

# Skript Mathe 2

2. Mai 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Folgen</b>	<b>2</b>
1.1	Definition	2
1.2	Beispiele	2
1.3	Definition: Beschränkte und alternierende Folgen	4
1.4	Beispiele	5
1.5	Definition: Konvergente Folgen	5
1.6	Bemerkung	5
1.7	Beispiele	6
1.8	Satz	6
1.9	Bemerkung	7
1.10	Beispiel: Geometrische Folge	7
1.11	Beispiel	7
1.12	Bemerkung: Dreiecksungleichung	8
1.13	Rechenregeln für Folgen	8
1.14	Beispiele: Rechenregeln	10
1.15	Satz: Einschließungsregel	11
1.16	Beispiele	11
1.17	Satz	12
1.18	Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation	12
1.19	Beispiele	12
1.20	Definition: Monotonie	12
1.21	Beispiele	13
1.22	Definition	13
1.23	Satz: Monotone Konvergenz	13
1.24	Bernoulli-Ungleichung	13
1.25	Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$	14
1.26	Satz: Intervallschachtelung	15
1.27	Beispiel	15
1.28	Definition: Eulersche Zahl	15
1.29	Bemerkung	15
1.30	Definition: Teilfolge	15
1.31	Beispiel	16
1.32	Bemerkung	16
1.33	Definition: Häufungspunkt (HP)	16
1.34	Beispiel	16
1.35	Satz: Bolzano-Weierstraß	16

1.36	Definition: Limes inferior/superior . . . . .	17
1.37	Bemerkung . . . . .	17
1.38	Beispiel . . . . .	18
1.39	Definition: Cauchy-Folgen . . . . .	18
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium . . . . .	18
1.41	Beispiel . . . . .	19
1.42	Definition: Kontraktion . . . . .	19
1.43	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Reihen</b>	<b>20</b>
2.1	Definition: Reihe . . . . .	20
2.2	Bemerkung . . . . .	20
2.3	Beispiele . . . . .	20
2.4	Satz: Rechenregeln für Summen . . . . .	22
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen . . . . .	22
2.6	Cauchy-Kriterium . . . . .	22
2.7	Satz: Absolute Konvergenz . . . . .	22
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen . . . . .	22
2.9	Satz: Divergenzkriterium . . . . .	23
2.10	Majorantenkriterium . . . . .	23

# 1 Folgen

## 1.1 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ( $\mathbb{N}$ ) in eine beliebige Menge  $M$  (oft  $M \subseteq \mathbb{R}$ ).

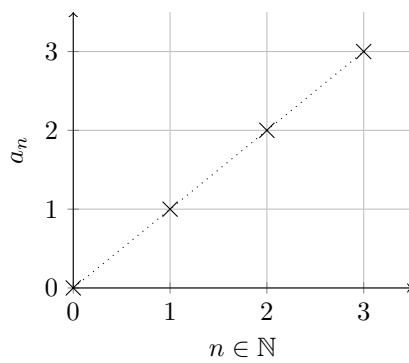
$a_n$ :  $n$ -tes Folgenglied  
 $n$ : Index

Oft ist das erste Folgenglied nicht  $a_1$ , sondern z.B:  $a_7$ .

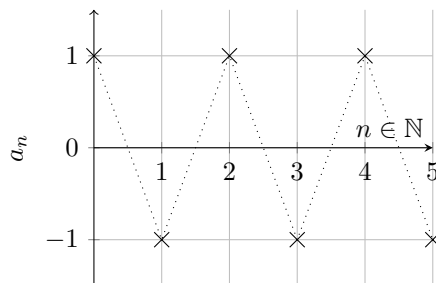
**Schreibweise:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n \geq n_0}$  oder  $(a_n)$

