

Skript Mathe 2

18. April 2018

0.1 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \forall n \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

0.2 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow (a_n)$ divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

0.3 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

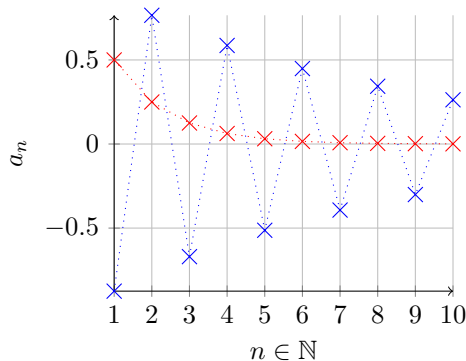
$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ \Leftrightarrow n &> \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

- 2.) $q = 1. q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$
- 3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\xRightarrow{1.9} (q^n)$ divergent
- 4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

0.4 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen.



0.5 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ -Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 ||a| - |b|| &\leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ da:} \\
 \bullet |a - b + b| &\leq |a - b| + |b| & | -b| \\
 \Leftrightarrow |a| - |b| &\leq |a - b| \\
 \bullet |b - a + a| &\leq |b - a| + |a| & | -a| \\
 \Leftrightarrow |b| - |a| &\leq |b - a| \\
 \Rightarrow ||a| - |b|| &\leq |a - b|
 \end{aligned}$$

0.6 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$.

Dann gilt:

- 1.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- 2.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- 3.) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.)

$$b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

5.) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.) \bullet Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a \checkmark$

\bullet Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow$

$$\exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{2|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.) \bullet Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} &< \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b \\ \Rightarrow \exists |b| - |b_n| &< \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k \\ \Rightarrow \frac{|b|}{2} &< |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**) \\ \Rightarrow b_n &\neq 0 \quad \forall n \geq k \end{aligned}$$

- Z.z.: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\downarrow \\ (**)}} &< \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2 \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

0.7 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n + 5}{n} &= ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6} \\ &\bullet \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ &\bullet |(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6 \\ &\Rightarrow (-1)^n + 5 \text{ beschränkt} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{n^2} \left(3 + \frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2} \left(-1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Dann:} & \text{kte Potenz} & \nearrow \boxed{n^k} \\ & & \searrow \boxed{X^n} \\ \text{exponentielles Wachstum} & & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{array}$$