

Skript Mathe 2

30. April 2018

0.1 Definition: Limes inferior/superior

(a_n) reelle Folge, beschränkt. Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von $(a_n) : \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n), \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$
- Limes inferior von $(a_n) : \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$

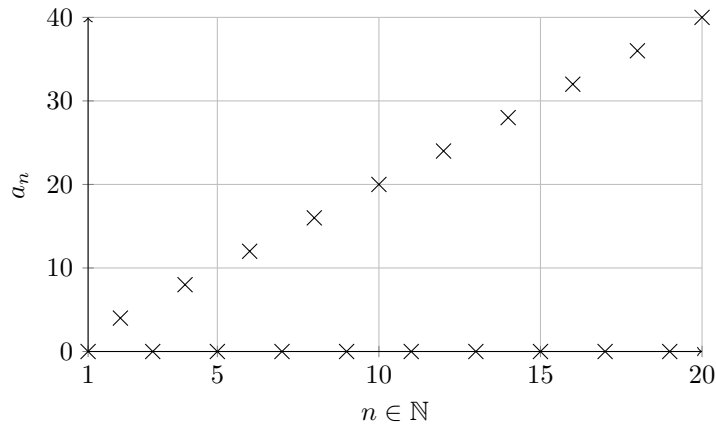
Ist (a_n) nicht beschränkt, setzt man

$$\begin{aligned} \bullet \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} & \begin{cases} +\infty : (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt} \\ -\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \leq -K \forall n \geq N \end{cases} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty} \\ \bullet \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} & \begin{cases} -\infty : (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt} \\ +\infty : (a_n) \forall K > 0 \exists N \in \mathbb{N} : a_n \geq K \forall n \geq N \end{cases} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{d.h. } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty} \end{aligned}$$

0.2 Bemerkung

- $a_n \rightarrow \pm\infty$ in obiger Definition bedeutet, dass (a_n) (bestimmt) gegen $\pm\infty$ divergiert. (d.h. es gibt keine weiteren endlichen Häufungspunkte)
z.B. divergiert (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ nicht bestimmt,
aber (a_n) mit $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen ∞
- $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen. Man setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$
mit $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- In $\overline{\mathbb{R}}$ besitzt jede Folge sowohl \limsup als auch \liminf .

0.3 Beispiel



$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ gerade} \\ 2n + 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\liminf(a_n) = 0 \quad \limsup(a_n) = \infty$$

0.4 Definition: Cauchy-Folgen

Sei (a_n) eine Folge. (a_n) heißt Cauchy-Folge (C-F)
 $:\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \epsilon \quad \forall n, k \geq M$

0.5 Satz: Cauchy-Kriterium

Sei (a_n) eine Folge in \mathbb{R}
 (a_n) konvergiert $:\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge

Beweis: (\Rightarrow) : klar

(\Leftarrow) :

1. Zeige (a_n) beschränkt

$$\text{Sei } (a_n) \text{ C-F: } \Rightarrow \exists R \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < 1 \\ \forall n, k \geq R$$

$$\Rightarrow_{k=R} |a_n - a_R| < 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow a_R - 1 < a_n < a_R + 1 \quad \forall n \geq R$$

$$\Rightarrow \min\{a_R - 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \leq a_n \leq \\ \max\{a_R + 1, a_1, \dots, a_{R-1}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt und besitzt
 konvergente Teilfolge (a_{n_j}) (1.35) mit

$$a = \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j}$$

2. (a_n) ist konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Sei $\epsilon > 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\bullet \exists M \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall n, k \geq M \\ &\bullet \exists J \in \mathbb{N} : |a_{n_j} - a_k| < \frac{\epsilon}{2} \forall j \geq J \end{aligned}$$

Wähle a_{n_j} so, dass $j \geq J$ und $n_j \geq M$.

$$\Rightarrow |a_n - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_j}|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|a_{n_j} - a|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \epsilon \quad \forall n \geq M$$

0.6 Beispiel

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist divergent,
denn $|a_{n+1} - a_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n|$
 $= |(-1)^n| - |-1 - 1| = 2$

z.B ist für $\epsilon = 1$ $|a_{n+1} - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
was im Widerspruch zu 1.39 steht.

0.7 Definition: Kontraktion

Eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ heißt Kontraktion, falls $\alpha \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|$$

z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x$ ist Kontraktion mit Kontraktionsfaktor $\frac{1}{2}$.

0.8 Banachscher Fixpunktsatz

Sei $f[a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Kontraktion. Dann:

1. f hat genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in \mathbb{R}$, d.h.
es gibt genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R} : f(\hat{x}) = \hat{x}$
2. Für jeden beliebigen Startwert $X_0 \in [a, b]$ konvergiert
die durch $X_n := f(X_{n-1})$ definierte Folge (X_n) gegen \hat{x} .

(Ohne Beweis)

1 Reihen

Grundbegriffe und Beispiele

1.1 Definition: Reihe

1. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Die Folge $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$S_k = \sum_{i=1}^k \delta_i = \delta_1 + \dots + \delta_k$$

heißt (unendliche) Reihe, mit Schreibweise $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i$.

Die Zahl $S_k \in \mathbb{R}$ heißt k-te Partialsumme der Reihe.