Skript Mathe 2

06. Juni 2018

0.1 Bemerkung

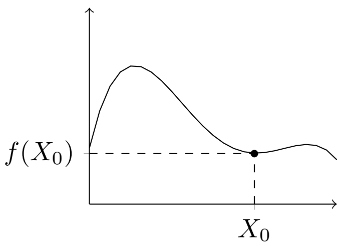
Wähle $\delta = \dfrac{\epsilon}{k}$

$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |\underbrace{x - X_0}_{<\delta}| < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$

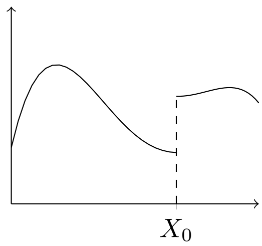
0.2 Beispiel

a) Anschauung zu 5.14a

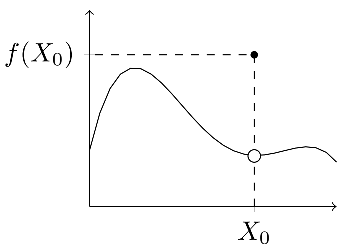
Es gibt 4 Fälle:



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x)$



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert nicht



$\lim\limits_{x \to X_0} f(x)$ existiert und ist ungleich $f(X_0)$

b) Schule: f ist stetig, wenn man f "ohne Absetzen" zeichnen kann.

Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Dirichlet–Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

unstetig in jedem $X_0 \in \mathbb{R}$.

Mit ϵ–δ–Kriterium:

Sei $\delta > 0$.

1. $X_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |x - X_0| < \delta$
2. $X_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \ \exists x \in \mathbb{R} : |x - X_0| < \delta$

Eigenschaften stetiger Funktionen

0.3 Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen

a) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $X_0 \in D, D \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch $c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$) stetig.

b) Seien $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \to IR, g : D' \to \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$.
f, g stetig $\Rightarrow g \circ f$ stetig.

Beweis:

a) Folgt direkt aus 5.14

b) Mit 1.14 $\square$

0.4 Bemerkung

Wegen 5.16b und 5.20

a) sind Monome und Polynome stetig

b) Wegen a und 5.20a sind rationale Funktionen stetig

c) Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall stetig (zeigen wir hier nicht). Daher sind $\exp, \sin, \cos, \tan, \text{cotan}$ (vgl. 3.11, 3.12) auch stetig.

0.5 Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken

a) Hebbare Definitionslücke:

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und X_0 HP von $X_0 \notin D$. Ist $\lim\limits_{x \to X_0} f(x) = a$, so heißt X_0 stetig hebbare Definitionslücke von f.

$$f: D \cup \{X_0\} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ a & x = X_0 \end{cases}$$

heißt Fortsetzung von f auf $D \cup \{X_0\}$.

Beispiel: $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1)} = 2$$

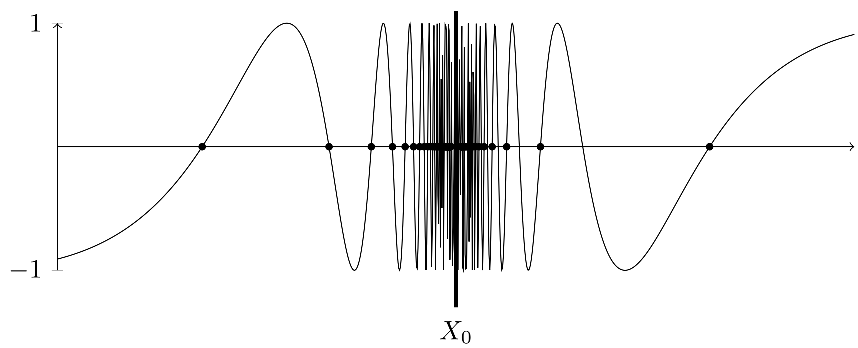
$$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} = x + 1$$

b) Polstelle:

Gilt für die Nullstelle X_0 des Nenners einer rationalen Funktion, dass $f(x) \to \pm\infty$, für $x \to X_0^-$ oder $x \to X_0^+$, so heißt X_0 Polstelle.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hat Polstelle bei $X_0 = 0$.

c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$ keinen Grenzwert.

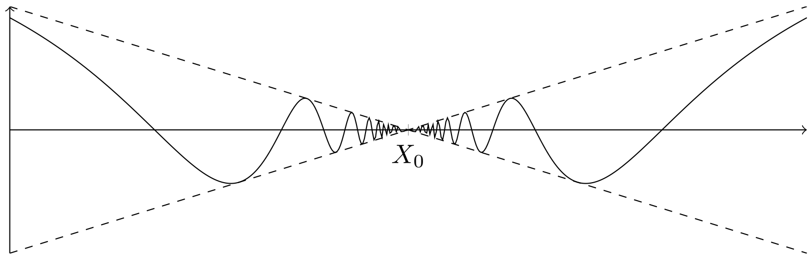


Man nennt X_0 Oszillationsstelle:

- $X_n = \dfrac{1}{n\pi} \to 0$ und $f(X_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $Y_n = \dfrac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$ und $f(Y_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow f(Y_n) \to 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ hat in $X_0 = 0$ eine hebbare Definitionslücke



$$f(X_n) = \underbrace{X_n}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{X_n}\right)}_{\text{beschränkt}} \text{ für jede Nullfolge } (X_n) \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \text{ stetige Fortsetzung.}$$

e) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$

Wir zeigen später mit L'Hopital, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

0.6 Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann: Es gibt $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.

Beweis: $f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet, dass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

Beweis für $f(a) < 0, f(b) > 0$ (Anderer Fall analog)

Anschaulich klar, da f keine Sprungstelle hat.

Bisektionsverfahren:

Start $[a_1, b_1] := [a, b]$

1. Schritt: Halbiere $[a_1, b_1]$

- Berechne $y_1 = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$
- Fallunterscheidung:
  - $y_1 = 0$: Fertig
  - $y_1 > 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
  - $y_1 < 0$: Neues Intervall $[a_2, b_2] := [fraca_1 + b_1 2, b_1]$
- Es gilt:
  - $[a_2, b_2]$ halb so groß wie $[a_1, b_1]$
  - $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$

2. Schritt: Wende Schritt 1 auf $[a_2, b_2]$ an, erhalte y_2 und $[a_3, b_3]$

Usw...