Skript Mathe 2

14. Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Folgen

1.1 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ($\mathbb{N}$) in eine beliebige Menge M (oft $M \subseteq \mathbb{R}$).

a_n: n-tes Folgenglied
n: Index

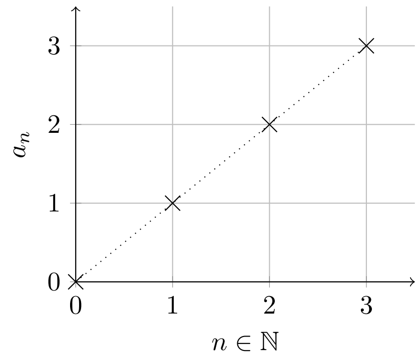
Oft ist das erste Folgenglied nicht a_1, sondern z.B: a_7.

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\geq n_0}$ oder (a_n)

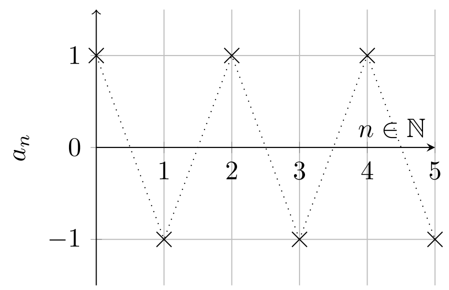
1.2 Beispiele

a) $a_n = c \; \forall n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge)

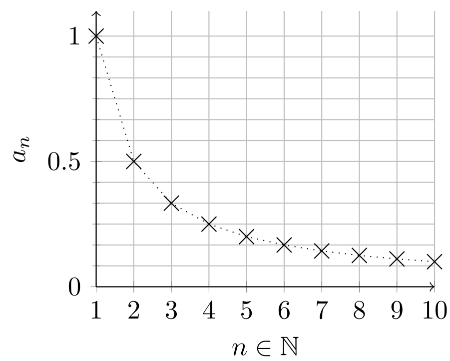
b) $a_n = n$ (Ursprungsgerade)



c) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ (alternierend)



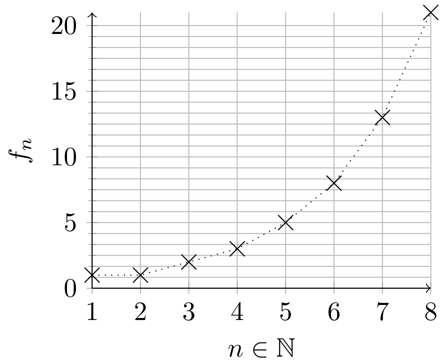
d) $a_n = \frac{1}{n}$ (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$

$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, ...$



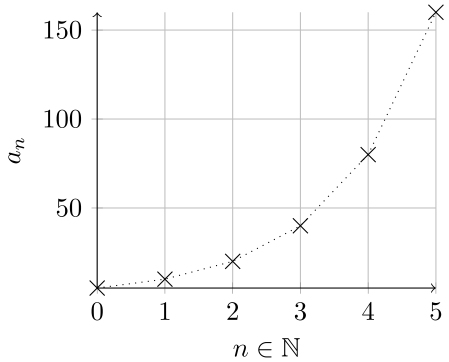
f) <u>Exponentielles Wachstum</u> (z.B von Bakterienstämmen)

q: Wachstumsfaktor
X_0: Startpopulation

Explizit: $X_n = q^n * X_0$

z.B: $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, ...$



g) <u>Logistisches Wachstum</u>

$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$

$r \in [0, 4]$: Wachstums-/Sterbefaktor
$X_n \in [0, 1]$: Relative Anzahl der Individuen in Generation n

Anzahl der Individuen in Generation $n + 1$ hängt ab von der aktuellen Populationsgröße X_n und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch $(1 - X_n)$

1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

a) (a_n) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$ für ein $K \geq 0$.

b) (a_n) heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

1.5 Definition: Konvergente Folgen

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ϵ abhängig sein darf), so dass:

   $|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$

   Kurz:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

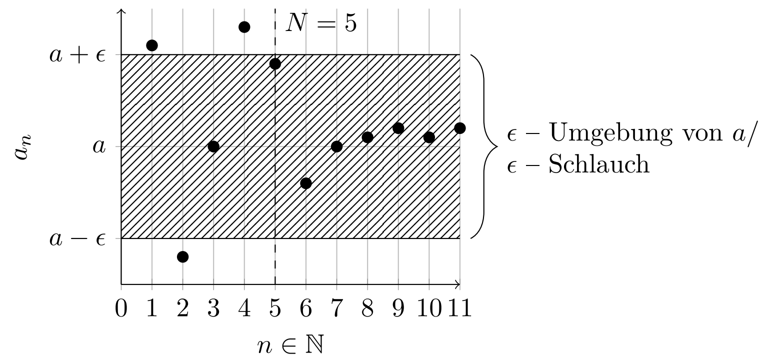
b) $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oder $a_n \to a$.

c) Eine Folge (a_n) mit Limes 0 heißt <u>Nullfolge</u>.

d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt <u>divergent</u>.

1.6 Bemerkung

$a_n \to a$ bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke $\epsilon > 0$ vor, so sind ab einem bestimmten $N \in \mathbb{N}$ alle Folgenglieder weniger als ϵ von a entfernt. Je kleiner ϵ gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen N gewählt werden.



Solch ein N muss sich für jedes noch so kleine ϵ finden lassen. Ansonsten ist (a_n) divergent.

1.7 Beispiele

a) Behauptung: $a_n = \frac{1}{n}, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle $\epsilon = \frac{1}{10}$. Dann ist für $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges ϵ)

  Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$ hat Limes $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist für $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - n| = \left|\frac{n+1}{3n}\right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c) N muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Sei $\epsilon > 0$, für $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Limes $a \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen: $|a_n| \leq K \ \forall a \in \mathbb{N}$, für ein $K \geq 0$.

Sei $\epsilon = 1$, (a_n) konvergent.

$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \ \forall n \geq N$

Setze $K = max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|\}$

$\Rightarrow |a_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$

1.9 Bemerkung

Wegen 1.8: (a_n) unbeschränkt $\Rightarrow$ (a_n) divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

1.10 Beispiel: Geometrische Folge

Für $q \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{falls } |q| < 1 \\ 1, \text{falls } q = 1 \end{cases}$

Für $|q| > 1$ oder $q = -1$ ist (q^n) divergent.

Beweis:

1.) $|q| < 1$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$(q^n - 0) = |q|^n < \epsilon \Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(e) \quad | : \ln(q) < 0$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|}$$

Für $N > \dfrac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$

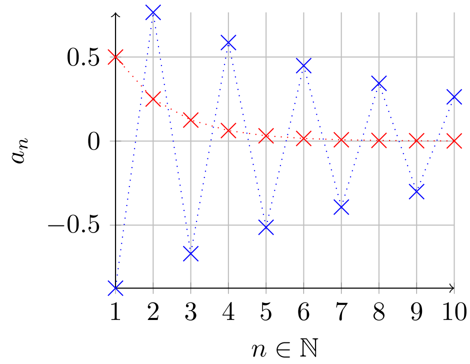
2.) $q = 1$. $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \to 1$

3.) $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$ unbeschränkt $\underset{1.9}{\Rightarrow}$ (q^n) divergent

4.) $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$. Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((\frac{-7}{8})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen.



1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der Δ-Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, da:

- $|a - b + b| \leq |a - b| + |b| \qquad \Big| \, |-b|$

$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

- $|b - a + a| \leq |b - a| + |a| \qquad \Big| \, |-a|$

$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$

$\boxed{\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|}$

1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = b$.

Dann gilt:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4.) $b \neq 0 \Rightarrow \bullet \ \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \; \forall n \geq k$

$\bullet \ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k}$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen, (d_n) ist Nullfolge

6.) (e_n) beschränkt $\Rightarrow (d_n \cdot e_n)$ ist Nullfolge

7.) $|e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n|$ ist Nullfolge

Beweis:

1.)