## 1.2 Beispiele

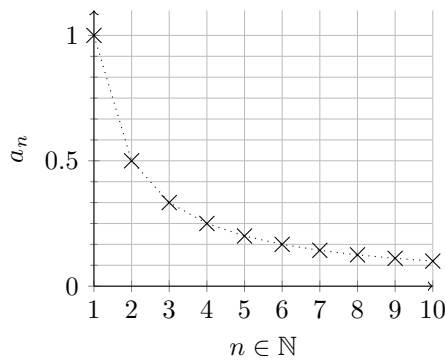
- a)  $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$  (konstante Folge)
- b)  $a_n = n$  (Ursprungsgerade)



c)  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  (alternierend)



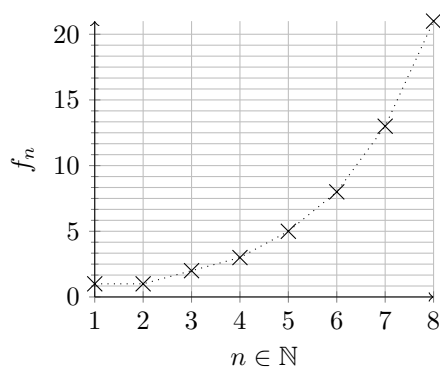
d)  $a_n = \frac{1}{n}$  (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B. von Bakterienstämmen)

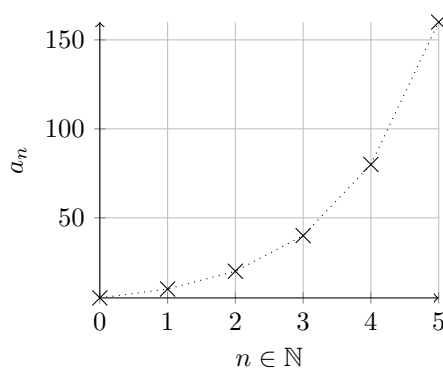
$q$ : Wachstumsfaktor

$X_0$ : Startpopulation

**Explizit:**  $X_n = q^n \cdot X_0$

z.B:  $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$ : Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$ : Relative Anzahl der Individuen in Generation  $n$

Anzahl der Individuen in Generation  $n + 1$  hängt ab von der aktuellen Populationsgröße  $X_n$  und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch  $(1 - X_n)$

### 1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

a)  $(a_n)$  heißt beschränkt  $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$  für ein  $K \geq 0$ .

b)  $(a_n)$  heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

## 1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

## 1.5 Definition: Konvergente Folgen

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt (das von  $\epsilon$  abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

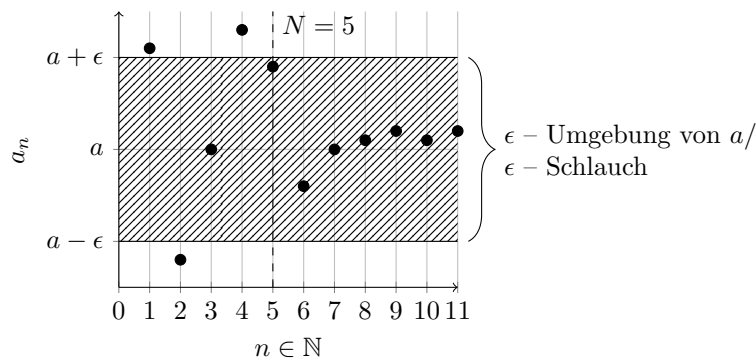
**Kurz:**

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .
- c) Eine Folge  $(a_n)$  mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

## 1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$  bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  vor, so sind ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder weniger als  $\epsilon$  von  $a$  entfernt. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen  $N$  gewählt werden.



Solch ein  $N$  muss sich für jedes noch so kleine  $\epsilon$  finden lassen. Ansonsten ist  $(a_n)$  divergent.

## 1.7 Beispiele

a) Behauptung:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle  $\epsilon = \frac{1}{10}$ . Dann ist für  $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges  $\epsilon$ )

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n+1}{3n}$  hat Limes  $a = \frac{1}{3}$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c)  $N$  muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ , für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

## 1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Limes  $a \in \mathbb{R}$ .

Zu zeigen:  $|a_n| \leq K \quad \forall a \in \mathbb{N}$ , für ein  $K \geq 0$ .

