Skript Mathe 2

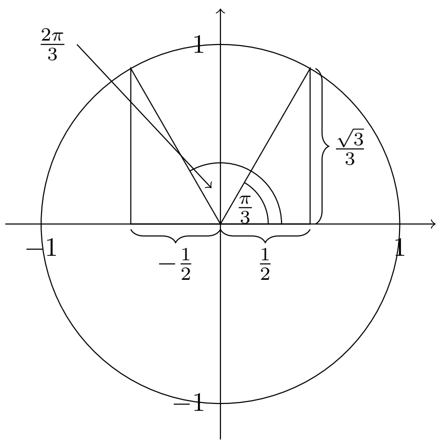
30. Mai 2018

1. Dabei wird der Winkel φ meistens im Bogenmaß angegeben, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi]$.

   Einige wichtige Werte:

Gradmaß:	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
Bogenmaß:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos:	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

   Daraus können weitere Werte mit Hilfe des Einheitskreises abgeleitet werden:



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2. sin und cos sind nicht bijektiv. Jedoch ist $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ und $\cos[0, \pi] \to [-1, 1]$ bijektiv. Die Umkehrfunktionen sind:

   $$\begin{aligned} \text{arcsin:} \quad & [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \\ \text{arccos:} \quad & [-1,1] \to [0, \pi] \end{aligned}$$

   Entsprechend erhält man:

   $$\begin{aligned} \text{arctan:} \quad & \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ \text{arccotan:} \quad & \mathbb{R} \to (0, \pi) \end{aligned}$$

3. • Es ist $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $\sin, \cos$ sind 2π-periodisch, d.h.
  $\sin(x+2\pi) = \sin(x), \cos(x+2\pi) = \cos(x)$
- $\tan, \text{cotan}$ sind π-periodisch

4. Symmetrien

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \cos(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) &= -\sin(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \tan(x) &= -\tan(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{cotan}(x) &= -\text{cotan}(-x) && \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

5. Rechenregeln
   a) $\sin x + \cos x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
   b) Additionstheoreme
      - $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$
      - $\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$

1 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

1.1 Definition: Grundbegriffe und Beispiele

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

a) $X_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M
   :$\Leftrightarrow$ Es gibt eie Folge (X_n) in $M \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \mapsto X_0$

b) $X_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M
   :$\Leftrightarrow$ X_0 ist kein Häufungspunkt von M

1.2 Beispiele

a) $M = (0,1) \cup \{2\} \cup (3,4)$
   - Menge der Häufungspunkte von M:
     $H = [0,1] \cup [3,4]$ denn z.B für $X_0 = \frac{1}{2}$ hat die Folge $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})_{n \geq 3}$ den Limes X_0 und liegt in $M \setminus \{X_0\}$.

     Auf analoge Weise können für jedes andere $X_0 \in M$
     Folgen in $M \setminus \{X_0\}$ konstruiert werden.
   - Einziger isolierter Punkt in M ist 2, denn es gibt in
     $M \setminus \{2\} = (0,1) \cup (3,4)$ keine Folge mit Grenzwert 2.

b) $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
   - Menge der HP von M: $\{0\}$
   - Menge der isolierten Punkte: M

1.3 Bemerkung

Ein isolierter Punkt X_0 von M liegt vor, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $|X - X_0| \geq \epsilon \quad \forall x \in M \setminus \{X_0\}$, z.B ist in 5.2a $|X - 2| \geq 1 \quad \forall x \in M \setminus \{2\}$

1.4 Definition Grenzwert I

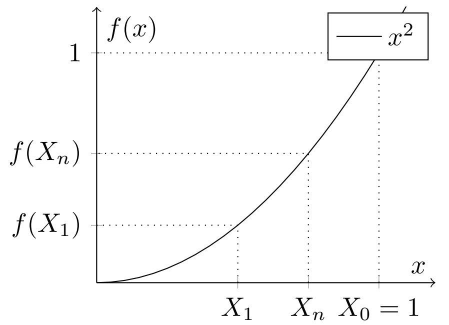
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Ist X_0 ein Häufungspunkt von D, so sagt man f hat in X_0 den Grenzwert a, oder $f(x)$ konvergiert gegen a für $x \to a :\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(X_n) = a$, für jede beliebige Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to X_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to X_0$

1.5 Beispiele

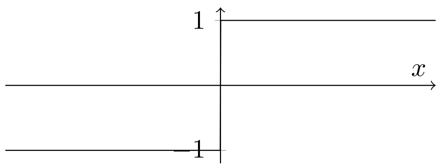
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2, X_0 = 1$

Für (X_n) in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $X_n \to 1$ ist $f(X_n) = {X_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (1.13/3)



b) Es muss für jede Folge (X_n) in $D \setminus \{X_0\}$ mit $X_n \to X_0$ gelten: $f(X_n) \to a$

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$



Grenzwert in $X_0 = 0$ existiert nicht, denn
$f(-\frac{1}{n}) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ und
$f(\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, obwohl $\frac{-1}{n} \to X_0$ und $\frac{1}{n} \to X_0$

1.6 ϵ–φ–Kriterium

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ reelle Funktion, X_0 HP in D, $a \in \mathbb{R}$. Dann:

$$\lim_{x \to X_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \forall x \in D \setminus \{X_0\} : \underbrace{|x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon}_{(*)}$$