

# Rapport du *Projet technique*

Adrien Cortés, Victor Letzelter, Hugo Besson

Juillet-Janvier 2020-21

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction, description</b>	<b>2</b>
1.1	Contexte . . . . .	2
1.2	Les objectifs de notre projet . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Démarche</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Le mouvement Brownien en Physique</b>	<b>5</b>
3.1	Définition mathématique . . . . .	5
3.2	Approche physique pour l'expérience : théorie de Langevin . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Expérience et résultats</b>	<b>6</b>
4.1	Contexte et objectifs . . . . .	6
4.2	Protocole . . . . .	7
4.2.1	Observation des trajectoires Browniennes de particules . . . . .	7
4.2.2	Pointage . . . . .	7
4.2.3	Mesure du diamètre des particules . . . . .	9
4.3	Calcul du Nombre d'Avogadro . . . . .	9
4.3.1	Alternative pour le calcul de D . . . . .	9
4.3.2	Filtration du Drift . . . . .	10
4.3.3	Résultats . . . . .	10
4.4	Propriétés à vérifier, data disponible . . . . .	13
4.4.1	Définitions . . . . .	13
4.5	Données disponibles . . . . .	13
4.6	Vérification . . . . .	13
4.6.1	Accroissements qui suivent une loi normale . . . . .	13
4.6.2	Indépendance des accroissements . . . . .	13
4.6.3	Continuité de $t \rightarrow X_t(\omega)$ . . . . .	16
4.7	Simulation à partir des paramètres estimés . . . . .	16
4.8	Conclusion sur l'expérience et interrogation . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Équation de la chaleur en finance</b>	<b>19</b>
5.1	Équation de la chaleur . . . . .	19
5.2	Une application de ce résultat et vérification . . . . .	21
5.3	Finance : Modèle de Black-Scholes . . . . .	22
5.3.1	Le Marché financier et les actifs . . . . .	22
5.3.2	Les options . . . . .	23
5.3.3	Modèle de Black-Scholes . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Estimation des paramètres boursiers</b>	<b>24</b>
6.1	Volatilité, tendance . . . . .	24
6.2	La volatilité implicite . . . . .	25
6.2.1	La théorie . . . . .	25
6.2.2	Une approche simple, un algorithme itératif dichotomique . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>
<b>8</b>	<b>Notice d'utilisation</b>	<b>30</b>

<b>9 Annexes</b>	<b>30</b>
9.1 Annexe 1 : Établissement de l'expression du nombre d'Avogadro . . . . .	30
9.2 Annexe 2 : Calcul d'Itô et équation de la chaleur . . . . .	30
9.3 Annexe 3 : Code R, calcul de la volatilité historique et / ou de la tendance sur un marché	31
9.4 Annexe 4 : prédiction d'un Brownien Géométrique par l'équation de la chaleur . . . . .	32
<b>10 Sources</b>	<b>32</b>

## 1 Introduction, description

### 1.1 Contexte

À l'été 1827, le naturaliste écossais Robert Brown aperçut dans le fluide situé à l'intérieur des grains de pollen de la Clarkia pulchella, de très petites particules agitées de mouvements apparemment chaotiques et non pas les grains de pollen eux-mêmes comme souvent mentionné. Ce phénomène physique a donné lieu à des modélisations mathématiques et physiques. C'est Louis Bachelier qui donne une première description mathématique en 1900. Pierre Langevin a développé une théorie en 1906 permettant de lier le déplacement des particules au coefficient de diffusion d'Einstein. C'est dans un domaine éloigné que nous retrouvons le mouvement Brownien. En effet, en finance, il est utilisé comme base pour modéliser la dynamique des cours de la bourse. Le très grand nombre de transactions, c'est-à-dire d'achats ou de ventes d'actifs financiers, produit les petites variations du cours de cet actif et qui sont assimilables aux variations de la position d'une particule soumise à un mouvement Brownien. Plusieurs modèles mathématiques permettant la description de produits financiers plus complexes ont comme hypothèse fondamentale que la variation du cours d'un actif financier suit un mouvement Brownien.

Dans ce rapport, nous présenterons les aspects importants de notre Projet Technique. Nous aborderons la génèse de notre projet et l'organisation de notre trinôme de travail, la théorie mathématique, physique et financière nécessaire ainsi que notre livrable.

### 1.2 Les objectifs de notre projet

Notre projet technique a plusieurs objectifs :

- (1) Comprendre le Mouvement Brownien dans sa description mathématique et physique et son intérêt dans les mathématiques financières
- (2) Réaliser une expérience physique permettant de visualiser le mouvement Brownien et en déduire des résultats sur la base de la théorie de Langevin, ainsi qu'une simulation numérique de ce phénomène
- (3) Appliquer les connaissances de (1) et (2) pour étudier le modèle de Black-Scholes et en déduire les caractéristiques des cours boursiers permettant une analyse de ces cours

Le livrable de ce projet est constitué :

- Une expérience physique permettant de caractériser le mouvement Brownien et en déduire une approximation du nombre d'Avogadro
- Un ensemble de fonctions permettant de calculer les différentes caractéristiques d'un cours boursier : volatilité, tendance et volatilité implicite à partir du cours d'une option.

*Nous tenons à remercier grandement d'une part M.TOUBOUL qui a accepté d'être notre tuteur sans pour autant être un expert dans le domaine, et d'autre part les brillants M.FERRIERES et M.BAY, qui nous ont fait saisir la richesse scientifique d'un tel sujet. Nous tenons à remercier également Madame Lara LECLERC qui nous a permis de réaliser notre expérience au Centre d'Ingénierie et de Santé des Mines de Saint-Etienne et M.BOSCH qui nous a conseillés sur son élaboration.*

## 2 Démarche

Ce projet fût, à l'origine, une idée de Adrien CORTES. Le thème du mouvement Brownien nous a séduit par son aspect multidisciplinaire ; initialement introduit pour résoudre un problème physique, il est aujourd'hui massivement utilisé en Finance quantitative. Ce projet nous a donc permis de mettre en relation les quatre unités pédagogiques du tronc commun à l'école des Mines : Physique, Mathématiques, Informatique et Économie.

La structure du projet a été réfléchie dès le mois de Juin 2020. En effet, une compréhension mathématique fine du mouvement Brownien nécessite la théorie de la mesure. Cette théorie de l'intégration

développée en grande partie par Borel et Lebesgue au cours du XXième siècle succède à la théorie de Riemann utilisée jusqu'alors. Nous nous sommes alors référés à l'ouvrage [1] pour comprendre cette théorie en premier lieu. Cette théorie fût bien acquise pour nous trois à la fin de l'été comme prévu.

Victor LETZELTER a été désigné comme responsable de l'avancement du projet. La mise en place du planning du projet a commencé en septembre 2020. Ce planning a été réalisé via la plateforme **Monday**. Le planning fût divisé en deux types de tâches : les tâches individuelles, et les tâches quotidiennes de l'équipe.

Nous présentons ici le planning initial, c'est-à-dire celui réalisé en Septembre. Bien sûr, ce planning n'est pas exhaustif et des *sous-tâches* ont été rajoutées par la suite. La gestion de ces *micro-tâches* sera présentée par la suite. En premier lieu (c'est-à-dire en Septembre 2020), les tâches individuelles concernaient les éléments théoriques en théorie des probabilités :<sup>1</sup>

- La Théorie de la mesure (cf [7]) (40 heures, 10 Septembre)
- Le Mouvement Brownien : historique ([3], [4]) (3 heures, 30 Septembre)
- Le Mouvement Brownien et processus de diffusion (équation de la chaleur) ([6]) (5 heures, 11 Octobre)
- Le Mouvement Brownien en tant qu'objet mathématique ([4], [5]) (3 heures, 11 Octobre)
- Formule d'Itô et modèle de Black-Scholes (M.BAY nous a donné un cours en présentiel spécifiquement pour nous sur le chapitre, nous le remercions au passage!) (3 heures, 8 Novembre)

Dans une seconde page sur l'application Monday, les tâches quotidiennes de l'équipe ont été planifiées. Le projet se divise en 3 temps :<sup>2</sup>

1. Expérience historique de découverte du mouvement Brownien
  - Réalisation du protocole (Adrien, 3 heures, 20 septembre)
  - Réalisation de l'expérience historique (Tous, 5 heures, 4 octobre)
  - Exploitation des résultats (Tous, 10 heures, 10 octobre)
2. Simulation du Mouvement Brownien
  - Stratégie pour la simulation (Tous, 2 heures, 4 octobre)
  - Mise en place de la simulation, en 1D tout d'abord puis en 2D. (Adrien, 3 heures)
3. Application au Trading
  - Résolution de l'équation de BS (Hugo, 4 heures, 10 décembre)
  - Importation de cours boursiers (Victor, 3 heures, 10 décembre)
  - Estimation des paramètres (volatilité, tendance) régissant le cours d'un actif financier (Victor et Adrien, 5 heures, 15 décembre)
  - Produits dérivés (options, futures) et calcul de la volatilité implicite par inversion de la formule de BS pour les options (Adrien, 5 heures, 20 décembre)

Ce planning a été respecté et nous avions généralement de l'avance sur nos tâches. Comme expliqué précédemment, ce planning est global et ne relève pas les **micro-tâches** à effectuer (envoi de mails pour gérer les horaires de réunions, envoi des ordres du jour, etc...). Pour dynamiser le projet et nous inciter à avancer, une stratégie a été mise en place. Nous avons créé un système de points, au sein d'un document Excel sur Google drive intitulé *Tâches Dynamiques*. Le principe est simple : à chaque tâche est attribué un nombre de points correspondant au volume horaire et à la complexité de la tâche. Ces tâches (ainsi que leurs nombres de points correspondants) sont proposées dans l'onglet *Tâches* du document (cf 1). Lorsque la tâche est approuvée par le groupe, celle-ci est déplacée dans l'onglet *Répartition des tâches* (cf 2), qui contient les tâches à réaliser (en jaune), ainsi que celles réalisées (en vert) par les trois membres du groupe. Le nombre de points de chaque membre est dynamiquement mis à jour lors de l'avancement. Généralement, nous faisons, au cours de chaque réunion interne un point sur le score de chacun.

Nous convenons que ce système nous a grandement aidés à avancer et à réussir le projet, dans la mesure où un arrêt de travail de la part d'un membre était directement identifiable par les autres via le nombre de points correspondant de la personne. Nous avons même mis en place cette stratégie efficace pour nos projets personnels. Notre implication globale dans le projet fût très forte dès le mois de Septembre. Celle-ci s'est légèrement ralentie au moment du premier confinement, puis elle a repris de façon soutenue jusqu'à la fin de l'année. Nous sommes tous trois très satisfaits de la gestion du projet.

1. Le volume horaire des tâches, ainsi que les dates limites correspondant à la réalisation de ces tâches sont notées entre parenthèses en fin de ligne

2. La ou les personnes qui doivent effectuer la tâche en priorité, le volume horaire des tâches, ainsi que les dates limites correspondant à la réalisation de ces tâches sont notées entre parenthèses en fin de ligne

Tâches dynamiques										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		<b>Tâches en attente d'être approuvées par le groupe</b>					<b>Tâches en cours</b>			<b>Tâches term</b>
2		Tâches	Points	Personne	Tâches	Pts à valider	Pts validés	Personne	Tâches	Points
3		Gérer le logiciel à utiliser pour le suivi de la particule + protocole	2	Cortes					Reorganisation gestion de projet pour le Protech	
4		Rédiger le protocole détaillé et la liste de matériel à utiliser	1	Cortes					Calcul de D et sigma	
5		Réflexion sur le mode d'exploitation des images pour l'expérience	2	Besson	Stratégie pour l'expérience	1	0	Adrien	Quantifier le phénomène de drift pour l'expérience	
6		Gérer l'horaire du prochain RDV sur le microscope	0.25	Besson	Black-Scholes le lire 89 et 79	2	0	Tous	Lire rapport Bosch	
7		Simuler avec series de fourier les MB+pré	3					0 Adrien	Courses + liste	
8		Préparer l'ordre du jour pour la réu avec Touboul	0.25	Victor	Cacul Stochastique	6	0	Tous	Réalisation de l'expérience historique au CIS	
9		Simuler des MB avec TD et Drift différents simu	4	Adrien	Black-Scholes le lire 89 et 79 +présentatio	1	0	Adrien	Mail BOSCH : infos sur l'exploitation des résultats	
10		Calcul itv confiance MB	1	Adrien					Réflexion sur le mode d'exploitation des images pour l'expérience (Latis pro, AVI ?)	
11		Stratégie pour l'expérience	1	Adrien					Gérer l'horaire du prochain RDV avec Lara pour le microscope	
12		Système temporel pour points	1	Adrien					Se mettre d'accord avec M.TOUBOUL pour un rdv	
13									Mails instruments + paramètres	
14										

FIGURE 1 – Système d'approbation dynamique des tâches

Tâches dynamiques									
	B	C	D	E	G	H	I	K	L
1		<b>Personne</b>			<b>Pts validés</b>				
2		Adrien	21.75						
3		Hugo	23						
4		Victor	22.75						
5									
6		<b>Adrien</b>			<b>Hugo</b>			<b>Victor</b>	
7		Tâches	Pts à valider	Pts validés	Tâches	Pts à valider	Pts validés	Tâches	Pts à valider
8		Gérer le logiciel à utiliser pour le suivi de la particule + protocole	2		réflexion sur le mode d'exploitation des images pour l'expérience (Latis pro, AVI ?)	4	4	quantifier le phénomène de drift pour l'expérience (1)	1.5
9		Rédiger le protocole détaillé et la liste de matériel à utiliser	1		Gérer l'horaire du prochain RDV avec Mme. Lara pour le microscope	0.25	0.25	Préparer l'ordre du jour pour la réu avec M.TOUBOUL	0.25
10		Black-Scholes le lire 89 et 79 + présentation	3.5	3	se mettre d'accord avec M.TOUBOUL pour un rdv	0.25	0.25	réorganisation gestion de projet pour le Protech	1
11		Présentation Lagevin + Fokker Plank + Uhlenbeck + Diffusion : Interprétation exp	1		finir théorie de la mesure	2	2	finir théorie de la mesure	2
12		Stratégie Euler - Uhlenbeck	2		black-Scholes le lire 89 et 79	3	3	calcul de D et sigma (2)	2
13		Lire rapport M.Bosch	1		Mails instruments + paramètres (incertitudes 1 fourries ?)	0.25	0.25	Rédaction du document pour l'interprétation de l'expérience en incorporant 1 et 2	1
14		Réalisation de l'expérience historique au CIS	2		lire rapport de M.Bosch	1	1	black-Scholes le lire 89 et 79	3
15		Cours avec M.Bay : Calcul d'Ito et options	2		Réalisation de l'expérience historique au CIS	2	2	calcul d'incertitude	1
16		Trame du code pour pointage / Vérification des hypothèses.	4	4	Cours avec M.Bay : Calcul d'Ito et options	2	2	lire rapport Bosch	0.25
17		Simulation	0.75	0.75	Pointage de 9 particules	4	4	lire rapport Bosch	1
18		Protocole pour partie 3	1		Présentation du doc sur les EDS	1	0	Faire les courses + liste	1
19		Présentation partie 3	2		Réunion protocole	0.25	0.25	Réalisation de l'expérience historique au CIS	2
20					Rédaction document Options	4	4	Cours avec M.Bay : Calcul d'Ito et options	2
21									

FIGURE 2 – Système de réalisation dynamique des tâches

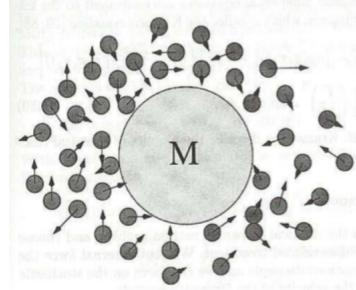


FIGURE 3 – Particule Brownienne

### 3 Le mouvement Brownien en Physique

#### 3.1 Définition mathématique

On peut formaliser mathématiquement le mouvement Brownien de la façon suivante :

**Définition 1** (Mouvement Brownien). *Un Mouvement Brownien est un processus stochastique, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires  $(B_t)_{t \geq 0}$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- $B_0 = 0$
- $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^+, \quad s < t \Rightarrow B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
- $B$  est à accroissement indépendants, c'est-à-dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}), \dots, (B_{t_1} - B_{t_0})$  sont indépendantes.
- Pour  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \rightarrow B_t(\omega)$  est presque sûrement continue sur  $\mathbb{R}^+$  (C'est en réalité une conséquence des propriétés précédentes)

Un mouvement Brownien est une suite de variables aléatoires suivant certaines hypothèses. Cette définition mathématique ne permet pas d'appréhender facilement la réalité physique d'une particule brownienne.

