

# Skript Mathe 2

12. Juni 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Folgen</b>	<b>3</b>
1.1	Definition . . . . .	3
1.2	Beispiele . . . . .	4
1.3	Definition: Beschränkte und alternierende Folgen . . . . .	5
1.4	Beispiele . . . . .	6
1.5	Definition: Konvergente Folgen . . . . .	6
1.6	Bemerkung . . . . .	6
1.7	Beispiele . . . . .	7
1.8	Satz . . . . .	7
1.9	Bemerkung . . . . .	8
1.10	Beispiel: Geometrische Folge . . . . .	8
1.11	Beispiel . . . . .	8
1.12	Bemerkung: Dreiecksungleichung . . . . .	9
1.13	Rechenregeln für Folgen . . . . .	9
1.14	Beispiele: Rechenregeln . . . . .	11
1.15	Satz: Einschließungsregel . . . . .	12
1.16	Beispiele . . . . .	12
1.17	Satz . . . . .	13
1.18	Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation . . . . .	13
1.19	Beispiele . . . . .	13
1.20	Definition: Monotonie . . . . .	13
1.21	Beispiele . . . . .	14
1.22	Definition . . . . .	14
1.23	Satz: Monotone Konvergenz . . . . .	14
1.24	Bernoulli-Ungleichung . . . . .	14
1.25	Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$ . . . . .	15
1.26	Satz: Intervallschachtelung . . . . .	16
1.27	Beispiel . . . . .	16
1.28	Definition: Eulersche Zahl . . . . .	16
1.29	Bemerkung . . . . .	16
1.30	Definition: Teilfolge . . . . .	16
1.31	Beispiel . . . . .	17
1.32	Bemerkung . . . . .	17
1.33	Definition: Häufungspunkt (HP) . . . . .	17
1.34	Beispiel . . . . .	17
1.35	Satz: Bonzano-Weierstraß . . . . .	17

1.36	Definition: Limes inferior/superior . . . . .	18
1.37	Bemerkung . . . . .	18
1.38	Beispiel . . . . .	19
1.39	Definition: Cauchy-Folgen . . . . .	19
1.40	Satz: Cauchy-Kriterium . . . . .	19
1.41	Beispiel . . . . .	20
1.42	Definition: Kontraktion . . . . .	20
1.43	Banachscher Fixpunktsatz . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Reihen</b>	<b>21</b>
2.1	Definition: Reihe . . . . .	21
2.2	Bemerkung . . . . .	21
2.3	Beispiele . . . . .	21
2.4	Satz: Rechenregeln für Reihen . . . . .	23
2.5	Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen . . . . .	23
2.6	Cauchy-Kriterium . . . . .	23
2.7	Satz: Absolute Konvergenz . . . . .	23
2.8	Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen . . . . .	23
2.9	Satz: Divergenzkriterium . . . . .	24
2.10	Majorantenkriterium . . . . .	24
2.11	Bemerkung: Minorantenkriterium . . . . .	24
2.12	Beispiele . . . . .	25
2.13	Satz: Leibniz-Kriterium . . . . .	25
2.14	Satz: Wurzelkriterium . . . . .	25
2.15	Beispiele . . . . .	26
2.16	Satz: Quotientenkriterium . . . . .	26
2.17	Beispiele . . . . .	27
2.18	Bemerkung . . . . .	27
2.19	Umordnung von Reihen: Beispiel . . . . .	27
2.20	Definition: Umordnung . . . . .	28
2.21	Umordnungssatz . . . . .	28
2.22	Riemannscher Umordnungssatz . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>28</b>
3.1	Grundbegriffe und Beispiel . . . . .	28
3.2	Definition: Potenzreihen . . . . .	28
3.3	Bemerkung . . . . .	29
3.4	Satz . . . . .	29
3.5	Definition: Konvergenzradius und Intervall . . . . .	29
3.6	Beispiel . . . . .	30
3.7	Korollar . . . . .	30
3.8	Satz: Formel von Cauchy-Hademard . . . . .	30
3.9	Beispiel . . . . .	31
3.10	Satz: Formel von Euler . . . . .	31
3.11	Beispiel: Exponentialfunktion . . . . .	31
3.12	Bemerkung . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Reelle Funktionen</b>	<b>33</b>
4.1	Definition: Abbildung . . . . .	33
4.2	Definition: Reelle Funktion . . . . .	33

4.3	Beispiel . . . . .	34
4.4	Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv . . . . .	34
4.5	Beispiele . . . . .	34
4.6	Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild . . . . .	34
4.7	Beispiel . . . . .	34
4.8	Definition: Symmetrie . . . . .	35
4.9	Definition: Monotonie . . . . .	35
4.10	Elementare Funktionen . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit</b>	<b>40</b>
5.1	Definition: Grundbegriffe und Beispiele . . . . .	40
5.2	Beispiele . . . . .	40
5.3	Bemerkung . . . . .	40
5.4	Definition Grenzwert I . . . . .	40
5.5	Beispiele . . . . .	41
5.6	$\epsilon$ - $\varphi$ -Kriterium . . . . .	41
5.7	Beispiel . . . . .	42
5.8	Definition: Grenzwert II . . . . .	42
5.9	Beispiele . . . . .	42
5.10	Definition: Rechts-/Linksseitiger Grenzwert . . . . .	43
5.11	Beispiel . . . . .	43
5.12	Bemerkung . . . . .	43
5.13	Beispiele . . . . .	43
5.14	Definition: Stetigkeit . . . . .	44
5.15	Bemerkung . . . . .	44
5.16	Beispiele . . . . .	44
5.17	Satz . . . . .	44
5.18	Bemerkung . . . . .	45
5.19	Beispiel . . . . .	45
5.20	Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen . . . . .	46
5.21	Bemerkung . . . . .	46
5.22	Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken . . . . .	46
5.23	Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz) . . . . .	48

# 1 Folgen

## 1.1 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung von den natürlichen Zahlen ( $\mathbb{N}$ ) in eine beliebige Menge  $M$  (oft  $M \subseteq \mathbb{R}$ ).

$a_n$ :  $n$ -tes Folgenglied  
 $n$ : Index

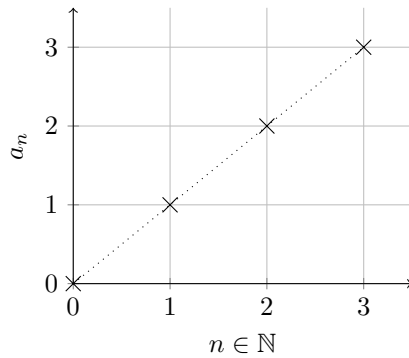
Oft ist das erste Folgenglied nicht  $a_1$ , sondern z.B:  $a_7$ .

**Schreibweise:**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_{n \geq n_0}$  oder  $(a_n)$

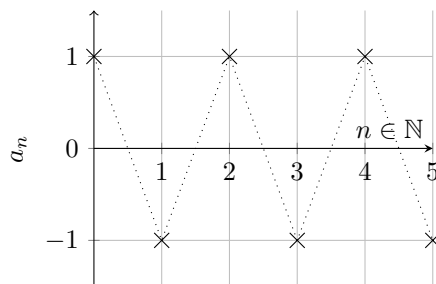
## 1.2 Beispiele

a)  $a_n = c \ \forall n \in \mathbb{N}$  (konstante Folge)

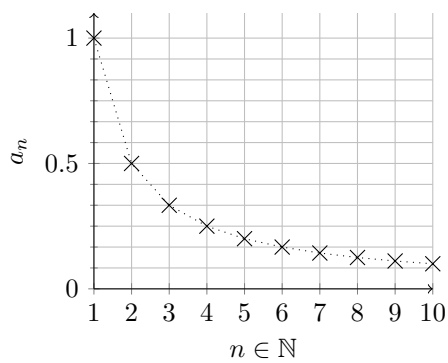
b)  $a_n = n$  (Ursprungsgerade)



c)  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$  (alternierend)



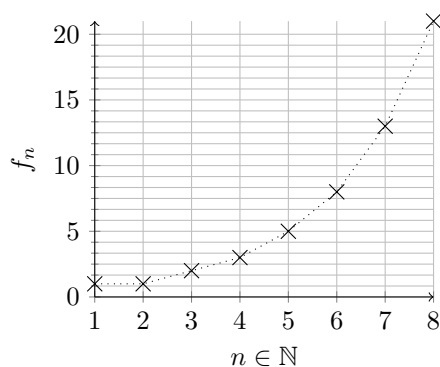
d)  $a_n = \frac{1}{n}$  (Nullfolge)



e) Rekursive Folgen, z.B: Fiboacci-Folge.

$$f_1 = 1, f_2 = 1, \underbrace{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}_{\text{Rekursionsformel}}$$

$$f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots$$



f) Exponentielles Wachstum (z.B. von Bakterienstämmen)

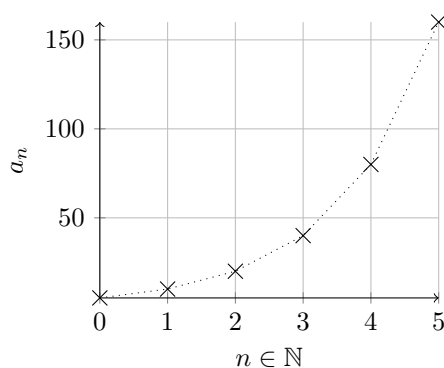
$q$ : Wachstumsfaktor

$X_0$ : Startpopulation

**Explizit:**  $X_n = q^n \cdot X_0$

z.B:  $X_0 = 5, q = 2$

$\rightarrow X_1 = 10, X_2 = 20, X_3 = 40, \dots$



g) Logistisches Wachstum

$$X_{n+1} = r \cdot X_n \cdot (1 - X_n)$$

$r \in [0, 4]$ : Wachstums-/Sterbefaktor

$X_n \in [0, 1]$ : Relative Anzahl der Individuen in Generation  $n$

Anzahl der Individuen in Generation  $n + 1$  hängt ab von der aktuellen Populationsgröße  $X_n$  und den vorhandenen natürlichen Ressourcen, charakterisiert durch  $(1 - X_n)$

