Prof. Dr. Barbara Verfürth
Jannik Michels und Uta Seidler

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 1.

Abgabe am **19.10.2023**.

Aufgabe 1. (Geometrische Reihe)

(5+5 Punkte)

a) Beweisen Sie folgende Formel für die n-te Partialsumme der *geometrischen Reihe*: Für $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ und $q \neq 0$ bezeichne S_n die n-te Partialsumme

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Zeigen Sie, dass

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

gilt.

b) Leiten Sie daraus für $0 < q < 1$, $m > n$ die folgende Abschätzung für den „Zuwachs“ $S_m - S_n$ ab:

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} q^k \leq \frac{q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 2. (Problem des Handlungsreisenden)

(4 + 2 + 4 Punkte)

Gegeben seien 5 Städte und die Entfernungen zwischen ihnen. Ziel ist es den kürzesten Rundkurs zu finden, sodass jede Stadt genau einmal besucht wird. Dabei wird bei einem Rundkurs zum Start zurückgekehrt und die Start- und Zielstadt als eine Stadt gezählt.

	Bonn	Aachen	Frankfurt	Mainz	Dortmund
Bonn	0	185	119	152	133
Aachen		0	121	150	200
Frankfurt			0	174	120
Mainz				0	199
Dortmund					0

a) Bestimmen Sie alle möglichen Rundkurse und deren Länge. Was ist der kürzeste Rundweg?

b) Wenden Sie die Nächste-Nachbarn-Heuristik mit dem Startpunkt Bonn an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem kürzesten Rundweg aus Teilaufgabe a).

c) Berechnen Sie auch für die restlichen Städte als Startpunkt einen Rundkurs mittels der Nächste-Nachbarn-Heuristik und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3. (Modulo-Operator)

(6+4 Punkte)

a) Seien $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $m \geq n$. Zeigen Sie, dass eindeutige natürliche Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $m = q\,n + r$ und $r < n$.

b) Seien m, n und r wie in a). Die *Modulo-Operation* oder *Division mit Rest* zwischen m und n berechnet den Rest r. Wir schreiben $m \bmod n = r$. Folgern Sie, dass $m \bmod n = 0$ genau dann gilt, wenn n Teiler von m ist.

Programmieraufgabe 1. (Pyramide)

(6 Punkte)

Schreiben Sie ein Skript, das die Oberfläche und das Volumen einer quadratischen Pyramide berechnet und ausgibt. Dabei soll die Seitenlänge des Quadrats und die Höhe der Pyramide per Eingabe über das Terminal eingegeben werden können.

Programmieraufgabe 2. (Modulo-Operator)

(2 + 3 Punkte)

a) Schreiben Sie ein Programm, das für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die ganzen Zahlen q und r aus der Division mit Rest, das heißt $m = q\,n + r$ mit $r < n$, berechnet und ausgibt. Nutzen Sie dafür **nicht** den nativen % Operator bzw. die `divmod` Funktion).

b) Testen Sie für $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ob `m // n * n + m % n` wieder `m` ergibt. Was passiert, wenn `m` und/oder `n` keine `int`s, sondern `float`s sind? Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Ganzzahldivision und Modulo-Operation einzeln testen (insbesondere falls `n` ein `float` ist?

Programmieraufgabe 3. (Mathematische Operationen in Python)

(3 + 3 + 3 Punkte)

Um diese Aufgabe zu bearbeiten, benötigen Sie einige mathematische Funktionen und Konstanten. Für diese können Sie das Modul `math` nutzen.

a) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

- $\ln(e^{10})$
- $\cos^2(2) + \sin^2(2)$
- $\sqrt{3^2 + 4^2}$

b) Testen Sie, ob das Distributivgesetz in Python gilt. Definieren Sie dazu die Variablen $x = e^{10}$, $y = \sin(1.57)$, $z = \ln(2.71)$ und berechnen Sie die Differenz zwischen

$$x(y + z) \quad \text{und} \quad xy + xz.$$

c) Testen Sie, ob das Assoziativgesetz in Python gilt. Definieren Sie dazu die Variablen $x = 10^{-10}$, $y = 10^{10}$, $z = -y$ und berechnen Sie die Differenz zwischen

$$x + (y + z) \quad \text{und} \quad (x + y) + z.$$