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N}$:

• $|a_n - a| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$

• $|b_n - b| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$

$\Rightarrow |a_n + b_n - (a+b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

2.)
- Für $\lambda = 0$ gilt auch $\lambda \cdot a_n \to 0 = \lambda \cdot a$ ✓
- Für $\lambda \neq 0$: Sei $\epsilon > 0$

  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \dfrac{\epsilon}{|x|} \quad \forall n \geq N$

  $\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N$✓

3.)

Satz 1.8 $\Rightarrow (b_n)$ beschränkt.

$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$

$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$

Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \quad \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$

$|b_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \dfrac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \dfrac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$

$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$

4.)
- Z.z: $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

  Es ist $b \neq 0$ und $|b| > 0$.

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\underset{1.12}{\geq} |b|-|b_n|} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq b$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \ (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

- Z.z: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq k}$ hat $\frac{a}{b}$ als Limes.

  Da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$, genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

  Sei $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2}$

  $$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b \cdot b_n}\right| \underset{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ wegen } 1.13/6$$

- $\frac{1}{n} \to 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$ beschränkt

b)

$$\frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} \to -3, \text{ denn } \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{-n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}(3 + \frac{1}{n^2})}{\cancel{n^2}(-1 + \frac{1}{n})}$$

$$\underset{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \underset{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}_0$.

Dann: kte Potenz

$$\frac{\boxed{n^k}}{\boxed{X^n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

exponentielles Wachstum

Beweis: Es ist $|x| = 1 + t$ für $t > 0$.

Für $n > k$:

$$|x|^n = (1+t)^n = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} 1^{n-j} t^j}_{\geq 0}$$

$$\underset{j=k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k)}{(k+1)!}$$

$$= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \ldots$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n^k}{x^n}\right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\cancel{n^k}(k+1)!}{n^{\cancel{k}+1} t^{k+1} \pm \ldots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

d) Sei $x \in \mathbb{R}_+$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei $m \in \mathbb{N}$ und $n > m + 1 > x$

$$\Rightarrow \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n-m}}{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0$$

$$\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)}_{\text{geom. Folge, } <1}^{(n-m)} \xrightarrow[\substack{1.13/6,\\ 1.13/7}]{} 0$$

1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ reelle Folgen mit

1. $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2. $(a_n), (c_n)$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$

Dann ist auch (b_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$

Beweis: Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim c_n$ und $\epsilon > 0$.

$$\underset{2.}{\Rightarrow} N_a, N_c : \bullet\ |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a$$
$$\bullet\ |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c$$

Aus 1.:

$$|b_n - a_n| = b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n|$$

$$\forall n \geq k$$

$$\Rightarrow |b_n - a| \underset{\Delta-Ungleichung}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a|$$

$$\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N-c\} \quad \square$$

1.16 Beispiele

a) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, denn:

Sei $\epsilon > 0$. Da $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \to 0$ (1.14/c),

gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+\epsilon)^n > n \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow 1+\epsilon > \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1-\epsilon \; \forall n \in \mathbb{N}$, ist

$$1+\epsilon > \sqrt[n]{n} > 1-\epsilon \Leftrightarrow \left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b) $\sqrt[n]{x} \to 1 \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} &\text{Sei } x > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \to 1 \underset{1.15}{\Rightarrow} \sqrt[n]{x} \to 1 \end{aligned}$$

1.17 Satz

Sei (a_n) eine Folge nicht negativeer reeller Zahlen mit $a_n \to a$. Dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a_n} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^q = a^q \; \forall q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ (ohne Beweis)

1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$-Notation

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{beschränkt}\right\}$

b) $o(A_n) = \left\{(b_n) \,\middle|\, \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \text{Nullfolge}\right\}$

[a_n wächst schneller als b_n]

c) $a_n \sim b_n$, falls $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

$\mathcal{O}, o$ heißen Landau-Symbole

1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in O(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$ – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$ – Menge aller Nullfolgen

1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

   $a_{n+1} \geq (>)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \nearrow$ (monoton wachsend)

b) (streng) monoton fallend, falls

   $a_{n+1} \leq (<)\ a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Schreibweise: $(a_n) \searrow$ (monoton fallend)

1.21 Beispiele

- (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ streng monoton fallend
- (a_n) mit $a_n = 1$ monoton steigend und fallend
- (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

1.22 Definition

Eine reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, falls $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ von oben (unten) beschränkt ist.