#### 3.2 Approche physique pour l'expérience : théorie de Langevin

L'approche physique du mouvement Brownien par la théorie de Langevin permet de décrire le déplacement d'une particule soumise à un très grand nombre de collisions et d'en déduire des grandeurs physiques.

Considérons une particule "grosse" plongée dans un fluide (cf FIGURE 3) constitué de particules beaucoup plus petites. Le rayon de la particule Brownienne est typiquement :  $10^{-9}m < a < 10^{-7}m$ . L'agitation de la grosse particule est bien plus lente que celle des petites particules l'avoisinant, il en résulte des collisions rapides et aléatoires dues aux variations locales de densité dans le fluide (ordre de grandeur : une collision toutes les  $10^{-12}s$  [13], en comparaison, nos yeux peuvent capter au maximum 30 images par seconde).

On déduit du principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à cette particule, que celle-ci obéit à l'équation de Langevin [13] :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\gamma \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (1)$$

où :

- $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse du centre de masse de la particule.
- $\gamma$  est le coefficient de friction, qui d'après la loi de **Stokes** vaut  $\gamma = 6\pi\mu a$  si la particule Brownienne est sphérique de rayon  $a$  plongée d'un fluide de viscosité dynamique  $\mu$ , dans le cas d'un écoulement laminaire et stationnaire<sup>3</sup>.
- $m$  est la masse de la particule
- $\boldsymbol{\eta}(t)$  est une variable aléatoire qui donne la force résultant de l'effet du "bruit d'arrière plan" (l'effet des collisions rapides et aléatoires de la particule avec son environnement) à l'instant  $t$ .

3. cf [15] page 36 pour la démonstration de l'expression de la force de Stokes

Puisque l'équation précédente contient un terme aléatoire elle appartient à la catégorie des *équations différentielles stochastiques* (EDS). Donnons quelques précision sur  $\eta(t)$  :

A une constante multiplicative près,  $\eta(t)$  peut s'assimiler à un bruit blanc Gaussien. C'est-à-dire :  $\eta(t) = \sigma \xi(t)$ , où  $\xi(t) \sim \mathcal{N}(0, Id)$ . Bien sûr, on a alors  $\langle \eta(t) \rangle := \mathbb{E}(\eta(t)) = 0$ , la moyenne n'est ici **pas réalisée par rapport au temps** mais par rapport aux différentes réalisations possibles de  $\eta(t)$ .

On a donc de plus  $\mathbb{V}(\eta(t)) = \sigma^2$ . On peut montrer des bruits blancs  $\eta(t)$  et  $\eta(t')$  pris à des instants différents sont totalement décorrélés :

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t') \quad (2)$$

où

$$\sigma = \sqrt{2\gamma k_B T} \quad (3)$$

<sup>4</sup> Cette absence de corrélation résulte du fait, que sur un court intervalle de temps, disons  $dt = 10^{-5}$  il y a tout de même  $10^{-5} 10^{12} = 10^7$  collisions. De ce fait, tout "effet de mémoire" va être supprimé.

A partir de l'équation 1, on peut montrer via un changement de fonction judicieux détaillé en Annexe 9.1.

$$\langle \|\vec{r}(t)\|^2 \rangle \sim \frac{2dRT}{6\pi\mu a \mathcal{N}_A} t = 2dDt \quad (4)$$

où

$$D = \frac{RT}{6\pi\mu a \mathcal{N}_A} \quad (5)$$

On peut alors décrire la trajectoire d'une particule Brownienne en fonction d'un terme de diffusion : le Coefficient de diffusion d'Einstein  $D$ . Ce coefficient fait intervenir le nombre d'Avogadro. Ainsi, si on connaît les valeurs de  $R, \mu, a$ , et de la température  $T$  et que l'on a accès à plusieurs trajectoires, on peut effectuer une mesure du nombre d'Avogadro.

Dans la section suivante nous présentons l'expérience réalisée en lien avec cette théorie, nous permettant d'approcher le nombre d'Avogadro.

## 4 Expérience et résultats

### 4.1 Contexte et objectifs

. On cherche ici à reproduire l'expérience historique et caractériser le mouvement Brownien de ces particules. De cette expérience, nous pouvons déduire certaines propriétés physiques.

Les différents objectifs de cette expérience sont :

1. Permettre l'observation du mouvement Brownien réel de plusieurs particules. (Section 4.2.1 )
2. Réaliser le pointage de la trajectoire des particules. (Section 4.2.2)
3. Déterminer le diamètre des particules observées. (Section 4.2.3)
4. Calculer le nombre d'Avogadro grâce au coefficient de diffusion d'Einstein. (Section 4.3)
5. Vérifier que les trajectoires des particules sont cohérentes avec les propriétés du mouvement Brownien. (Section 4.4)

Dans toute la suite de la description, les variables aléatoires donnant la position d'une particule seront supposées définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Ainsi, pour un  $\omega \in \Omega$ ,  $t \rightarrow X_t(\omega)$  représente la trajectoire suivie par des une particules considérées.

- 
4. L'expression de  $\sigma$  résulte du théorème d'équipartition de l'énergie appliquée à la particule Brownienne

$$\frac{1}{2} m \langle \|\vec{v}(t)\|^2 \rangle = \frac{d}{2} k_B T$$

$d$  étant le nombre de dimensions considérées ici.

## 4.2 Protocole

### 4.2.1 Observation des trajectoires Browniennes de particules

Nous avons décidé d'observer le mouvement Brownien de particules contenues dans le lait. Le lait est une émulsion qui contient en suspension, entre autres substances, de microscopiques globules de graisse dont les dimensions vont de  $0.1$  à  $10 \mu\text{m}$ .

Pour observer le mouvement de ces globules, nous avons observé une goutte de lait sur une lame au microscope muni d'une caméra reliée à un ordinateur.

Le matériel à disposition était :

- Du lait entier
- Un microscope inverse
- Une webcam MOTICAM 1080 pixels compatible avec un microscope inverse
- Du matériel de microscopie (lames, lamelles ...)
- Un thermomètre

Nous avons suivi les étapes suivantes :

- Diluer 10 à 30 fois le lait dans de l'eau distillée
- Déposer une goutte de lait dilué sur la lame, recouvrir avec la lamelle et disposer la préparation sur le porte objet du microscope
- Faire la mise au point à l'œil
- Régler l'orientation, l'intensité et la focalisation de la source de lumière du microscope
- Jouer sur le zoom de la caméra pour tenter d'obtenir une image grande et suffisamment lumineuse

Nous avons capturé plusieurs vidéos où des centaines de particules en mouvement perpétuel sont visibles (cf Figure 6).

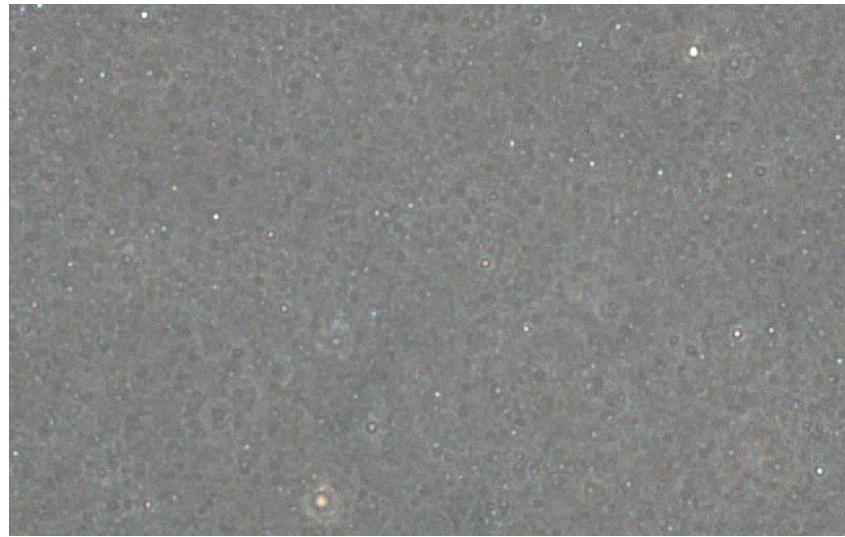


FIGURE 4 – Capture d'écran du microscope

Ces particules sont d'ailleurs d'autant plus visibles si l'on accentue le contraste des images (cf Figure 5).

### 4.2.2 Pointage

Pour suivre la trajectoire des particules, nous utilisons le logiciel *Tracker*. Comme vu précédemment, le mouvement Brownien est défini comme un processus stochastique, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ , où, pour une réalisation (correspondant à une trajectoire)  $\omega \in \Omega$  donnée,  $X_t(\omega)$  et  $Y_t(\omega)$  fournissent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de la particule suivant cette trajectoire à l'instant  $t$ , en prenant comme origine la position initiale de la particule<sup>5</sup>. Le calcul du nombre d'Avogadro fait

5. Lorsque la position initiale est choisie comme origine, on dit que le mouvement Brownien est dit **Standardisé**

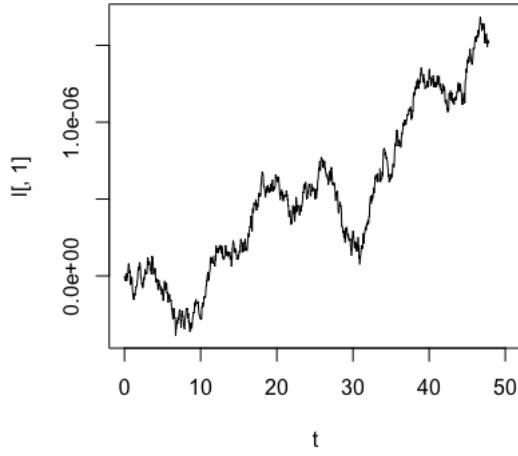


FIGURE 5 – Capture d'écran du microscope contrastée

intervenir, à  $t$  fixé, l'espérance de la variable aléatoire  $\|\vec{r}(t)\| := \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$ . Calculer cette espérance, que nous noterons  $\langle \|\vec{r}(t)\| \rangle$ , revient à calculer la moyenne, sur l'ensemble des particules choisies, les positions à l'instant  $t$ .

Comme nous considérons des moyennes d'ensembles, nous devons réaliser un pointage sur plusieurs particules.<sup>6</sup>

Ici nous avons suivi 25 trajectoires. Nous avons donc à disposition 50 vecteurs contenant une coordonnée  $x$  ou  $y$  d'une particule. Pour chaque pointage, on centre le repère sur la première position de la particule. Nous avons réalisé le pointage à une fréquence de 25 images par seconde. Les vidéos exploitées étaient d'une durée de près de 50 secondes, ce qui nous a fourni 1256 positions par particules, soit 62800 données au total.

FIGURE 6 –  $x_j(t)$  pour une particule  $j$  quelconque

---

6. A posteriori, nous avons réalisé que la théorie **Ergodique**, présentée en [9] s'applique ici, ce qui aurait pu nous autoriser à ne considérer la trajectoire d'une seule particule. Ceci a été fait dans le cadre de la vérification des hypothèses du mouvement Brownien en Section 4.6.1

### 4.2.3 Mesure du diamètre des particules

Pour calculer le nombre d'Avogadro nous avons besoin d'avoir accès au diamètre des particules. Le diamètre des particules de graisse n'étant pas constant, nous avons pointé la trajectoire de particules de tailles relativement semblables. Nous avons ensuite fait la moyenne des diamètres et utilisé cette valeur pour le calcul du nombre d'Avogadro  $N_A$ . Le diamètre moyen obtenu est de l'ordre de  $0.2 \mu\text{m}$

## 4.3 Calcul du Nombre d'Avogadro

On a démontré en se basant sur l'équation de Langevin la relation suivante<sup>7 8</sup>

$$\langle \|\vec{r}(t)\|^2 \rangle \sim \frac{2dRT}{6\pi\mu a N_A} t = 2dD t \quad (6)$$

où  $d$  est la dimension de l'expérience. Ici  $d = 2$ . Et

$$D = \frac{RT}{6\pi\mu N_A}$$

Pour une particule  $j$ , on a deux vecteurs

$$\begin{bmatrix} x_j(t_0) \\ \dots \\ \dots \\ x_j(t_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_j(t_0) \\ \dots \\ \dots \\ y_j(t_n) \end{bmatrix}$$

On calcule à chaque instant la norme au carré de la position pour chaque particule.

$$\begin{bmatrix} x_j^2(t_0) + y_j^2(t_0) \\ \dots \\ \dots \\ x_j^2(t_n) + y_j^2(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j^2(t_0) \\ \dots \\ \dots \\ r_j^2(t_n) \end{bmatrix}$$

où  $r_j^2(t_n) = \|\overrightarrow{r_j(t_n)}\|^2$

Pour chaque instant  $t_i$  on fait la moyenne des  $r_j^2(t_i)$  sur l'ensemble des particules et on obtient le vecteur

$$\begin{bmatrix} \langle r^2(t_0) \rangle \\ \dots \\ \dots \\ \langle r^2(t_n) \rangle \end{bmatrix}$$

avec

$$\langle r^2(t_i) \rangle = \frac{1}{\text{nombre de particules}} \sum_{j \text{ particules}} r_j^2(t_i)$$

A chaque instant, on peut calculer le coefficient de diffusion

$$D_i = \frac{1}{2dt_i} \langle r^2(t_i) \rangle$$

L'évolution de  $D$  au cours du temps est donnée en Figure 7.