Sei  $\epsilon = 1$ ,  $(a_n)$  konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze  $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

## 1.9 Bemerkung

Wegen 1.8:  $(a_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

## 1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für  $|q| > 1$  oder  $q = -1$  ist  $(q^n)$  divergent.

**Beweis:**

1.)  $|q| < 1$ . Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

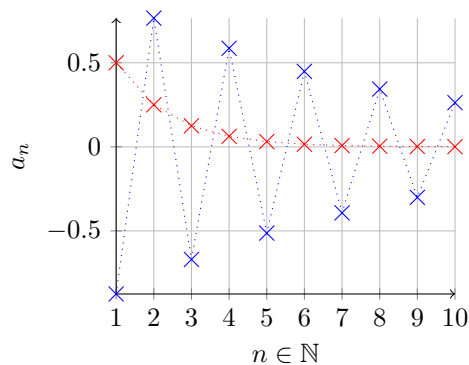
2.)  $q = 1$ .  $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.)  $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$  unbeschränkt  $\xrightarrow{1.9} (q^n)$  divergent

4.)  $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$ . Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

## 1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen.



### 1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der  $\Delta$ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ , da:

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Bigg| \quad |-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \Bigg| \quad |-a|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

### 1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$ .

Dann gilt:

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$4.) b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

$$5.) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Seien weiter  $(d_n), (e_n)$  reelle Folgen,  $(d_n)$  ist Nullfolge

$$6.) (e_n) \text{ beschränkt} \Rightarrow (d_n \cdot e_n) \text{ ist Nullfolge}$$

$$7.) |e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n| \text{ ist Nullfolge}$$

**Beweis:**

1.)

Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$



2.) • Für  $\lambda = 0$  gilt auch  $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a$  ✓

• Für  $\lambda \neq 0$ : Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8  $\Rightarrow (b_n)$  beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.) • Z.z:  $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist  $b \neq 0$  und  $|b| > 0$ .

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ 1.12}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

• Z.z:  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$  hat  $\frac{a}{b}$  als Limes.

a  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \stackrel{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| \stackrel{\downarrow}{<} \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

## 1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

- $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$  beschränkt

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Dann:

$$\begin{array}{ccc} \text{kte Potenz} & \searrow & \boxed{n^k} \\ & & \downarrow \\ \text{exponentielles Wachstum} & \nearrow & \boxed{X^n} \end{array} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Beweis:** Es ist  $|x| = 1 + t$  für  $t > 0$ .

Für  $n > k$ :

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\mathcal{N}^k(k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$  ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

### 1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

1.  $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2.  $(a_n), (c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_a, N_c : \bullet |a_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ \bullet |c_n - a| &< \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

us 1.:

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\ \forall n \geq k & \quad \downarrow \\ \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square \end{aligned}$$

### 1.16 Beispiele

a)  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , denn:

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$  (1.14/c),

gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+\epsilon)^n &> n \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow 1+\epsilon &> \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits  $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b)  $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x > 0 &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \stackrel{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

### 1.17 Satz

Sei  $(a_n)$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow a$ . Dann:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0$  (ohne Beweis)

### 1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

- a)  $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$
- b)  $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

- c)  $a_n \sim b_n$ , falls  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

$\mathcal{O}, o$  heißen Landau-Symbole

### 1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$  (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$  – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$  – Menge aller Nullfolgen

### 1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)$  heißt

- a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_n \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$  (monoton wachsend)

- b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_n \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \searrow$  (monoton fallend)

### 1.21 Beispiele

- $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  streng monoton fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = 1$  monoton steigend und fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton

### 1.22 Definition

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  von oben (unten) beschränkt ist.

