Skript Mathe 2

23. April 2018

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$|x|^n = (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\geq 0}$$

$$\underset{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k)}{(k+1)!}$$

$$= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm ...$$

$$\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{\cancel{n^{k+1}} t^{k+1} \pm ...} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m+1 > x$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot ... \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0$$

$$\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, } <1}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0$$

0.1 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : \bullet\, |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet\, |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c$$

Aus 1.:

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n|$$
$$\forall n \geq k$$
$$\Rightarrow |b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a|$$
$$\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N-c\} \quad \square$$

0.2 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow 1 + \epsilon > \sqrt[n]{n}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon\ \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1$$

0.3 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q\ \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

0.4 Definition: Landau Symbole, O-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $O(A_n) = \left\{ (b_n) \;\middle|\; \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{ beschränkt} \right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

O, o heißen Landau-Symbole

0.5 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $O(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

0.6 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$a_n \geq (>)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

$a_n \leq (<)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

0.7 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

0.8 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

0.9 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$