Bien sûr, en théorie, ce coefficient ne dépend pas du temps. Néanmoins, les variations de  $D$  par rapport à sa valeur moyenne (ligne horizontale en rouge), restent raisonnables. La valeur moyenne temporelle de  $D$ , notée  $\bar{D}$  sert alors pour le calcul du nombre d'Avogadro :

$$N_A = \frac{RT}{6\pi a \mu \bar{D}}$$

### 4.3.1 Alternative pour le calcul de D

Le calcul de la valeur de  $D$  à inclure dans la formule de  $N_A$  peut également être réalisé en raisonnant à partir de la Figure 8 donnant l'évolution de  $\langle r^2 \rangle$  (moyenne sur les 25 particules, en fonction du temps).

7. Cette relation est valable condition que le mouvement Brownien soit Standardisé. Dans le cas contraire, il faut remplacer  $\vec{r}(t)$  par  $\vec{r}(t) - \vec{r}(0)$ . Puisque nos données n'étaient pas parfaitement standardisées, nous avons réalisé cette opération en début de code.

8. On rappelle que  $a$  représente le rayon (moyen) du type de particules considérées, et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide

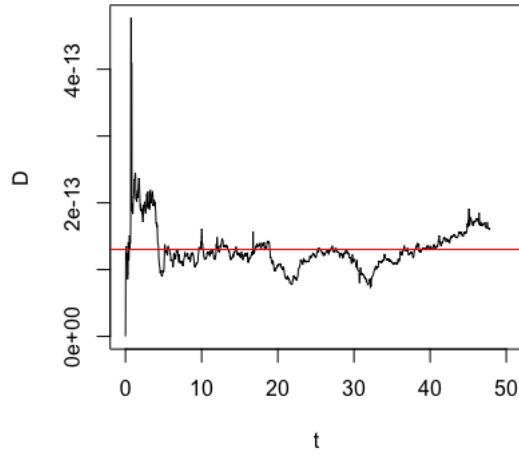


FIGURE 7 – Évolution du coefficient de diffusion au cours du temps

On remarque, que l'évolution de  $\langle r^2 \rangle$  en fonction du temps n'est pas parfaitement linéaire, mais présente deux régimes, l'un pour  $t < 30$  s et l'autre pour  $t \geq 30$  s. Une possibilité est donc de réduire l'échelle de temps à l'intervalle  $[0, 30]$  puis de réaliser une régression linéaire simple. Ceci est représenté en Figure 9. Les paramètres de la droite obtenus permettent de déduire que

$$D = 2.86 \times 10^{-14} m^2.s^{-1}$$

On en déduit alors  $N_A = 1.33 \times 10^{22} s^{-1}$  une estimation moins satisfaisante que celle présentée en paragraphe 4.3.3. Ceci s'explique par le fait que la régression linéaire n'est pas forcément le meilleur outil à utiliser ici, dans la mesure où l'hypothèse homoscédasticité de l'erreur n'est a priori pas vérifiée.

### 4.3.2 Filtration du Drift

Le raisonnement énoncé précédemment pour obtenir le nombre d'Avogadro à savoir en premier lieu l'équation 6 repose sur l'hypothèse que le mouvement de la particule se subit pas de *drift*, c'est-à-dire, de tendance globale. Vérifions cette hypothèse. Pour ce, représentons  $\langle x \rangle$ , et  $\langle y \rangle$  (moyennes prises sur les ensembles de particules) en fonction du temps. Ceci est fait en Figure 4.3.2

On remarque bien sur la Figure 4.3.2 qu'il y a un mouvement d'ensemble : les particules ont tendance à se diriger dans la le sens des abscisses croissantes, et des ordonnées décroissantes. Pour filtrer ce Drift, on agit sur la matrice, contenant les coordonnées (abscisses et ordonnées) de chaque particule (repérées sur les colonnes de la matrice) à chaque instant (repérés sur les lignes de la matrice), qui est de taille  $1256 \times 50$ . Les opérations sont données en équation <sup>9</sup>

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, 1256 \rrbracket \times [1, 25], \begin{cases} x_j(t_i) \leftarrow x_j(t_i) - \langle x(t_i) \rangle \\ y_j(t_i) \leftarrow y_j(t_i) - \langle y(t_i) \rangle \end{cases} \quad (7)$$

Après application de ce filtrage, les évolutions temporelles de  $\langle x \rangle$  et  $\langle y \rangle$  sont représentées en Figure 11.

On retrouve bien des valeurs moyennes nulles (à  $10^{-23}$  près, erreurs liées aux arrondis machine). La tendance globale a été supprimée dans la matrice des coordonnées.

### 4.3.3 Résultats

Dans notre cas, nous avions :

- $T = 294.75 \pm 0.1 K$
- $\mu = \mu_{eau}(T) \sim 10^{-3} Pa.s$  <sup>10</sup>

9. ici,  $x_j(t_i)$  représente l'abscisse de la  $j$  ième particule à l'instant  $t_i$ . Néanmoins, il se s'agira pas de la  $j$  ième colonne de la matrice, mais de la  $2j$  ième. La matrice contient, en effet, alternativement les abscisses et les ordonnées de chaque particules.

10. il s'agit ici de la viscosité *dynamique* de l'eau, à 21.6 degrés Celsius. Nous l'avons tirée de la source [7].

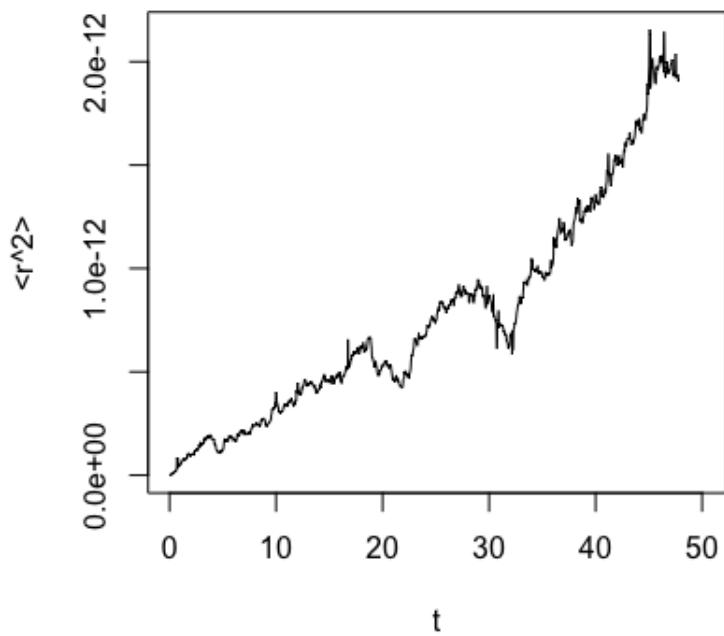
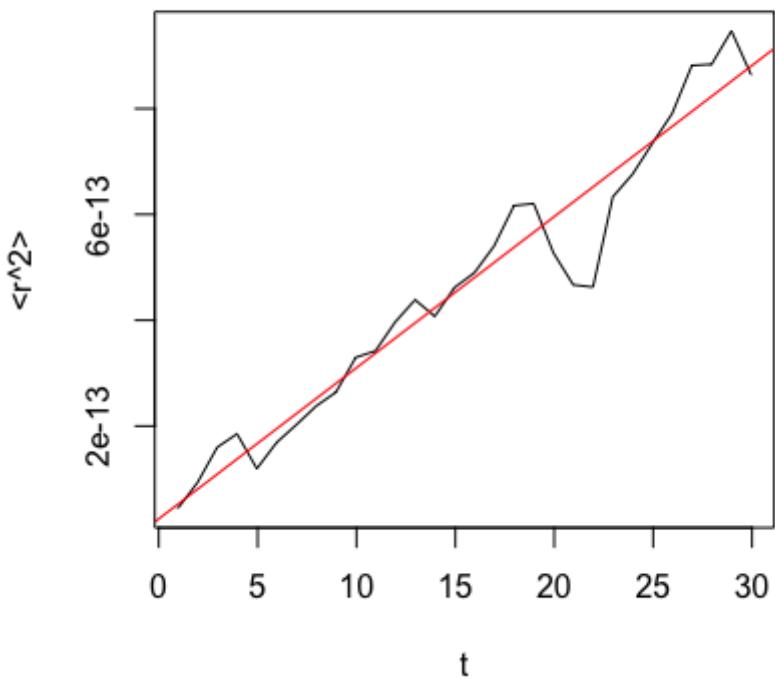
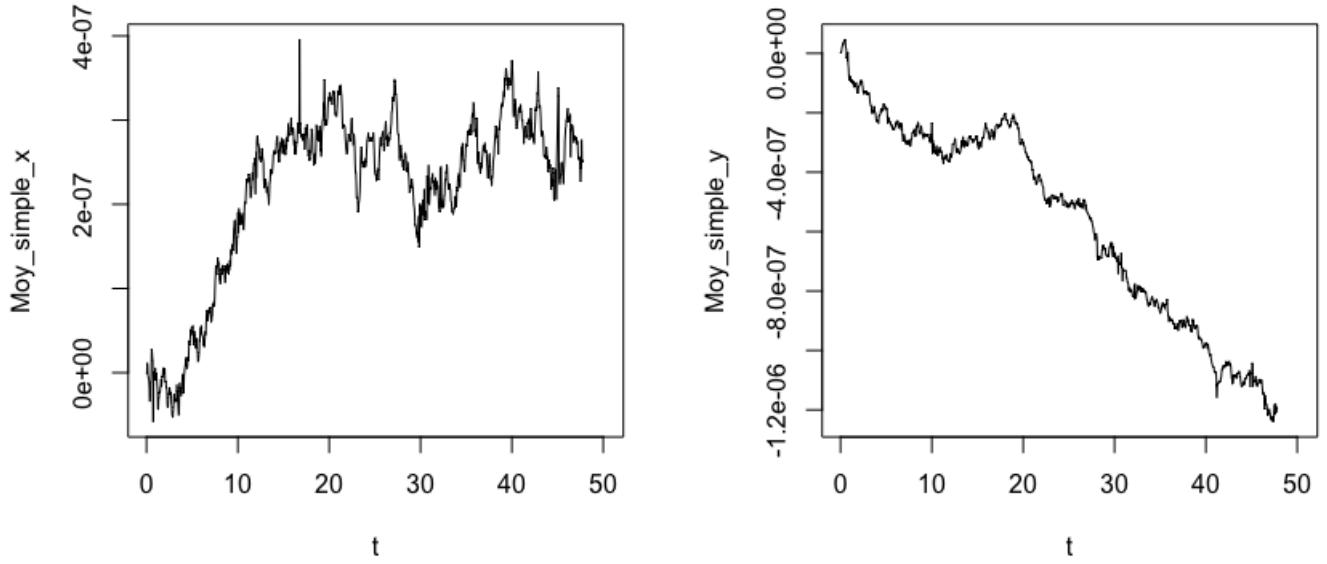
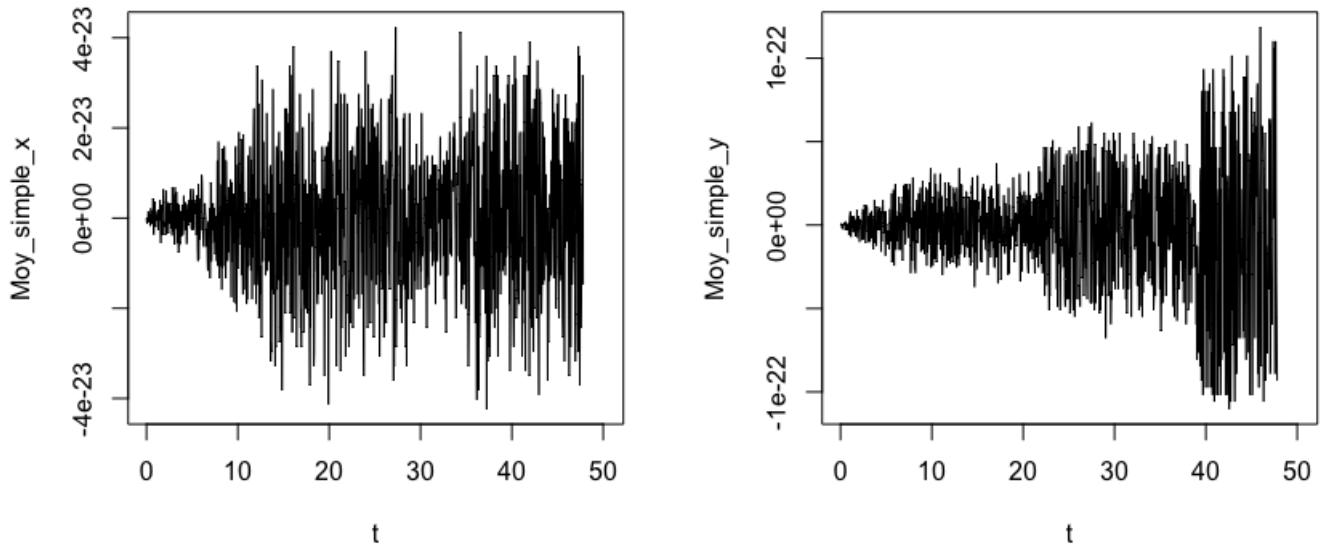
FIGURE 8 – Représentation de  $\langle r^2 \rangle$  en fonction du temps

FIGURE 9 – Régression linéaire réalisée sur la première plage de temps

FIGURE 10 – Représentation de  $\langle x \rangle$  (à gauche) et de  $\langle y \rangle$  (à droite) en fonction du tempsFIGURE 11 – Représentation de  $\langle x \rangle$  (à gauche) et de  $\langle y \rangle$  (à droite) en fonction du temps après l'action du filtre

- $a \simeq 0.1 \mu m^{11}$
- Nous avons obtenu (après filtration du drift)  $\langle D \rangle \simeq 1.30 \times 10^{-13} m^2/s$

On obtient alors :

$$N_A = 2.83 \times 10^{22} s^{-1}$$

11. Nous avons réalisé une moyenne des rayons sur les différentes particules. Dans l'idéal, il aurait fallu prendre des particules de même taille pour gagner en précision. Ceci aurait pu être possible en utilisant de la poudre d'Alumine à la place de lait

La valeur de notre approximation est assez éloignée de la valeur théorique. Nous avons une erreur relative de 95%. Plusieurs facteurs lors de la mise en oeuvre de l'expérience et l'analyse des résultats peuvent expliquer cet écart.