1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei (a_n) reelle Folge:

- Falls $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls $(a_n) \searrow$ und nach unten beschränkt, so konvergiert (a_n) gegen $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Beweis:

1. Sei $(a_n) \nearrow$ und nach oben beschränkt

   und seien $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ und $\epsilon > 0$.

   $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   a kleinste obere Schranke

   $\Rightarrow a - \epsilon$ keine obere Schranke.

   $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$

   $\underset{\substack{a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N}}{\Rightarrow} \quad |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$

   $\Rightarrow a_n \to a$

2. analog $\quad\square$

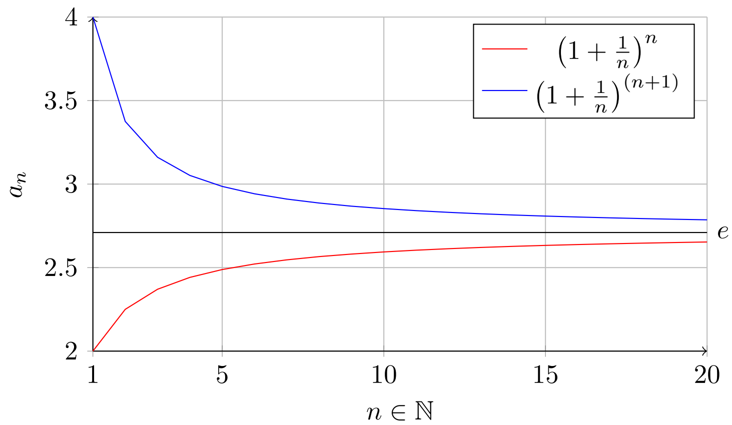
1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert e



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$ ist monoton.

Zeigen dazu: $a_n \geq a_{n-1} \Big(\Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \Big)$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \underset{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1
\end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n}{}_{n+1}\right)$ ist monoton fallend.

$$\begin{aligned}
\text{Zeige dazu: } b_n \leq b_{n-1} &\left(\Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right) \\
\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right) \\
\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n &\underset{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}
\end{aligned}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl e bezeichnet. Dazu zunächst:

1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$

Dann sind $(a_n), (b_n)$ konvergent und besitzen den selben Limes.

Beweis: Es ist $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (a_n) hat obere Schranke b_1
(b_n) hat untere Schranke a_1
$\underset{1.23}{\Rightarrow}$ $(a_n), (b_n)$ konvergent.

Da $(b_n - a_n)$ Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich. $\square$

1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$ (siehe 1.25)
- $\underline{(a_n)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underline{\leq} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \cdot a_n \underset{1.13/3}{=} \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

1.29 Bemerkung

(a_n) konvergent $\underset{1.8}{\Rightarrow}$ (a_n) beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**
z.B besitzt jedoch $a_n = (-1)^n$ zwei konvergente Teilfolgen mit Limes $+1$ und -1.

1.30 Definition: Teilfolge

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.31 Beispiel

$a_n = (-1)^n$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k+1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

1.32 Bemerkung

(a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ Jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei (a_n) reelle Folge. $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

1.34 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat zwei Häufungspunkte: -1 und 1.

