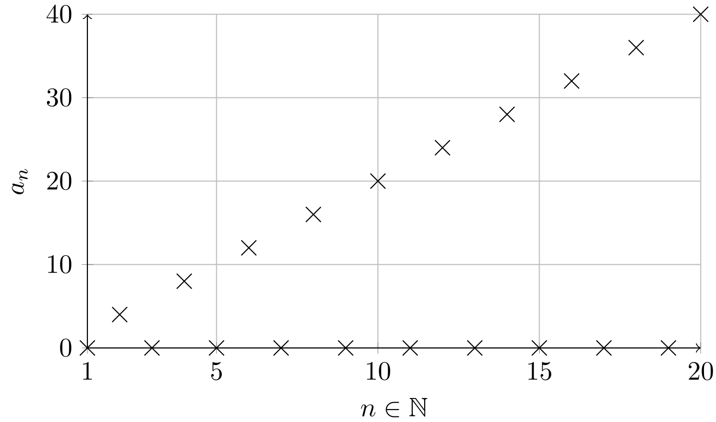
a) $a_n \to \pm\infty$ in obriger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)

   z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
   aber (a_n) mit $(a_n) = n$ divergiert bestimmt gegen ∞

b) $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
   mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl $\limsup$ als auch $\liminf$.

1.38 Beispiel



$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & \text{n gerade} \\ 2n+1, & \text{n ungerade} \end{cases}$

$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)
$:\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \ \forall n, k \geq M$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge <u>in $\mathbb{R}$</u>
(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

Beweis: $(\Rightarrow)$: klar
$(\Leftarrow)$:

1. Zeige (a_n) beschränkt

   Sei (a_n) C-F: $\Rightarrow \quad \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1$
   $\forall n, k \geq R$

   $\underset{k=R}{\Rightarrow} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq \mathbb{R}$
   $\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$

   $\Rightarrow \min\{a_r - 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \leq a_n \leq$
   $\max\{a_R + 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt und besitzt
   konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit
   $a = \lim\limits_{j \to \infty} a_{n_j}$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

   Sei $\epsilon > 0$

   $\Rightarrow$ • $\exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M$

   • $\exists J \in \mathbb{N} : \left|a_{n_j} - a_k\right| < \dfrac{\epsilon}{2} \forall j \geq J$

   Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

   $\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_j}\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_j} - a\right|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right|$
$= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1 \quad |a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \to [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
   es git genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x} = \hat{x}$

2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
   die durch $X_n := f(X_n + 1)$ definierte Folge (X_n) gegen $\hat{x}$.

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \delta_1 + ... + \delta_k$$

heißt (undendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i$.
Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k\to\infty} (S_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n\geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.

4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Parialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum\limits_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ... = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & \text{n ungerade} \\ 1 & \text{n gerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

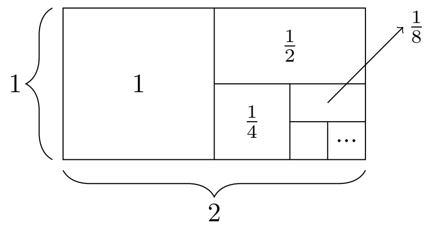
c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + ... + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ konvergent



und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) Geometrische Reihe

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \to \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

- In Beispiel d) is $q = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

  Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.
- $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_{3} = \frac{8}{9}$

  Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k) + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k) = a + b$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c - a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow\ \forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:$

$$\underbrace{|a_n + ... + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$$

$$\Big[= |S_k - S_{n-1}| = \Big|\sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i\Big|\Big]$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty}$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0. \Rightarrow\ \exists N \in \mathbb{N}$: $|a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N$.

Da $|a_n| + ... + |a_k| \leq |a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

- $\lim\limits_{k\to\infty} (S_k) \underset{2.1}{=} \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{K} a_i \right)$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} |S_k| = \left| \lim\limits_{k\to\infty} \right| \quad \left[\begin{array}{c} C_i \to c \\ \Rightarrow |C_i| \to |c| \end{array} (1.13) \right]$,

ist $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \right| = \left| \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \right| \; (*)$

- $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} |a_i| \right) \underset{2.1}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| \; (**)$

$$\text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \quad \Big| \lim_{k\to\infty}$$

$$\underset{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \qquad \square$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.
D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\underset{2.6}{\Rightarrow}$ $\forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}:$

$|a_n + ... + a_k| < \epsilon \; \forall k \geq n \geq N.$

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \; \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. $\square$

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.
Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \underset{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + ... + a_k|$

$\underbrace{\leq}_{0 \leq a_1 \leq b_i \; \forall i} |b_n + ... + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$

2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

2.12 Beispiele

a) $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}}$ ist divergent. (2.9)

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$ (alternierende harminische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum i = 0^{2n}(-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow$: $A_{n+1} - A_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^n a_i$
  $= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$
  $= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$, da $(a_n) \searrow$
- Analog: $(B_n) \searrow$ • $B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in N$
  • $B_n - A_n = a_{2n} \to 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$

  da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

  $\Rightarrow |a_n| \leq (a+\epsilon)^n \quad \forall n \geq N$

  $\Rightarrow \sum\limits_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a+\epsilon)^n}_{<1}$ (geometrische Reihe)

  ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

  Damit konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\boxed{\sum\limits_{k=1}^{N-1} |a_k|}}_{<\infty} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n|$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

  $\Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft

  $\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\underset{2.9}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. $\square$

2.15 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{k^3}{3^k}}}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\left(\sqrt[n]{n}^3\right)}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harminische Reihe) liefert

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}^\alpha\right)} = 1 \quad (\alpha > 0) \to$ keine Aussage möglich.

2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq a \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq ... \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a^{n-N}|a_N| = \dfrac{|a_N|}{a^N}\sum\limits_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konvergent ist.

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_N| > 0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\quad\square$

2.17 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k}{k!}$ konvergiert, da $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}}\cdot\dfrac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \dfrac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$

b) Wie in 2.15b ist für $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$ $\quad(\alpha > 0)$ keine Aussage möglich,

da $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

und somit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.