

Skript Mathe 2

25. April 2018

Beweis:

1. Sei (a_n) \nearrow und nach oben beschränkt
und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 a kleinste obere Schranke
 $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$
 $\stackrel{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog \square

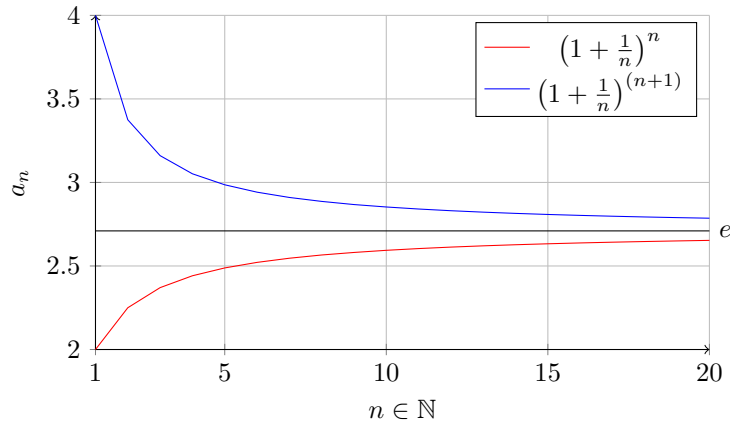
0.1 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

0.2 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n+1}$ ist monoton fallend.

Zeige dazu: $b_n \leq b_{n-1} \Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

0.3 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- \Rightarrow (a_n) hat obere Schranke b_1
 (b_n) hat untere Schranke a_1
 $\xRightarrow{1.23}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. \square

0.4 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

0.5 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

0.6 Bemerkung

(a_n) konvergent $\xRightarrow{1.8}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1 .

0.7 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

0.8 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

0.9 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

0.10 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

0.11 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1 .

0.12 Satz: Bolzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$: Halbiere $[A_0, B_0]$
 - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
 - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n_1} , die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.

- $k=2$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k}) \quad \square$