1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei (a_n) reelle Folge. (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt konvergente Teilfolge

Beweis: Konstruiere konvergente Teilfolge $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$,

(a_n) beschränkt $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (K geeignet)

$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0,B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\underline{k=1}$: Halbiere $[A_0, B_0]$
  - Falls in der linken Folgenhälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

  Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte aus der es stammt $[A_1, B_1]$.
- $\underline{k=2}$: Halbiere $[A_1, B_1]$. Wende obiges Verfahren an, um $a_{n2} \in [A_2, B_2]$ zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \to 0$

$\underset{1.26}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} B_k$

Da $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$, ist $\lim\limits_{n\to\infty} A_k \underset{1.15}{=} \lim\limits_{k\to\infty} (a_{n_k})$ $\square$

1.36 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(a_n)$

Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{-\infty : (a_n)\ \forall K>0\ \exists N\in\mathbb{N} : a_n \leq -K\ \forall n\geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty} \end{cases}$
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ \underbrace{+\infty : (a_n)\ \forall K>0\ \exists N\in\mathbb{N} : a_n \geq K\ \forall n\geq N}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty} \end{cases}$

1.37 Bemerkung

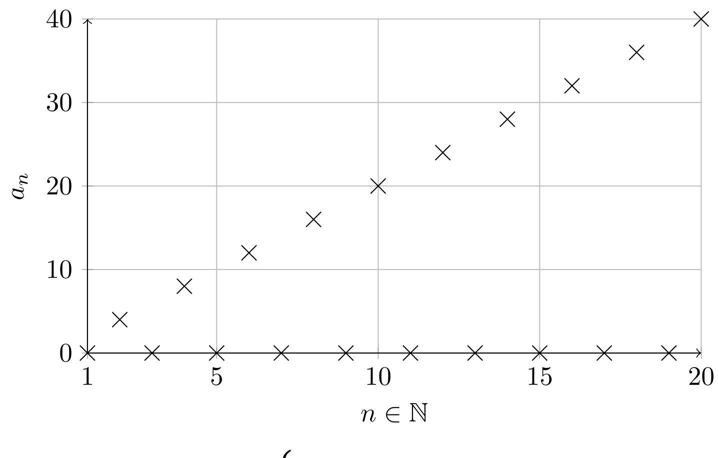
a) $a_n \to \pm\infty$ in obriger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)

   z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
   aber (a_n) mit $(a_n) = n$ divergiert bestimmt gegen ∞

b) $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
   mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl $\limsup$ als auch $\liminf$.

1.38 Beispiel



$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & \text{n gerade} \\ 2n+1, & \text{n ungerade} \end{cases}$

$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$

1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)
$:\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon\ \forall n, k \geq M$

1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$
(a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

Beweis: $(\Rightarrow)$: klar
$(\Leftarrow)$:

1. Zeige (a_n) beschränkt

   Sei (a_n) C-F: $\Rightarrow \quad \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1$
   $\forall n, k \geq R$

   $\underset{k=R}{\Rightarrow} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq \mathbb{R}$
   $\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$
   $\Rightarrow \min\{a_r - 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \leq a_n \leq$
   $\max\{a_R + 1, a_1, ..., a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt und besitzt
   konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit
   $a = \lim\limits_{j \to \infty} a_{n_j}$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

   Sei $\epsilon > 0$

   $\Rightarrow$
   - $\exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M$
   - $\exists J \in \mathbb{N} : \left|a_{n_j} - a_k\right| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J$

   Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.
   $\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{\left|a_n - a_{n_j}\right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{\left|a_{n_j} - a\right|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$

1.41 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = \left|(-1)^{n+1} - (-1)^n\right|$
$= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1 \quad |a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \to [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
   es git genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x} = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
   die durch $X_n := f(X_n + 1)$ definierte Folge (X_n) gegen $\hat{x}$.

(Ohne Beweis)

2 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

2.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

   $$S_k = \sum_{i=1}^{k} \delta_i = \delta_1 + ... + \delta_k$$

   heißt (undendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.
   Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.
2. Falls (S_k) gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

   $$\lim_{k\to\infty} (S_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

   Andernfalls heißt die Reihe divergent.
3. Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n\geq n_o}$ die Reihe $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ definieren.
4. $\sum_{i=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konvergiert.