### 1.3 Definition: Beschränkte und alternierende Folgen

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ .

a)  $(a_n)$  heißt beschränkt  $:\Leftrightarrow |a_n| \leq K$  für ein  $K \geq 0$ .

b)  $(a_n)$  heißt alternierend, falls die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

## 1.4 Beispiele

Aus 1.2):

- a, c, d, g) sind beschränkt
- b, e) sind unbeschränkt
- c) ist alternierend

## 1.5 Definition: Konvergente Folgen

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen konvergiert gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt (das von  $\epsilon$  abhängig sein darf), so dass:

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

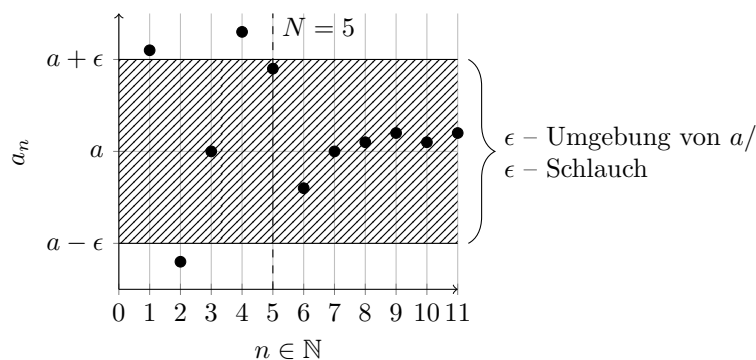
**Kurz:**

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

- b)  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge. Man schreibt:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  oder  $a_n \rightarrow a$ .
- c) Eine Folge  $(a_n)$  mit Limes 0 heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge die nicht konvergent ist, heißt divergent.

## 1.6 Bemerkung

$a_n \rightarrow a$  bedeutet anschaulich: Gibt man eine Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  vor, so sind ab einem bestimmten  $N \in \mathbb{N}$  alle Folgenglieder weniger als  $\epsilon$  von  $a$  entfernt. Je kleiner  $\epsilon$  gewählt wird, desto größer muss im allgemeinen  $N$  gewählt werden.



Solch ein  $N$  muss sich für jedes noch so kleine  $\epsilon$  finden lassen. Ansonsten ist  $(a_n)$  divergent.

## 1.7 Beispiele

a) Behauptung:  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Nullfolge

Beweis:

- Wähle  $\epsilon = \frac{1}{10}$ . Dann ist für  $N > 10$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > 10}{<} \frac{1}{10} \quad \forall n \geq N$$

- Allgemein (beliebiges  $\epsilon$ )

Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N} \underset{N > \frac{1}{\epsilon}}{<} \frac{1}{\epsilon} \quad \forall n \geq N$$

b) Behauptung:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = \frac{n+1}{3n}$  hat Limes  $a = \frac{1}{3}$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$ . Dann ist für  $N \geq \frac{1}{3\epsilon}$

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \frac{n+1-n}{3n} = \frac{1}{3n} \underset{N \geq n}{\leq} \boxed{\frac{1}{3N} < \epsilon} \quad \forall N \geq n$$

c)  $N$  muss nicht immer optimal gewählt werden.

$$\frac{1}{n^3 + n + 5} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ , für  $N > \frac{1}{\epsilon}$

$$|a_n - a| = \frac{1}{n^3 + n + 5} \underset{N \geq n}{\leq} \frac{1}{N^3 + N + 5} < \boxed{\frac{1}{N} < \epsilon}$$

## 1.8 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

**Beweis:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit Limes  $a \in \mathbb{R}$ .

Zu zeigen:  $|a_n| \leq K \quad \forall a \in \mathbb{N}$ , für ein  $K \geq 0$ .

Sei  $\epsilon = 1$ ,  $(a_n)$  konvergent.

$$\Rightarrow |a_n| = |a_n - a + a| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} < 1 + |a| \quad \forall n \geq N$$

Setze  $K = \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \square$$

## 1.9 Bemerkung

Wegen 1.8:  $(a_n)$  unbeschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  divergent.

Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

## 1.10 Beispiel: Geometrische Folge

$$\text{Für } q \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

Für  $|q| > 1$  oder  $q = -1$  ist  $(q^n)$  divergent.

**Beweis:**

1.)  $|q| < 1$ . Sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} (q^n - 0) = |q|^n < \epsilon &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln(\epsilon) \quad | : \ln(q) < 0 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} \end{aligned}$$

$$\text{Für } N > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln |q|} : |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

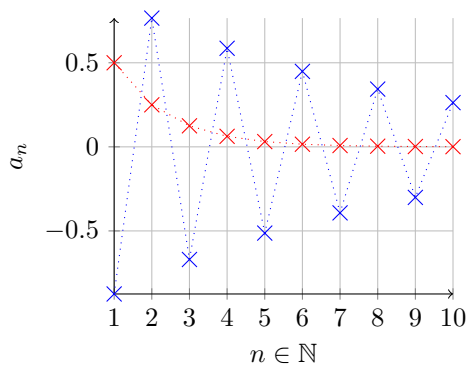
2.)  $q = 1$ .  $q^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow q^n \rightarrow 1$

3.)  $|q| > 1 \Rightarrow (q^n)$  unbeschränkt  $\stackrel{1.9}{\Rightarrow} (q^n)$  divergent

4.)  $q = -1 \Rightarrow q^n = (-1)^n$ . Beweis der Divergenz später (Cauchyfolgen)

## 1.11 Beispiel

Wegen 1.10 sind  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\frac{-7}{8})^n_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen.





### 1.12 Bemerkung: Dreiecksungleichung

Um Rechenregeln für Folgen in 1.13 beweisen zu können, braucht man folgende Version der  $\Delta$ -Ungleichung:

$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ , da:

$$\bullet |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Bigg| \quad |-b|$$

$$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

$$\bullet |b - a + a| \leq |b - a| + |a| \quad \Bigg| \quad |-a|$$

$$\Leftrightarrow |b| - |a| \leq |b - a|$$

$$\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

### 1.13 Rechenregeln für Folgen

Seien  $(a_n), (b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$ .

Dann gilt:

$$1.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2.) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$3.) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$4.) b \neq 0 \Rightarrow \bullet \exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\bullet \left( \frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq k} \text{ konvergiert gegen } \frac{a}{b}$$

$$5.) \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Seien weiter  $(d_n), (e_n)$  reelle Folgen,  $(d_n)$  ist Nullfolge

$$6.) (e_n) \text{ beschränkt} \Rightarrow (d_n \cdot e_n) \text{ ist Nullfolge}$$

$$7.) |e_n| \leq d_n \Rightarrow |e_n| \text{ ist Nullfolge}$$

**Beweis:**

1.)

Sei  $\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} :$

$$\bullet |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_a$$

$$\bullet |b_n - b| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\Rightarrow |a_n + b_n - (a + b)| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

2.) • Für  $\lambda = 0$  gilt auch  $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0 = \lambda \cdot a$  ✓

• Für  $\lambda \neq 0$ : Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{|\lambda|} \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n > N \checkmark$$

3.)

Satz 1.8  $\Rightarrow (b_n)$  beschränkt.

$$\Rightarrow \exists k \geq 0 : |b_n| \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$$

$$\leq |a_n - a| \cdot k + |a| \cdot |b_n - b| \quad (*)$$

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N_a, N_b \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2k} \quad \forall n \geq N_a$$

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|} \quad \forall n \geq N_b$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} |a_n b_n - ab| < \frac{\epsilon}{2k} \cdot k + |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

$$\forall n \geq \max\{N_a, N_b\}$$

4.) • Z.z:  $\exists k \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$

Es ist  $b \neq 0$  und  $|b| > 0$ .

$$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : \underbrace{|b_n - b|}_{\substack{\geq |b| - |b_n| \\ \text{1.12}}} < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq l$$

$$\Rightarrow \exists |b| - |b_n| < \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \frac{|b|}{2} < |b_n| > 0 \quad \forall n \geq k \quad (**)$$

$$\Rightarrow b_n \neq 0 \quad \forall n \geq k$$

• Z.z:  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq k}$  hat  $\frac{a}{b}$  als Limes.

Da  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , genügt es wegen 3.) zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ .

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \cdot |b|^2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| \stackrel{(**)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| \stackrel{\downarrow}{<} \epsilon \quad \forall n \geq N$$

5.) mit 1.12

6,7.) Übung

## 1.14 Beispiele: Rechenregeln

a)

$$\frac{(-1)^n + 5}{n} = ((-1)^n + 5) \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen 1.13/6}$$

- $\frac{1}{n} \rightarrow 0$
- $|(-1)^n + 5| \leq |(-1)|^n + 5 = 6$

$\Rightarrow (-1)^n + 5$  beschränkt

b)

$$\begin{aligned} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} &\rightarrow -3, \text{ denn } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{-n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(3 + \frac{1}{n^2})}{\mathcal{N}(-1 + \frac{1}{n})} \\ &\stackrel{1.13/4}{=} \frac{\lim 3 + \frac{1}{n^2}}{\lim -1 + \frac{1}{n}} \stackrel{1.13/1}{=} \frac{3 + \lim \frac{1}{n^2}}{-1 + \lim \frac{1}{n}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

c) Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| > 1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Dann:

$$\begin{array}{ccc} \text{kte Potenz} & \searrow & \boxed{n^k} \\ & & \downarrow \\ \text{exponentielles Wachstum} & \nearrow & \boxed{X^n} \end{array} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Beweis:** Es ist  $|x| = 1 + t$  für  $t > 0$ .