### 1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei  $(a_n)$  reelle Folge:

- Falls  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls  $(a_n) \searrow$  und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

**Beweis:**

1. Sei  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt  
und seien  $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  und  $\epsilon > 0$ .  
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $a$  kleinste obere Schranke  
 $\Rightarrow a - \epsilon$  keine obere Schranke.  
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$   
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N \end{matrix} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$   
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog  $\square$

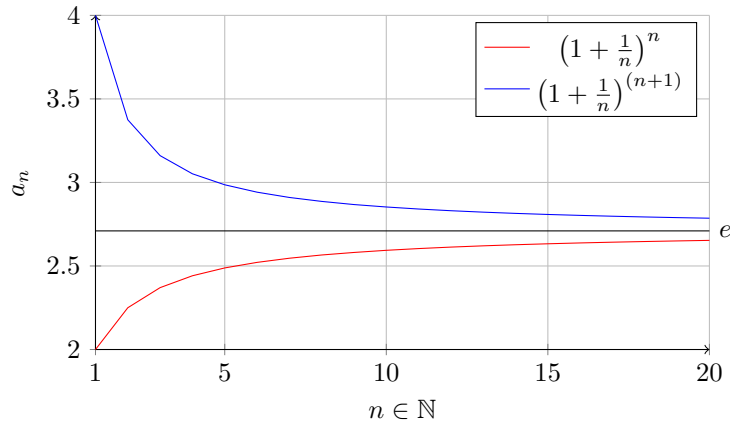
### 1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

### 1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$  ist monoton.

Zeigen dazu:  $a_n \geq a_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)_{n+1}$  ist monoton fallend.

Zeige dazu:  $b_n \leq b_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \geq \frac{1+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \quad (?)$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl  $e$  bezeichnet. Dazu zunächst:

### 1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind  $(a_n), (b_n)$  konvergent und besitzen den selben Limes.

**Beweis:** Es ist  $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\Rightarrow$   $(a_n)$  hat obere Schranke  $b_1$   
 $(b_n)$  hat untere Schranke  $a_1$   
 $\xRightarrow{1.23}$   $(a_n), (b_n)$  konvergent.

Da  $(b_n - a_n)$  Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich.  $\square$

### 1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$  (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

### 1.29 Bemerkung

$(a_n)$  konvergent  $\xRightarrow{1.8} (a_n)$  beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch  $a_n = (-1)^n$  zwei konvergente Teilfolgen mit Limes  $+1$  und  $-1$ .

### 1.30 Definition: Teilfolge

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

### 1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 1.32 Bemerkung

$(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  Jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

### 1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.

### 1.34 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat zwei Häufungspunkte:  $-1$  und  $1$ .

### 1.35 Satz: Bolzano-Weierstraß

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  besitzt konvergente Teilfolge

**Beweis:** Konstruiere konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ( $K$  geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$ : Halbiere  $[A_0, B_0]$ 
  - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir  $a_{n_1}$ , die Intervallhälfte aus der es stammt  $[A_1, B_1]$ .

- $k=2$ : Halbiere  $[A_1, B_1]$ . Wende obiges Verfahren an, um  $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$  zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$



$$\bullet A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da  $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{nk}) \quad \square$

### 1.36 Definition: Limes inferior/superior

$(a_n)$  reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von  $(a_n)$  :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von  $(a_n)$  :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Ist  $(a_n)$  nicht beschränkt, setzt man

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \end{cases}$$

d.h.  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty$

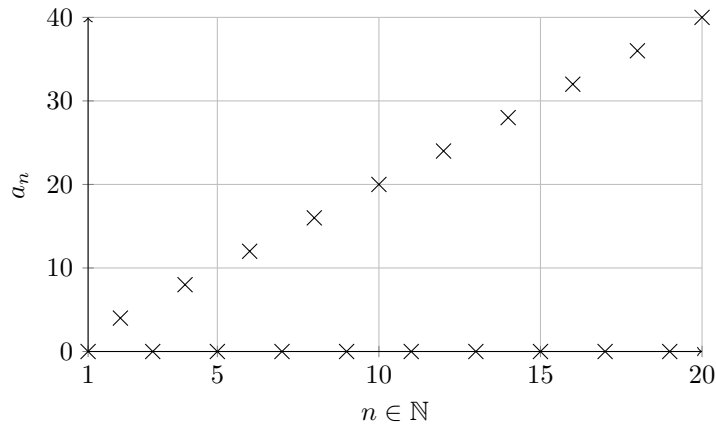
$$\bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \quad \forall n \geq N \end{cases}$$