2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Parialsummen von $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$ bestimmt gegen $+\infty(-\infty)$ divergiert, so schreiben wir: $\sum\limits_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

2.3 Beispiele

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ... = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & \text{n ungerade} \\ 1 & \text{n gerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ divergent

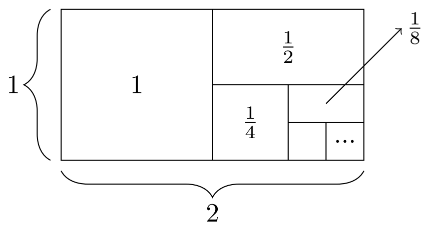
c) Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + ... + \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$

Per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$ divergent.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ konvergent



und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) <u>Geometrische Reihe</u>

Für $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$,

denn $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da $q^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ für $|q| < 1$ (1.10), folgt $S_n \to \frac{1}{1-q}$.

Andererseits ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent für $|q| \geq 1$ (2.9)

- In Beispiel d) is $q = \frac{1}{2}$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

  Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.
- $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_{3} = \frac{8}{9}$

  Achtung bei Index-Verschiebung!

2.4 Satz: Rechenregeln für Summen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k) + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k) = a + b$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c - a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist (S_n) mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach oben beschränkt und $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\Leftrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$

$$\underbrace{|a_n + ... + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$$

$$\left[= |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right]$$

(Folgt aus 1.40)

2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent, so ist $\sum_{i=1}^{\infty}$ auch konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0. \Rightarrow \ \exists N \in \mathbb{N}$: $|a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq N$.

Da $|a_n| + ... + |a_k| \leq |a_n| + ... + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N$,
ist 2.6 für $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ erfüllt.

2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |a_i|$$

Beweis: Sei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ absolut konvergent. Dann:

- $\lim_{k\to\infty} (S_k) \underset{2.1}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{K} a_i\right)$

Da $\lim_{k\to\infty} |S_k| = \left|\lim_{k\to\infty}\right| \quad \left[\begin{array}{c} C_i \to c \\ \Rightarrow |C_i| \to |c| \end{array} \ (1.13)\right]$,

ist $\lim_{k\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \ (*)$

- $\lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|\right) \underset{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \ (**)$

Insgesamt: $\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{k} |a_i| \quad \Big| \lim_{k\to\infty}$

$$\underset{(*),(**)}{\Leftrightarrow} \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \qquad \square$$

2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent, so ist (a_n) eine Nullfolge.
D.h. Ist (a_i) keine Nullfolge, so divergiert $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beweis: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergiert $\underset{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}:$

$|a_n + ... + a_k| < \epsilon \ \forall k \geq n \geq N$.

Wähle $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \ \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$ Nullfolge. $\square$

2.10 Majorantenkriterium

Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$.
Ist dann $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent.

Beweis: Sei $\epsilon > 0 \underset{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}: |a_n + ... + a_k|$

$\overbrace{\leq}^{0 \leq a_1 \leq b_i \ \forall i} |b_n + ... + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$

2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent, so ist auch $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent.

2.12 Beispiele

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1-\frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}}$ ist divergent. (2.9)

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$ ist divergent, da $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$ und $\displaystyle\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$ divergent. (2.11)

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$ ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$ (alternierende harminische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei (a_n) monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist $\sum i = 0^{2n}(-1)^i a_i$ konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow$: $\begin{aligned}[t] A_{n+1} - A_n &= \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^n a_i \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} \\ &= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0, \text{ da } (a_n) \searrow \end{aligned}$
- Analog: $(B_n) \searrow$ • $B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in N$
  • $B_n - A_n = a_{2n} \to 0$

$(A_n), (B_n)$ konvergiert mit $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$ konvergent.

2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in \mathbb{R}$. Dann:

- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent
- $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ möglich.

Beweis:

Sei $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

da a größter HP von $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq (a+\epsilon)^n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a+\epsilon)^n}_{<1} \text{ (geometrische Reihe)}$$

ist konvergente Majorante der Reihe $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$.

