

# Skript Mathe 2

13. Mai 2018

## Berechnung von Konvergenzradien

### 0.1 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ .  $\rho$  sei der Konvergenzradius von  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

**Beweis:** Wurzelkriterium:  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{< 1} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  konvergiert

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{> 1} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  divergiert

$\Rightarrow \rho$  Konvergenzradius von  $P(x)$

### 0.2 Beispiel

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  konvergent?

$$\bullet \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$\Rightarrow P(x)$  konvergent für  $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$  und divergiert für  $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für  $x = \pm 1$

•  $x = 1$  :  $P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  divergent (harmonische Reihe)

•  $x = -1$  : 
$$P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$
$$= - \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$  konvergent

Insgesamt:  $P(x)$  konvergent für  $[-1, 1)$ , divergent für  $|x| > 1$  und  $x = 1$ .

### 0.3 Satz: Formel von Euler

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ ,

$\rho$  Konvergenzradius von  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

Ist  $\left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right)_{k \geq 0}$  konvergent oder bestimmt gegen  $+\infty$

divergent, so ist  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

**Beweis:** Wende auf  $P(x)$  das Quotientenkriterium 2.16 an.  $\square$

### 0.4 Beispiel: Exponentialfunktion

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$$

Man definiert:  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1.  $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2.  $\exp(x) = e^x$ ,  $e \approx 2,718$  (Eulersche Zahl)

Aus 2.: 
$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

### Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$ ?

1. Definiere:  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (1.28)
2. Zeige:  $\exp(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für  $\exp(x)$  gelten:  
 $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (hier nicht)
4. Definiere:  $e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \exp(n) = e^n \quad \mid \sqrt[m]{\phantom{x}}$   
 $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird  $e^x$  dann mit Hilfe von  $e^x = \exp(x)$  berechnet.

So kann auch ein Computer z.B.  $e^\pi$  berechnen, indem  $\exp(\pi)$  ermittelt wird.

### 0.5 Bemerkung

- a) Außer der Funktion  $e^x$  gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B. wird in Mathe III gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für  $\rho \neq \infty$  müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.