Für  $n > k$ :

$$\begin{aligned} |x|^n &= (1+t)^n = \sum_{j=0}^n \underbrace{\binom{n}{j}}_{\geq 0} 1^{n-j} t^j \\ &\stackrel{j \geq k+1}{\geq} \binom{n}{k+1} t^{k+1} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} \\ &= n^{k+1} \cdot \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \pm \dots \\ &\Rightarrow \left| \frac{n^k}{x^n} \right| = \frac{n^k}{(1+t)^n} \leq \frac{\mathcal{N}^k(k+1)!}{n^{k+1} t^{k+1} \pm \dots} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d) Sei  $x \in \mathbb{R}_+$ .  $\left(\frac{x^n}{n!}\right)$  ist Nullfolge, d.h. Fakultät wächst schneller als exponentiell: Sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $n > m+1 > x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^{n-m}}{n(n-1) \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \boxed{\frac{x^m}{m!}} = c > 0 \\ &\leq c \cdot \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} = c \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{m+1}\right)^{(n-m)}}_{\text{geom. Folge, } < 1} \xrightarrow[1.13/7]{1.13/6,} 0 \end{aligned}$$

### 1.15 Satz: Einschließungsregel

Seien  $(a_n), (b_n), (c_n)$  reelle Folgen mit

1.  $\exists k \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq k$
2.  $(a_n), (c_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$

Dann ist auch  $(b_n)$  konvergent und  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

**Beweis:** Sei  $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $\epsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \xrightarrow{2.} N_a, N_c : & \bullet |a_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_a \\ & \bullet |c_n - a| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n \geq N_c \end{aligned}$$

Aus 1.:

$$\begin{aligned} |b_n - a_n| &= b_n - a_n \leq c_n - a_n = |c_n - a_n| \\ \forall n \geq k & \quad \downarrow \\ \Rightarrow |b_n - a| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a| \leq |c_n - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a - a_n|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|a_n - a|}_{\leq \frac{\epsilon}{3}} < \epsilon \quad \forall \max\{k, N_a, N - c\} \quad \square \end{aligned}$$

### 1.16 Beispiele

a)  $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , denn:

Sei  $\epsilon > 0$ . Da  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} \rightarrow 0$  (1.14/c),

gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{n}{(1+\epsilon)^n} < 1 \quad \forall n \geq N$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1+\epsilon)^n &> n \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow 1+\epsilon &> \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Da einerseits  $\sqrt[n]{n} \geq 1 > 1 - \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , ist

$$1 + \epsilon > \sqrt[n]{n} > 1 - \epsilon \Leftrightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

b)  $\sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \quad \forall x > 0$

$$\begin{aligned} \text{Sei } x > 0 &\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{1}{n} \leq x \leq n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\leq \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{n} \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} &\rightarrow 1 \text{ und } \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \xrightarrow{1.15} \sqrt[n]{x} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

### 1.17 Satz

Sei  $(a_n)$  eine Folge nicht negativer reeller Zahlen mit  $a_n \rightarrow a$ . Dann:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a} \quad \forall m \in \mathbb{N}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = a^q \quad \forall q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q > 0$  (ohne Beweis)

### 1.18 Definition: Landau Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

- a)  $\mathcal{O}(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ beschränkt} \right\}$
- b)  $o(A_n) = \left\{ (b_n) \mid \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \text{ Nullfolge} \right\}$

$[a_n \text{ wächst schneller als } b_n]$

- c)  $a_n \sim b_n$ , falls  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$

$\mathcal{O}, o$  heißen Landau-Symbole

### 1.19 Beispiele

- $(2n^2 + 3n + 1) \in \mathcal{O}(n^2)$
- $(2n^2 + 3n + 1) \in o(n^3)$
- $(n_3) \in o(2^n)$
- $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n$  (Stirlingsche Formel)
- $\mathcal{O}(1)$  – Menge aller beschränkten Folgen
- $o(1)$  – Menge aller Nullfolgen

### 1.20 Definition: Monotonie

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)$  heißt

- a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls

$$a_{n+1} \geq (>) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$  (monoton wachsend)

- b) (streng) monoton fallend, falls

$$a_{n+1} \leq (<) a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Schreibweise:  $(a_n) \searrow$  (monoton fallend)

### 1.21 Beispiele

- $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{1}{n}$  streng monoton fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = 1$  monoton steigend und fallend
- $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht monoton

### 1.22 Definition

Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt nach oben (unten) beschränkt, falls  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  von oben (unten) beschränkt ist.

### 1.23 Satz: Monotone Konvergenz

Sei  $(a_n)$  reelle Folge:

- Falls  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$
- Falls  $(a_n) \searrow$  und nach unten beschränkt, so konvergiert  $(a_n)$  gegen  $\inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

**Beweis:**

1. Sei  $(a_n) \nearrow$  und nach oben beschränkt  
und seien  $a = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$  und  $\epsilon > 0$ .  
 $\Rightarrow a_n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $a$  kleinste obere Schranke  
 $\Rightarrow a - \epsilon$  keine obere Schranke.  
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : a - \epsilon < a_N \leq a$   
 $\Rightarrow \begin{matrix} a_n \geq a_N \\ \forall n \geq N \end{matrix} |a_n - a| = a - a_n \leq a - a_N$   
 $\Rightarrow a_n \rightarrow a$
2. analog  $\square$

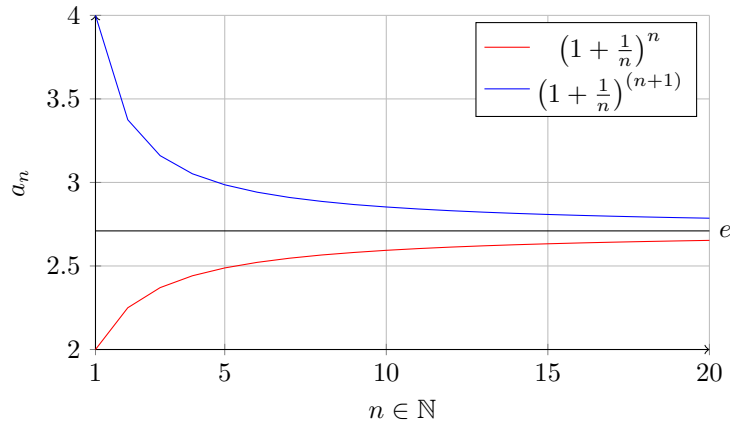
### 1.24 Bernoulli-Ungleichung

Im folgenden Beispiel wird die Bernoulli-Ungleichung benötigt:

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \forall h \geq -1 \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis mit vollständiger Induktion

### 1.25 Beispiel: Folgen mit Grenzwert $e$



- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n}\right)$  ist monoton.

Zeigen dazu:  $a_n \geq a_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \right)$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right) \stackrel{1.24}{\geq} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

$$h = \frac{1}{n^2}$$

- $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+n} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+1}\right)$  ist monoton fallend.

Zeige dazu:  $b_n \leq b_{n-1} \left( \Leftrightarrow \frac{b_{n-1}}{b_n} \leq 1 \right)$

$$\text{Analog: } \frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\text{Wegen } \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \stackrel{1.24}{\geq} 1 + \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n+1}{n}} \text{ ist}$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$$

In Beispiel 1.27 werden wir sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der Limes wird als Eulerische Zahl  $e$  bezeichnet. Dazu zunächst:

### 1.26 Satz: Intervallschachtelung

Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$

Dann sind  $(a_n), (b_n)$  konvergent und besitzen den selben Limes.

**Beweis:** Es ist  $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $\Rightarrow$   $(a_n)$  hat obere Schranke  $b_1$   
 $(b_n)$  hat untere Schranke  $a_1$   
 $\xRightarrow{1.23}$   $(a_n), (b_n)$  konvergent.

Da  $(b_n - a_n)$  Nullfolge, sind auch die Grenzwerte gleich.  $\square$

### 1.27 Beispiel

- $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$  (siehe 1.25)
- $\underline{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underline{b_n}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 1} \cdot a_n \stackrel{1.13/3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

### 1.28 Definition: Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$

### 1.29 Bemerkung

$(a_n)$  konvergent  $\xRightarrow{1.8}$   $(a_n)$  beschränkt. **Die Umkehrung gilt nicht!**

z.B besitzt jedoch  $a_n = (-1)^n$  zwei konvergente Teilfolgen mit Limes  $+1$  und  $-1$ .

### 1.30 Definition: Teilfolge

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine streng monoton steigende Folge von Indizes. Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .



### 1.31 Beispiel

$$a_n = (-1)^n$$

- $n_k = 2k \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- $n_k = 2k + 1 \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

### 1.32 Bemerkung

$(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  Jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

### 1.33 Definition: Häufungspunkt (HP)

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.

### 1.34 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat zwei Häufungspunkte:  $-1$  und  $1$ .

### 1.35 Satz: Bonzano-Weierstraß

Sei  $(a_n)$  reelle Folge.  $(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  besitzt konvergente Teilfolge

**Beweis:** Konstruiere konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,

$(a_n)$  beschränkt  $\Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ( $K$  geeignet)

$$\Rightarrow a_n \in \underbrace{[-K, K]}_{=[A_0, B_0]} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $k=1$ : Halbiere  $[A_0, B_0]$ 
  - Falls in der linken Folgehälfte unendlich viele Folgeglieder liegen, wähle eines davon aus.
  - Falls nicht, liegen in der rechten Hälfte unendlich viele. Wähle eines davon aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir  $a_{n_1}$ , die Intervallhälfte aus der es stammt  $[A_1, B_1]$ .

- $k=2$ : Halbiere  $[A_1, B_1]$ . Wende obiges Verfahren an, um  $a_{n_2} \in [A_2, B_2]$  zu bestimmen.
- usw ...

