Skript Mathe 2

7. Mai 2018

0.1 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

0.2 Beispiele

a) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}}$ ist divergent. (2.9)

b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$ (alternierende harminische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

0.3 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum i = 0^{2n}(-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow$: $A_{n+1} - A_n = \sum\limits_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum\limits_{i=0}^{2n-1} (-1)^n a_i$

$$= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$$
$$= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0, \text{ da } (a_n) \searrow$$

- Analog: $(B_n) \searrow$
  - $B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in N$
  - $B_n - A_n = a_{2n} \to 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

0.4 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$

  da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

  $\Rightarrow |a_n| \leq (a+\epsilon)^n \quad \forall n \geq N$

  $\Rightarrow \sum\limits_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a+\epsilon)^n}_{<1}$ (geometrische Reihe)

  ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

  Damit konvergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\boxed{\sum\limits_{k=1}^{N-1} |a_k|}}_{<\infty} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_n|$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

  $\Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft

  $\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\underset{2.9}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. $\square$

0.5 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{k^3}{3^k}}}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\left(\sqrt[n]{n}^3\right)}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ (allgemeine harminische Reihe) liefert

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}^{\alpha}\right)} = 1 \quad (\alpha > 0) \to$ keine Aussage möglich.

0.6 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq a \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq ... \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

Da $\sum_{n=N}^{\infty} a^{n-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_N| > 0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\quad \square$

0.7 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergiert, da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$

b) Wie in 2.15b ist für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$ keine Aussage möglich,

da $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

und somit $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

0.8 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.