d.h.  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$

### 1.37 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$  in obiger Definition bedeutet, dass  $(a_n)$  (bestimmt) gegen  $\pm\infty$  divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)  
z.B. divergiert  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht bestimmt,  
aber  $(a_n)$  mit  $a_n = n$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$
- $-\infty, \infty$  sind keine reellen Zahlen. Man setzt  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$   
mit  $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt jede Folge sowohl  $\limsup$  als auch  $\liminf$ .

### 1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

### 1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei  $(a_n)$  eine Folge.  $(a_n)$  heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

### 1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$

$(a_n)$  konvergiert  $:\Leftrightarrow (a_n)$  ist Cauchy-Folge

**Beweis:**  $(\Rightarrow)$  : klar

$(\Leftarrow)$  :

1. Zeige  $(a_n)$  beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ ist beschränkt und besitzt}$$

konvergente Teilfolge  $(a_{n_j})$  (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2.  $(a_n)$  ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle  $a_{n_j}$  so, dass  $j \geq J$  und  $n_j \geq M$ .

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

### 1.41 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  ist divergent,  
denn  $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$   
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für  $\epsilon = 1$   $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

### 1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  heißt Kontraktion, falls  $\alpha \in (0, 1)$  existiert,  
so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B:  $f(x) = \frac{1}{2}x$  ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{2}$ .

### 1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $f[a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Kontraktion. Dann:

1.  $f$  hat genau einen Fixpunkt  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ , d.h.  
es gibt genau ein  $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert  $X_0 \in [a, b]$  konvergiert  
die durch  $X_n := f(X_{n-1})$  definierte Folge  $(X_n)$  gegen  $\hat{x}$ .

(Ohne Beweis)

## 2 Reihen

### Grundbegriffe und Beispiele

#### 2.1 Definition: Reihe

1. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge. Die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ .

Die Zahl  $S_k \in \mathbb{R}$  heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls  $(S_k)$  gegen  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_o}$  die Reihe  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$  definieren.
4.  $\sum_{i=1}^{\infty}$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

#### 2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$  bestimmt gegen  $+\infty(-\infty)$  divergiert, so schreiben wir:  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

#### 2.3 Beispiele

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  ist divergent.

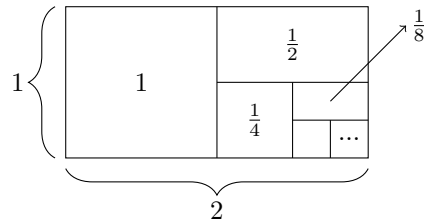
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion:  $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$  divergent.

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  konvergent



$$\text{und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

e) Geometrische Reihe

Für  $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$  gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ,

denn  $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da  $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für  $|q| < 1$  (1.10), folgt  $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ .

Andererseits ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergent für  $|q| \geq 1$  (2.9)

• In Beispiel d) ist  $q = \frac{1}{2}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

•  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

•  $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

**Achtung bei Index-Verschiebung!**

## 2.4 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

## 2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist  $(S_n)$  mit  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  nach oben beschränkt und  $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

## 2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} &\underbrace{|a_n + \dots + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \\ &\left[ = |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right] \end{aligned}$$

(Folgt aus 1.40)

## 2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  auch konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0$ .  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$ .

Da  $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$ ,  
ist 2.6 für  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  erfüllt.

## 2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

**Beweis:** Sei  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) \stackrel{2.1}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[ \begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \right. (1.13) \Big],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k |a_i| \right) \stackrel{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

## 2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent, so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

D.h. Ist  $(a_i)$  keine Nullfolge, so divergiert  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .

**Beweis:**  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle  $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$  Nullfolge.  $\square$

## 2.10 Majorantenkriterium

Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$ .

Ist dann  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\leq |b_n + \dots + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

$\overbrace{0 \leq a_1 \leq b_i \quad \forall i}$