Erhalte Intervallschachtelung mit

- $(A_k) \nearrow, (B_k) \searrow$
- $A_k \leq B_k$

$$\bullet A_k = B_k = \frac{K}{2^{k-1}} \rightarrow 0$$

$$\stackrel{1.26}{\Rightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k$$

Da  $A_k \leq a_{nk} \leq B_k$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k \stackrel{1.15}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} (a_{nk}) \quad \square$

### 1.36 Definition: Limes inferior/superior

$(a_n)$  reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von  $(a_n)$  :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von  $(a_n)$  :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

Ist  $(a_n)$  nicht beschränkt, setzt man

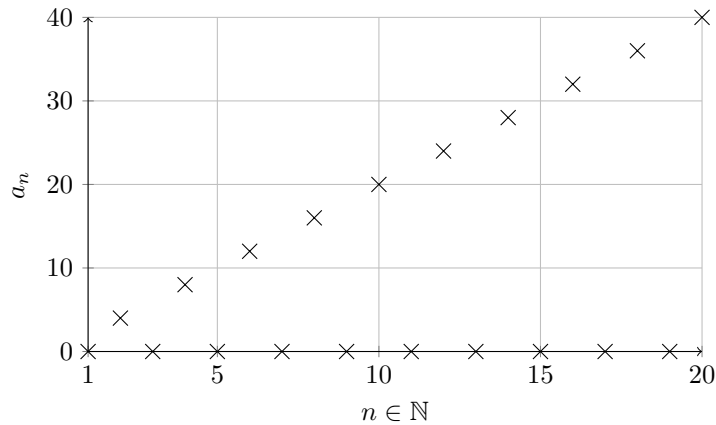
$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \quad \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \quad \forall n \geq N \\ \text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \end{cases}$$

### 1.37 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$  in obiger Definition bedeutet, dass  $(a_n)$  (bestimmt) gegen  $\pm\infty$  divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)  
z.B. divergiert  $(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  nicht bestimmt,  
aber  $(a_n)$  mit  $a_n = n$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$
- $-\infty, \infty$  sind keine reellen Zahlen. Man setzt  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$   
mit  $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In  $\overline{\mathbb{R}}$  besitzt jede Folge sowohl  $\limsup$  als auch  $\liminf$ .

### 1.38 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

### 1.39 Definition: Cauchy-Folgen

Sei  $(a_n)$  eine Folge.  $(a_n)$  heißt Cauchy-Folge (C-F)

$$:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$$

### 1.40 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$

$(a_n)$  konvergiert  $:\Leftrightarrow (a_n)$  ist Cauchy-Folge

**Beweis:**  $(\Rightarrow)$  : klar

$(\Leftarrow)$  :

1. Zeige  $(a_n)$  beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\stackrel{\Rightarrow}{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq$$

$$\max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ ist beschränkt und besitzt}$$

konvergente Teilfolge  $(a_{n_j})$  (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2.  $(a_n)$  ist konvergent mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei  $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle  $a_{n_j}$  so, dass  $j \geq J$  und  $n_j \geq M$ .

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

### 1.41 Beispiel

$(a_n)$  mit  $a_n = (-1)^n$  ist divergent,  
denn  $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$   
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für  $\epsilon = 1$   $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

### 1.42 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  heißt Kontraktion, falls  $\alpha \in (0, 1)$  existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B:  $f(x) = \frac{1}{2}x$  ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor  $\frac{1}{2}$ .

### 1.43 Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $f[a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Kontraktion. Dann:

1.  $f$  hat genau einen Fixpunkt  $\hat{x} \in \mathbb{R}$ , d.h.  
es gibt genau ein  $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert  $X_0 \in [a, b]$  konvergiert  
die durch  $X_n := f(X_{n-1})$  definierte Folge  $(X_n)$  gegen  $\hat{x}$ .

(Ohne Beweis)

## 2 Reihen

### Grundbegriffe und Beispiele

#### 2.1 Definition: Reihe

1. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge. Die Folge  $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise  $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$ .

Die Zahl  $S_k \in \mathbb{R}$  heißt k-te Partialsumme der Reihe.

2. Falls  $(S_k)$  gegen  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s. Man schreibt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k a_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Andernfalls heißt die Reihe divergent.

3. Entsprechend kann man für eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_o}$  die Reihe  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$  definieren.
4.  $\sum_{i=1}^{\infty}$  heißt absolut konvergent, falls  $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$  konvergiert.

#### 2.2 Bemerkung

Falls die Folgen der Partialsummen von  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i$  bestimmt gegen  $+\infty(-\infty)$  divergiert, so schreiben wir:  $\sum_{i=n_o}^{\infty} a_i = \infty(-\infty)$

#### 2.3 Beispiele

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots = \infty$

b)

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n (-1)^k}_{S_n} = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{ divergent}$$

c) Harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  ist divergent.

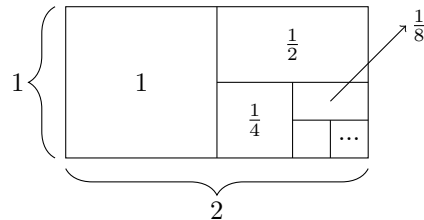
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \boxed{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \boxed{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}} + \boxed{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Per Induktion:  $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow (S_{2^m})$  divergent.

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  konvergent



$$\text{und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

e) Geometrische Reihe

Für  $g \in \mathbb{R}, |q| < 1$  gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ,

denn  $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  (Beweis mit vollständiger Induktion)

Da  $q^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für  $|q| < 1$  (1.10), folgt  $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$ .

Andererseits ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  divergent für  $|q| \geq 1$  (2.9)

• In Beispiel d) ist  $q = \frac{1}{2}$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

•  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Diese Reihe ist sogar absolut konvergent.

•  $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2}{3}}}_3 = \frac{8}{9}$

**Achtung bei Index-Verschiebung!**

## 2.4 Satz: Rechenregeln für Reihen

Gegeben seien zwei konvergente Reihen mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a + b \\ \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k = c \cdot a \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus 1.13.

## 2.5 Satz: Konvergenz und Divergenzkriterien für Reihen

Ist  $(S_n)$  mit  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  nach oben beschränkt und  $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent. (Folgt direkt aus 1.23)

## 2.6 Cauchy-Kriterium

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} &\underbrace{|a_n + \dots + a_k|} < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \\ &\left[ = |S_k - S_{n-1}| = \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right| \right] \end{aligned}$$

(Folgt aus 1.40)

## 2.7 Satz: Absolute Konvergenz

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  auch konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0$ .  $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$ .

Da  $|a_n| + \dots + |a_k| \leq |a_n| + \dots + |a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n$ ,  
ist 2.6 für  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  erfüllt.

## 2.8 Korollar: Dreiecksungleichung für Reihen

Für jede absolut konvergente Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

**Beweis:** Sei  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  absolut konvergent. Dann:

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} (S_k) \stackrel{2.1}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^K a_i \right)$$

$$\text{Da } \lim_{k \rightarrow \infty} |S_k| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} S_k \right| \quad \left[ \begin{array}{l} C_i \rightarrow c \\ \Rightarrow |C_i| \rightarrow |c| \end{array} \right. (1.13) \Bigg],$$

$$\text{ist } \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| (*)$$

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^k |a_i| \right) \stackrel{2.1}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Insgesamt: } \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| &\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \right. \\ &\stackrel{(*), (**)}{\Leftrightarrow} \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \quad \square \end{aligned}$$

## 2.9 Satz: Divergenzkriterium

Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent, so ist  $(a_n)$  eine Nullfolge.

D.h. Ist  $(a_i)$  keine Nullfolge, so divergiert  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ .

**Beweis:**  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergiert  $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$

$$|a_n + \dots + a_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N.$$

Wähle  $k = 1 \Rightarrow |a_n| < \epsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow (a_n)$  Nullfolge.  $\square$

## 2.10 Majorantenkriterium

Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen in  $\mathbb{R}$  mit  $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$ .

Ist dann  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  konvergent, so ist auch  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  konvergent.

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0 \stackrel{2.6}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N} : |a_n + \dots + a_k|$

$$\leq |b_n + \dots + b_k| < \epsilon \quad \forall k \geq n \geq N \quad \square$$

$\overbrace{0 \leq a_1 \leq b_i \quad \forall i}$

## 2.11 Bemerkung: Minorantenkriterium

Unter den selben Voraussetzungen wie in 2.10 erhält man anhand von Kontraposition: Ist  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  divergent, so ist auch  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  divergent.



## 2.12 Beispiele

a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{i}\right)}_{\text{Keine Nullfolge}} \text{ ist divergent. (2.9)}$

b)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{i}}$  ist divergent, da  $0 \leq \frac{1}{i} \leq \frac{1}{\sqrt{i}}$  und  $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}}_{\text{Harmonische Reihe}}$  divergent. (2.11)

c)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i}$  ist konvergent, weil absolut konvergent. (2.3e, 2.7)

d)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$  (alternierende harmonische Reihe) ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Konvergenz zeigt man mit

## 2.13 Satz: Leibniz-Kriterium

Sei  $(a_n)$  monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$  konvergent. **Beweis:** Intervallschachtelung (1.26)

$$A_n := \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i \quad B_n := \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i$$

- $(A_n) \nearrow: A_{n+1} - A_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i - \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i a_i$   
 $= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n}$   
 $= a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$ , da  $(a_n) \searrow$
- Analog:  $(B_n) \searrow: B_n - A_n = a_{2n} \geq 0 \Leftrightarrow A_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
 $\bullet B_n - A_n = a_{2n} \rightarrow 0$

$(A_n), (B_n)$  konvergiert mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i a_i$  konvergent.

## 2.14 Satz: Wurzelkriterium

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$ . Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightsquigarrow$  keine allgemeine Aussage für  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  möglich.

