Skript Mathe 2

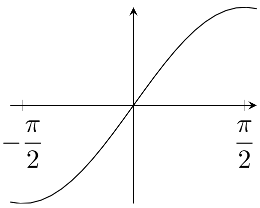
20. Juni 2018

0.1 Beispiele

a) Für $f(x) = x^n$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$
$\Rightarrow$ Ableitung von f^{-1} wird in $y = f(0) = 0$ unendlich groß, da $f'(0) = 0$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n+1}} = \frac{1}{n\sqrt{y^{n-1}}} \quad \text{Für } y \neq 0$$

b) $\sin : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-1, 1)$
Sei $y = \sin x,\ y \in (-1, 1)$



$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Analog:

- $\arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad y \in (-1, 1)$
- $\arctan' y = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}$
- $\text{arccotan}' y = \frac{1}{1 + y^2} \quad y \in \mathbb{R}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \quad f(x) = e^x$
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(y) = \ln y$

$$\Rightarrow \ln' y = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \ln(|y|)' = \begin{cases} \frac{1}{y} & y > 0 \\ (-1) \cdot \frac{1}{-y} & y < 0 \text{ (Kettenregel)} \end{cases}$$
$$= \frac{1}{y} \text{ für } y \neq 0$$

0.2 Logarithmische Ableitung

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, f$ differenzierbar, ist

$(\ln |f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ (6.14c + Kettenregel)

Beispiel: $f'(x) = e^x \cdot (\sin x + 2) \cdot x^5 \quad x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$

$\ln(|f(x)|) = x + \ln(\sin x + 2) + 5 \cdot \ln |x|$

$\Rightarrow (\ln |f(x)|)' = 1 + \dfrac{\cos x}{\sin x + 2} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \left(1 + \dfrac{\cos x}{\sin x + 2} + \dfrac{5}{x}\right)(e^x(\sin x + 2)x^5)$

$= x^4 e^x (x(\sin x + 2)) + x \cdot \cos x + 5 \sin(x + 2)$ für $x \neq 0$

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Ableitung auch auf Funktionen mit Werten in ganz $\mathbb{R}$ anwendbar ist. Dazu bildet man die stetige Fortsetzung von $f'(x)$ auf $\{x \mid f(x) = 0\}$

$\Rightarrow$ Beispiel gilt auch für $x = 0$. Dann ist $f'(0) = 0$.

0.3 Satz: Ableitung elementarer Funktionen

- $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
- $(x^x)' = (\ln x + 1) \cdot x^x, x > 0$

Beweis:

$(a^x)' = (e^{\ln(a^x)})' = (e^{x \cdot \ln a})' \underset{\text{innere} \,\cdot\, \text{äußere Ableitung}}{=} (\ln a) \cdot (e^{x \cdot \ln(a)}) = (\ln a) \cdot a^x$

Rest analog $\square$

Kurvendiskussion

0.4 Definition: Extremum

$f : D \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in D$ ein lokales $\underbrace{\text{Maxmimum (Minimum)}}_{\text{Extremum}}$,

wenn es ein Intervall $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D, \delta > 0$ gibt, so dass

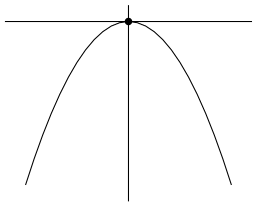
$f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in U$ ($\leftarrow$ Umgebung von x)

f besitzt in $x_0 \in D$ ein globales Maxmimum (Minimum),

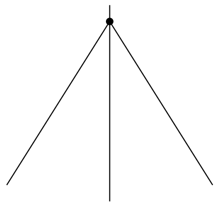
wenn $f(x_0) \underset{(\leq)}{\geq} f(x) \quad \forall x \in D$

0.5 Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Falls f in x_0 ein lokales Extremum besitzt, so ist $f'(x_0) = 0$.



Differenzierbar



Nicht differenzierbar

Beweis: Sei $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \delta > 0$ und

$\underbrace{f(x_0) \geq f(x)}_{\text{Maxmimum}} \quad \forall x \in U.$

- $f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h < s.$
- f differenzierbar $\Rightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\boxed{h} > 0} \leq 0 \text{ und}$$

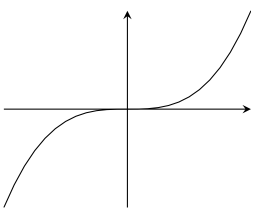
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\boxed{h} < 0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Für Minimum Analog $\square$

0.6 Anmerkung

$f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung aber keine hinreichende Bedingung.

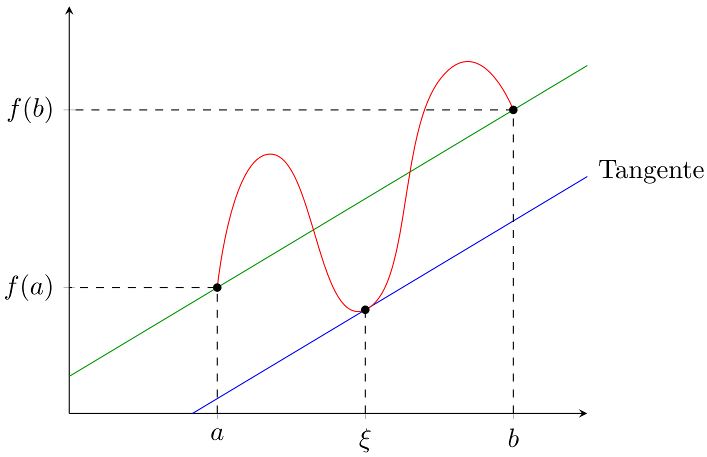
Beispiel: $f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ einen Sattelpunkt mit Steigung 0.



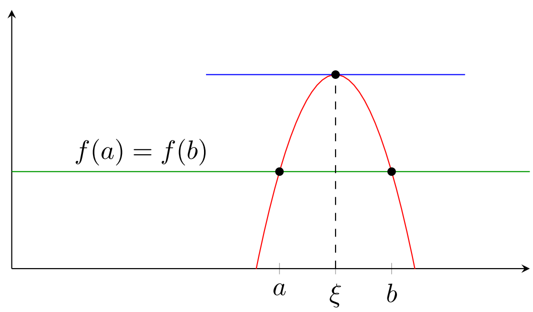
f hat lokales Extremum $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$

0.7 Mittelwertsätze, Satz von Rolle (1652–1719)

1.



2.



Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

stetig und differenzierbar in (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

1. $\Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$

   1. Mittelwertsatz

2. $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

   Satz von Rolle

3. $\exists \xi \in (a, b) : \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

   2. Mittelwertsatz

Beweis:

2. f stetig in $[a, b]$

   $\underset{3.36}{\Rightarrow}$ f besitzt Maxmimum M und Minimum m in $[a, b]$.

   D.h: $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$