Premièrement, nous avons eu un problème d'étalonnage du microscope. Nous avons donc dû retourner à posteriori dans le laboratoire pour étalonner et reporter ces mesures sur nos données. De plus nous avons fait l'hypothèse d'un mouvement Brownien 2D, or l'épaisseur de la lame n'est pas négligeable complètement. D'une part, l'expression (6) n'est plus correcte ( $d = 3$ ) et la valeur de la moyenne quadratique de la position des particules ne prend pas en compte le mouvement dans l'épaisseur de la lame. Finalement, d'autres facteurs comme les effets de bord au niveau des lames affectant le mouvement des particules ou bien le choix de l'estimateur des grandeurs peuvent éloigner notre approximation de la valeur théorique.

## 4.4 Propriétés à vérifier, data disponible

### 4.4.1 Définitions

Nous rappelons la définition qui va nous servir par la suite

**Définition 2** (Mouvement Brownien). *Un Mouvement Brownien est un processus stochastique, c'est-à-dire une suite de variables aléatoires  $(B_t)_{t \geq 0}$ , vérifiant les propriétés suivantes :*

- $B_0 = 0$
- $\forall (t, s) \in \mathbb{R}^+, \quad s < t \Rightarrow B_t - B_s \xrightarrow{\text{distr}} \mathcal{N}(0, t - s)$
- $B$  est à accroissement indépendants, c'est-à-dire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables aléatoires  $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}), \dots, (B_{t_1} - B_{t_0})$  sont indépendantes.
- Pour  $\omega \in \Omega$ , la fonction  $t \rightarrow B_t(\omega)$  est presque sûrement continue sur  $\mathbb{R}^+$  (C'est en réalité une conséquence des propriétés précédentes)

Dans notre cas, la position des particules est régie par deux variables aléatoires,  $X_t$  et  $Y_t$ , qui suivent un processus d'Itô, c'est-à-dire qu'elles répondent à une relation sous la forme<sup>12</sup>  $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t$ . En l'absence, de Drift ( $\mu = 0$ ),  $X_t = \sigma B_t$ .

## 4.5 Données disponibles

On note  $D$  le jeu de données obtenu. Il contient pour différentes positions, c'est-à-dire les coordonnées  $x, y$ , d'une particule observée au cours du temps.

## 4.6 Vérification

Nous allons vérifier les différentes hypothèses du mouvement Brownien.

### 4.6.1 Accroissements qui suivent une loi normale

On fait l'hypothèse que  $X_t = \sigma B_t$ . Ici on étudie un accroissement  $\delta t = 0.04s$ . Un diagramme qq plot et un histogramme des valeurs prises par la variables aléatoire sont donnés en Figures 14 et 13, et montrent tous deux que  $X_t$  suit bien une loi normale centrée. Pour déterminer le paramètre  $\sigma$ , on a simplement pris la racine carré de la variance des accroissements (pour  $t - s = 1$ , autrement dit des accroissements de 1 unité), en ne considérant ici qu'une seule trajectoire (l'hypothèse **Ergodique** est ici utilisée). On trouve :

$$\sigma = 1.115545e - 07$$

Cela peut permettre de simuler une trajectoire similaire à la notre avec une méthode de Monte-Carlo. Nous montrons dans la Figure 18 le résultat de la simulation obtenue.

On peut ensuite, pour différentes valeurs de  $\Delta t := t - s$  (sur la trajectoire d'une seule particule) calculer la variance correspondante de la loi. Ceci est réalisée en Figure 15. On note bien que cette variance est proportionnelle à  $t - s$ .

### 4.6.2 Indépendance des accroissements

La position entre deux observations successives  $X_{t+1} - X_t$  est un vecteur aléatoire qui est la résultante d'un grand nombre de chocs. Il admet donc des propriétés statistiques stationnaires.

On se propose de vérifier l'indépendance des accroissements pour pouvoir conclure quand au mouvement

<sup>12</sup>. cf PDF précédent pour la définition d'un processus d'Itô. On considère ici le cas d'un mouvement Brownien Standardisé

H

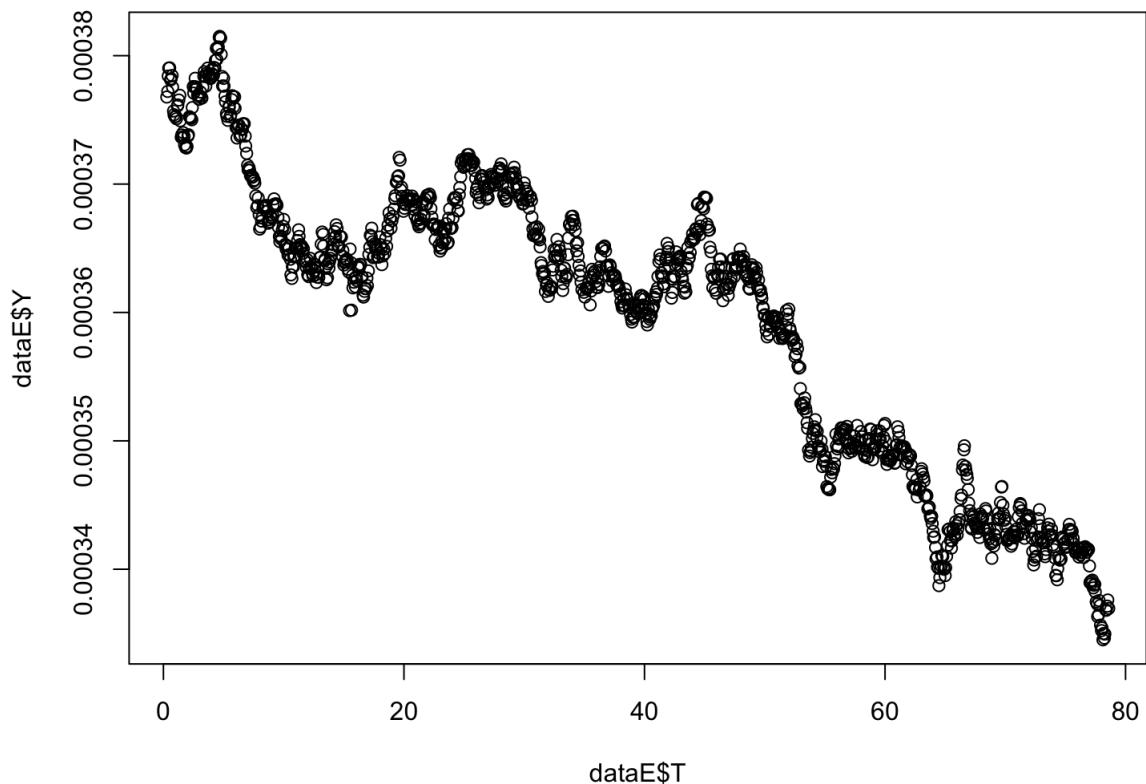
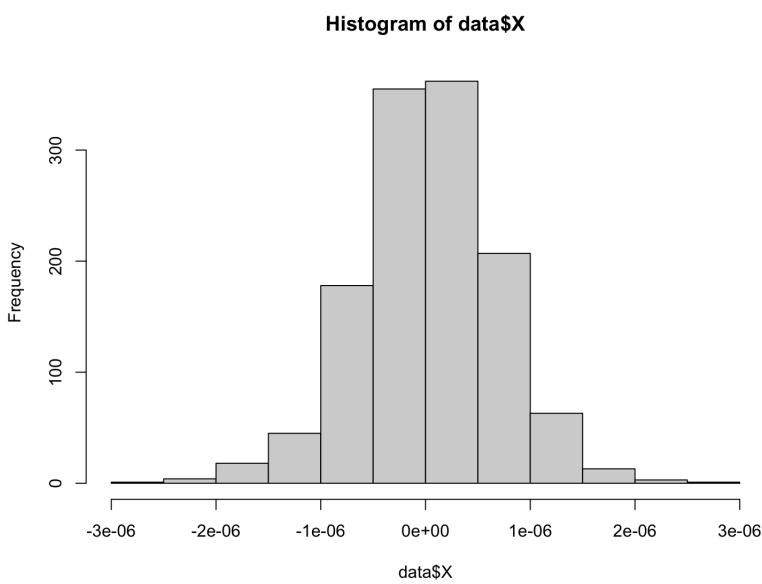


FIGURE 12 – Coordonnées y de la particule en fonction du temps

H

FIGURE 13 – Histogramme de  $X_t - X_s$ , où  $t - s = 1$

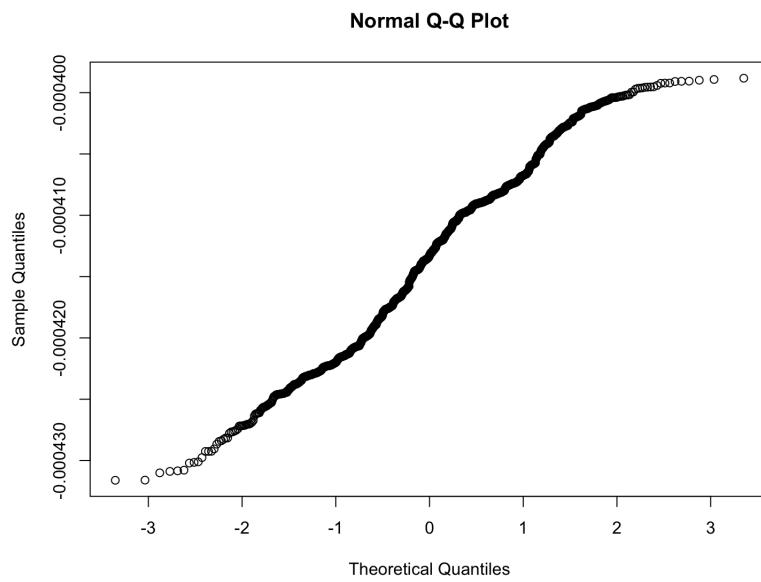


FIGURE 14 – QQ plot pour la position X

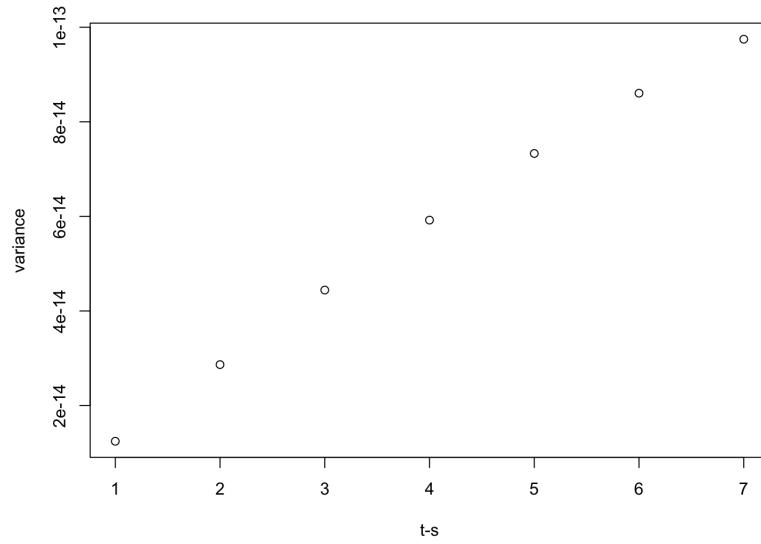


FIGURE 15 – On note que la variance est bien proportionnelle à t-s

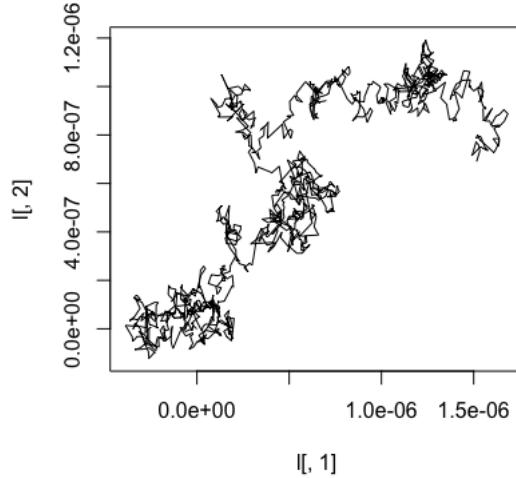


FIGURE 16 – Évolution spatiale d'une particule

Brownien.

Dans le cas où la série est stationnaire, c'est-à-dire que les accroissements sont de covariance nulle, on peut s'intéresser à la fonction d'autocorrélation.

On rappelle que la formule de corrélation  $r$  entre 2 variables  $x$  et  $y$  est donnée par :

$$r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{E[(x - E(x))(y - E(y))]}{\sigma_x \sigma_y}$$

En statistique, l'autocorrélation d'une série temporelle discrète ou d'un processus  $x_t$  est simplement la corrélation du processus par rapport à une version décalée dans le temps de lui-même. Si  $x_t$  est un processus stationnaire d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  alors la définition est :

$$R(k) = \frac{E[(x_i - \mu)(x_{i+k} - \mu)]}{\sigma^2}$$

Pour revenir à notre cas, nous allons étudier l'autocorrélation de la série des accroissements  $A_t = (X_{t+1} - X_t)_{t \geq 0}$  et représenter les résultats en figure 17.

D'un point de vue naïf, la fonction d'autocorrélation mesure ce qu'elle calcule, c'est-à-dire les dépendances internes du signal. Par exemple, dans le cas des images, une image fortement régulière et homogène aura une forte autocorrélation.

En particulier, cela est intéressant pour celui qui cherche un modèle du signal. En effet, si cette dépendance est très faible nous pourrons faire l'hypothèse que les  $A_t$  sont indépendants. C'est le cas ici. On confirme donc l'hypothèse d'indépendance des accroissements

#### 4.6.3 Continuité de $t \rightarrow X_t(\omega)$

Considérons une réalisation  $\omega \in \Omega$ . La continuité de  $t \rightarrow X_t(\omega)$  peut directement se vérifier graphiquement. C'est ce qui a été fait en Figure 12. On peut également représenter, à titre indicatif,  $Y_t(\omega)$  en fonction de  $X_t(\omega)$  pour une trajectoire donnée. Ceci a été réalisé en Figure 16.