**Beweis:**

Sei  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- $a < 1 : \Rightarrow \exists \epsilon > 0 : a + \epsilon < 1$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \epsilon \quad \forall n \geq N,$$

da  $a$  größter HP von  $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$\Rightarrow |a_n| \leq (a + \epsilon)^n \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} \underbrace{(a + \epsilon)^k}_{< 1} \text{ (geometrische Reihe)}$$

ist konvergente Majorante der Reihe  $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ .

$$\text{Damit konvergiert auch } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \boxed{\sum_{k=1}^{N-1} |a_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$$

$< \infty$

- $a > 1 : \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  unendlich oft

$$\Rightarrow |a_n| > 1 \text{ unendlich oft}$$

$$\Rightarrow (a_n) \text{ keine Nullfolge} \xrightarrow{2.9} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent. } \square$$

**2.15 Beispiele**

a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{k^3}{3^k} \right]}_{a_k}$  konvergent, da  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n^3})}{3} = \frac{1}{3} < 1$

b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  (allgemeine harmonische Reihe) liefert

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n^\alpha})} = 1 \quad (\alpha > 0) \rightarrow \text{keine Aussage möglich.}$$

**2.16 Satz: Quotientenkriterium**

Sei  $(a_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  mit  $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \rightsquigarrow$  keine allgemeine Aussage möglich

**Beweis:**

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < a < 1 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq a \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq a \cdot |a_{n-1}| \leq a^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \dots \leq a^{n-N} \cdot |a_N| \quad \forall n \geq N$$

Da  $\sum_{n=N}^{\infty} a^{n-N} |a_N| = \frac{|a_N|}{a^N} \sum_{n=N}^{\infty} a^n$  konvergiert (geometrische Reihe), folgt mit

Majorantenkriterium, dass  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$  und somit  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergent ist.

$$\bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow |a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$$

$\Rightarrow (a_n)$  keine Nullfolge  $\square$

## 2.17 Beispiele

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \text{ konvergiert, da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0 < 1$$

$$\text{b) Wie in 2.15b ist für } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ keine Aussage möglich,}$$

$$\text{da } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{und somit } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

## 2.18 Bemerkung

Mit dem Verdichtungssatz von Cauchy (den wir hier nicht zitieren), kann man zeigen, dass die allgemeine harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  für  $0 < \alpha < 1$  divergiert und für  $\alpha > 1$  konvergiert.

## 2.19 Umordnung von Reihen: Beispiel

Man kann Reihen nicht bedenkenlos umordnen:

$$\bullet 1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{falls gerade} \\ \sqrt{\frac{2}{n+1}} & \text{falls n ungerade} \end{cases} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{-1}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \pm \dots$$

$$S_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

## 2.20 Definition: Umordnung

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt Umordnung von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , falls eine bijektive Abbildung  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert mit  $b_k = a_{\rho(k)} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

## 2.21 Umordnungssatz

Jede Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  einer absolut konvergenten Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  in  $\mathbb{R}$  ist ebenfalls absolut konvergent und es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  (ohne Beweis)

## 2.22 Riemannscher Umordnungssatz

Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent, aber nicht absolut konvergent, dann existiert zu jedem  $s \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , mit  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$  (ohne Beweis)

# 3 Potenzreihen

## 3.1 Grundbegriffe und Beispiel

- a)  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist für  $|x| < 1$  absolut konvergent (geometrische Reihe), d.h für  $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall (3.5)}}$ .

Konvergenzintervall (3.5)

Für  $|x| > 1$  ist  $P(x)$  divergent.

- b)  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x-1)^k$  ist für  $x \neq 1$  divergent:

Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{(x+1)!(x-1)^{k+1}}{k!(x-1)^k} \right| = (k+1)(x-1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad \text{für } x \neq 1$$

## 3.2 Definition: Potenzreihen

Sei  $(a_n)_{n \geq 0}$  reelle Folge und seien  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ .

$$P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

heißt Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$  und Koeffizienten  $a_k$

### 3.3 Bemerkung

- a) In Bsp 3.1a) ist  $x_0 = 0$  und  $a_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ .  
In 3.1b) ist  $x_0 = 1$  und  $a_k = k!$
- b) In 3.1a) konvergiert  $P(x)$  für  $x \in (-1, 1)$ , in 3.1b) lediglich für  $x = x_0 = 1$ .  
Es wird sich herausstellen, dass es für eine Potenzreihe  $P(x)$  mit Zentrum  $x_0$  einen Konvergenzradius  $\rho \in \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty) \cup \{\infty\}$  gibt (3.5), so dass  $P(x)$  absolut konvergent für  $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ , (d.h.  $|x - x_0| < \rho$ ) und divergent für  $|x - x_0| > \rho$  ist. (3.7)

Dazu zeigt man zunächst:

### 3.4 Satz

Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ .

Dann:

1.  $P(x_1)$  konvergent  $\Rightarrow P(x)$  ist absolut konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$
2.  $P(x_1)$  divergent  $\Rightarrow P(x)$  ist divergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

**Beweis:**

1.  $P(x)$  konvergent  $\xRightarrow{2.9} (a_k(x_1 - x_0)^k)$  Nullfolge

$$\Rightarrow \exists K \geq 0 : |a_k(x_1 - x_0)| \leq K \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow |a_k(x - x_0)^k| = |a_k(x_1 - x_0)^k| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k \leq K \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^k}_{\leq 1}$$

$$\xRightarrow{2.10} P(x) \text{ absolut konvergent für } |x - x_0| < |x_1 - x_0| \text{ (Majorantenkriterium)}$$

2. Sei  $P(x_1)$  divergent und  $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ . Wäre  $P(x)$  konvergent, so wäre wegen 1. auch  $P(x_1)$  konvergent.  $\nexists$

Also:  $P(x)$  divergent  $\square$

### 3.5 Definition: Konvergenzradius und Intervall

Sei  $P(x)$  Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$ .

$$\rho = \sup\{|x - x_0| : P(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ konvergent}\} \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Konvergenzradius von  $P(x)$ .

Für  $\rho \in \mathbb{R}_+$  heißt  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  Konvergenzintervall von  $P(x)$ .  
Ist  $\rho = \infty$ , so konvergiert  $P(x) \forall x \in \mathbb{R}$  (3.7)

### 3.6 Beispiel

- a) Für  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  ist  $\rho = 1$ , denn  $(-1, 1)$  ist Konvergenzintervall von  $P(x)$ ,  $x_0 = 0$
- b) Für  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k!(x - x_0)^k$  ist  $\rho = 0$ , denn  $P(x)$  ist nur für  $x = x_0 = 1$  konvergent.

Aus 3.4 ergibt sich direkt 3.7

### 3.7 Korollar

Sei  $P(X)$  Potenzreihe mit Zentrum  $x_0$  und Konvergenzradius  $\rho$ .

Dann:

1.  $P(X)$  absolut konvergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| < \rho$ .
2.  $P(X)$  divergent  $\forall x \in \mathbb{R}$  mit  $|x - x_0| > \rho$ .
3. [Falls  $|x - x_0| = \rho \leadsto$  keine allgemeine Aussage möglich]

## Berechnung von Konvergenzradien

### 3.8 Satz: Formel von Cauchy-Hademard

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$  und  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ .  $\rho$  sei der Konvergenzradius von  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ .

Dann:

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R} > 0 \\ 0 & , \text{ falls } \lambda = \infty \\ \infty & , \text{ falls } \lambda = 0 \end{cases}$$

**Beweis:** Wurzelkriterium:  $\lambda := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k| \cdot |x - x_0|^k} = \lambda \cdot |x - x_0|$

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{< 1} < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  konvergiert

$$\bullet \underbrace{\lambda \cdot |x - x_0|}_{> 1} > 1 \Leftrightarrow |x - x_0| > \frac{1}{\lambda} \quad (= \rho)$$

D.h.  $P(x)$  divergiert

$\Rightarrow \rho$  Konvergenzradius von  $P(x)$

### 3.9 Beispiel

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  konvergent?

$$\bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{1}{k} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1 = \lambda$$

$$\stackrel{3.8}{\Rightarrow} \rho = \frac{1}{\lambda} = 1$$

$\Rightarrow P(x)$  konvergent für  $x \in \overbrace{(-1, 1)}^{x_0 - \rho, x_0 + \rho}$  und divergiert für  $|x| > 1$

Untersuche Randwerte für  $x = \pm 1$

$$\bullet x = 1 : \quad P(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ divergent (harmonische Reihe)}$$

$$\bullet x = -1 : \quad P(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= - \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \right)}_{\text{konvergent (2.12d)}}$$

$\Rightarrow P(-1)$  konvergent

Insgesamt:  $P(x)$  konvergent für  $[-1, 1)$ , divergent für  $|x| > 1$  und  $x = 1$ .

### 3.10 Satz: Formel von Euler

Sei  $(a_k)_{k \geq 0}$  Folge in  $\mathbb{R}$ ,  $a_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ ,

$\rho$  Konvergenzradius von  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ .

Ist  $\left( \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \right)_{k \geq 0}$  konvergent oder bestimmt gegen  $+\infty$

divergent, so ist  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

**Beweis:** Wende auf  $P(x)$  das Quotientenkriterium 2.16 an.  $\square$

### 3.11 Beispiel: Exponentialfunktion

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ konvergent } \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(k+1)!}{1} = k+1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

$$\stackrel{3.10}{\Rightarrow} \rho = \infty$$

Man definiert:  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  (Exponentialreihe)

Man kann zeigen:

1.  $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (mit Cauchy-Produkt, hier nicht)
2.  $\exp(x) = e^x, e \approx 2,718$  (Eulersche Zahl)

Aus 2.:  $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

### Exkurs: Wie erhält man $\exp(x) = e^x$ ?

1. Definiere:  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (1.28)
2. Zeige:  $\exp(1) = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (später)
3. Zeige, dass Exponentialgesetze für  $\exp(x)$  gelten:  
 $\exp(x+y) = \exp(x) + \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$  (hier nicht)
4. Definiere:  $e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dies stimmt dann wegen 3. mit den bekannten Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln überein:

- $e^n = (\exp(1))^n = \exp(n)$
- $\left(\exp\left(\frac{n}{m}\right)\right)^m = \exp(n) = e^n \quad \mid \sqrt[m]{\phantom{x}}$   
 $\Rightarrow \exp\left(\frac{n}{m}\right) = (e^n)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{n}{m}} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Für irrationale Zahlen wird  $e^x$  dann mit Hilfe von  $e^x = \exp(x)$  berechnet.

So kann auch ein Computer z.B.  $e^\pi$  berechnen, indem  $\exp(\pi)$  ermittelt wird.