Damit konvergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \underbrace{\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} |a_k|}}_{<\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ unendlich oft

$\Rightarrow |a_n| > 1$ unendlich oft

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\underset{2.9}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. □

2.15 Beispiele

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{k^3}{3^k}}}_{a_k}$ konvergent, da $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\left(\sqrt[n]{n}^3\right)}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harminische Reihe) liefert

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}^\alpha\right)} = 1 \quad (\alpha > 0) \to$ keine Aussage möglich.

2.16 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent
- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq a \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq ... \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq \mathbb{N}$

Da $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a^{n-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum\limits_{n=N}^{\infty} a^n$ konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit Majorantenkriterium, dass $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq ... \geq |a_N| > 0$

$\Rightarrow (a_n)$ keine Nullfolge $\square$

2.17 Beispiele

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ konvergiert, da $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\cancel{2^{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$

b) Wie in 2.15b ist für $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0)$ keine Aussage möglich,

da $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

und somit $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$

2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ für $0 < \alpha < 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert.

2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kan Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

- $1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm ...$

  $$Sn = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{6} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{9} \pm ...$

  $$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt Umordnung von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, falls
eine bijektive Abbildung $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ einer absolut konvergenten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ohne Beweis)

2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem $s \in \overline{\mathbb{R}}$ eine Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$ (ohne Beweis)

3 Potenzreihen

3.1 Grundbegriffe und Beispiel

a) $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist für $|x| < 1$ absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$.

   Für $|x| > 1$ ist $P(x)$ divergent.

b) $P(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$ ist für $x \neq 1$ divergent:

   Quotientenkriterium liefert:

   $$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

3.2 Definition: Potenzreihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ reelle Folge und seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Koeffizienten a_k

3.3 Bemerkung

a) In Bsp 3.1a) ist $x_0 = 0$ und $a_k = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$.
In 3.1b) ist $x_0 = 1$ und $a_k = k!$

b) In 3.1a) konvergiert $P(x)$ für $x \in (-1, 1)$, in 3.1b) lediglich für $x = x_0 = 1$. Es wird sich heraussstellen, dass es für eine Potenzreihe $P(x)$ mit Zentrum x_0 einen Konvergenzradius $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$ gibt (3.5), so dass $P(x)$ absolut konvergent für $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, (d.h. $|x - x_0| < \rho$) und divergent für $|x - x_0| > \rho$ ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

3.4 Satz

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_o\}$.

Dann:

1. $P(x_1)$ konvergent $\Rightarrow P(x)$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2. $P(x_1)$ divergent $\Rightarrow P(x)$ ist divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Beweis:

1. $P(x)$ konvergent $\underset{2.9}{\Rightarrow} (a_k (x_1 - x_0)^k)$ Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k (x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k (x - x_0)^k| = |a_k (x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq K \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1}$$

$\underset{2.10}{\Rightarrow} P(x)$ absolut konvergent für $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ (Majorantenkriterium)

2. Sei $P(x_1)$ divergent und $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$. Wäre $P(x)$ konvergent, so wäre wegen 1. auch $P(x_1)$ konvergent. $\lightning$

   Also: $P(x)$ divergent $\square$

3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei $P(x)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0.

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von $P(x)$.

Für $\rho \in \mathbb{R}_+$ heißt $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ Konvergenzintervall von $P(x)$.
Ist $\rho = \infty$, so konvergiert $P(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (3.7)

3.6 Beispiel

a) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ ist $\rho = 1$, denn $(-1, 1)$ ist Konvergenzintervall von $P(x), x_0 = 0$

b) Für $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$ ist $\rho = 0$, denn $P(x)$ ist nur für $x = x_0 = 1$ konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

3.7 Korollar

Sei $P(X)$ Potenzreihe mit Zentrum x_0 und Konvergenzradius ρ.

Dann:

1. $P(X)$ absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \rho$.
2. $P(X)$ divergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > \rho$.
3. [Falls $|x - x_0| = \rho \rightsquigarrow$ keine allgemeine Aussage möglich]