### 4.7 Simulation à partir des paramètres estimés

La stratégie pour simuler les trajectoires à partir des paramètres estimés est la suivante.

1. On choisit un intervalle de temps  $T$  et un pas de temps  $\Delta t = \frac{T}{n}$ .
2. On simule une loi normale

$$\mathcal{N}(0, \Delta t)$$

$n$  fois.

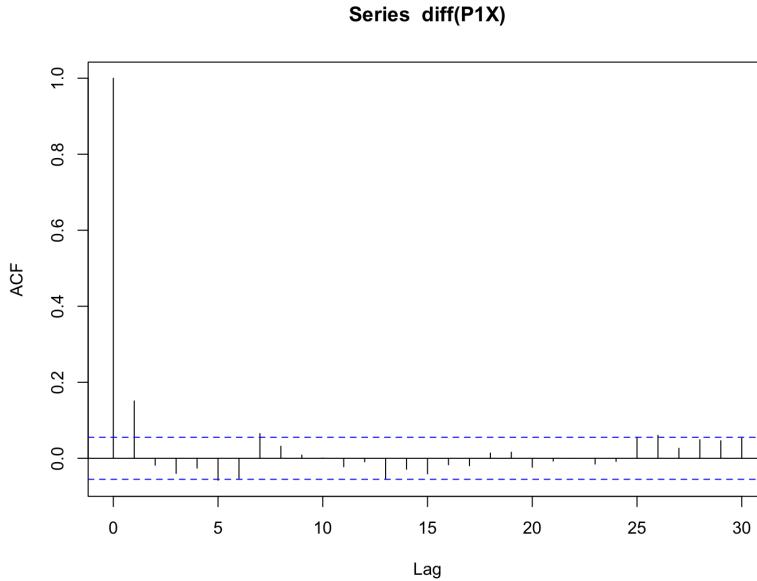


FIGURE 17 – On regarde l'autocorrélation de la série des accroissements, cela confirme l'hypothèse d'indépendance des accroissements

3. On obtient alors un mouvement

$$B_n = B_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)\frac{T}{n}} - B_{k\frac{T}{n}})$$

4. On calcule ensuite  $X_t = \sigma_x B_t$  et  $Y_t = \sigma_y B_t$ .

Pour simuler le mouvement Brownien en 2D,

$$(X_t, Y_t) = (\sigma_x \sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)\frac{T}{n}} - B_{k\frac{T}{n}}), \sigma_y \sum_{k=0}^{n-1} (B_{(k+1)\frac{T}{n}} - B_{k\frac{T}{n}}))$$

#### 4.8 Conclusion sur l'expérience et interrogation

Cette expérience nous a en particulier fait remarquer que la trajectoire d'une particule, par exemple celle donnée en FIGURE 12 semble assimilable à la trajectoire d'un actif financier.

**Question :** Comment expliquer une telle analogie ?

Repartons de l'équation (1).

En toute généralité, il faut, se placer dans le cas où en plus des forces énoncées précédemment, la particule est plongée dans un champ de forces  $\mathbf{F}(r)$ <sup>13</sup>. L'EDS vérifiée par la position de la particule est :

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{F}(r) + \sigma\xi(t)$$

où

$$\sigma = \sqrt{2\gamma k_B T}$$

Dans les conditions dans lesquelles l'expérience sera réalisée, on aura (cf équation (12))

$$|\gamma\dot{\mathbf{r}}| \gg |m\ddot{\mathbf{r}}|$$

ce qui revient à dire que la force d'inertie est négligeable devant la force de friction. Dans ce cas, l'équation (1) devient :

$$\gamma\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(r) + \sigma\xi(t) \quad (8)$$

13. Par exemple, si l'on penche le liquide dans lequel est plongé la particule, on obtient une force supplémentaire qui résulte de la différence d'énergie potentielle au sein du liquide

h!

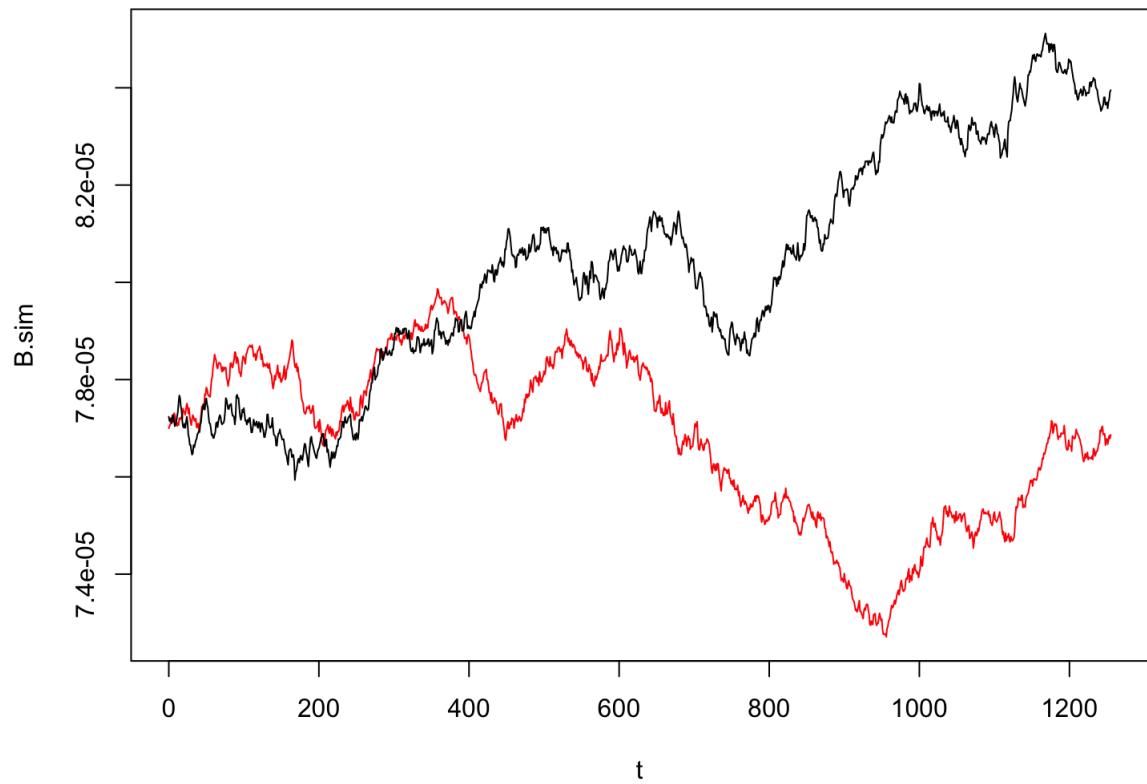


FIGURE 18 – En rouge la courbe simulée avec les paramètres estimés, en noir la trajectoire réelle

h!

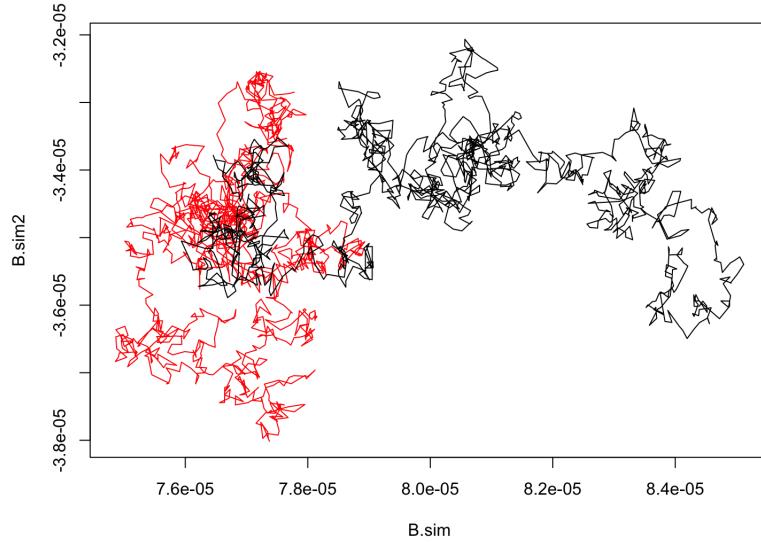


FIGURE 19 – En rouge la courbe simulée avec les paramètres estimés, en noir la trajectoire réelle

L'équation (8) se réécrit en 1D :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F(x)}{\gamma} + \frac{\sigma}{\gamma} \xi(t)$$

Ou bien :

$$dx = -\frac{F(x)dt}{\gamma} + \frac{\sigma}{\gamma} dB_t \quad (9)$$

où  $B_t$  est un mouvement Brownien. En effet, si l'on note

$$dB_t = \xi(t)dt$$

le raisonnement donné pages 78 et 79 de [13] permet de montrer rigoureusement que  $(B_t)_{t \geq 0}$  vérifie toutes les propriétés d'un mouvement Brownien (propriétés rappelées en **Définition 2**).

L'introduction de cette suite de variables aléatoires  $B_t$  dans l'équation précédente peut être justifiée mathématiquement si la suite continue des positions prises par la particule peut être assimilée à la trajectoire d'un processus stochastique, noté  $(X_t)_{t \geq 0}$ <sup>14</sup>. Par la suite, on notera donc  $dX_t$  au lieu de  $dx$ .

L'équation 9 prend alors la forme très générale suivante [**Processus d'Itô**]

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \tilde{\sigma}(X_t, t)dB_t$$

<sup>15</sup> où l'on identifie le *Drift* (c'est-à-dire la *tendance globale* du mouvement)  $\mu(X_t, t) = -\frac{F(x)}{\gamma}$  et la *volatilité* (c'est-à-dire l'amplitude du mouvement Brownien),  $\tilde{\sigma}(X_t, t) = \frac{\sigma}{\gamma} = \sqrt{\frac{2k_B T}{\gamma}} = \sqrt{2D}$

Nous verrons par la suite que le cours d'un actif boursier  $(S_t)_{t \geq 0}$  suit également un processus d'Itô, il s'agit d'un mouvement Brownien géométrique.

**Définition 3** (Brownien géométrique). Soit  $(S_t)_{t \geq 0}$  un processus stochastique, et  $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ . On dit que  $S := (S_t)$  est un Brownien géométrique s'il s'agit d'un processus d'Itô sous la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

On peut montrer alors montrer (cf [23] page 40) la proposition suivante.

**Proposition 1.** Si  $(S_t)$  est un Brownien géométrique de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , alors :

$$S_t = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right]$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  vont pouvoir être interprétés de la même manière que pour la particule de pollen dans le liquide.

- $\mu$  va représenter la tendance globale du marché : on aura  $\mu > 0$  si la tendance est *haussière* (cf Figure 20 pour un exemple), c'est-à-dire si le prix a tendance à monter globalement,  $\mu < 0$  si la tendance est *baissière* (cf Figure 21), et  $\mu = 0$  en période de *range*, lorsque la valeur moyenne du prix est nulle.
- $\sigma$  va correspondre à l'amplitude du mouvement Brownien, c'est-à-dire la volatilité du marché.

Il s'agira, en paragraphe 6.1 de trouver une méthode pour estimer ces paramètres.

Nous avons donc établi un premier lien entre mouvement Brownien utilisé en Physique et celui utilisé en Finance. Continuons d'établir une analogie entre ces deux domaines à l'aide d'une des équations les plus connues en Physique : *l'équation de la chaleur*.

## 5 Équation de la chaleur en finance

### 5.1 Équation de la chaleur

Dans cette section, nous allons montrer le lien entre *l'équation de la chaleur* utilisée en Physique et celle utilisée en Finance pour décrire les processus de diffusion.

14. La trajectoire, en elle-même est alors notée  $t \rightarrow X_t(\omega)$

15. Un processus qui vérifie une telle équation différentielle est, par définition, un processus d'Itô.

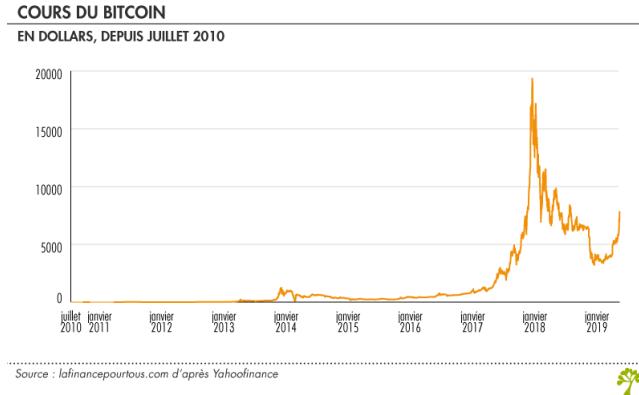


FIGURE 20 – Cours du Bitcoin qui a subi une forte tendance haussière en Janvier 2018



FIGURE 21 – Cours de Boeing (en dollars) (image tirée de [24]) qui a subi une forte baisse durant la crise du Covid 19 en mars 2020

**Définition 4** (Équation de la chaleur). *On appelle équation de la chaleur en  $d$  dimensions toute EDP de la forme*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \Delta u$$

où  $u : \mathbb{R}^d \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C_b^{1,16}$  en temps et  $C_b^2$  en espace, et  $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ .

Dans toute la suite, on va considérer une équation de la chaleur dimensionnée dans laquelle  $K = 1/2$ .

Nous allons faire sentir au lecteur la puissance de ces outils dans une première approximation du Lemme d'Itô excessivement utilisé en mathématiques financières et faisant intervenir le mouvement Brownien.

Soit  $g(t, x)$  la densité Gaussienne centrée de variance  $t$ . On note

$$q(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp - \frac{(y-x)^2}{2t} = g(t, x-y)$$

la densité de transition du mouvement Brownien  
17

C'est, visuellement, la probabilité pour que le mouvement Brownien soit en  $y$  sachant que  $t$  instants auparavant, il se trouvait en  $x$ , c'est aussi la densité conditionnelle

$$P(B_{t+s} \in y \pm dy \mid B_s = x) = q(t, x, y)dy$$

La densité de transition  $q$  vérifie l'équation "forward"

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}(t, x, y)$$

et l'équation "backward"

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x, y)$$

16. Cette notation signifie que la fonction est de classe  $C^1$  et bornée par rapport à la variable considérée

17. La fonction  $g$  est solution de l'équation de la chaleur pour  $K = 1/2$  et  $d = 1$  est le *noyau de la chaleur* (cf [10].)