### 3.12 Bemerkung

- a) Außer der Funktion  $e^x$  gibt es auch andere Funktionen die sich als Reihe darstellen lassen, z.B. wird in Mathe III gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

- b) Wie Beispiel 3.9 zeigt, ist auf dem Rand des Konvergenzintervalls keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten der entsprechenden Potenzreihe möglich. Für  $\rho \neq \infty$  müssen die Randwerte gesondert untersucht werden.



## 4 Reelle Funktionen

### Grundbegriffe und Beispiele

#### 4.1 Definition: Abbildung

Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  besteht aus

- Dem Definitionsbereich  $A$  (Menge  $A$ )
- Dem Bildbereich  $B$  (Menge  $B$ )
- Einer Zuordnungsvorschrift  $f$ , die jedem  $a \in A$  genau ein Element  $b \in B$  zuordnet.

Man schreibt  $b = f(a)$ , nennt  $b$  Bild/Funktionswert von  $a$  und  $a$  (ein) Urbild von  $b$ .

Notation:  $f : A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$

$A$  = Menge aller Studenten von Mathe II

$B$  = {Raucher, Nichtraucher}

$f$  = Zuordnungsvorschrift, die jedem Studenten zuordnet,  
ob er/sie raucht/nicht raucht

#### 4.2 Definition: Reelle Funktion

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ .

a)  $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D$   
Summe/Differenz von  $f$  und  $g$

b)  $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$   
Produkt von  $f$  und  $g$

c) Für  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$  heißt

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D$$

Quotient von  $f$  und  $g$


d) Komposition/Verknüpfung

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(D_f) \subseteq D_g$$

$$f \circ g : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

$$D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subseteq D_g \xrightarrow{g} g(f(D_f)) \subseteq \mathbb{R}$$


$$g \circ f \text{ ("g nach f")}$$

### 4.3 Beispiel

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x) = x - 1$$

$$(f + g)(x) = x^2 + x - 1, (f \cdot g)(x) = x^2(x - 1)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1} \text{ für } D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} \text{ Definitionsbereich von } \frac{f}{g}.$$

$$(f \circ g)(x) = (x - 1)^2 \neq$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 1$$

### 4.4 Definition: Injektiv, Surjektiv, Bijektiv

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.  $f$  heißt:

1. Surjektiv  $\Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$
2. Injektiv  $\Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$
3. Bijektiv  $\Leftrightarrow f$  ist injektiv und surjektiv

### 4.5 Beispiele

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  ist

- nicht surjektiv: z.B. gibt es für  $y = -1$  kein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = -1$ , da  $f(x) = x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- nicht injektiv:  $f(-1) = f(1)$  aber  $-1 \neq 1$

b) Jedoch ist  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $f(x) = x^2$  bijektiv, wie man leicht prüfen kann.

### 4.6 Definition: Umkehrfunktion, Bild, Urbild

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung

1. Für  $X_0 \subseteq X$  heißt  $f(X_0) := \{f(x) \mid x \in X_0\}$  Bild von  $X_0$
2. Für  $Y_0 \subseteq Y$  heißt  $f^{-1}(Y_0) := \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\}$  Urbild von  $Y_0$
3. Ist  $f$  bijektiv, so heißt  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  Umkehrfunktion von  $f$ , falls  $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$

### 4.7 Beispiel

a)  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^2$  ist bijektiv (4.6b)

Umkehrfunktion:  $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} \text{da: } (f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = \underbrace{x}_{=\text{id } \mathbb{R}_{\geq 0}} \\ &= f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = (f^{-1} \circ f)(x) \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Ursprungsgeraden

- b) Achtung: Das Urbild existiert immer, auch wenn  $f^{-1}$  als Umkehrfunktion nicht existiert.

Beispiel:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad f^{-1}(\{\frac{1}{4}\}) = \{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

## 4.8 Definition: Symmetrie

Sei  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt:

- Achsensymmetrisch  $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  (zur y-Achse)
- Punktsymmetrisch  $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

## 4.9 Definition: Monotonie

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ .  $f$  heißt (streng) monoton wachsend, falls  $f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(<)}{\leq} x_2$ .

Falls  $f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2) \quad \forall x_1 \underset{(>)}{\geq} x_2$ , so heißt  $f$  (streng) monoton fallend.

## 4.10 Elementare Funktionen

- Konstante Funktion: Sei  $c \in \mathbb{R} \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$
- Identität:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$
- Betragsfunktion:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$   
 $f$  ist achsensymmetrisch
- Monome/Potenzen:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$ 
  - $n$  gerade:  $f$  achsensymmetrisch, weder injektiv noch surjektiv, nicht monoton,  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
  - $n$  ungerade:  $f$  punktsymmetrisch, bijektiv, streng monoton steigend
- Wurzelfunktion: Sind Umkehrfunktion von Monomen
  - $n$  ungerade  $\Rightarrow f(x) = x^n$  bijektiv  
 $\Rightarrow$  Umkehrfunktion existiert und hat die Form  
4.7/3  
 $\sqrt[n]{\phantom{x}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$

- $n$  gerade  $\Rightarrow f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^n$  bijektiv

In diesem Fall hat die Umkehrfunktion die Vorschrift

$$\sqrt[n]{\phantom{x}} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\geq 0}$$

**Achtung:** Wenn  $n$  gerade, dann hat  $x^n = a$  für gegebenes  $a \in \mathbb{R}$

- keine Lösung, falls  $a < 0$
- genau eine Lösung, falls  $a = 0$  und zwar  $x = 0$
- genau zwei Lösungen, falls  $a > 0$  und zwar

$$x_1 = \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{>0} \quad x_2 = -\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{<0}$$

- f) Polynome:  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  heißen Koeffizienten

Falls  $a_n \neq 0$ , so heißt  $n$  Grad von  $p$ , man schreibt  $\text{grad}(p) = n$

Für ein Polynom  $p$  von Grad  $n$  kann man zeigen:

1.  $p$  besitzt höchstens  $n$  Nullstellen
2. Falls  $n$  ungerade, ist  $p$  surjektiv und besitzt mindestens eine Nullstelle
3. Falls  $n$  gerade, ist  $p$  nicht surjektiv und kann daher auch keine Nullstelle haben

Bekannte Verfahren zur Berechnung von Nullstellen:

- $\text{grad}(p) = 2$ : Mitternachtsformel/pq-Formel
- $\text{grad}(p) \geq 3$ : Polynomdivision (Mathe III), numerische Verfahren (z.B. Newton-Verfahren)

- g) Rationale Funktionen:

Quotienten von Polynomen  $p, q$  mit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$$

- h) Logarithmen und Exponentialfunktion:

1. der natürliche Logarithmus:

Man kann zeigen, dass für die Exponentialreihe unter 3.11 gilt:

- $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  ist bijektiv

Die Umkehrfunktion von  $\exp(x)$  ist der natürliche Logarithmus:

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$$

2. Exponentialfunktion:

Sei  $q > 0, q \neq 0$ . Für  $x \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}$  ist  $q^x = \sqrt[b]{q^a} \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

Mit Hilfe der Funktion  $\exp(x), \ln(x)$  kann man Exponentialfunktionen zu einer beliebigen gegebenen Basis  $q$  und  $x \in \mathbb{R}$  definieren:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \quad x \mapsto q^x := \exp(x \cdot \ln(q))$$

3. Aus 2. ergibt sich die Regel:

$$\ln(q^x) = x \cdot \ln(q) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

4. Man kann wegen 2. eine Basis  $q$  durch eine beliebige andere Basis ausdrücken, z.B:  $q^x = e^{x \cdot \ln(q)}$  (da  $\exp(x) = e^x$  (3.11))

5. Logarithmus zur Basis  $q > 0, q \neq 1$ : Bilde die Umkehrfunktion von  $f(x) = q^x$  (unter 2.)

$$\log_q: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \log_q(x)$$

6.  $\log_q$  lässt sich analog zu 4. durch jeden anderen Logarithmus ausdrücken, z.B ist

$$\ln(x) = \ln(q^{\log_q(x)}) \underset{3.}{=} \log_q(x) \Leftrightarrow \log_q(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(q)}$$

7. Rechenregeln:

– für  $f(x) = q^x$  ergeben sich aus 2. und den Regeln für  $\exp(x)$  (3.11):

- $q^{x+y} = q^x \cdot q^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$ , da  $1 = q^{x-x} = q^x \cdot q^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(pq)^x = p^x \cdot q^x$

– für  $\log_q(x)$  ergeben sich aus denen für  $q^x$ :

- $\log_q(xy) = \log_q(x) + \log_q(y) \quad \forall x, y > 0$

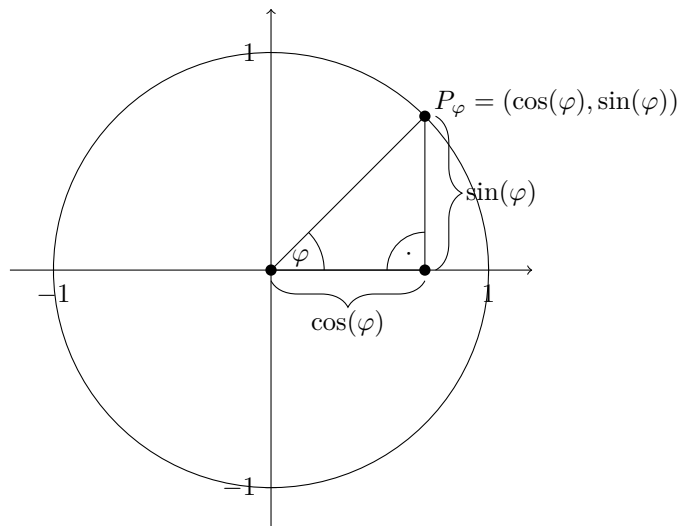
denn für  $x = q^u, y = q^v$  ist

$$\log_q(xy) = \log_q(q^{u+v}) = u + v = \log_q(x) + \log_q(y)$$

- $\log_q\left(\frac{q}{x}\right) = -\log_q(x) \quad \forall x > 0$

$$[\text{mit } q^v = \log_q(x^\alpha) \underset{3./6.}{=} \alpha \cdot \log_q(x) \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}]$$

i) Trigonometrische Funktionen:



$\varphi$ : Winkel zwischen x-Achse und Strecke  $\overline{0 P_\varphi}$   
 $\cos \varphi$ : Ankathete an  $\varphi$  in  $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$   
 $\sin \varphi$ : Gegenkathete an  $\varphi$  in  $\Delta(0 A_\varphi P_\varphi)$

Daraus ergeben sich die Winkelfunktionen:

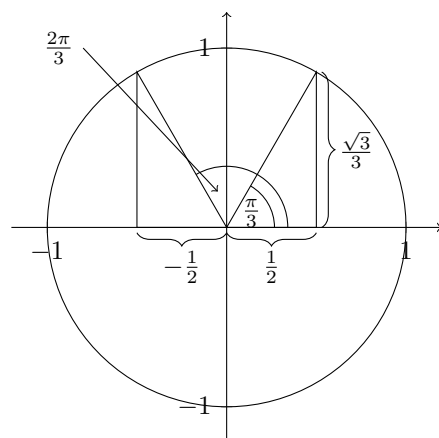
$$\begin{aligned}\cos &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \cos(x) \\ \sin &: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x) \\ \tan &: \mathbb{R} \setminus \{(k + \tfrac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cotan &: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\end{aligned}$$

1. Dabei wird der Winkel  $\varphi$  meistens im Bogenmaß angegeben, d.h.  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Einige wichtige Werte:

Gradmaß:	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
Bogenmaß:	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
sin:	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos:	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Daraus können weitere Werte mit Hilfe des Einheitskreises abgeleitet werden:



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

2.  $\sin$  und  $\cos$  sind nicht bijektiv. Jedoch ist  $\sin\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  und  $\cos[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  bijektiv. Die Umkehrfunktionen sind:

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

Entsprechend erhält man:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arccotan}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

3. • Es ist  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin, \cos$  sind  $2\pi$ -periodisch, d.h.  
 $\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- $\tan, \cotan$  sind  $\pi$ -periodisch

#### 4. Symmetrien

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = -\sin(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\tan(x) = -\tan(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cotan(x) = -\cotan(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

#### 5. Rechenregeln

a)  $\sin x + \cos x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

##### b) Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

## 5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

### 5.1 Definition: Grundbegriffe und Beispiele

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .

- a)  $X_0 \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $M$   
: $\Leftrightarrow$  Es gibt eine Folge  $(X_n)$  in  $M \setminus \{X_0\}$  mit  $X_n \mapsto X_0$
- b)  $X_0 \in M$  heißt isolierter Punkt von  $M$   
: $\Leftrightarrow X_0$  ist kein Häufungspunkt von  $M$

### 5.2 Beispiele

- a)  $M = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, 4)$ 
  - Menge der Häufungspunkte von  $M$ :  
 $H = [0, 1] \cup [3, 4]$  denn z.B. für  $X_0 = \frac{1}{2}$  hat die Folge  $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})_{n \geq 3}$  den Limes  $X_0$  und liegt in  $M \setminus \{X_0\}$ .  
Auf analoge Weise können für jedes andere  $X_0 \in M$  Folgen in  $M \setminus \{X_0\}$  konstruiert werden.
  - Einziger isolierter Punkt in  $M$  ist 2, denn es gibt in  $M \setminus \{2\} = (0, 1) \cup (3, 4)$  keine Folge mit Grenzwert 2.
- b)  $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ 
  - Menge der HP von  $M$ :  $\{0\}$
  - Menge der isolierten Punkte:  $M$

### 5.3 Bemerkung

Ein isolierter Punkt  $X_0$  von  $M$  liegt vor, wenn es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $|X - X_0| \geq \epsilon \quad \forall x \in M \setminus \{X_0\}$ , z.B. ist in 5.2a  $|X - 2| \geq 1 \quad \forall x \in M \setminus \{2\}$

### 5.4 Definition Grenzwert I

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktion und  $a \in \mathbb{R}$ . Ist  $X_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so sagt man  $f$  hat in  $X_0$  den Grenzwert  $a$ , oder  $f(x)$  konvergiert gegen  $a$  für  $x \rightarrow a$  : $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(X_n) = a$ , für jede beliebige Folge  $(X_n)$  in  $D \setminus \{X_0\}$  mit  $X_n \rightarrow X_0$ .

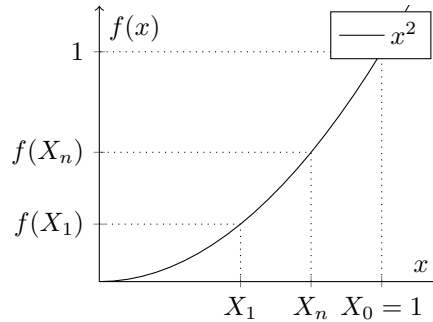
Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a$  oder  $f(x) \rightarrow a$  für  $x \rightarrow X_0$



## 5.5 Beispiele

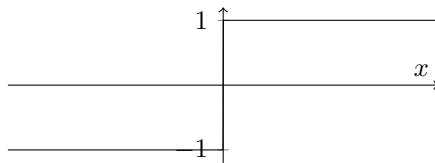
a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, X_0 = 1$

Für  $(X_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  mit  $X_n \rightarrow 1$  ist  $f(X_n) = X_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  (1.13/3)



b) Es muss für jede Folge  $(X_n)$  in  $D \setminus \{X_0\}$  mit  $X_n \rightarrow X_0$  gelten:  $f(X_n) \rightarrow a$

Gegenbeispiel:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$



Grenzwert in  $X_0 = 0$  existiert nicht, denn

$$f(-\frac{1}{n}) = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \text{ und}$$

$$f(\frac{1}{n}) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \text{ obwohl } -\frac{1}{n} \rightarrow X_0 \text{ und } \frac{1}{n} \rightarrow X_0$$

## 5.6 $\epsilon$ - $\varphi$ -Kriterium

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktion,  $X_0$  HP in  $D$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann:

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \forall x \in D \setminus \{X_0\} :$$

$$\underbrace{|x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon}_{(*)}$$

Existenz von  $a$  bedeutet: Wenn  $x$  nahe genug bei  $X_0$  ist, so ist auch  $f(x)$  sehr nahe an  $a$ .

**Beweis:**

$(\Leftarrow)$ : Gelte  $(*)$ . Sei  $(X_n)$  in  $D \setminus \{X_0\}$ ,  $X_n \rightarrow X_0$ . Z.z.:  $f(X_n) \rightarrow a$

Da  $X_n \rightarrow X_0$ , gibt es  $N \in \mathbb{N}$  mit  $|X_n - X_0| < \delta \quad \forall n \geq N$  (1.5)

$$(*) \Rightarrow |f(X_n) - a| < \epsilon \quad \forall n \geq N$$

$$\stackrel{1.5}{\Rightarrow} f(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

( $\Rightarrow$ ) : Mit Kontraposition: Gelte (\*) nicht.  
 $\Rightarrow \exists \epsilon > 0$  derart, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $X_n \in D \setminus \{X_0\}$  existiert mit  
 $|X_n - X_0| < \delta$  und  $|f(X_n) - a| \geq \epsilon$ .  
 $\Rightarrow f(X_n) \not\rightarrow a$  für  $X_n \rightarrow X_0$ .  $\square$   
1.5

## 5.7 Beispiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Es ist  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0)$ .

Prüfe mit  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium:

Sei  $\epsilon > 0$ . Für  $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$  ist

$$|f(x) - f(X_0)| = ax + b - aX_0 - b = |a| \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < |a| \cdot \frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon$$

## 5.8 Definition: Grenzwert II

Sei  $X_0$  HP von  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

1.  $f$  hat in  $X_0$  den Grenzwert  $+\infty$  ( $-\infty$ ) : $\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ) für jede Folge  $(X_n)$  in  $D \setminus \{X_0\}$  mit  $X_n \rightarrow X_0$ .

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = +\infty$  ( $-\infty$ )

2. Ist  $\sup D = \infty$  ( $\inf D = -\infty$ ), so hat  $f(x)$  Limes  $a \in \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) : $\Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$  für jede Folge in  $D$  mit  $X_n \rightarrow \infty$  ( $X_n \rightarrow -\infty$ )

## 5.9 Beispiele

a)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ , da für jede Nullfolge  $(X_n)$

in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  gilt:  $\underbrace{\frac{1}{X_n^2}}_{=0} \xrightarrow{n \rightarrow 0} +\infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , da für jedes  $(X_n)$

in  $\mathbb{R}$  mit  $X_n \rightarrow \infty$  :  $\frac{1}{X_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

- b) Es gilt für jedes  $m \in \mathbb{N}_0$ :

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \exp(x) = 0$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 1. \quad \exp(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{x^{m+1}}{(k+1)!} \quad \forall x \geq 0 \\
 &\Rightarrow \frac{\exp(x)}{x^m} \geq \frac{x^{m+1}}{(k+1)x^m} = \frac{x}{(k+1)!} \rightarrow \infty \\
 &\text{für } x \rightarrow \infty \\
 2. \quad x^m \cdot \exp(x) &= \frac{(-1)^m (-x)^m}{\exp(-x)} = (-1)^m \cdot \frac{1}{\frac{\exp(-x)}{(-x)^m}} \xrightarrow{1.} \infty \\
 &\text{für } x \rightarrow -\infty
 \end{aligned}$$

## 5.10 Definition: Rechts-/Linksseitiger Grenzwert

1. Ist  $X_0$  HP von  $D \cap (X_0, \infty)$ , so hat  $f$  in  $X_0$  den rechtsseitigen Grenzwert  $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$  für jede Folge  $(X_n)$  in  $D \cap (X_0, \infty)$  mit  $X_n \rightarrow X_0$ .

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow X_0^+} f(x) = a$

2. Ist  $X_0$  HP von  $D \cap (-\infty, X_0)$ , so hat  $f$  in  $X_0$  den linksseitigen Grenzwert  $a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow f(X_n) \rightarrow a$  für jede Folge  $(X_n)$  in  $D \cap (-\infty, X_0)$  mit  $X_n \rightarrow X_0$ .

