

# Skript Mathe 2

23. April 2018

**Beweis:** Es ist  $|x| = 1 + t$  für  $t > 0$ .

Für  $n > k$ :

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{\geq}{=} \sum_{j=k+1}^n \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ \Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| &= \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{n^k (k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$  ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

## 0.1 Satz: Einschließungsregel

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

1.  $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2.  $(a_n), (c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{2.} N_a, N_c : \bullet |a_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ \bullet |c_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

us 1.:

$$\begin{aligned}
 |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\
 \forall n \geq k & \quad \downarrow \\
 \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\
 &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square
 \end{aligned}$$

## 0.2 Beispiele

a)  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , denn:

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$  (1.14/c),

gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits  $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b)  $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1$$

## 0.3 Satz

Sei  $(a_n)$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow a$ . Dann:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$  mit  $q > 0$  (ohne Beweis)

## 0.4 Definition: Landau Symbole, O-Notation

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$\text{a) } O(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$$

b)  $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

c)  $a_n \sim b_n$ , falls  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

$O, o$  heißen Landau-Symbole

## 0.5 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  (Stirlingsche Formel)
- $O(1)$  – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$  – Menge aller Nullfolgen

## 0.6 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)$  heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_n \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$  (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_n \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \searrow$  (monoton fallend)

## 0.7 Beispiele

- $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  streng monoton fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = 1$  monoton steigend und fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton

## 0.8 Definition

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  von oben (unten) beschränkt ist.

## 0.9 Satz: Monotone Konvergenz

Sei  $(a_n)$  reelle Folge:

- Falls  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls  $(a_n) \searrow$  und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$