Les deux équations sont fondamentales en Finance<sup>18</sup>

En Physique, une telle fonction  $g$  permet de remonter à l'expression de la solution de  $u$  l'équation de la chaleur munie de la condition initiale  $u(\cdot, 0) = h$  via le produit de convolution :

[11]

$$u(x, t) = g(t, \cdot) * h = \int_{\mathbb{R}} g(t, x - y) h(y) dy$$

*Dans toute la suite, on translatera l'origine des temps de manière à s'adapter aux notation utilisées en finance. La condition initiale sera prise au temps  $t$  et  $T$  va désigner un instant  $T \geq t$*

On peut montrer (cf Annexe 9.2) que la démarche est analogue en finance. La fonction à prédire sera alors non pas  $u$ , mais  $E(f(B_T) | B_t = x)$ , où  $f$  est une fonction boréienne quelconque.

On arrive au résultat suivant fondamental : **Si  $f$  est une fonction de classe  $C_b^1$  en temps et  $C_b^2$  en espace,  $E(f(t, x + B_t)) = f(0, x) + \int_0^t E\left[\frac{1}{2}f''_{xx}(s, x + B_s) + f'_t(s, x + B_s)\right] ds$**

## 5.2 Une application de ce résultat et vérification

On rappel le résultat fondamental suivant qui nous permettra de mieux comprendre le lemme d'Itô : **Si  $f$  est une fonction de classe  $C_b^1$  en temps et  $C_b^2$  en espace**

$$E(f(t, x + B_t)) = f(0, x) + \int_0^t E\left[\frac{1}{2}f''_{xx}(s, x + B_s) + f'_t(s, x + B_s)\right] ds$$

On se propose de faire une simulation et de voir l'intérêt d'une telle proposition pour la prédiction. On choisit classiquement :<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} f : (t, x) &\longrightarrow \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) &= \sigma^2 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) &= (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x) \end{aligned}$$

Alors en particulier pour  $x = 0$

$$E(f(t, B_t)) = f(0, 0) + \int_0^t E[\mu \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s)] ds.$$

Puis avec  $f(0, 0) = 1$  comme condition initiale :

$$E[\mu \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})s + \sigma B_s)] = \mu \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})s) E(\exp(\sigma B_s))$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\sigma B_s}) &= \frac{1}{\sqrt{x\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2s}} e^{\sigma t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{s\sigma^2}{2}} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2s}} - \sqrt{\frac{s}{2}}\sigma\right)^2} dt \\ &= e^{s\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned} \tag{10}$$

On a alors enfin :

$$E(f(t, B_t)) = 1 + \mu \int_0^t \exp(\mu s) ds$$

Et donc :<sup>20</sup>

$$E(f(t, B_t)) = e^{\mu t}$$

On a obtenu pour les simulations le résultat en Figure 22. La puissance de cette méthode réside dans le fait que la prédiction est possible avant même que la trajectoire n'ai été tracée!<sup>21</sup>. La notice du code R ayant permis de réaliser cette simulation est donnée en paragraphe 8.

Il en découle que l'on peut prédire avec des intervalles de confiance l'évolution de toute fonction dérivée du mouvement Brownien.

18. cf [10]

19. Ce choix pour  $f$  n'est pas anodin : nous avons vu en proposition 1 que  $f(t, B_t)$  est l'expression théorique donnant le cours d'un actif à l'instant  $t$ , connaissant les deux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  qui correspondent respectivement à la tendance (mouvement global du marché) et à la volatilité (amplitude du mouvement Brownien, du *bruit* sur la marché)

20. à condition, bien sûr que  $\mu \neq 0$

21. Il faut tout de même que les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  soient connus

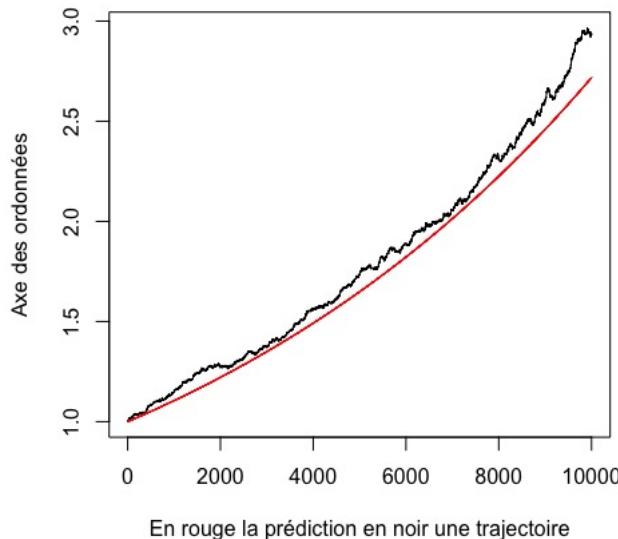


FIGURE 22 – Prédiction de la trajectoire pour  $\sigma = 10^{-3}$  et  $\mu = 10^{-4}$

### 5.3 Finance : Modèle de Black-Scholes

Le mouvement Brownien a un rôle important dans la formulation de certains modèles de mathématiques financières. Avant de s'intéresser au modèle de Black-Scholes, il est important de rappeler les principales notions financières qui seront utilisées par la suite.

#### 5.3.1 Le Marché financier et les actifs

Nous nous plaçons dans un **marché organisé**, les contrats sont standardisés :

- Le nombre de dates de livraisons différentes est limité
- Les sous-jacents<sup>22</sup> sont décrits de façon précise
- La cotation des contrats est publiée en continu

Le nombre de contrats cotés est faible et donc les volumes plus importants. Le but est d'éliminer les risques de contrepartie. Il y a une contrepartie unique : la chambre de compensation du marché (peu de chance de faire faillite)

Un actif financier est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable, qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque. Il existe deux types d'actifs :

- **actifs risqués** : il s'agit de capitaux dont le prix fluctue au cours de temps.
- **actifs sans risque** : leur principe est fondé sur le placement d'une somme d'argent dans un compte épargne, qui assure l'apport d'un intérêt  $r < 1$  sur une période d'une unité de temps  $\Delta t$  (par exemple, si  $r$  est sur une période d'un an, alors il correspond à l'intérêt annuel). Ainsi si le compte possède  $C_0$  au temps  $t = 0$ , alors il y aura au temps  $t = T$  :  $C_T = C_0(1 + r)^{\frac{T}{\Delta t}}$

On peut assimiler le comportement du cours d'un actif risqué comme un comportement de mouvement Brownien géométrique. c'est-à-dire que la variation du prix selon le temps dépendant d'une tendance ou Drift et d'un terme stochastique modélisant la nature aléatoire des variations à petite échelle résultat de la multitude de transactions influençant le cours.

Le prix  $S_t$  d'un actif vérifie alors l'équation différentielle stochastique (Black-Scholes, 1975) sui-

<sup>22</sup>. Un sous jacent est un actif, dont le prix va influer sur le prix d'un produit dérivé, par exemple une Option qui est définie en paragraphe 5.2.2

vante :<sup>23</sup>

$$\left[ \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \right]^{24} \quad (11)$$

Avec  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement Brownien standard,  $\mu$  le drift et  $\sigma$  est la volatilité.

### 5.3.2 Les options

Le modèle de Black-Scholes fait intervenir pour l'évaluation et la couverture des *options*. Les options sont des produits financiers dits dérivés donnant le droit d'acheter ou de vendre une quantité d'actifs dit sous-jacents comme des actions ou devises par exemple, pendant une période et à un prix convenus à l'avance. Il existe deux types d'options : les options de type Call et Put. Dans notre étude nous nous concentrerons sur les options Call.

**Définition 5** (Option Call européenne). *Une Option Call européenne ou option vanille : donne le droit à son détenteur (mais pas l'obligation) d'acheter l'actif sous-jacent à :*

- Une date d'échéance  $T$
- Un prix d'exercice/Strike  $K$

Le prix de cette option est appelé la prime que l'on notera  $p$ . Elle est versée par l'acheteur au moment de la signature du contrat. De plus, lorsque l'acheteur détient l'action, il la revend immédiatement au prix du marché  $S_T$ . On comprend donc que l'acheteur a un bénéfice seulement si  $K < S_T - p$ . On achète alors une option Call en prévision d'une hausse de marché c'est-à-dire une hausse du prix du sous-jacent. Dans le cas où le prix monte bien au-dessus de  $(K + p)$  à l'échéance : la vente des actions au prix  $S_T$  à échéance provoquera un bénéfice de  $S_T - (K + p)$  par action. Si le prix ne monte pas au dessus de  $K$ , alors on n'exerce pas le droit d'acheter les actions et on perd  $p$  par action.

### 5.3.3 Modèle de Black-Scholes

Ce modèle permet d'estimer la prime de l'option sachant le coût de l'actif sous-jacent, le prix strike, l'échéance et les caractéristiques du cours de l'actif sous-jacent, en particulier la volatilité. Plusieurs hypothèses sont requises pour utiliser ce modèle.

Il existe au moins deux actifs :

- Un actif risqué (action) : le prix de cet actif suit un **mouvement Brownien** géométrique.
- Un actif non risqué : le taux d'intérêt  $r$  est constant, ne verse pas de dividende

Le marché suit les hypothèses suivantes :

- Pas d'arbitrage (pas de profit sans risque)
- Possibilité de prêter ou d'emprunter n'importe quel montant au même taux que l'actif non risqué
- Il est possible de vendre ou d'acheter n'importe quelle quantité de l'actif risqué
- Pas de coût de transaction

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses précédentes, le prix d'une option est solution de l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes :*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Où :

- $C = C(S, t)$  est le prix de l'option (Call en l'occurrence)
- $S$  est le prix courant de l'actif sous-jacent
- $\sigma$  est la volatilité du cours  $S$
- $r$  est le taux d'intérêt de l'actif sans risque

23. Il s'agit d'un cas particulier que processus d'Itô, qui écrit, pour un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t$$

24. On en déduit donc que, à  $t$  fixé,  $\frac{dS_t}{S_t} \simeq \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} \sim \mathcal{N}(\mu dt, \sigma^2 dt)$ , si l'on considère que  $\mu$  et  $\sigma$  ne dépendent pas de  $S_t$

L'établissement de cette équation aux dérivées partielles est donnée en [29]. Le mouvement Brownien intervient dans la modélisation du cours de l'actif sous-jacent, on utilise la volatilité du cours intervenant dans l'équation différentielle caractéristique du mouvement Brownien géométrique.

On peut alors montrer la proposition suivante.

**Proposition 2.** *La solution générale pour une option Call est*

$$C(S_0, t) = S_0 N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

où

- $N$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
- $d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- $d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Cette proposition sera réutilisée lors du calcul de la volatilité implicite, en particulier dans le paragraphe 6.2.

## 6 Estimation des paramètres boursiers

### 6.1 Volatilité, tendance

Comme cela est énoncé en proposition 1, la résolution de l'équation 11 dans l'hypothèse où la volatilité  $\sigma$  et la tendance  $\mu$  d'un actif sont considérées comme constantes fournit l'expression suivante pour  $S_t$  valeur du cours de l'actif correspondant à l'instant  $t$  :

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

On en déduit que sur un intervalle de temps  $[0, T]$  donné que l'on discrétise par une suite d'instants  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  données (pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand), on a pour  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\ln(S_{t_j}) - \ln(S_{t_{j-1}}) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta B \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t, \sigma^2 \Delta t\right)$$

L'histogramme des  $(\ln(S_{t_j}) - \ln(S_{t_{j-1}}))_{j \in \llbracket 2, n \rrbracket}$  pour un actif donné permet donc d'accéder aux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  d'un actif financier.

Cette étude numérique a été réalisée via le code R donné en Annexe 9.3. Pour l'action AMAZONE (AMZN), dont le cours a été extrait du site [25], l'histogramme obtenu et le cours de l'actif correspondant ont présenté en Figure 6.1

On peut reproduire cette démarche sur le nombreux autres actifs. En Figure 6.1, les histogrammes correspondants pour l'EUR / USD (taux de change) et pour SAFRAN sont représentées<sup>27</sup>.

Le calcul des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  se réalise donc en calculant la moyenne  $\tilde{\mu}$  et l'écart type  $\tilde{\sigma}$  et en écrivant :

$$\begin{cases} \tilde{\mu} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t \\ \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \Delta t \end{cases}$$

Soit :<sup>28</sup>

$$\begin{cases} \mu = \frac{2\tilde{\mu} + \tilde{\sigma}^2}{2\Delta t} \\ \sigma = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

Pour ce calcul, un paramètre important est la fenêtre choisie (ici, celle ci correspond au nombre de jours précédent la date du jour intervenant dans le calcul de l'écart type  $\tilde{\sigma}$ ) pour le calcul de la volatilité. En effet, même si les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  ont ici été traités comme des constantes dans le raisonnement, il faut garder à l'esprit qu'en réalité il s'agit de fonctions du temps. si la fenêtre choisie est trop grande, les paramètres calculés ne sera pas donc pas conforme à l'état actuel du marché. À l'inverse, si la fenêtre choisie est trop courte, nous ne retrouverons pas une distribution normale dans l'histogramme (cf Figure 25).

Focalisons nous sur l'action Amazone (AMZN). Le code R donné en Annexe 9.3 permet de calculer la volatilité historique de l'actif, sur une fenêtre de 20 jours par exemple. L'évolution de la volatilité historique obtenue sur les 60 jours précédant le Mercredi 6 Janvier 2021 et donnée en Figure 26

Ces valeurs historiques sont tout à fait conformes à celles que l'on peut retrouver sur des sites spécialisés (cf [27]), comme présenté en Figure 27.