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow X_0^-} f(x) = a$

## 5.11 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ , da  $f(X_n) = 1 \rightarrow 1$   
für  $(X_n)$  in  $(0, \infty)$  und  $(X_n) \rightarrow 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ , da  $f(X_n) = -1 \rightarrow -1$   
für  $(X_n)$  in  $(-\infty, 0)$  und  $(X_n) \rightarrow 0$

## 5.12 Bemerkung

Aus 5.11 ist ersichtlich: Der Grenzwert einer Funktion  $f$  in  $X_0$  existiert  $\Leftrightarrow$  Der Links- und Rechtsseitige Grenzwert von  $f$  in  $X_0$  existieren und übereinstimmen.

## 5.13 Beispiele

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$ , aber  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  existiert nicht,  
da  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

### 5.14 Definition: Stetigkeit

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$

a)  $f$  heißt stetig in  $X_0 \in D$ , falls

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow X_0} f(x)}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

b)  $f$  heißt stetig, falls  $f$  in jedem Punkt  $X_0 \in D$  stetig ist.

### 5.15 Bemerkung

a) In 5.15a prüft man zwei Bedingungen: A) Der Grenzwert von  $f$  in  $X_0$  existiert und B) ist gleich  $f(X_0)$ .

b) Wegen 5.6 ist  $f$  in  $X_0 \in D$  stetig  $\Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - X_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(X_0)| < \epsilon$$

### 5.16 Beispiele

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  ist in jedem  $X_0 \in D$  stetig:

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0), \text{ da für } (X_n) \text{ in } D \setminus \{X_0\} \text{ gilt:}$$

$$\underbrace{f(X_n) = X_n^2 \rightarrow X_n^2 \rightarrow X_0^2}_A = \underbrace{f(X_0)}_B$$

b) Wegen 5.4 ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = ax + b$  stetig.

### 5.17 Satz

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ .

Gibt es ein  $k > 0$  mit  $|f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot |x - X_0| \quad \forall x \in D$ ,  
so ist  $f$  stetig in  $X_0$ .

**Beweis:** Sei  $\epsilon > 0$ . Wähle  $\delta = \frac{\epsilon}{\delta}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$

## 5.18 Bemerkung

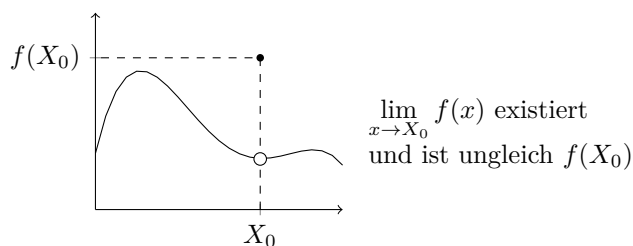
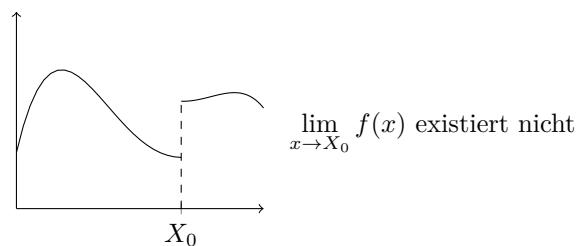
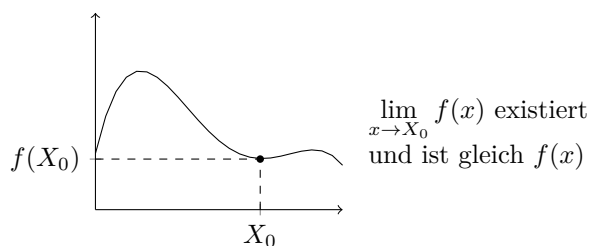
Wähle  $\delta = \frac{\epsilon}{k}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(X_0)| \leq k \cdot \underbrace{|x - X_0|}_{< \delta} < k \cdot \delta = \epsilon \quad \square$$

## 5.19 Beispiel

a) Anschauung zu 5.14a

Es gibt 4 Fälle:



b) Schule:  $f$  is stetig, wenn man  $f$  “ohne Absetzen” zeichnen kann.

Gegenbeispiel:  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) Dirichlet-Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

unstetig in jedem  $X_0 \in \mathbb{R}$ .

Mit  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium:

Sei  $\delta > 0$ .

1.  $X_0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : |x - X_0| < \delta$
2.  $X_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : |x - X_0| < \delta$

## Eigenschaften stetiger Funktionen

### 5.20 Satz: Rechenregeln für stetige Funktionen

- a) Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $X_0 \in D, D \subseteq \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ .  
Dann sind auch  $c \cdot f, f \pm g, f \cdot g$  und  $\frac{f}{g}$  (für  $g(x) \neq 0 \forall x \in D$ ) stetig.
- b) Seien  $D, D' \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : D' \rightarrow \mathbb{R}, f(D) \subseteq D'$ .  
 $f, g$  stetig  $\Rightarrow g \circ f$  stetig.

**Beweis:**

- a) Folgt direkt aus 5.14
- b) Mit 1.14  $\square$

### 5.21 Bemerkung

Wegen 5.16b und 5.20

- a) sind Monome und Polynome stetig
- b) Wegen a und 5.20a sind rationale Funktionen stetig
- c) Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall stetig (zeigen wir hier nicht). Daher sind  $\exp, \sin, \cos, \tan, \cotan$  (vgl. 3.11, 3.12) auch stetig.

### 5.22 Beispiele und Bemerkung zu Definitionslücken

- a) Hebbare Definitionslücke:

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $X_0$  HP von  $X_0 \notin D$ . Ist  $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = a$ , so heißt  $X_0$  stetig hebbare Definitionslücke von  $f$ .

$$f : D \cup \{X_0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ a & x = X_0 \end{cases}$$

heißt Fortsetzung von  $f$  auf  $D \cup \{X_0\}$ .

Beispiel:  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{(x - 1)} = 2$$

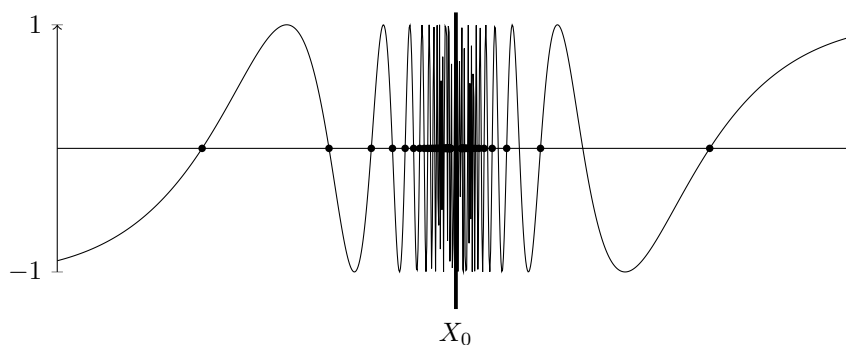
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases} = x + 1$$

b) Polstelle:

Gilt für die Nullstelle  $X_0$  des Nenners einer rationalen Funktion, dass  $f(x) \rightarrow \pm\infty$ , für  $x \rightarrow X_0^-$  oder  $x \rightarrow X_0^+$ , so heißt  $X_0$  Polstelle.

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{x}$  hat Polstelle bei  $X_0 = 0$ .

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  hat in  $X_0 = 0$  keinen Grenzwert.



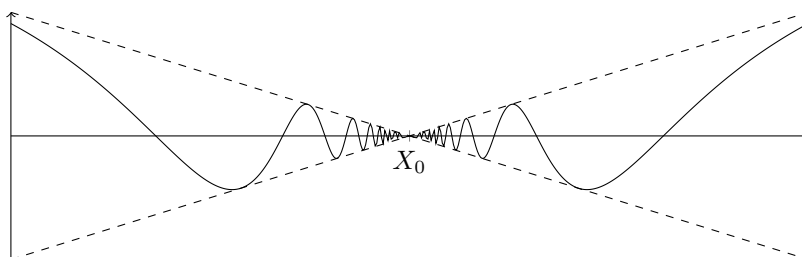
Man nennt  $X_0$  Oszillationsstelle:

- $X_n = \frac{1}{n\pi} \rightarrow 0$  und  $f(X_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $Y_n = \frac{1}{n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$  und  $f(Y_n) = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 1$

$\Rightarrow f(Y_n) \rightarrow 1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht.

d)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  hat in  $X_0 = 0$   
eine hebbare Definitionslücke



$f(X_n) = \underbrace{X_n}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{X_n}\right)}_{\text{beschränkt}}$  für jede Nullfolge  $(X_n)$  in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  stetige Fortsetzung.

e)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(x) \cdot \frac{1}{x}$

Wir zeigen später mit L'Hopital, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

### 5.23 Satz: Zwischenwertsatz von Bolzano (Nullstellensatz)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Dann: Es gibt  $c \in [a, b]$  mit  $f(c) = 0$ .

**Beweis:**  $f(a) \cdot f(b) < 0$  bedeutet, dass  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen haben.

Beweis für  $f(a) < 0, f(b) > 0$  (Anderer Fall analog)

Anschaulich klar, da  $f$  keine Sprungstelle hat.

#### Bisektionsverfahren:

Start  $[a_1, b_1] := [a, b]$

1. Schritt: Halbiere  $[a_1, b_1]$

- Berechne  $y_1 = f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$
- Fallunterscheidung:
  - $y_1 = 0$ : Fertig
  - $y_1 > 0$ : Neues Intervall  $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
  - $y_1 < 0$ : Neues Intervall  $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
- Es gilt:
  - $[a_2, b_2]$  halb so groß wie  $[a_1, b_1]$
  - $f(a_2) < 0, f(b_2) > 0$

2. Schritt: Wende Schritt 1 auf  $[a_2, b_2]$  an, erhalte  $y_2$  und  $[a_3, b_3]$

Usw...