27. Ces données boursières ont été importées via le site [26]

28. La volatilité est un paramètre positif

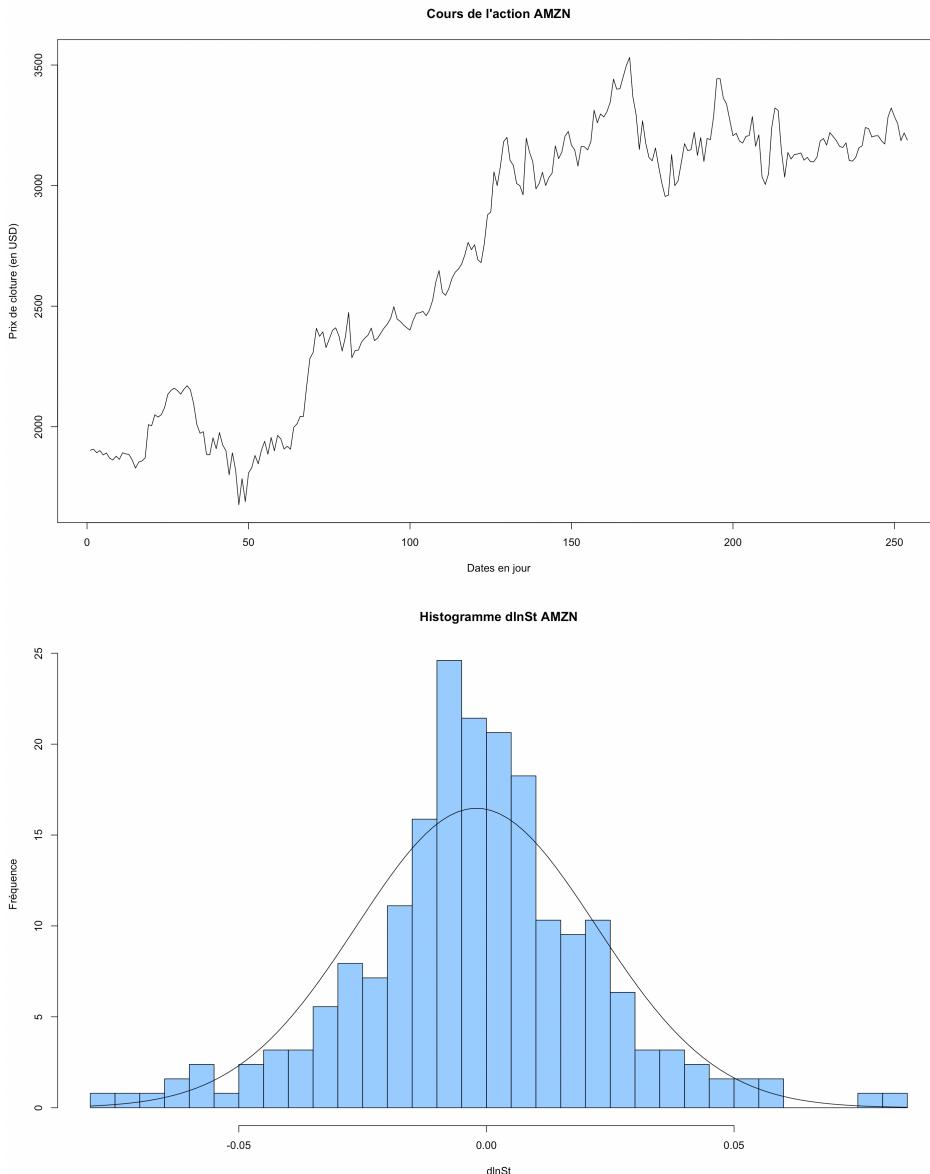


FIGURE 23 – En haut : Cours de l'action AMZN en USD<sup>26</sup>, en bas : Distribution des  $(\ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}))$  (en échelle journalière) pour l'action AMAZONE sur une fenêtre de 253 jours

## 6.2 La volatilité implicite

### 6.2.1 La théorie

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. Il faut garder en tête qu'en toute généralité on ne peut pas faire l'hypothèse d'une volatilité  $\sigma$  constante. On note  $\sigma_{\text{impl}}(K, T)$  la volatilité implicite. On vient de voir que le prix Black-Scholes et celui d'un produit dérivé vérifient :

$$C_{BS}(S, t, K, T; \sigma_{\text{impl}}(K, T)) = C_{\text{Marché}}(t, K, T)$$

Il est important de garder à l'esprit que  $\sigma \rightarrow C_{BS}$  : est croissante ; les prix des options augmentent si la volatilité augmente. De même  $\sigma_{\text{impl}}(K, T)$  dépend de  $K$  et de  $T - t$ , elle n'est pas constante. C'est le smile de volatilité. On prend, classiquement :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S, t)dt + \sigma(S, t)dB_t$$

On a toujours une EDP de type Black-Scholes pour les call :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma(S, t)^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} = rC, \quad t < T$$

avec condition finale  $C(S, T) = \max(S - K, 0)$  et solution  $C(S, t; K, T)$

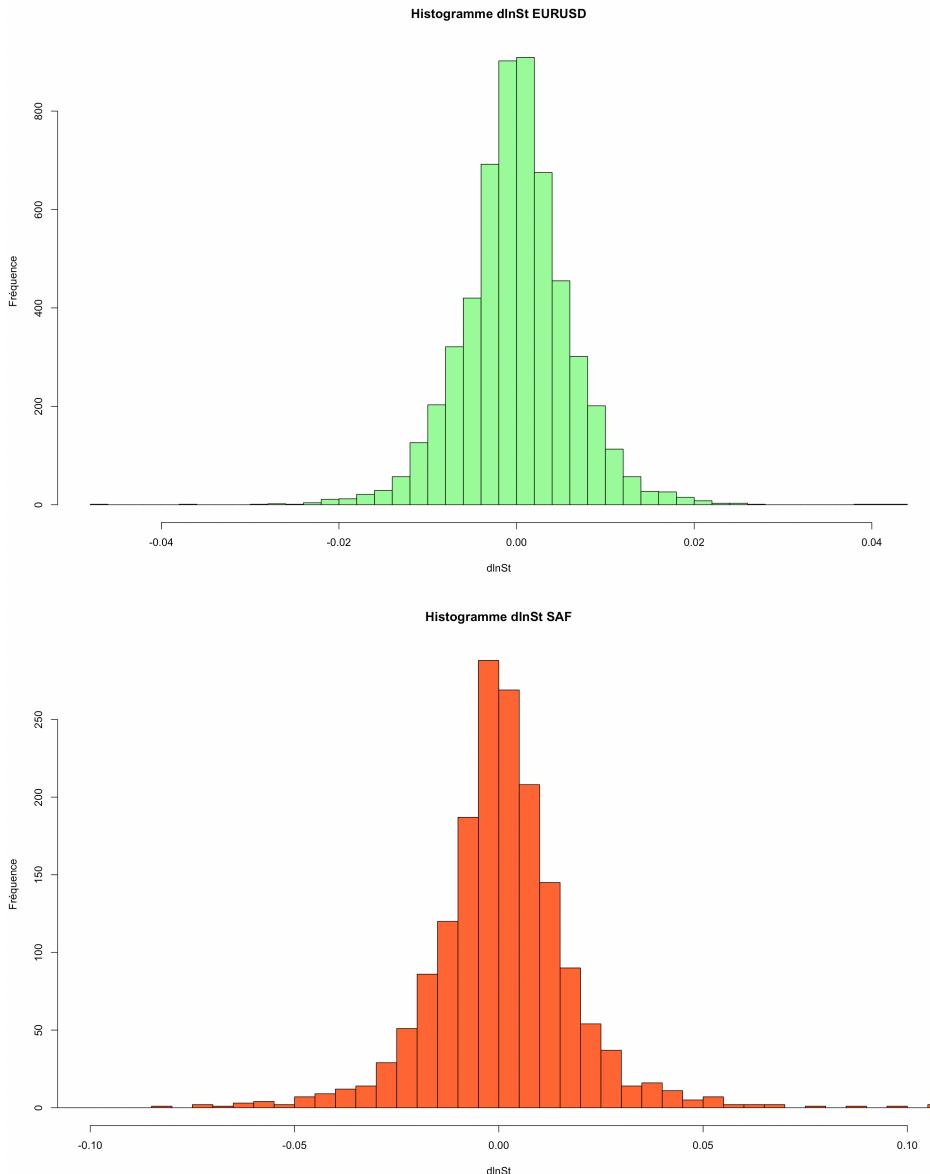


FIGURE 24 – Histogrammes correspondants pour l'EURUSD (en haut) et pour SAFRAN (en bas)

### 6.2.2 Une approche simple, un algorithme itératif dichotomique

Calculer explicitement la volatilité implicite est fastidieux en calcul. Nous avons choisi de l'approximer avec une précision aussi grande que possible en utilisant l'algorithme qui sera décrit ci-dessous. Dans toute la suite, on notera  $C$  étant la valeur de l'option Call sur le marché).

Cette méthode consiste à calculer la volatilité implicite, à partir de la valeur de l'option sur le marché, en se basant sur la formule de Black & Scholes. A partir d'un intervalle borné de la volatilité, on crée deux suites de volatilité adjacentes qui convergent vers la valeur réelle de la volatilité. On calcule  $C_1$  pour une volatilité maximale  $\sigma_{\text{Max}}$  et une volatilité minimale  $\sigma_{\text{min}}$ . Ces deux bornes de la volatilité sont initialisées par une valeur proche de 0.5, par exemple, pour  $\sigma_{\text{Max}}$  et proche de 0 pour  $\sigma_{\text{min}}$ . La valeur de l'option  $C_t(\sigma)$  est désignée, respectivement, par  $C_{\text{Max}} > C$  pour la valeur maximale de la volatilité  $\sigma_{\text{Max}}$  et par  $C_{\text{min}} < C$  pour la valeur minimale de la volatilité  $\sigma_{\text{min}}$ .<sup>29</sup> Elle est calculée par la formule de Black & Scholes, ou par n'importe quel autre modèle paramétrique.

Puis, on calcule  $C_1(\sigma)$ , pour chaque valeur de la moyenne des bornes de l'intervalle de la volatilité :

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{Max}} + \sigma_{\text{min}}}{2}$$

$$\text{Si } C_t(\sigma) < C \text{ alors } C_{\text{min}} = C_t(\sigma) \text{ et } \sigma_{\text{min}} = \sigma$$

<sup>29</sup>. Ceci résulte de la croissance de  $\sigma \rightarrow C(\sigma)$

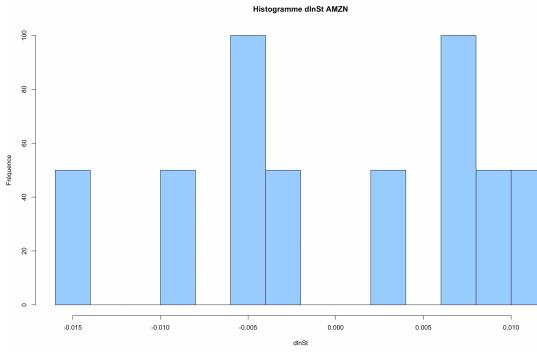


FIGURE 25 – Histogramme obtenu pour le cours d'AMZN pour une fenêtre de 10 jours

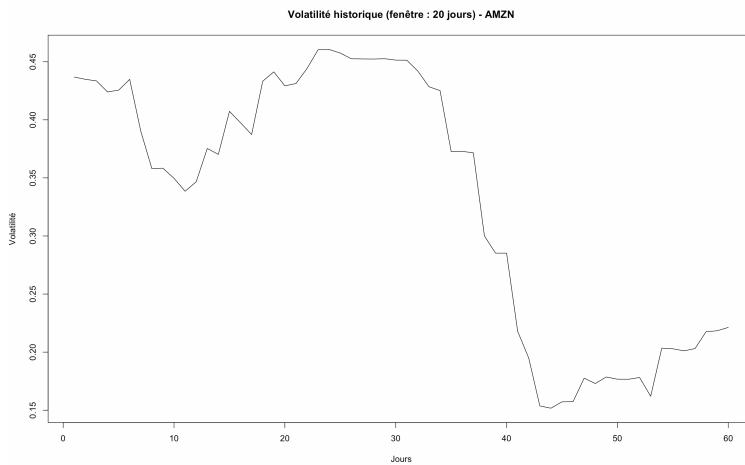


FIGURE 26 – Evolution de la Volatilité historique d'AMZN sur une période de 20 jours évaluée à l'aide du modèle précédent



FIGURE 27 – Évolution temporelle de la volatilité d'AMZN sur une période de 20 jours donnée par le site [27]

— Si  $C_t(\sigma) > C$  alors  $C_{\text{Max}} = C_t(\sigma)$  et  $\sigma_{\text{Max}} = \sigma$

Ce calcul itératif s'arrête quand l'écart  $\varepsilon_t = |C_t(\sigma) - C|$  devient *leq* à une certaine valeur  $\varepsilon$  qu'on se donne et qui est d'un ordre inférieur à  $10^{-7}$ , par exemple.

La finalité de notre algorithme va être double :

- Calculer le prix d'une option d'achat en utilisant la formule donnée en proposition 6.2.2.
- Connaissant le prix d'une option d'achat sur le marché, d'en déduire la valeur de la volatilité (il s'agit alors de la volatilité *implicite*).

D'où notre algorithme :

```
import numpy as np
import scipy.stats as si
import sympy as sy
from sympy.stats import Normal, cdf
from sympy import init_printing
init_printing()

##calcul du prix d'une option call par Black-Scholes

def euro_vanilla_call(S, K, T, r, sigma):

    #S: prix comptant
    #K: prix d'exercice
    #T: Temps restant avant l'expiration de l'option, en pourcentage d'une année
    #r: taux d'intérêt
    #sigma: volatilité implicite

    d1 = (np.log(S / K) + (r + 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))
    d2 = (np.log(S / K) + (r - 0.5 * sigma ** 2) * T) / (sigma * np.sqrt(T))

    call = (S * si.norm.cdf(d1, 0.0, 1.0) - K * np.exp(-r * T) * si.norm.cdf(d2, 0.0, 1.0))

    return call

##la fonction précision calcul la volatilité implicite avec une précision eps

def precision(eps,C,S,T,K,r):
    #mêmes paramètres sauf que ici eps correspond à la précision et C est le prix réel de l'option
    sigma_min = 0
    sigma_max=1
    sigma = 0.5
    C_BS = euro_vanilla_call(S, K, T, r, sigma)
    n=0
    while abs(C_BS-C)>eps and n<1000:
        sigma = (sigma_min +sigma_max)/2
        C_BS = euro_vanilla_call(S, K, T, r, sigma)
        if C_BS<C:
            sigma_min = sigma
        if C_BS>C:
            sigma_max=sigma
        n+=1
    return (sigma)
```

Un exemple de plateforme dans laquelle il est possible d'acheter des options est donné en Figure 6.2.2. L'objectif ici n'est pas bien sûr de décrire tous les éléments de l'interface, mais simplement quelques variables clés : En première colonne, plusieurs prix strikes  $K$  d'options sont proposés. Les colonnes *Bid* et *Ask* correspondent, en français à l'offre et la demande.<sup>30</sup> Du côté acheteur, *Ask* correspond au prix d'achat de l'option et *Bid* au prix de vente. La volatilité implicite  $\sigma$  est ici donnée et vaut 34.6 pourcents. Enfin, les options expirent dans 2 jours ( $T = \frac{2}{252}$ ). Encore une fois, on exprime  $T$  en année boursière (252 jours)). Enfin, le cours de AMZN au moment correspondant vaut  $S_t = 3138.38$ , et le taux d'intérêt  $r$  est

<sup>30</sup> 30. Une transaction entre un acheteur et un vendeur d'options ne peut avoir lieu que si le prix correspondant se situe entre ces deux valeurs.

contant pendant cette période et vaut 1 pourcent. Considérons alors la première ligne de l'image, dans laquelle  $K = 3090$ ,  $C = 63.6 \$$ .

<b>Amazon.com Inc (AMZN)</b>													
3,138.38 -80.13 (-2.49%) 01/06/21 [NASDAQ]													
3,146.50 x 1 3,148.00 x 8 POST-MARKET 3,148.00 +9.62 (+0.31%) 18:44 ET													
OPTIONS PRICES for Wed, Jan 6th, 2021													
Alerts ⓘ Watch ⭐ Help ⓘ													
Make this my default view													
Expiration:	2021-01-08 (w)	Near-the-Money	Stacked									↳ download	
2 Days to expiration on 2021-01-08 Implied Volatility: 34.60%													
<b>Calls</b>													
Strike	Moneyness	Bid	Midpoint	Ask	Last	Change	%Chg	Volume	Open Int	Vol/OI	IV	Last Trade	Links
3,090.00	+1.54%	61.85	62.73	63.60	62.92	-72.35	-53.49%	65	117	0.56	35.93%	01/06/21 ⓘ	
3,095.00	+1.38%	58.10	59.00	59.90	58.40	-62.90	-51.85%	110	47	2.34	34.69%	01/06/21 ⓘ	
3,100.00	+1.22%	54.60	55.43	56.25	54.70	-74.75	-57.74%	775	891	0.87	34.40%	01/06/21 ⓘ	
3,105.00	+1.06%	51.15	51.93	52.70	51.97	-70.93	-57.71%	172	47	3.66	35.14%	01/06/21 ⓘ	
3,110.00	+0.90%	47.80	48.55	49.30	47.75	-70.65	-59.67%	234	98	2.39	33.98%	01/06/21 ⓘ	
3,115.00	+0.74%	44.55	45.28	46.00	44.83	-63.27	-58.53%	124	46	2.70	34.22%	01/06/21 ⓘ	
3,120.00	+0.59%	41.50	42.20	42.90	41.70	-56.30	-57.45%	380	74	5.14	34.08%	01/06/21 ⓘ	
3,125.00	+0.43%	38.50	39.18	39.85	39.30	-65.35	-62.45%	235	100	2.35	34.60%	01/06/21 ⓘ	
3,130.00	+0.27%	35.70	36.35	37.00	36.00	-59.60	-62.34%	465	97	4.79	34.01%	01/06/21 ⓘ	
3,135.00	+0.11%	33.00	33.63	34.25	33.50	-61.35	-64.68%	402	38	10.58	34.15%	01/06/21 ⓘ	
3,140.00	-0.05%	30.45	31.03	31.60	30.50	-61.80	-66.96%	804	165	4.87	33.61%	01/06/21 ⓘ	

FIGURE 28 – Prix de quelques options d'achat sur l'actif sous-jacent AMZN sur la plateforme [28]

```
##application :
```

```
#####
#####
```

On va calculer le prix d'une option Call et sa volatilité implicite.

On a choisi une option sur l'entreprise Amazon.

On a utilisé les données sur le site web : <https://www.barchart.com/stocks/quotes/AMZN/options>  
St = 3138.38

T= 2/252 attention il ne s'agit pas le temps exact, d'où l'erreur

sigma\_impl = 36.38%

K=3090

C=64.15

r=0.01

```
#####
#####
```

#on recalcule le prix :

```
prix = euro_vanilla_call(3138.38, 3090, 0.007, 0.01, 0.3460)
```

Le prix obtenu est

$$C = 65.36 \$$$

```
#on recalcule la volatilité implicite avec les paramètres donnés par la source ;
vol_impl = precision(0.0001, 62.73, 3138, 0.007, 3090, 0.01)
```

On trouve une volatilité

$$\hat{\sigma} = 0.32$$

On note alors une légère erreur par rapport à la volatilité implicite calculée sur la plateforme. Ceci peut avoir plusieurs origines : la date  $T$  n'est pas parfaitement exacte ici, puisque celle-ci est donnée en jours, le prix de l'option (62.73 \$) ne correspond pas exactement à celui donné par la formule d'Itô (65.36 \$). Les résultats restent très satisfaisants en première approximation.

## 7 Conclusion

Ce Projet nous a permis d'étudier de façon complète le mouvement Brownien. Après une première étude physique d'après la théorie de Langevin puis par une caractérisation mathématique, nous avons pu appréhender le mouvement Brownien dans sa forme standard et géométrique. L'expérience effectuée en laboratoire a permis d'observer le mouvement Brownien et d'en déduire une estimation du nombre d'Avogadro. Nous avons pu utiliser le mouvement Brownien dans la modélisation du cours d'un actif

financier. A partir de cette modélisation découle le modèle de Black-Scholes qui permet l'évaluation et la couverture des options. Ce modèle permet de calculer la volatilité historique et implicite du cours des actifs. L'étape suivante pour poursuivre le projet serait alors d'utiliser ces paramètres calculés pour prédire l'évolution d'actifs ou d'actifs dérivés via la mise en place d'indicateurs techniques par exemple.

## 8 Notice d'utilisation

Les codes correspondant à ce projet ont été réalisés en Python et R Studio. Ainsi, fichiers livrables sont à la disposition du lecteur :

- Le fichier `coord-tracker.xlsx` contient les coordonnées suivant X et Y des 25 particules pointées à l'aide du logiciel Particle tracker. Le fichier est associé au code `analyse_experience.R` dans lequel nous détaillons le calcul du nombre d'Avogadro, la vérification des hypothèses du mouvement Brownien, et les simulations réalisées. Nous pouvons également, sur demande, fournir la vidéo du microscope ayant permis d'obtenir le fichier `coord-tracker.xlsx`. Ces documents sont placés dans le dossier `Experience_historique`.
- Le code `Prediction.R` (Annexe 9.4) qui a permis de réaliser la simulation donnée en Figure 4.7 situé dans le dossier `Simulation`.
- Le code `Volatilite_hist.R` (Annexe 9.3), qui moyennant le cours d'un actif donné, permet d'afficher l'évolution de la volatilité temporelle sur une fenêtre au choix. On pourra tester le code à l'aide du cours `AMZN.csv` fourni également. A titre indicatif, nous fournissons également le cours d'autres actifs dans le dossier `Finance`.
- Le code `Volatilite_impl.py` (dossier `Finance`) donnant une stratégie de calcul de la volatilité implicite d'un sous jacent. Le cas d'application choisi est une option d'achat sur `AMZN`.

## 9 Annexes

### 9.1 Annexe 1 : Établissement de l'expression du nombre d'Avogadro

Si l'on note :

$$u(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \|\vec{r}(t)\|^2 \rangle$$

L'équation 1 se réécrit en :

$$m \frac{du(t)}{dt} = -\gamma u(t) + m \langle \|\vec{v}(t)\|^2 \rangle$$

En utilisant à nouveau le théorème d'équirépartition de l'énergie, on trouve :

$$m \frac{du(t)}{dt} + \gamma u(t) = dk_B T$$

où  $k_B = \frac{R}{N_A}$  et  $d$  est le nombre de dimensions. En résolvant cette ED du premier ordre à coefficients constants, on trouve :

$$u(t) = \frac{dRT}{\gamma N_A} + \lambda e^{-t/\tau}$$

où

$$\tau = \frac{m}{\gamma} = \frac{m}{6\pi\mu a} \simeq 10^{-8} s \quad (12)$$

est le temps de relaxation.

Dans un régime dans lequel  $t \gg \tau$  on trouve les expressions 4 et 5 données.

### 9.2 Annexe 2 : Calcul d'Itô et équation de la chaleur

En effet, l'équation précédente nous indique que pour toute fonction borélienne  $f$  bornée on a :

$$E(f(B_T) | B_t = x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) q(T-t, x, y) dy$$

Il est intéressant de remarquer le pouvoir prédictif d'une telle intégrale.

Si l'on note  $p(t, x; f)$  la fonction

$$\begin{aligned} p(t, x; f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) q(t, x, y) dy = E(f(B_t + x)) \\ &= E(f(B_{t+s}) | B_s = x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) g(t, y) dy \end{aligned}$$

cette fonction vérifie (utiliser l'équation backward et le théorème de dérivation sous le signe intégral)

$$\begin{cases} p(0, x; f) = f(x) \\ -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Pour calculer  $E(f(B_T))$ , il suffit de résoudre l'équation aux dérivées partielles 13 et de remarquer que  $E(f(B_T)) = p(T, 0; f)$ . On peut écrire, en utilisant  $E(f(B_t + x)) = p(t, x; f)$

$$E(f(B_T + x)) - f(x) = p(T, x; f) - p(0, x; f) = \int_0^T \frac{\partial p}{\partial t}(s, x; f) ds = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(s, x; f) ds$$

On peut alors montrer facilement par le calcul :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x; f) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x+y)g(t, y)dy = u(t, x; f'') = E(f''(B_t + x))$$

Le calcul d'Itô, célèbre en finance permet de généraliser ces notions et de résoudre l'équation de Black-Scholes donnée en 1.

### 9.3 Annexe 3 : Code R, calcul de la volatilité historique et / ou de la tendance sur un marché

```
data<-read.csv(file='/Users/victorletzelter/Downloads/AMZN-2.csv',header=TRUE)

evolution_volatilite<-function(data,T=20,D=60){
  #data : contient les données
  #T : nombre de jours de la fenêtre (cf fonction vol)
  #D : le nombre de dates que l'on souhaite faire apparaître sur le graphique

  TS<-ts(data)
  TSD<-as.data.frame(TS)

  vol<-function(t,T=20){

    #t : date à laquelle la volatilité est calculée
    #T : nombre de jours de la fenêtre

    plot(TSD>Date,TSD$Close,'l',main="Cours de l'action AMZN",xlab="Dates en jour",ylab="Prix de cloture")
    Val<-TSD$Close
    #Val<-rev(Val) : On doit inverser l'ordre de la série temporelles si les données les plus récentes sont au début
    Val<-Val[(length(Val)-T-D+t):(length(Val)-D+t)]
    dln<-diff(log(Val))

    #hist(dln,prob=T,nclass=10,main="Histogramme dlnSt AMZN",col="#99CCFF",xlab="dlnSt",ylab="Fréquence")
    #curve(dnorm(x, mean=mean(dln),sd=sqrt(var(dln))),add=T)

    #Estimation des paramètres

    dt=1/252 #On en prend pas dt=1 mais dt=1/252, il s'agit d'une convention : on exprime le temps en jours
    variance<-var(dln)
    moy<-mean(dln)
    sigma=sqrt(variance/dt)
    mu<-(moy/dt)+(sigma^2)/2
    return(sigma)
  }

  T<-seq(1,D,1)
  y<-rep(0,D)
  for (i in 1:D){
    y[i]=vol(i)
  }

  plot(T,y,'l',main='Volatilité historique (fenêtre : T jours) - AMZN',xlab='Jours',ylab='Volatilité')
}
```

```

}

evolution_volatile(data)x

9.4 Annexe 4 : prédition d'un Brownien Géométrique par l'équation de la
chaleur

### Simulation d'un mt Brownien ### discréétisation du temps

Bo=0
t=seq(0,10000)
### Simulation des accroissements
B.acc = rnorm(10001)
### Simulation d'une trajectoire > on a un MB B.sim
B.sim = Bo+cumsum(B.acc)

#on veut un MB géométrique maintenant :
sigma = 0.001
mu=0.0001

#MB simulé, on peut en faire plusieurs comme celui ci
S=exp((mu-sigma^2/2)*t+sigma*B.sim)

#esperance - prédition :
pred=exp(mu*t)

plot(S,type="l",xlab="En rouge la prédition en noir une trajectoire",ylab="Axe des ordonnées")
lines(pred,col="red")

```

## 10 Sources

### Références

- [1] <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01283567/document>
- [2] <https://monday.com/lang/fr/>
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=R0BD1YP7Esw>
- [4] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement\\_brownien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_brownien)
- [5] [https://www.youtube.com/watch?v=4-Tas6Uw\\_0Q](https://www.youtube.com/watch?v=4-Tas6Uw_0Q)
- [6] [https://www.researchgate.net/publication/283144550\\_Application\\_of\\_Markov\\_Chains\\_and\\_Brownian\\_motion\\_models\\_on\\_insect\\_ecology](https://www.researchgate.net/publication/283144550_Application_of_Markov_Chains_and_Brownian_motion_models_on_insect_ecology)
- [7] [https://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/ancien\\_site/Tp-phys/Term/TP-fluid/visco-eau.htm](https://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/ancien_site/Tp-phys/Term/TP-fluid/visco-eau.htm)
- [8] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Langevin](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Langevin)
- [9] <https://images.math.cnrs.fr/Qu-est-ce-que-la-theorie-ergodique.html>
- [10] [http://perso.univ-lemans.fr/~apopier/enseignement/M1\\_Maths\\_EDP/slides\\_intro.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~apopier/enseignement/M1_Maths_EDP/slides_intro.pdf)
- [11] [http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/transp\\_MMCS\\_2011.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/exposes/transp_MMCS_2011.pdf)
- [12] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Langevin](https://fr.wikipedia.org/wiki/Paul_Langevin)
- [13] <http://physics.gu.se/~frtbm/joomla/media/mydocs/LennartSjogren/kap6.pdf>
- [14] [https://www.abcbourse.com/apprendre/3\\_le\\_monep1.html](https://www.abcbourse.com/apprendre/3_le_monep1.html)
- [15] [http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours\\_Agreg.pdf](http://www.fast.u-psud.fr/~rabaud/NotesCours_Agreg.pdf)
- [16] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation\\_de\\_Langevin](https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_de_Langevin)
- [17] [https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein\\_relation\\_\(kinetic\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_relation_(kinetic_theory))
- [18] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement\\_brownien](https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_brownien)
- [19] <https://www.lptmc.jussieu.fr/user/sator/old/Chapitre2.pdf>
- [20] [https://en.wikipedia.org/wiki/Fokker\textbackslash Planck\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Fokker\textbackslash Planck_equation)

- [21] <https://www.ks.uiuc.edu/Services/Class/PHYS498/LectureNotes/chp4.pdf>
- [22] [https://fr.qwe.wiki/wiki/Euler\T1\textendashMaruyama\\_method](https://fr.qwe.wiki/wiki/Euler\T1\textendashMaruyama_method)
- [23] [http://www.silvere-bonnabel.com/pdf/Poly\\_processus\\_12.pdf](http://www.silvere-bonnabel.com/pdf/Poly_processus_12.pdf)
- [24] <https://www.lynxbroker.fr/portail-bourse/articles/cours-action-boeing/>
- [25] <https://finance.yahoo.com>
- [26] <https://www.quandl.com>
- [27] <https://www.alphaqquery.com/stock/AMZN/volatility-option-statistics/20-day/historical-volatility>
- [28] <https://www.barchart.com/stocks/quotes/AMZN/options>
- [29] [https://en.wikipedia.org/wiki/Black\textendashScholes\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Black\textendashScholes_model)